# Bric à Bacs.

## Sujets de bac de 1960 à 1999.

Jean-éric RICHARD
3 septembre 2022

Ce travail initié il y a plus de dix années déjà, évolue au gré du temps.
C'est un travail long et le nombre de pages, donc de sujets, augmente quand j'en ai l'envie et le temps.

Pour toutes et tous,

Avec mes remerciements

pour vos apports, particulièrement à :
Cidrolin et Aléa, pour les scans, et

Ev pour avoir mis sous tex certains sujets et tout particulièrement l'année 1977, un GRAND merci .

Holyday a traité avec brio et abnégation l'année 1976 !
Pour Xavier, a participé l'année 1970.
Paul s'est attaché à faire progresser l'année 1967-68.
Quant à C.L, le prêt de certaines annales de 1965 à 1992 a dynamisé et diversifié le contenu.
Pour l'année 1966, je suis redevable à Christian.
Cidrolin, toujours disponible, m'a permis de compléter l'année 1967 et d'autres sujets.
Enfin Gérald, pour le prêt des annales 1983, 1987 et 1988.
Pour suivre la progression de ce projet, c'est ici : Sujets de bacs

## Table des matières

Retour page 1

Retour page 1

# CHAPITRE I

# 1934.

*Remarque I.1.* Ici je dispose de moins d'indications sur le type d'épreuve et la série…

## Sommaire



## I. Korça, bac première partie.

Ex. 1. ./1934/korca/exo-1/texte.tex

On donne un triangle ABH rectangle en A, dans lequel : AB = $3a$, AC = $4a$.

1. Étudier comment varie les sommes des carrés des distances d'un point $M$ aux deux côtés de l'angle droit, quand ce point parcourt l'hypoténuse.
2. Représenter graphiquement cette variation.

## II. Paris, bac première partie.

Ex. 2. ./1934/paris/exo-1/texte.tex

1. Ordonner, par rapport à $x$ et $y$, l'expression :

$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$$

2. $x$ et $y$ étant des inconnues, $a$, $b$, $h$, $K$ des constantes non nulles ; on connaît la valeur $h$ de $ax+by$, la valeur $K^2$ de $x^2+y^2$, soit :

$$ax+by=h \ ; \qquad x^2+y^2=K^2 \ ;$$

en déduire la valeur de l'expression $bx-ay$, puis celles de $x$ et de $y$. Discuter. Trouver le minimum de l'expression $x^2+y^2$, $x$ et $y$ variant de façon que $ax+by$ reste constante, et donner les valeur de $x$ et de $y$ pour lesquelles ce minimum est atteint.

3. Soit le système d'équations en $x$, $y$, $z$ :

$$\begin{cases} ax+by+cz=h \ ; \\ x^2+y^2+z^2=K^2 \ ; \end{cases}$$

$a$, $b$, $c$, $h$, $K$ étant des constantes non nulles. Choisissant arbitrairement une valeur pour $z$, peut-on toujours trouver des valeurs de $x$ et de $y$ vérifiant ce système ?

Trouver le minimum de $x^2+y^2+z^2$, $x$, $y$, $z$ variant de façon que $ax+by+cz$ reste constante, et donner les valeurs de $x$, $y$, $z$ pour lesquelles ce minimum est atteint.

## III. Pondichery, bac première partie.

Ex. 3. ./1934/pondichery/exo-1/texte.tex

Les racines d'une équation du second degré vérifient les relations :

$$x' + x'' + 2xx' = 0$$
$$m(x' + x'') - x'x'' = 3m + 4$$

1. Former cette équation.
2. Étudier suivant les valeurs de $m$, le signe de ses racines.
3. Déterminer comment il faut choisir $m$ pour que l'équation ait une seule racine, comprise entre -1 et 4.

Retour page 1

Chapitre II

# 1960.

## Sommaire



## I. France février 1960, sciences expérimentales

**Ex. 4.** ./1960/francescexpfev/exo-1/texte.tex

Soit une progression géométrique de raison $x$, dont tous les termes sont positifs. On considère cinq termes consécutifs de cette progression, que l'on désigne par

$$u_1,\ u_2,\ u_3 = a,\ u_4,\ u_5.$$

1. Exprimer en fonction de $a$ et de $x$ les sommes

$$S = u_1 + u_5,\ s = u_2 + u_4$$

et le carré $s^2$ de $s$.
Montrer que

$$s^2 = aS + 2a^2.$$

2. Calculer $a$ et $x$, connaissant $s = 20$ et $S = \dfrac{164}{3}$.

**Ex. 5.** ./1960/francescexpfev/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $y$ de la variable $x$ :

$$y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 1}.$$

1. Calculer la dérivée de $y$ par rapport à $x$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction $y$. (La construction du graphique n'est pas demandée.)

## II. France février 1960, Mathématiques

**Ex. 6.** ./1960/francemathfev/exo-1/texte.tex

(Géométrie descriptive.)
Un plan P quelconque est déterminé par une horizontale et une frontale. Un point $(a,\ a')$ est situé hors du plan. Déterminer la distance de ce point au plan.

**Ex. 7.** ./1960/francemathfev/exo-2/texte.tex

Établir les formule sde transformation en produits de la somme et de la différence de deux sinus et deux cosinus.
*Application :* Résoudre l'équation

$$\cos x + \cos 3x = \sin x + \sin 5x.$$

Placer sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs correspondant aux solutions trouvées.

**Ex. 8.** ./1960/francemathfev/exo-3/texte.tex

Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et $R$ désignant une longueur donnée, on donne les points $A$, $B$, de $x'Ox$ d'abscisses respectives $\overline{OA} = -R$, $\overline{OB} = R$, et le point $C$ de $Oy$ d'ordonnée $\overline{OC} = R$ ; on désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $C$ et de rayon $R$.
Un point variable $M$ décrit le cercle $(\mathscr{C})$. Sa position est donnée par l'angle de vecteurs

$$(\overrightarrow{CO},\ \overrightarrow{CM}) = \varphi,$$

l'orientation du plan est choisie de manière que $(Ox,\ Oy) = +\frac{\pi}{2}$. perpendiculaire abaissé de $M$ sur $x'Ox$.

1. a) Calculer en fonction de $\varphi$ les quantités $\overline{OH}$, $\overline{HM}$, et en déduire l'expression de
$$y = \frac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2}.$$
   b)
   c) On pose $x = \tan\frac{\varphi}{2}$. Exprimer $y$ au moyen de $x$.
   d) Étudier les variations de la fonction
$$y = \frac{4x}{5x^2+1},$$
   quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et construire la courbe représentative $(\Gamma)$. (On pourra prendre comme unité de longueur, sur chacun des axes : 1 unité = 5 centimètres.)
2. Exprimer $y$ au moyen de $\frac{MA}{MB} = \lambda$.
   Utiliser la courbe $(\Gamma)$ pour discuter le nombre des points $M$ de $(\mathscr{C})$ tels que $\frac{MA}{MB} = \lambda$, où $\lambda$ désigne un nombre positif donné.
3. a) On suppose que $\lambda$ est un nombre positif donné, différent de l'unité, et l'on marque les points $I$ et $J$ de $x'Ox$ respectivement définis par
$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = -\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \lambda.$$
   Soit L le cercle de diamètre $IJ$. Montrer que la puissance d'un point fixe quelconque de $y'y$ par rapport à L est indépendante de $\lambda$ et exprimer cette puissance au moyen de l'ordonnée $y$ de ce point.
   b) Utiliser le cercle L pour construire les points $M$ de $(\mathscr{C})$ satisfaisant à $\frac{MA}{MB} = \lambda$.
   Dans le cas où ce problème admet deux solutions, $M_1$ et $M_2$, montrer que la droite $M_1M_2$ passe par un point fixe $S$ indépendant de $\lambda$, que l'on déterminera exactement.
   Quel est le lieu, lorsque $\lambda$ varie, du point d'intersection des tangentes en $M_1$ et $M_2$ au cercle $(\mathscr{C})$ ? retrouver les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles le problème étudié au 2 admet une solution double.

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

## III. France février 1960, Mathématiques & technique

**Ex. 9.** *I- 1er sujet* ./1960/francemathtech/exo-1/texte.tex

(Géométrie descriptive.)
Un plan P quelconque est déterminé par une horizontale et une frontale. Un point $(a,\ a')$ est situé hors du plan.
Déterminer la distance de ce point au plan P.

**Ex. 10.** *I- 2e sujet* ./1960/francemathtech/exo-2/texte.tex

Établir les formules de transformation en produits de la somme et de la différence de deux sinus et deux cosinus.
*Application :* Simplifier les expressions

$$\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x} \quad \text{et} \quad \frac{1+\cos 4x}{\sin 3x - \sin x}$$

pour les valeurs de $x$ n'annulant pas le dénominateur.



Retour page 1

Ex. 11. ——— *I- 3e sujet* *./1960/francemathtech/exo-3/texte.tex*

Division d'un polynôme par $x-a$.
*Application :* On donne la fraction

$$y = \frac{3x^3-7x+10}{x^3+x^2+4}.$$

En remarquant que le numérateur et le dénominateur de cette fraction s'annulent simultanément pour $x=-2$, simplifier cette fraction.

Ex. 12. ——— *II-* *./1960/francemathtech/exo-4/texte.tex*

Même sujet que le problème de la série mathématique.

## IV. France février 1960, Mathématiques & économie

Ex. 13. ——— *I- 1er sujet* *./1960/francematheco/exo-1/texte.tex*

Dérivée d'un produit de deux fonctions de la même variable, et dérivables.
*Application :* Dérivée de $y=\cos x \times \sin x$.

Ex. 14. ——— *I- 2e sujet* *./1960/francematheco/exo-2/texte.tex*

Énoncer les résultats connus relatifs aux probabilités simples, totales et composées.
*Application :* Une urne A contient 6 boules blanches et 5 noires ; une urne B contient 9 boules blanches et 4 noires.
On tire une boule de chacune ; quelle est la probabilité qu'on obtienne deux boules de la même couleur ?
Même question pour deux boules de couleurs différentes ?

Ex. 15. ——— *I- 3e sujet* *./1960/francematheco/exo-3/texte.tex*

Rappeler, sans démonstration, les formules donnant les expressions de

$$\cos(a+b),\ \cos(a-b),\ \sin(a+b),\ \sin(a-b).$$

## V. France juin 1960, série philosophie

**Problème 1** *./1960/francejuinphilo/pb/texte*

On donne la fonction $y$ de la variable $x$

$$y=(x-1)(x-2)(x+3).$$

**1.** Pour quelles valeurs de $x$ cette fonction est-elle définie ? Calculer la dérivée de $y$ par rapport à $x$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $y$. Représentation graphique (on prendra deux axes de coordonnées rectangulaires $Ox$ et $Oy$ avec, comme unités, 2 cm en $Ox$ et 1 cm sur $Oy$.)
Déterminer les points d'intersection du graphique avec les axes.
Déterminer à $0{,}1$ près, les coordonnées des points du graphique où la tangente est parallèle à $Ox$.

**3.** Déterminer le primitive de $y$ qui s'annule pour $x=2$.

## VI. France juin 1960, sciences expérimentales

Ex. 16. ——— *./1960/francejuinscexp/exo-1/texte.tex*

Trouver tous les couples de deux nombres entiers dont la somme est égale à 360 et le plus grand commun diviseur égal à 30.



Retour page 1

1

Retour page 1

# Chapitre III

# 1961.

## Sommaire



## I. France juin 1961, série mathématiques

Ex. 17. ./1961/francejuinmath/exo-1/texte.tex

Cinq nombres entiers positifs $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, dans cet ordre, forment une progression géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec $a$.
Déterminer ces cinq nombres de façon que
$$6a^2 = e - b.$$

### Problème 2

./1961/francejuinmath/pb/texte

1. $u$ désignant la mesure, en radians, d'un angle et $v$ étant égal à $\dfrac{\pi}{4} - u$, montrer que les expressions de $\sin u + \cos u$ et $\sin u \cos u$ peuvent s'exprimer en fonction de $\cos v = x$.
   En déduire l'expression de
   $$\frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2}\sin u \cos u}$$
   en fonction de $x$.
2. Étudier la variation de la fonction
   $$y = \frac{2x}{2x^2 - 1},$$
   quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et construire la courbe représentative, (C), rapportée à un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.
   On précisera, en particulier, la tangente à l'origine.
   On prendra la même unité de longueur pour les deux axes, égale à 2 cm.
3. Une parallèle à $x'Ox$ d'ordonnée variable $m$, coupe la courbe (C) en général, en deux points $M$ et $M'$, et la droite $y'Oy$ en un point, $H$.
   Évaluer la puissance de $H$ par rapport au cercle de diamètre $MM'$.
   Montrer que ce cercle découpe sur $y'Oy$ un segment de longueur constante quand $m$ varie.
   Calculer en fonction de $m$ les abscisses $X_1$ de centre $I$ de ce cercle et $X_2$ du pôle $J$ de la droite $y'Oy$ par rapport à ce cercle.
   Évaluer ensuite $m$ en fonction de $X_1$ d'une part et en fonction de $X_2$ d'autre part.
   Construire sur le graphique précédent les lieux des points $I$ et $J$ quand $m$ varie.
4. On se propose d'utiliser la courbe (C) pour résoudre l'équation suivante en $u$ :
   $$\sin u + \cos u = m\sqrt{2}\sin u \cos u \qquad (1)$$
   et l'on se borne aux solutions de cette équation dont la mesure en radians est comprise entre 0 et $2\pi$.
   Discuter, en fonction du paramètre $m$, le nombre de racines de cette équation. On achèvera les calculs pour les valeurs particulières de $m$ intervenant dans la discussion.
5. Peut-on choisir $m$ pour que l'équation (1) admette quatre solutions, comprises entre 0 et $2\pi$, formant une progression arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{2}$ ?

## II. France juin 1961, Mathématiques & technique

**Ex. 18.** ./1961/francjuinmathtech/exo-1/texte.tex

On considère, dans un plan orienté, la translation T définie par un vecteur $\vec{V}$ et la rotation R de centre $O$ et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer, par leurs éléments, les deux transformations-produits obtenues, la première en effectuant successivement T puis R, la seconde en effectuant successivement R puis T.

**Problème 3** ./1961/francjuinmathtech/pb/texte

Le sujet est identique au problème de la série mathématiques.

## III. France, Sciences expérimentales.

**Ex. 19.** ./1961/francejuinscexp/exo-1/texte.tex

Soit la fonction suivante de la variable $x$ :

$$y = x^2 + \frac{2}{x}.$$

1. Étudier sa variation. Tracer sa courbe représentative.
2. Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'axe $x'Ox$ ?
   En calculer une valeur approchée à l'aide des tables de logarithmes.
3. On envisage, sur la courbe, le point $A$ d'abscisse 1 et le point $B$ d'abscisse $x_0$ supérieure à 1. Quelle est l'aire comprise entre la courbe, l'axe $x'x$ et les droites $x = 1$ et $x = x_0$ ?

**Ex. 20.** ./1961/francejuinscexp/exo-2/texte.tex

Une urne contient dix boules blanches et sept boules noires. On en extrait simultanément deux boules.

1. Quelle est la probabilité pour que ces deux boules soient de couleurs différentes ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient blanches toutes les deux ? Quelle est la probabilité pour qu'elles soient noires toutes les deux ?
3. Si l'on envisage la question 1, que peut-on appeler événement contraire ? Quelle est sa probabilité ? Les résultats du 2 permettent-ils des contrôles ?

# Chapitre IV

# 1962.

**Sommaire**



## I. France métropolitaine, Mathématiques & Mathématiques et technique.

Ex. 21. ./1962/francemmettech/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $y = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{2 - 4x}$. Étudier ses variations. Montrer que sa courbe représentative admet deux asymptotes et un centre de symétrie ; préciser ces éléments. Construire cette courbe (unité : 2 centimètres sur chacun des axes).

## II. Lille, Mathématiques élémentaires.

Ex. 22. ./1962/lillemelem/exo-1/texte.tex

$x$ étant la mesure d'un arc en radians, calculer la dérivée de la fonction :

$$y = 2\sin^2 x(1 - \cos x)$$

et étudier le signe de cette dérivée lorsque $x$ varie entre $-\pi$ et $+\pi$ ;

**Problème 4** ./1962/lillemelem/pb/texte

On donne un système de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ ; on donne en outre la droite $(D)$ parallèle à $x'Ox$ et rencontrant $Oy$ en $B$, tel que $\overline{OB} = 2R$ ($R$ est une longueur positive donnée).
On appelle $(M)$ un point tangent à la fois à $x'Ox$ et à $(D)$ et dont le centre $M$ n'est pas sur $y'Oy$ ; on appelle $(P)$ le cercle inverse $(M)$ dans l'inversion de pôle $O$ et de puissance $4R^2$ : on dit que le cercle $(P)$ est le cercle associé au cercle $(M)$. On notera $P$ le centre de $(P)$.

**1.** Montrer que lorsque $(M)$ varie, son cercle associé $(P)$ reste tangent à la fois à $x'Ox$ et à un cercle fixe $(\Gamma)$ que l'on précisera. En déduire :

   a) Une construction simple du cercle $(P)$ associé à un cercle $(M)$ donné ;

   b) Les cercles $(M)$ qui coïncident avec leur cercle associé ;

   c) Le lieu du centre $P$ du cercle $(P)$ lorsque $(M)$ varie.

**2.** Quel est le lieu des points communs, lorsqu'ils existent, à une cercle $(M)$ et à son cercle associé ? Construire les cercles $(M)$ qui sont tangents à leu associé ; construire leurs cercles associés.

**3.** Quel est le lieu du pied $H$ de la podaire de $O$ par rapport au cercle $(P)$ lorsque $(M)$ varie ? En déduire que cette podaire passe par un point fixe que l'on précisera.

**4.** On désigne par $(O)$ le cercle de centre $O$ et de rayon $2R$. Montrer qu'il existe un point $K$ ayant même puissance par rapport au cercle $(O)$, au cercle $(\Gamma)$, au cercle $(M)$ et à son cercle associé $(P)$. Montrer que, lorsque $(M)$ varie, la perpendiculaire en $K$ à l'axe radical des cercles $(M)$ et $(P)$ passe par un point fixe $F$. Á quelle courbe cet axe radical reste-t-il tangent ?

CHAPITRE V

# 1963.

## Sommaire



## I. France, Sciences expérimentales.

Ex. 23. ./1963/francescexp/exo-1/texte.tex

Le nombre $a$ étant donné, existe-t-il, dans chacun des trois cas suivants :

$$a = 37, \qquad a = 65, \qquad a = 130,$$

un nombre entier $x$ tel que $a + x^2$ soit le carré d'un nombre entier.
On donnera les valeurs possibles de $x$.

### PROBLÈME 5

./1963/francescexp/pb/texte

On considère la fonction

$$y = f(x) = 4x - \tan^2 x,$$

où $x$ désigne la mesure d'un arc en radians et l'on se propose d'étudier sa variation quand $x$ varie de $0$ à $\frac{\pi}{2}$.

**1.** Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$. Exprimer cette dérivée en fonction de $\tan x = t$ et vérifier qu'elle est égale à

$$2(1-t)(t^2+t+2).$$

**2.** Étudier la signe de cette dérivée dans l'intervalle considéré.

**3.** Étudier la variation de la fonction $y$ quand $x$ varie de $0$ à $\frac{\pi}{2}$ et la représenter graphiquement, dans un système d'axes rectangulaires, par une courbe (C).

On déterminera à 0,1 près les ordonnées des points correspondant à

$$x = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{\pi}{4}, \qquad x = \frac{\pi}{3}.$$

On choisira les unités sur les axes de la manière suivante :

— un segment de 6 cm représentera $\pi$ radians sur $Ox$ ;

— un segment de 1 cm sera l'unité sur $Oy$.

**4.** Vérifier que la fonction

$$F(x) = -\tan x + 2x^2 + x$$

est une primitive de la fonction $f(x)$.

On considère le point $A$ de (C) ayant pour abscisse $\frac{\pi}{3}$ et sa projection orthogonale, $A'$, sur $Ox$.

Calculer, à 0,01 près, en centimètres carrés, l'aire comprise entre l'arc $OA$ de (C), le segment $AA'$ et l'axe $Ox$.

## II. France, Mathématiques élémentaires.

Ex. 24. ./1963/francemathelem/exo-1/texte.tex

Trouver les nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ tels que

$$z^2 = 7 - 24\mathrm{i}.$$

### Problème 6 ./1963/francemathelem/pb/texte

On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle $(O)$ de centre $O$ et de rayon $R$.

**1.** On appelle $(\mathscr{C})$ tout cercle ayant comme diamètre une corde PQ de cercle $(O)$ ; on appelle C le centre d'un tel cercle , et $\rho$ son rayon.

Montrer que $(\mathscr{C})$ est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre C, par rapport au cercle $(O)$ et $-\rho^2$.

**2.** On suppose dans la suite du problème que le centre C appartient à $x'Ox$ et l'on pose $\overline{OC} = \lambda$.

a) Former l'équation qui détermine $\lambda$ quand $(\mathscr{C})$ passe par un point donné, $S$, de coordonnées $x$, $y$. Montrer que le problème admet une solution unique si $S$ appartient à une ellipse $(E)$, qu'on obtiendra par son équation et dont on précisera les sommets et les foyers.

Dans quelle région, délimitée par l'ellipse, doit se trouver $S$ pour que le problème admette deux solutions ?

b) On se place dans le cas où le problème admet deux solutions, $C_1$ et $(C_2)$, d'abscisses $\lambda_1$ et $\lambda_2$, et l'on demande que les cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ soient othogonaux.

Former une équation des points $S$ correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.

**3.** Parmi les cercles $(C)$ dont le centre $C$ est sur $x'Ox$, on se borne désormais à ceux, en outre, qui coupent $y'Oy$.

a) Préciser l'ensemble des centres $C$ de ses cercles.

b) Soient $I$ et $J$ les points où $(C)$ coupe $y'Oy$, $U$ et $V$ les symétriques de $I$ et $J$ par rapport au diamètre $PQ$, $U'$ et $V'$, les points où $IU$ et $JV$ coupent respectivement le cercle $(O)$ ; montrer que $\overline{IU}$ et $\overline{IU'}$ gardent un rapport constant ; reconnaître l'ensemble des points $U$ et $V$.

c) Montrer que les tangentes en $U$ à $(C)$ et en $U'$ à $(O)$ se coupent en un point de $y'Oy$ ; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles $(C)$ de cette partie 3 ?

## III. France, Mathématiques et Technique.

Ex. 25. ./1963/francemathtech/exo-1/texte.tex

a) Simplifier l'expression $\sqrt{(x-1)^2}$.

b) Étudier la variation de la fonction

$$y = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Tracer la courbe représentative.

Ex. 26. ./1963/francemathtech/exo-2/texte.tex

On donne un cercle (C), de centre $O$, et une corde fixe, AB, de ce cercle.
On désigne par I le milieu de AB (on suppose que I et $O$ sont distincts).
Soit $M$ un point variable de (C) ; la tangente en $M$ au cercle (C) coupe la droite AB en $T$.

**1.** Montrer que la polaire, $t$, de $T$ par rapport au cercle (C), passe par un point fixe, J, et que le cercle $(\omega)$ de diamètre J$T$ est orthogonal à (C).

Le point $M$ décrivant le cercle (C), montrer que les cercles $(\omega)$ appartiennent à un faisceau, dont on précisera les points de base.



Retour page 1

**2.** Quel est le lieu du point $T'$, transformé de $T$ par l'inversion de pôle J, de puissance $\text{JA}^2$ ? Transformer par cette inversion le cercle $(\omega)$ et la droite $MT$.

**3.** Soit $K$ le centre du cercle inverse de la droite $MT$. Quel est le lieu de $K$ ?
Soit $\alpha$ le milieu de J$O$, $y'\alpha y$ un axe porté par J$O$ et de même sens que $\overrightarrow{\text{J}O}$, $x'\alpha x$ un axe tel que le repère $x'\alpha x,\ y'\alpha y$ soit direct et orthonormé.
Écrire l'équation du lieu de $K$ par rapport à ce repère.
On désignera par $R$ le rayon de (C) et par $kR$ ($k > 1$) la longueur $O$J.

**4.** Quelle est la polaire $t'$, du point $T'$ par rapport au cercle (C) ? Déterminer l'enveloppe de $t'$.

**5.** Dans cette question, on suppose que $k = 2$.
Déterminer les lieux :

a) de l'orthocentre, $H$, du triangle $M$AB ;

b) du pied, $H'$, de la polaire, $h$, de $H$ par rapport au cercle (C).
Quelle est l'enveloppe (E) des droites $h$ ? Écrire l'équation de (E) par rapport au repère $x'\alpha x,\ y'\alpha y$.

N.B. – Par « lieu géométrique » ou « lieu », il faut entendre « ensemble de points ».

Retour page 1

# Chapitre VI

# 1964.

## Sommaire



## I. France, Mathématiques élémentaires.

**Ex. 27.** ./1964/francemelem/exo-1/texte.tex

1. Simplifier l'expression
$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x},\qquad x\qquad \text{réel.}$$
2. Donner les intervalles de définition de la fonction $y$ telle que
$$y=\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}.$$
3. Cette fonction peut-elle prendre la valeur 0, la valeur 1 ?

**Ex. 28.** ./1964/francemelem/exo-2/texte.tex

On donne un repère orthonormé $x'Ox,\ y'Oy$ et, sur $x'Ox$, deux points fixes $A$ et $B$ :
$$\overline{OA}=a,\qquad \overline{OB}=-a,\qquad a>0.$$
Deux points $M$ et $P$ varient sur $x'Ox$, liés par la relation $\overline{AM}.\overline{BP}=-4a^2$.
On pose
$$\overline{AM}=x,\qquad \overline{BP}=z.$$

1. Exprimer $z$ au moyen de $a$ et $x$ ; étudier la variation de $z$, la variable indépendante étant $x$ ; construire son graphe.
   En déduire, sans calcul, le nombre des points $M$ tels que la distance $MP$ soit égale à $d$, suivant la valeur du nombre arithmétique donné $d$.
2. Sur la demi-droite $Oy$, on envisage le point fixe $C$, $\overline{OC}=b>0$.
   Évaluer, au moyen de $a,\ b,\ x$, les pentes des droites $CM$ et $CP$, puis la tangente de l'angle de droites
   $$(CM,\ CP)=\varphi+k\pi,\qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$
   Montrer qu'il existe un point $C$, et un seul, pour lequel $\tan\varphi$ est indépendant de $x$ ; quel est alors cet angle $\varphi$ ?

3. On suppose le triangle $ABC$ équilatéral ; on appelle $(\Omega)$ son cercle circonscrit, de centre $\omega$.
   Les droites $CM$ et $CP$ recoupent respectivement le cercle $(\Omega)$ en deux points, $M'$ et $P'$ ; déterminer l'enveloppe $(E)$ de la droite $M'P'$ quand $M$ décrit $x'Ox$.
   On fait l'inversion de pôle $C$ qui échange $(\Omega)$ et $x'Ox$ ; déterminer l'inverse de $(E)$ et l'inverse du cercle $(\Gamma)$ circonscrit au triangle $CMP$ ; en déduire le lieu du centre de $(\Gamma)$.

- Toutes les figures seront faites avec précision, en prenant $a = 2$ cm.

## II. France remplacement, Mathématiques élémentaires & mathématiques et technique.

**Ex. 29.** ./1964/francemelemrem/exo-1/texte.tex

En utilisant la théorie des congruences, trouver la forme générale des nombres entiers positifs tels que l'entier $n^2 + n + 1$ soit multiple de 13.

### Problème 7

./1964/francemelemrem/pb/texte

Dans un plan rapporté rapporté au repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on donne un cercle $(\Gamma)$, dont le centre est $O$ et le rayon $R$.
Soit un point $M$ du cercle est repère par l'angle de demi-droites

$$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}) = \varphi, \qquad \text{modulo } 2\pi.$$

Une direction de droite $D$ est repérée par l'angle de droites

$$(x'Ox,\ D) = \alpha, \qquad \text{modulo } \pi, \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

On mène par $M$ la parallèle à $D$, qui coupe l'axe $x'Ox$ en $A$, ainsi que la perpendiculaire à $D$ qui coupe l'axe $y'Oy$ en $B$.

1. Calculer l'abscisse de $A$, l'ordonnée de $B$, la distance $AB$ et les coordonnées du point $N$, symétrique de $M$ par rapport au milieu, $I$, du segment $AB$.
2. On suppose $\alpha$ fixe, $\varphi$ seul variable.
   a) Déterminer l'ensemble des points $N$ et l'enveloppe de la droite $MN$.
   b) Soit $C$ le point de $AB$ défini par $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -2$ ; déterminer l'ensemble des points $C$ ; dessiner cet ensemble pour $R = 3$ cm et $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.
3. On suppose $\alpha$ et $\varphi$ variables ensemble.
   a) Quelle relation nécessaire et suffisante, liant $\alpha$ et $\varphi$, exprime que $A$ reste fixe ?
   On notera $\overline{OA} = kR$, $k$ étant un nombre réel donné.
   Déterminer l'enveloppe de la droite $MB$ ; dessiner cette enveloppe, seulement pour $R = 3$ cm et $k = -2$.
   b) Déduire de ce qui précède une résolution géométrique du système d'équations trigonométriques

$$\left\{ \cos(\alpha - \varphi) = k' \cos\alpha, \right.$$

   où $\alpha$ et $\varphi$ sont deux inconnues, $0 < \alpha < \pi$, et $k$ et $k'$ deux nombres relatifs donnés ; discuter.

- Pour chacune des recherches proposées, la candidat pourra, à son gré, emprunter ses méthodes à la géométrie pure ou à la géométrie analytique.

# III. France, sciences expérimentales

- Il ne sera tenu compte que des résultats qui auront été *justifiés* sur la copie.

Ex. 30. ./1964/francescexp/exo-1/texte.tex

On propose l'étude de la fonction

$$y = \cos 2x + 2\cos x + 1$$

($x$ est la mesure d'un arc en radians).

**1.** Étudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
Construire le représentation graphique correspondante, $(\gamma)$, dans un repère orthonormé, en prenant le centimètre pour unité de longueur.

**2.** Calculer l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses $Ox$ et la portion de courbe $(\gamma)$, au dessus de $Ox$.

**3.** Comment déduire du tracé de $(\gamma)$, le tracé de la représentation graphique $(\Gamma)$ de la fonction étudiée lorsque $x$ prend toute valeur ?

Ex. 31. ./1964/francescexp/exo-2/texte.tex

On considère un nombre $N$, de 6 chiffres, écrit dans le système décimal, de la forme

$$N = \overline{abc\,abc}.$$

$c$ est le chiffre des unités simples et des mille ;
$b$ est le chiffre des dizaines et des dizaines de mille ;
$a$ est le chiffre des centaines et des centaines de mille $(a \neq 0)$.

1. Montrer que $N$ est le produit du nombre entier $\overline{abc}$ par un nombre entier $k$. En déduire :

   $\alpha$) que $N$ est divisible par $7$, par $11$ et par $13$ ;

   $\beta$) que $N$ ne peut être une carré parfait.

2. Déterminer $N$ par les deux conditions simultanées suivantes :

   $\alpha$) $N$ est divisible par $5$ ;

   $\beta$) l'entier $\overline{bc}$ est le double de $a$ ($\overline{bc}$ représente l'entier pour lequel $c$ est le chiffre des unités simples et $b$ celui des dizaines).
   Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

# IV. France remplacement, sciences expérimentales

- Il ne sera tenu compte que des résultats qui auront été *justifiés* sur la copie.

Ex. 32. ./1964/francescexprem/exo-1/texte.tex

1. En admettant que la dérivée de $\mathrm{e}^x$ est $\mathrm{e}^x$, montrer que, si $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y' = -y$.
2. Un plan est rapporté à un repère orthonormé $Ox$, $Oy$ ; les coordonnées d'un point $M$ sont données en fonction de l'instant $t$ par les formules
$$x = \mathrm{e}^t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t},$$
où $t$ prend toute valeur. Construire la trajectoire, $(\mathscr{C})$, du point $M$.
3. Donner les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point $M$ à l'instant $t$.
4. On mène par l'origine le vecteur $\overrightarrow{Om}$ équipollent au vecteur vitesse de $M$ à l'instant $t$ ; construire la courbe $(\mathscr{H})$ décrite par $m$ ; comparer $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{C})$.
5. On considère sur $(\mathscr{C})$ le point $M$ à un instant quelconque $t$ ; construire le vecteur vitesse $\overrightarrow{MM'}$ en utilisant la courbe $(\mathscr{H})$ et montrer que $M'$ est sur $Ox$.
construire le vecteur accélération $\overrightarrow{MM''}$.



Retour page 1

**Ex. 33.** ./1964/francescexprem/exo-2/texte.tex

Soient les nombres entiers naturels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que $a > b > c > d$.

1. Montrer que, dans la recherche du plus grand commun diviseur des ces nombres, on peut remplacer $a,\ b,\ c$ par les restes respectifs de leurs divisions par $d$.
2. Appliquer cette propriété autant de fois qu'il el faudra pour trouver le plus grand diviseur commun des nombres $58\ 212$, $24\ 948$, $21\ 924$, $13\ 608$.

## V. France, série Philosophie

**Ex. 34.** ./1964/francephilo/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $y = 2x - 3 - \dfrac{1}{x}$ de la variable $x$.

1. Étudier les variations de cette focntion.
2. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de cette fonction dans un repère orthonormé (on prendra un segment de 1 cm pour unité), après avoir déterminé les asymptotes de $(\mathscr{C})$.

**Ex. 35.** ./1964/francephilo/exo-2/texte.tex

Tokio et Los Angeles sont respectivement sur les fuseaux horaires numéros 9 et 16.

1. Expliquer ce que veut dire la phrase précédente.
2. Déterminer l'heure et la date dans chacune de ces deux villes lorsqu'il est à Greenwich :

   a) 3 heures, le 4 juillet ;

   b) 20 heures, le 4 juillet.

**Ex. 36.** ./1964/francephilo/exo-3/texte.tex

On appelle $a$ l'origine des arcs sur un cercle orienté donné.

1. Construire les points $M$ et $N$ extrémités des arcs d'origine $A$, de mesures respectives $1\ 560°$ et $-2\ 025°$.
2. Calculer en radians les mesures des arcs orientés d'origine $M$, d'extrémité $N$.

## VI. France remplacement, série Philosophie

- Il ne sera tenu compte que des résultats qui auront été *justifiés* sur la copie.

**Ex. 37.** ./1964/francephilorem/exo-1/texte.tex

1. Trouver une angle compris entre $-180°$ et $0°$ qui ait le même cosinus que l'angle $780°30'$.
2. Le nombre $0{,}663$ est une valeur approchée de $\cos 780°30'$ ; en déduire des valeurs approchées de $\sin 48°30'$, $\sin 311°30'$ et $\tan 131°30'$.

**Ex. 38.** ./1964/francephilorem/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

Construire sa représentation graphique, $(\mathscr{C})$, dans un repère orthonormé.

Construire la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x = \dfrac{3}{2}$ et donner l'équation de cette tangente.

**Ex. 39.** ./1964/francephilorem/exo-3/texte.tex

Comparer, au long de l'année, la durée du jour et de la nuit en un lieu de latitude 50° Nord.

Retour page 1

# VII. France, série Technique et Économie

**Ex. 40.** ./1964/francetecheco/exo-1/texte.tex

Montrer que l'expression

$$y = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x$$

est indépendante de $x$.
Retrouver ce résultat en calculant la dérivée de $y$.

**Ex. 41.** ./1964/francetecheco/exo-2/texte.tex

Calculer, sans utiliser les tables, les valeurs des expressions suivantes :

$$\log \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}, \qquad \log \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}, \qquad \mathrm{e}^{2\log 5}, \qquad \mathrm{e}^{-\log 3},$$

où, suivant le programme, la notation $\log$ désigne le logarithme népérien (base $\mathrm{e}$).

**Problème 8** ./1964/francetecheco/pb/texte

Soient $x'Ox$ et $y'Oy$ deux axes de coordonnées rectangulaires, l'unité de longueur $u$ étant la même sur les deux axes (on prendra $u = 1$ centimètre).
Soient $a$ et $b$ deux entiers positifs quelconques.
A la fraction $\frac{a}{b}$ on fait correspondre, le point $M$ d'abscisse $x = a$ et d'ordonnée $y = b$.
$M$ sera dit l'image de la fraction $\frac{a}{b}$.

1. Comment sont placées les images des fractions égales à $\frac{a}{b}$ ?
2. Exprimer, en fonction de $a$ et $b$, le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle aigu que fait la droite $OM$ avec l'axe $x'Ox$.
3. Soit $M'$ l'image de la fraction $\frac{a'}{b'}$ supposée inférieure à $\frac{a}{b}$. Exprimer, en fonction de $a$, $b$, $a'$, $b'$, le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{MOM'}$.
4. On suppose $a$ et $b$ donnés, premiers entre eux, avec $a > b$. Déterminer toutes les fractions ayant des points $M'$ tels que $\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{4}$.
   *Application numérique :* $a = 7$, $b = 3$.
5. L'angle aigu $\widehat{MOM'}$ étant de nouveau quelconque et la fraction $\frac{a'}{b'}$ étant inférieure à $\frac{a}{b}$, exprimer, en fonction de $a$, $b$, $a'$, $b'$ l'aire $S$ du triangle $MOM'$.
6. Montrer que, si $S$ est égale à une demi-unité d'aire, les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont irréductibles.
7. On donne $M$, image de la fraction $\frac{7}{3}$. Déterminer toutes les fractions d'images $M'$ telles que l'aire $S$ du triangle $MOM'$ soit égale à une demi-unité d'aire.

# VIII. France remplacement, série Technique et Économie

**Ex. 42.** ./1964/franceetchecorem/exo-1/texte.tex

Soit le nombre $120\,450$.
Par quels chiffres peut-on remplacer les deux zéros pour que le nouveau nombre soit divisible par $99$ ?

**Ex. 43.** ./1964/franceetchecorem/exo-2/texte.tex

Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires.
On tire une boule de l'urne et on ne la remet pas dans l'urne. On effectue un second tirage.
Calculer la probabilité pour que l'on obtienne après ces deux tirages :

a) deux boules noires ;

b) au moins une boule noire.



Retour page 1

### Problème 9

./1964/franceetchecorem/pb/texte

Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ ; l'unité sure chaque axe est représentée par 1 centimètre.

A- 1. Sur un même graphique, tracer les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentant respectivement les variations des fonctions

$$y_1 = \cos\frac{x}{2}, \qquad y_2 = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$$

lorsque $x$ croît de 0 à $4\pi$.

2. Calculer les coordonnées des points $A$ et $B$, communs aux deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ .
3. Á l'aide du graphique, étudier suivant les valeurs de $x$ le signe de l'expression

$$\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 4\pi).$$

B- On considère la fonction suivante de la variable $x$ :

$$y = 2\sin\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}.$$

1. Quelle est la période de la fonction ? Calculer sa dérivée.
2. Étudier la variation de $y$ lorsque $x$ croît de $0$ à $4\pi$ et tracer sur un seconde graphique la courbe représentative, $(\mathscr{C})$
3. Calculer les abscisses des points communs à la courbe $(\mathscr{C})$ et à l'axe $x'Ox$.

C- 1. Développer $\sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right)$.

2. Trouver un nombre positif $k$ et un angle $\varphi$ compris entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$ tels que l'on ait, quelle que soit la valeur attribuée à $x$,

$$k\sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) = 2\sin\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}.$$

3. $x$ variant de $0$ à $4\pi$, indiquer, sur un même tableau, les variations des fonctions $u = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$ de la variable $x$ et $z = \sin u$ de la variable $u$.
En déduire les variations de la fonction

$$y = 4\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Quels résultats du paragraphe B peut-on ainsi retrouver ?

## IX. Groupe I, Mathématiques élémentaires & mathématiques et technique.

**Ex. 44.**

./1964/groupeImelem/exo-1/texte.tex

1. Déterminer aussi simplement que possible les restes de la division par 7 des sept premières puissances de 5 :

$$5,\ 5^2,\ 5^3,\ \dots,\ 5^7.$$

2. En déduire la détermination des entiers naturels $n$ pour lesquels la division de $19^n$ par 7 donne pour reste 2.
3. Calculer le reste de la division de $19^{64}$ par 7.

**Ex. 45.** ./1964/groupeImelem/exo-2/texte.tex

On donne dans un plan deux points fixes, $B$ et $C$, et l'on désigne par $a$ la longueur du segment $BC$.
On appelle $M$ tout point du plan tel que $\dfrac{MB}{MC} = 2$.

1. Déterminer avec précision l'ensemble de ces points $M$.
   Déterminer sur cet ensemble les points qui sont situés à une distance, $d$, de la droite $BC$. Discuter.
2. On désigne par $x$ radians la mesure, comprise entre 0 et $\pi$, de l'angle géométrique $BMC$. Calculer en fonction de $x$ et de $a$, les longueurs $MB$, $MC$, ainsi que la distance $y$ du point $M$ à la droite $BC$.
3. Étudier les variations et tracer la courbe représentative, ou *graphe*, de cette fonction $y$ quand $x$ varie.
4. Trouver les enveloppes des médiatrices des segments $MB$ et $MC$. Ces médiatrices touchent leurs enveloppes respectives en $P$ et $Q$ ; montrer que $M$, $P$, $Q$ sont alignés.
   Quel est le conjugué harmonique de $M$ par rapport à $P$ et à $Q$ ?

## X. Tahiti, Sciences expérimentales.

**Ex. 46.** ./1964/tahitiscexp/exo-1/texte.tex

On appelle triangle $(T)$ tout triangle $ABC$ dont l'angle $B$ est le double de l'angle $A$.
On désigne par $A$, $B$ et $C$ les mesures des angles du triangle, par $a$, $b$ et $c$ les mesures de ses côtés.
On a donc, pour tout triangle $(T)$, la relation

$$B = 2A.$$

**1.** Montrer qu'un triangle $(T)$ vérifie les relations

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 2A}{b} = \frac{\sin 3A}{c}.$$

**2.** Déduire de l'une des relations précédentes, l'expression de $\cos A$ en fonction de $a$ et $b$.

**3.** $x$ étant un angle quelconque, exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$. On mettre cette expression sous forme d'un produit de deux facteurs, l'un étant $\sin x$ et l'autre une fonction de $\cos x$.

**4.** Déduire des relations 1°) que les côtés d'un triangle $(T)$ vérifie la relation

$$b^2 - a^2 = ac.$$

**Ex. 47.** ./1964/tahitiscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction

$$y = x^3 + x - 2.$$

**2.** Montrer, en utilisant la courbe précédente, que l'équation

$$2x^3 + x - 2 = 0$$

admet une racine, $\alpha$, comprise entre 0,5 et 1.
Ces deux nombres peuvent être considérés comme des valeurs approchées de $\alpha$ par défaut et par excès.
Déterminer de la même manière le valeurs approchées de $\alpha$, par défaut et par excès à 0,1 près.

**3.**

Retour page 1

# XI. Tahiti, Mathématiques élémentaires.

**Ex. 48.** ./1964/tahitimelem/exo-1/texte.tex

Racines carrées du nombre $45-28\text{i}$.

## Problème 10 ./1964/tahitimelem/pb/texte

$(\gamma)$ et $(\delta)$ sont deux cercles fixes, orthogonaux , de centre C et D ; ils se coupent en A et B.
Un diamètre mobile de $(\delta)$ coupe $(\gamma)$ en $P$ et $Q$.
B$P$ et B$Q$ recoupent $(\delta)$ en $R$ et $S$.

**1.** Montrer que les triangles $PAR$, $QAS$ et CAD sont directement semblables.

**2.** Montrer que la droite $RS$ est perpendiculaire à $PQ$ et que $RS$ passe par un point fixe, E, dont on donnera une construction simple.

**3.** $I$ et $J$ sont les pôles de $PQ$ par rapport à $(\gamma)$ et $RS$ par rapport à $(\delta)$. Trouver l'ensemble des points $I$ et $J$ et montrer que $IJ$ garde une direction fixe.

**4.** $(i)$ et $(j)$ sont respectivement les cercles de centre $I$ passant par $P$ et $Q$ et de centre $J$ passant par $R$ et $S$.

Montrer que $(i)$ et $(j)$ appartiennent à deux faisceaux ; trouver l'ensemble des points communs, $M$ et $M'$ à $(i)$ et $(j)$ (quand ils existent) et l'ensemble de leurs centres d'homothéties.

Retour page 1

# CHAPITRE VII

# 1965.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, Maths élém. et Maths et Tech.

Ex. 49. ./1965/aixmarseillemelem/exo-1/texte.tex

On donne le triangle $ABC$, dont le centre de gravité est $G$ ; soit $M$ un point de ce plan.

1. Exprimer
$$f(M)=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
au moyen des longueurs $MG$, $BC$, $CA$, $AB$.
2. Quel est l'ensemble $E$ des points $M$ tels que $f(M)=0$ ? Quels points de $E$ appartiennent au cercle de diamètre $BC$ ?

**Problème 11** ./1965/aixmarseillemelem/pb/texte

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ ; $p$ et $q$ étant deux nombres complexes, on désigne par $M$ le point de coordonnées $(p,\ q)$ et on considère l'équation en $z$

$$z^2-2pz+q=0, \tag{1}$$

dont les racines peuvent être réelles ou complexes.
Ainsi, à tout point $M$ est associée l'équation (1), et réciproquement.

1. Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles $A$, $B$, $C$ des points $M$ tels que (1) possède :
   a) des racines complexes ;
   b) des racines réelles et distinctes ;
   c) une racine double.

   Calculer les racines dans chacun des trois cas.
2. Former l'équation de la tangente à $C$ en son point d'abscisse $c$ ; montrer que si, $M(p,\ q)$ appartient à $B$, l'équation (1) donne les abscisses des points de $C$ aù la tangente passe en $M$.
   Dans les deux question suivantes, $k$ désigne un nombre réel positif donné, pour répondre à ses questions, on pourra examiner successivement le cas où $M$ appartient à $A$ où à $B$.
3. Déterminer l'ensemble $E_k$ des points $M$ tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à $M$ soit inférieur à $2k$.
   Représenter sur une figure les ensembles $A$, $B$, $C$, $E_k$ et hachurer ce dernier.
4. Déterminer l'ensemble $F_k$ des points $M$ tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à $M$ soient, *tous deux*, inférieur à $k$.
   Représenter sur une figure les ensembles $A$, $B$, $C$, $F_k$ et hachurer ce dernier.
5. On donne un nombre $k$ positif ; quel est le plus grand nombre, $k'$, tel que l'ensemble $F_{k'}$ soit inclus dans l'ensemble $E_k$ ?
   Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?



Retour page 1

6. On suppose que $M$ appartient à $B$ et l'on désigne par $\Gamma_M$ le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont racines sont les abscisses de l'équation (1) associée à $M$.
   Écrire une équation du cercle $\Gamma_M$.
   Montrer qu'un sous-ensemble de cercles $\Gamma_M$ est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points $M$ correspondants appartiennent à une même droite, $\Delta$ non parallèle à $Oy$, qu'on déterminera par une équation de la forme $y = mx + h$.
   Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à $\Delta$ et à $C$ ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau ?

# II. Aix Marseille, Sciences expérimentales

**Ex. 50.** ./1965/aixmarseillescexp/exo-1/texte.tex

Trouver trois nombres relatifs, $a,\ b,\ c$ dont la somme soit 3, tels que, dans l'ordre $a,\ b,\ c$, ils soient en progression arithmétique et que, dans l'ordre, $a,\ c,\ b$, ils soient en progression géométrique.

**Ex. 51.** ./1965/aixmarseillescexp/exo-2/texte.tex

La plan étant rapporté à un repère orthonormé $Ox,\ Oy$, on considère la fonction

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log x.$$

(Le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien.)

**1.** Étudier les variations de cette fonction, lorsque $x$ varie de façon que $0 < x \leqslant 2$.
   Construire le graphe (C) représentant ces variations.
   Calculer l'ordonnée des points d'abscisses 2 et $\frac{1}{2}$.

**2.** Le point mobile $M$ se déplace dans le plan de façon qu'à une date $t$ de l'intervalle $[+1\,;+2]$, ses coordonnées sont données par les équations

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{2}\log t. \end{cases}$$

a) Quelle est sa trajectoire ?

b) Calculer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ à la date $t$ et trouver la mesure de $\overrightarrow{V}$ ; en déduire le mesure de l'arc parcouru par $M$ à la date $t$.
   Quelle est la longueur de l'arc parcouru entre les deux dates $t = 1$ et $t = 2$ ?

# III. Aix Marseille, Série Technique & Économie

**Ex. 52.** ./1965/aixmarseilletecheco/exo-1/texte.tex

Décomposer le nombre 60 en produit de facteurs premiers.
Écrire tous les couples de nombres dont le produit vaut 60. (On considère pas comme distincts deux couples qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs).
Trouver les couples de nombres entiers positifs $x$ et $y$ vérifiant la relation

$$x^2 - y^2 = 60.$$

**Ex. 53.** ./1965/aixmarseilletecheco/exo-2/texte.tex

A, B, C désignant les angles d'un triangle, comparer $\sin$ C et $\sin$ (A+B).
On suppose que A, B et C vérifient la relation

$$\sin \mathrm{C} - 2\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{A} = 0.$$

Montrer que le triangle ABC est isocèle.



Retour page 1

### Problème 12

./1965/aixmarseilletecheco/pb/texte

**1.** Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{(x-3)^2}{x^2-7x+10}.$$

Tracer le courbe représentative (C) rapportée à un système d'axes perpendiculaires $x'Ox$, $y'Oy$ ; l'unité, sur chaque axe, est représentée par 1 centimètre.

**2.** Par le point $H$ de $y'Oy$, d'ordonnée $h$, on mène la droite (D) parallèle à $x'Ox$.
Former l'équation donnant les abscisses des points communs à la courbe (C) et à la droite (D). Étudier, suivant les valeurs de $h$, le nombre de points communs à (C) et (D).
Peut-on choisir $h$ pour que la droite (D) coupe (C) en deux points $M'$ et $M''$, tels que

$$\overline{HM'} + \overline{HM''} = 8 \text{ ?}$$

Peut-on choisir $h$ pour que la droite (D) coupe (C) en deux points $N'$ et $N''$, tels que

$$\frac{1}{\overline{HN'}} + \frac{1}{\overline{HN''}} = \frac{8}{11} \text{ ?}$$

**3.** Déterminer $b$ de façon que la droite $(\Delta)$ représentant la variation de la fonction

$$y = m(x+b) \quad (m \neq 0)$$

coupe la courbe (C) au point A d'abscisse 3, quelle que soit la valeur de $m$.
Former l'équation donnant les abscisses des points communs à $(\Delta)$ et (C), autres que A.
Étudier, suivant les valeurs de $m$, le nombre de ces points communs.
Pour quelle valeur de $m$ la droite $(\Delta)$ coupe-t-elle (C) en deux points symétriques par rapport à A? Quelles sont les coordonnées de ces points?

## IV. Aix Marseille remplacement, Maths élém. et Maths et Technique

Ex. 54.

./1965/aixmarseillemelemrem/exo-1/texte.tex

Par rapport à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy,\ Oz)$ où l'unité est de longueur est 1 cm, on donne les points $A(+3\ ;\ +3\ ;\ +3)$, $I(+3\ ;\ 0\ ;\ +6)$, $J(+6\ ;\ +3\ ;\ +9)$.
Représenter ces point sur une épure, les plans de projections étant le plan $xOy$ horizontal et le plan $yOz$ frontal.
Représenter le carré ABCD dont le sommet est A et dont la diagonale BD est portée par le droite IJ.
N. B. - On expliquera la méthode géométrique suivie et son adaptation à l'épure.

### Problème 13

./1965/aixmarseillemelemrem/pb/texte

On considère la suite de nombres $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n,\ \dots$. On donne les deux premiers $u_0$ et $u_1$, réels ; les suivants sont définis par la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad n \geqslant 2.$$

**1.** Construire cette suite de nombres ; établir qu'elle est périodique ; de combien de nombres se compose cette période ?

**2.** Démontrer que $u_n$ peut se mettre sous la forme

$$u_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta,$$

où $\theta$ ne dépend pas de $u_0$, $u_1$ et $n$ et où $\lambda$ et $\mu$ dépendent de $u_0$ et $u_1$ et non de $n$. Calculer $\theta$ $(0 < \theta < \pi)$, $\lambda$ et $\mu$.

**3.** $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{OP_n} = \vec{i}\,\lambda \cos n\theta + \vec{j}\,\mu \sin n\theta,$$

$\lambda$, $\mu$ et $\theta$ ayant les valeurs ci-dessus. Montrer que les points $P_n$ sont sur une même conique, $L$, dont on précisera les éléments.
Montrer que les droites $P_kP_{k+1}$ sont tangentes à un conique, $L'$, homothétique et concentrique à $L$.

Retour page 1

**4.** Montrer que toute expression

$$v_n = A\cos n\phi + B\sin n\phi,$$

où $A$, $B$, $\phi$ $(0 \leqslant \phi \leqslant \pi)$ sont trois réels *quelconques*, indépendants de $n$, peut-être considérée comme le terme $n+1$ d'une suite $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$ satisfaisant la relation de récurrence

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

$a$ et $b$ étant deux constantes, que l'on calculera e, fonction de $\varphi$.
Pour quelles valeurs de $\varphi$ cette suite est-elle périodique, sa période contenant $p$ termes ?

## V. Aix Marseille remplacement, Sciences expérimentales

**Ex. 55.** ./1965/aixmarseillescexprem/exo-1/texte.tex

Tous les nombres envisagés dans cet exercice sont entiers positifs.

**1.** Trouver tous les couples $(a,\ b)$ vérifiant les conditions suivantes : les nombres $a$ et $b$ sont premiers entre eux et leur produit est 30. (Les couples $(a,\ b)$ et $(b,\ a)$ ne sont pas considérés comme distincts.)

**2.** Trouver tous les couples $(x,\ y)$ vérifiant les conditions suivantes : les nombres $x$ et $y$ admettent 121 comme plus grand commun diviseur et leur produit est 439 230.

**Ex. 56.** ./1965/aixmarseillescexprem/exo-2/texte.tex

Les axes $Ox$ et $Oy$ sont rectangulaires ; leur vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même longueur ; l'unité de surface est celle du carré construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

**1.** Dessiner sur une même figure :

a) la courbe (H) représentant la fonction

$$y_1 = \frac{x}{4} + \frac{4}{x} \ ;$$

b) la droite $(\Delta)$ représentant la fonction $y_2 = \dfrac{x}{4}$ ;

c) la courbe (H') représentant la fonction

$$y_3 = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}.$$

On justifiera le tracé des courbes (H) et (H') par une étude succincte des variations des fonctions $y_1$ et $y_3$.

**2.** On considère les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ parallèles à l'axe $Oy$ et dont les abscisses sont respectivement $x_1 = 2\mathrm{e}$ et $x_2 = \mathrm{e}^2$ (e désigne la base des logarithmes népériens).
La droite $(D_1)$ rencontre (H) en A et (H') en A' ; la droite $(D_2)$ rencontre (H) en B et (H') en B'.
Calculer l'aire de la portion de plan bornée par les segments AA', BB' et les arcs AB et A'B' de (H) et de (H').

**Ex. 57.** ./1965/aixmarseillescexprem/exo-3/texte.tex

On considère le repère cartésien orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La variable $t$ représente le temps, l'unité d'arc est le radian. On considère trois mobiles, $P$, $P'$ et $M$ déterminés par

$$\overrightarrow{OP} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j},$$
$$\overrightarrow{OP'} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j},$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}.$$

**1.** Démontrer que les mouvements de $P$ et $P'$ sont circulaires ; construire au même instant $t$ le vecteur vitesse et le vecteur accélération de chacun d'eux.

**2.** Démontrer que le mouvement de $M$ est vibratoire simple ; préciser la droite qui porte sa trajectoire. Préciser l'amplitude et la période de ce mouvement.



Retour page 1

# VI. Aix Marseille remplacement, Série Technique & Économie

**Ex. 58.** ./1965/aixmarseilletechecorem/exo-1/texte.tex

Construire l'arc AB de la courbe représentant la variation de la fonction $y = 1+\cos x$ lorsque $x$ croît de $0$ à $\pi$.

Échelle sur les deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$ : l'unité sera représentée par 2 centimètres.

Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la portion de plan délimitée par les axes de coordonnées et par l'arc AB.

**Ex. 59.** ./1965/aixmarseilletechecorem/exo-2/texte.tex

Un urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire deux de ces boules. Calculer la probabilité :

a) pour qu'elles soient noires toutes les deux;

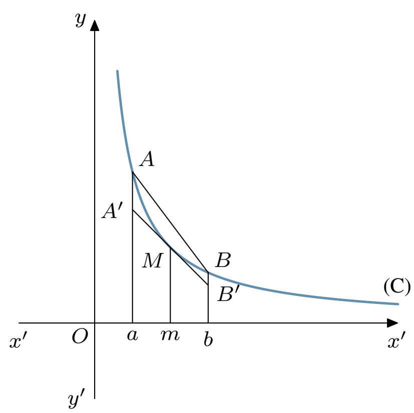
b) pour qu'elles soient de la même couleur;

c) pour qu'elles soient de couleurs différentes.

## PROBLÈME 14

./1965/aixmarseilletechecorem/pb/texte

Conformément au programme, le symbole $\log x$ désigne la logarithme népérien de $x$.




**1.** Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$.

On considère la courbe (C) représentant la variation de la fonction

$$y = \frac{1}{x}$$

lorsque $x$ croît de $0$ à $+\infty$.

Les points $A$, $B$ et $M$ de cette courbe ont pour abscisse respectives :

— A : $x_1 = \overline{Oa} = \alpha$,

— B : $x_2 = \overline{Ob} = \alpha + 1$,

— C : $x_3 = \overline{Om} = \alpha + \frac{1}{2}$.

La tangente à (C) passant par $M$ coupe les droites $aA$ et $bB$ en $A'$ et $B'$.

a) Calculer l'aire, $S$, du trapèze rectangle $abBA$.

b) Calculer l'aire, $s$, du trapèze rectangle $abB'A'$.

c) Calculer l'aire, $S-s$, du trapèze rectangle $A'B'BA$.

d) Calculer l'aire, $\Sigma$, du trapèze curviligne limité par les segments $Aa$, $ab$, $bB$ et l'arc $AB$ de la courbe (C).

e) En déduire une expression approchée par défaut et une expression approchée par excès de

$$\log\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right).$$



Retour page 1

f) *Application numérique :* Calculer une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès de $\log 1{,}01$.

**2.** a) Étudier la variation de la fonction

$$y=\frac{2x+1}{2x^2+2x}.$$

Construire la courbe $(\Gamma)$ représentant la variation de cette fonction. (Sur les deux axes de coordonnées perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$, l'unité sera représentée par 1 centimètre).
Indiquer ses asymptotes. Montrer que le point où $(\Gamma)$ coupe l'axe $x'x$ est centre de symétrie pour cette courbe.

b) $n$ désignant un entier naturel, démontrer que la fraction $\dfrac{2n+1}{2n^2+2n}$ est irréductible.

**3.** a) Étudier la variation de la fonction

$$y=2x(x+1)(2x+1)$$

.

b) En déduire la variation de la fonction

$$z=\frac{1}{2x(x+1)(2x+1)}.$$

c) $n$ étant un entier naturel, démontrer que l'expression $2n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 12.

N.B.– Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes ; les questions 1a, 1d et 1d sont indépendantes ; les questions 2a et 2b sont indépendantes ;les questions 3a et 3c sont indépendantes.

## VII. Antilles, Mathématiques élémentaires

**Ex. 60.** ./1965/antillesmelem/exo-1/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y=\cos x+\sin x$$

et tracer le courbe représentative, dans un repère orthonormé $Ox$, $Oy$.
*Application :* Discuter par rapport au paramètre $m$ le nombre de racines de l'équation $\cos x+\sin x=m$ comprises entre $-\pi$ et $+\pi$.

### Problème 15 ./1965/antillesmelem/pb/texte

On considère trois axes de coordonnées $Ox$, $Oy$ et $Oz$, tel que le trièdre $Oxyz$ soit trirectangle direct.
On considère les deux rotations de l'espace d'axes $Ox$ et $Oy$ et d'angles respectifs $2\alpha$ et $2\beta$, avec $0\leqslant 2\alpha\leqslant\pi$ et $0\leqslant 2\beta\leqslant\pi$. On se propose d'étudier la transformation produit de ces deux rotations.

**1.** a) En considérant chaque rotation comme le produit de deux retournements, montrer que l'on peut faire en sorte que l'un des retournements soit commun.

b) En conclure que le produit des deux rotations est une rotation autour d'un axe $\Delta$ passant par $O$. Construire cet axe.

c) Montrer que, dans le cas général, un système de paramètres directeurs de cet axe $\Delta$ est

$$\begin{cases} a=\cot\beta,\\ b=\cot\alpha,\\ c=-1.\end{cases}\tag{1}$$

(Pour cela, on pourra utiliser le produit scalaire.)
Quels sont les cas particuliers auxquels les formules (1) ne s'appliquent pas ?

d) Montrer que l'angle $2\theta$ de la rotation produit est tel que

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta.$$

A quelle condition le produit est-il un retournement ?



Retour page 1

e) Lieu de $\Delta$ si $\beta$ varie, $\alpha$ restant fixe.

**2.** a) L'axe $\Delta$ coupe le plan $(P)$ d'équation $z = -1$ en un point $M$, dont on donnera les coordonnées en fonction de $\alpha$ et $\beta$.
Si $\beta$ varie, $\alpha$ restant fixe, quel est le lieu de $M$ ?
Retrouver ainsi le résultat du 1e.

b) On suppose que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Quel est alors le lieu de $M$ ?

c) On suppose que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$. Montrer que le lieu de $M$ est alors, dans le plan $(P)$, une courbe $(C)$ qui se projette sur le plan $xOy$ suivant une portion de la courbe d'équation $y^2 - 2xy - 1 = 0$. Construire cette courbe.

d) On considère la surface engendrée par $\Delta$ quand $M$ décrit la courbe $(C)$. Le plan $(Q)$ d'équation $y = 1$ coupe cette surface suivant une courbe $(C')$. Construire la projection de $(C')$ sur la plan $xOz$.

## VIII. Antilles, Sciences expérimentales

**Ex. 61.** ./1965/antillesscexp/exo-1/texte.tex

**1.** $c$ et $d$ désignant des entiers positifs n'ayant qu'un chiffre (système décimal), choisir $c$ et $d$ de façon que $c^2 - d^2 = 24$ ; on trouvera deux systèmes de solutions.

**2.** Déterminer un nombre de quatre chiffres (système décimal) de façon qu'il soit divisible par 45 et que la différence des carrés des nombres représentés par le chiffre des centaines et celui des dizaines soit égale à 24 ; on trouvera quatre solutions.

**Ex. 62.** ./1965/antillesscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de

$$y = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}.$$

Construire sa courbe représentative $(C)$ par rapport à un système d'axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, tels que l'unité choisie sur $x'Ox$ soit 1 cm, $y'Oy$, 3cm.

**2.** A l'aide de $(C)$, indiquer, suivant les valeurs de $m$, combien de racines l'équation $mx^2+(m-1)x-(2m+3) = 0$ a de racines et quels sont leurs signes.

**3.** Déterminer deux nombres $a$ et $b$ tels que

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}.$$

En déduire l'aire, en centimètres carrés, de la surface limitée par $(C)$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

## IX. Antilles, Mathématiques et techniques

**Ex. 63.** ./1965/antillesmatech/exo-1/texte.tex

Démontrer que le polynôme

$$2x^3 - 15x^2 - 5x - 24$$

est divisible par $x - 8$, déterminer les valeurs de $x$, réelles ou complexes, qui annulent ce polynôme.

**Ex. 64.** ./1965/antillesmatech/exo-2/texte.tex

Calculer, en degrés, minutes, secondes, les solutions de l'équation

$$-7\cos x + 43\sin x = 23.$$

On posera $\tan\dfrac{x}{2} = t$.



Retour page 1

### Problème 16

./1965/antillesmatech/pb/texte

L'unité de longueur étant le centimètre, on considère un repère orthonormé $uOv$

$$(Ou,\ Ov) = +\frac{\pi}{2} \text{ (mod. } 2\pi)$$

et, sur l'axe $u'u$, les points $A_1$ et $A_2$ d'abscisses

$$\overline{OA_1} = +4, \qquad \overline{OA_2} = +9.$$

Soit $(C_1)$ et $(C_2)$ les cercles de diamètres respectifs $OA_1$ et $OA_2$ et $\omega_1$ et $\omega_2$ leurs centres.
Un cercle (C) passant par $O$ et centré sur l'axe $v'v$ au point $P$ d'ordonnée variable $v$ coupe $(C_1)$ et $(C_2)$ respectivement en $M_1$ et $M_2$.

A) On désigne par $y$ la tangente trigonométrique de l'angle de droites $(OM_1,\ OM_2)$.
Calculer $y$ en fonction de $v$. Étudier les variations de $y$ lorsque $P$ décrit l'axe $v'v$ en entier.
Construire dans un repère orthogonal la courbe représentative de cette fonction. (La recherche des points d'inflexion n'est pas demandée, mais on précisera la tangente à l'origine.)

B) Soit $I$ le pôle de la droite $M_1M_2$ pour le cercle $(C)$. Construire soigneusement $I$.
   1° Déterminer le lieu géométrique de $I$ et l'enveloppe de la bissectrice de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{PM_1}$ et $\overrightarrow{PM_2}$ lorsque $P$ décrit la droite $v'v$ en entier.
   2° On considère l'inversion de pôle $O$ et de puissance 36.
   Quelles sont les figures transformées des cercles $(C_1)$, $(C_2)$, des points $M_1$ et $M_2$, du cercle $(C)$ et de cercle $(\Gamma)$ de centre $I$ et orthogonal à $(C)$ ?
   En déduire une construction géométrique simple des points $P$ pour lesquels les cercles $(\Gamma)$ sont tangents à la perpendiculaires menée par $A_1$ à $u'u$.
   3° Trouver le lieu géométrique du symétrique de $O$ par rapport à la droite $M_1M_2$ et la figure transformée ed ce lieu dans l'inversion considérée.

N.B. : les questions B2, B3 et B1 sont indépendantes.

## X. Besançon, Maths élémentaires & Mathématiques et Technique

**Ex. 65.**

./1965/besanconmelem/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe d'affixe $Z = 8\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$.
Déterminer le module et l'argument de $Z$.
Déterminer les racines quatrièmes de $Z$.

**Ex. 66.**

./1965/besanconmelem/exo-2/texte.tex

En utilisant la théorie des congruences, déterminer la forme générale des entiers naturels $n$ tels que l'entier $n^3 - n + 1$ soit divisible par 7.

### Problème 17

./1965/besanconmelem/pb/texte

Deux cercles (C) et (C'), de centres $O$ et $O'$ sont tangents extérieurement en $I$. Soit $(\Delta)$ leur tangente commune intérieure. Soit P et P' les points diamétralement opposés à $I$ sur (C) et (C').
D'un point $M$ variable de $(\Delta)$ on mène à (C) et à (C') les secondes tangentes, dont les points de contact sont T et T'.
Soit $Q$ l'intersection des droites PT et P'T'.

**1.** Montrer que les quatre points $Q$, T', T et $I$ appartiennent à un même cercle $(\gamma)$ centré en $M$.
Ensemble des points $Q$.

**2.** Soit $U$ et $U'$ les points communs aux couples de droites (PT, $I$T') et (P'T', $I$T).
Montrer que $U$, T, $U'$ et T' appartiennent à un même cercle $(\gamma')$.
Montrer que $UU'$ est perpendiculaire à $(\Delta)$.

**3.** Montrer que $(\gamma)$ et $(\gamma')$ sont orthogonaux.
En déduire que $(\gamma')$ est tangent à (C) et (C') respectivement en T et T'.

**4.** Montrer que TT' passe par un point fixe.



Retour page 1

## XI. Besançon, Sciences expérimentales

**Ex. 67.** ./1965/besanconscexp/exo-1/texte.tex

Soit un nombre $N$ écrit $\overline{abc}$ en système à base 13, $a$, $b$, $c$ étant des chiffres quelconques de ce système. les nombres 10, 11 et 12 du système décimal sont représentés par les chiffres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ dans le système à base 13, les autres chiffres du système à base dix et à base treize coïncidant.

**1.** A quelle condition $\overline{abc}$ est-il divisible par treize ; par le carré de treize ?

**2.** Montrer que $\overline{abc}$ et $a+b+c$ ont même reste de division par 12. En déduire une condition nécessaire et suffisante de division de $a+b+c$ par douze.

**3.** Trouver une condition de divisibilité de $\overline{abc}$ par quatorze.

**4.** *Application :* Écrire 1 001 du système à base dix, en système à base 13.
Que remarque-t-on ?
Quels sont ses restes de division par douze et quatorze.

**Ex. 68.** ./1965/besanconscexp/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $y_1 = x\log x$.

**1.** Préciser l'intervalle de définition. Étudier le sens de variation et tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de cette fonction dans un système d'axes orthonormé d'origine $O$.

**2.** Soit la fonction $y_2 = ax(x^2-1)$. Déterminer $a$ pour que sa courbe représentative, (C), et la courbe $(\Gamma)$ aient même tangente au point $A(+1\ ;\ 0)$. Construire la courbe (C) correspondante.

**3.** Vérifier que $\dfrac{x^2}{2}\left(\log x - \dfrac{1}{2}\right)$ est une primitive de la fonction $y_1 = x\log x$.
Déterminer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $(\Gamma)$ et le segment $OA$, puis l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe (C) et le segment $OA$.
Que représente la différence des ces aires ?

N.B.– On admettra que $y_1 = x\log x$ a pour limite zéro quand $x$ tend vers $0$.

## XII. Besançon, Série Technique & Économie.

**Ex. 69.** ./1965/besancontecheco/exo-1/texte.tex

Trouver l'ensemble des nombres s'écrivant $\overline{cdu}$ dans le système décimal ($c$ représentant le chiffre des centaines, $d$ celui des dizaines, $u$ celui des unités) et possédant les propriétés suivantes :

— ils diminuent de 99 si l'on intervertit les deux chiffres extrêmes ;

— ils diminuent de 45 si l'on intervertit les deux derniers chiffres.

**Ex. 70.** ./1965/besancontecheco/exo-2/texte.tex

Vingt chevaux prennent le départ d'une course. Quelle est la probabilité de prévoir les trois chevaux classés premiers :

**1.** dans l'ordre de leurs arrivées ;

**2.** sans tenir compte de cet ordre.

### Problème 18

./1965/besancontecheco/pb/texte

Soit la fonction

$$y = \frac{10x}{(x^2-1)^2}.$$

A) Étude de la fonction.

1° Pour quelles valeurs de $x$ est-elle définie ?

2° Montrer que la courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.

Retour page 1

3° Calculer la dérivée et en déduire la variation de la fonction. Quelle est la valeur de la dérivée pour $x=0$ ?

4° Étudier les limites de $y$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ et lorsque $x$ tend vers $\pm 1$.

5° Tracer la courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé.

B) 1° Montrer que $y$ peut s'écrire $\frac{av'}{v^2}$, $v'$ représentant la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $v$ de la variable $x$ et $a$ une constante.

2° En déduire une primitive de la fonction $y$.

3° Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des $x$ et les droites d'équations $x=2$, $x=3$.

C) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y=\frac{10}{9}x$.

## XIII. Besançon remplacement.

Les sujets sont ceux de l'académie de Lyon : Lyon remplacement.

## XIV. Bordeaux, Sciences expérimentales

**Ex. 71.** ./1965/bordeauxscexp/exo-1/texte.tex

Transformer en produits les sommes $A=\sin x+\sin 2x$ et $B=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.
Résoudre ensuite l'équation

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}.$$

**Ex. 72.** ./1965/bordeauxscexp/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y=4x^3-3x+1.$$

Construire la courbe représentative, C, par rapport à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
Montrer que C admet un centre de symétrie.

A et B désignant les points de C d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, calculer en centimètres carrés l'aire du domaine délimité par $Ox$, $Oy$ et l'arc AB de C.

### Problème 19

./1965/bordeauxscexp/pb/texte

Un observateur se place en A dans le plan vertical passant par les sommets $M$ et $M'$ de deux montagnes, qu'il voit devant lui. $M$ est le sommet le plus proche, $M'$ le plus éloigné de A.
La direction A$M$ est inclinée de 9°30′, celle de A$M'$ de 18°10′ sur l'horizon.
L'observateur se déplace ensuite, sans changer d'altitude et en restant dans le plan vertical de $M$ et $M'$, jusqu'à ce qu'il atteigne un point $A'$ tel que $A'$, $M$ et $M'$ soient alignés.
Il constate qu'il a parcouru une distance A$A'$ de 6 365 m et que la droite $A'MM'$ est inclinée de 37°sur l'horizon.
Calculer les altitudes de $M$ et $M'$ au-dessus du plan horizontal de A et $A'$.

## XV. Bordeaux, Maths élementaires & Maths et Technique

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille. Aix Marseille.

## XVI. Bordeaux remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille. Aix Marseille remplacement.

# XVII. Caen, Sciences expérimentales

**Ex. 73.** ./1965/caenscexp/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $y = x\sin x$.

a) Pour quelles valeurs de $x$ cette fonction est-elle définie ?

b) Calculer sa dérivée.

c) Étudier sa variation pour $x$ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et tracer avec soin l'arc de courbe correspondant, $(\Gamma)$, dans un repère orthonormé.

d) Calculer la dérivée de la fonction

$$y = \sin x - x\cos x.$$

En déduire l'aire de la surface délimitée par $(\Gamma)$ et la première bissectrice.

e) En supposant $x$ quelconque, montrer que la courbe d'équation $y = x\sin x$ est tangente en une infinité de points à la première bissectrice et en une infinité de points à la seconde bissectrice. Déterminer ces points.

**Ex. 74.** ./1965/caenscexp/exo-2/texte.tex

Un mobile se déplace sur un axe, son abscisse $x$ étant donnée en fonction du temps $t$ par la relation

$$x = 5\cos 2t - 3\sin 2t. \tag{E}$$

Déterminer le vecteur vitesse et la vecteur accélération de ce mobile.
Construire la représentation graphique de la fonction définie par la relation (E) pour $|t| \leqslant 4$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $x$ ?

# XVIII. Caen, Maths élémentaires & Mathématiques et Technique

**Ex. 75.** ./1965/caenmelem/exo-1/texte.tex

On donne deux points, $A$ et $A'$, et une droite $(D)$.
Quel est l'ensemble des axes orientés parallèles à $(D)$ des déplacements hélicoïdaux dans lesquels $A'$ est le transformé de $A$ ?
Construire l'axe d'un tel déplacement hélicoïdal, connaissant l'angle orienté $\alpha$ de ce déplacement.

**Ex. 76.** ./1965/caenmelem/exo-2/texte.tex

**1.** Calculer la dérivée de la fonction $y = (n-x)\mathrm{e}^x$, où $n$ est une constante.

**2.** Étudier, quand $x \geqslant 0$, les variations de la fonction $y = (2-x)\mathrm{e}^x$ et en construire la courbe représentative dans un repère orthonormé.
Calculer l'aire du domaine compris entre cette courbe et les demi-axes $Ox$ et $Oy$.

## Problème 20

./1965/caenmelem/pb/texte

On considère, sur un axe orienté $x'Ox$, les points $A$ et $B$ d'abscisses respectives $(+a)$ et $(-a)$.
On supposera que $a$ est positif. On se propose d'étudier la transformation ponctuelle plane $\mathrm{T}_\theta$, où $\theta$ est un angle défini à $k\pi$ près, qui, à un point $m$ du plan, fait correspondre le point $M$ de ce plan, intersection des droites $Au$ et $Bv$ qui font respectivement avec les droites $Am$ et $Bm$ les angles orientés

$$(Am,\ Au) = \theta \qquad \text{et} \qquad (Bm,\ Bv) = \theta.$$

**1.** a) Quel est l'ensemble des points $m$ du plan qui n'ont pas de transformé $M$ à distance finie par $\mathrm{T}_\theta$ ?
Quelle est la transformation réciproque de la transformation $\mathrm{T}_\theta$ ?
Pour quelles valeurs de $\theta$ cette transformation est-elle involutive ?
Montrer que l'ensemble des ces transformations forment un groupe.

b) Quelle est la figure transformée par $\mathrm{T}_\theta$ d'un cercle passant par $A$ et $B$, d'une droite passant par $A$, d'une droite passant par $B$ ?

Retour page 1

c) Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, quelle est la figure transformée par $T_{\frac{\pi}{2}}$ d'une perpendiculaire à $x'Ox$ ?

**2.** On supposera, dans la suite du problème, que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

On désignera par $x$ et $y$ les coordonnées de $m$ et par $X$ et $Y$ celles de $M$ dans le repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.

a) Calculer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$. Discuter.

b) On suppose que $m$ décrit une cercle $(\Gamma)$ passant par $A$ et $B$.
Écrire l'équation d'un tel cercle et montrer que, si $\lambda$ est l'ordonnée de son centre, on a les relations $Y - x = X + y = \lambda$.
En déduire une relation liant $X$ et $Y$ quand $m$ décrit $(\Gamma)$. Conséquence.

c) On suppose que $m$ décrit une perpendiculaire à $x'Ox$, d'abscisse $\ell$. Trouver l'équation de la courbe décrite par $M$. Nature de cette courbe.
Discuter suivant les valeurs de $\ell$.

`N.B-` les deux parties du problème sont entièrement indépendantes.

## XIX. Caen, série Technique et économie

**Ex. 77.** ./1965/caentecheco/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation
$$2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 3 = 0,$$
dans laquelle $x$ est l'inconnue et $\mathrm{e}^{x}$ désigne l'exponentielle de $x$.

**Ex. 78.** ./1965/caentecheco/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation
$$2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 3 = 0,$$
dans laquelle $x$ est l'inconnue et $\mathrm{e}^{x}$ désigne l'exponentielle de $x$.

### Problème 21

./1965/caentecheco/pb/texte

**1.** Étudier la variation de la fonction
$$y_1 = \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$$
et tracer la courbe représentative, (C), de cette fonction, en prenant le centimètre pour unité sur chaque axe.

**2.** Utiliser le graphique précédent pour discuter le nombre de solutions de l'équation
$$x^3 - (\lambda - 2)x^2 + 4 = 0, \tag{E}$$
dans laquelle $x$ est l'inconnue et $\lambda$ un paramètre.

**3.** On coupe la courbe (C) par la droite variable $(D_m)$ d'équation $y = x + m$ ($m$ étant un paramètre).
Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points communs aux courbes (C) et $(D_m)$. Déterminer $m$ pour que la droite, $(D_m)$ coupe la courbe (C) en deux points $M'$ et $M''$, tels que la distance $M'M''$ soit égale à $3\sqrt{2}$.

**4.** Tracer sur le même graphique, la parabole (P) d'équation
$$y_2 = x^2 - 2x + 2.$$
On désigne par $I$ le point d'abscisse négative commun aux courbes (C) et (P), par $A$ le point de la courbe (C) d'abscisse -2 et par $S$ le sommet de la parabole (P).
Calculer l'aire limitée par l'axe des abscisses, les arcs $AI$ et $IS$ des courbes (C) et (P) et les ordonnées des points $A$ et $S$.



Retour page 1

# XX. Caen remplacement

Mêmes sujets que ceux de Paris.Paris remplacement

# XXI. Cambodge, Sciences expérimentales

**Ex. 79.** ./1965/cambodgescexp/exo-1/texte.tex

Soit la fonction

$$y = \frac{x+1}{x^2-x+2}.$$

**1.** Étudier ses variations et construire son graphe dans un repère orthogonal $x'x$, $y'y$. On prendra pour unité de longueur sur $x'Ox$ une longueur de 1 cm, sur $y'Oy$ une longueur de 7 cm.

On déterminera les tangentes aux points remarquables du graphe.

**2.** Soit l'équation du second degré en $x$

$$mx^2-(m+1)x+2m-1=0, \qquad (1)$$

où $m$ est un paramètre.

Montrer que la recherche des racines de cette équation peut se ramener à la recherche de l'abscisse des points communs au graphe précédent et à une droite $(D)$.

Utiliser ce résultat pour déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles l'équation (1) a deux racines de signes contraires.

**Ex. 80.** ./1965/cambodgescexp/exo-2/texte.tex

On considère trois points, $A$, $B$, $C$, sur un terrain horizontal. On a mesuré la longueur $BC = 173{,}2$ m et les angles $ABC = 35°48'$ et $ACB = 59°26'$.
Calculer à l'aide d'une table de logarithmes les longueurs de $AB$, de $AC$, ainsi que la distance du point $A$ à la droite $BC$.

**Ex. 81.** ./1965/cambodgescexp/exo-3/texte.tex

Calculer le P.G.C.D et le P.P.C.M des nombres

$$A = 56 \times 20$$

$$B = 30 \times 70$$

$$C = 120 \times 7.$$

Calculer la valeur de $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$.

# XXII. Cambodge et Pékin, série Mathématiques élémentaires

**Ex. 82.** ./1965/cambodgemelem/exo-1/texte.tex

Trouver les chiffres $a$ et $b$ tels que les nombres de la forme $\overline{1a1bab}$ écrits dans le système à base 10 soient divisibles par 63.

**Ex. 83.** ./1965/cambodgemelem/exo-2/texte.tex

Montrer que, dans le corps des complexes, les racines de l'équation

$$z^3 = 1$$

forment un groupe pour la multiplication.

Retour page 1

### Problème 22

./1965/cambodgemelem/pb/texte

Le repère de référence $Ox$, $Oy$ sera, dans tout le problème orthonormé. On considère la transformation ponctuelle (S) qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $xyp$ telles que :

$$\begin{cases} x' = 2\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha, \\ y = 2\sin\alpha - x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha, \end{cases}$$

$\alpha$ étant un angle donné tel que $-\pi \leqslant \alpha < \pi$.

**1.** Déterminer par son équation l'ensemble $(D)$ des points doubles de (S).

**2.** Quelle est la transformation réciproque de (S) ? (S) est-elle involutive ? Montrer que (S) définit une bijection du plan sur lui-même.

**3.** Montrer que (S) est une isométrie, c'est à dire qu'elle conserve les longueurs. Quelle est la figure transformée d'un cercle du plan ? Que peut-on dire d'un cercle centré sur $(D)$ ?

**4.** Quelle est la figure $(\Delta')$ transformée d'une droite $(\Delta)$ ? Montrer que $(\Delta)$ et $(\Delta')$ se coupent sur $(D)$ ou sont parallèles à $(D)$.

**5.** Montrer que $MM'$ est perpendiculaire à $(D)$. Identifier la transformation (S).

**6.** Dans toute la suite du problème on fait $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

On appellera $(Y)$ la symétrie d'axe $Oy$ et $(H)$ l'homothétie de centre $A(0\ ;\ +2)$ et de rapport 2.

Définir la transformation $(\Sigma) = (H) \circ (S) \circ (Y)$ (on fait successivement les transformations $(Y)$, puis (S), puis $(H)$).

**7.** Trouver géométriquement la transformée par $(\Sigma)$ du support $Ox$. Donner son équation.

$N'$ étant le transformé par $(\Sigma)$ d'un point $N$ de $Ox$, quel est l'ensemble des projections orthogonales de $A$ sur $NN'$ et quelle est l'enveloppe de $NN'$ quand $N$ décrit $Ox$ ?

Donner l'équation de la dernière courbe.

## XXIII. Clermont, Sciences expérimentales

**Ex. 84.**

./1965/clermontscexp/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre l'équation

$$2\cos^2 x + \sin 2x = 1.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

**2.** Résoudre l'inéquation

$$2\cos^2 x + \sin 2x \leqslant 1.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

**Ex. 85.**

./1965/clermontscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction $y = f(x)$ définie par :

$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$$

et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une racine $x_0$.

**2.** Construire la courbe, $(C)$, représentative de la fonction $f(x)$, pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$, les axes étant rectangulaires et l'unité égale à 10 cm sur l'axe $x'x$ et à 2 cm sur l'axe $y'y$.

Construire en particulier, les trois points suivants de la courbe $(C)$ :

$A$, d'abscisse $-1$, $B$, d'abscisse $-0{,}5$, $D$, d'abscisse 0 ; construire la tangente à $(C)$ en chacun des ces points.

**3.** On se propose de calculer une valeur approchée de $x_0$ à moins de $0{,}025$ près ; pour cela, on calculera, à moins de $0{,}001$ près, l'abscisse $x_1$ du point de l'axe $x'x$ situé sur la tangente à $(C)$ en $B$ et l'abscisse $x_2$ du point de l'axe $x'x$ situé sur la droite $BD$ et l'on admettra que $x_0$ est situé entre $x_1$ et $x_2$.

**4.** Calculer une valeur approchée de l'aire $S$ de la surface limitée par $(C)$ et les axes $x'x$ et $y'y$.

# XXIV. Clermont, autres sujets

Identiques à ceux d'Aix Marseille. Aix Marseille et Aix Marseille remplacement.

# XXV. Dakar, Sciences expérimentales

**Ex. 86.** ./1965/dakarscexp/exo-1/texte.tex

Trouver le reste de la division par 11 du nombre $N = (7\ 856)^{6\ 432}$.

**Ex. 87.** ./1965/dakarscexp/exo-2/texte.tex

On considère la suite de nombres

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,\ U_n$$

définie par $4U_n = U_{n-1} + 12$ et $U_1 = 3$.

a) Calculer $U_2,\ U_3,\ U_4$.

b) On pose $V_n = U_n - 4$. Démontrer que la suite des nombres $V_n$ est une progression géométrique.

c) Calculer $U_n$ et trouver sa limite quand le nombre des termes de la suite augmente indéfiniment.

**Ex. 88.** ./1965/dakarscexp/exo-3/texte.tex

Une colonie de vacances compte 25 enfants et 5 moniteurs.

a) Le car mis à leur disposition pour faire une excursion ne comportant que 12 places, on demande le nombre d'associations possibles de 10 enfants avec 2 moniteurs.

b) On tire au sort pour savoir quels seront les 10 enfants et les 2 moniteurs devant participer à l'excursion. Sachant que l'un des moniteurs est père de 2 enfants de la colonie, on demande quelle est la probabilité pour qu'ils fassent tous les trois partie de l'excursion.

# XXVI. Dakar, Mathématiques élémentaires

**Ex. 89.** ./1965/dakarmelem/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe on désigne par $M$ l'image du nombre complexe $z$. Quel est l'ensemble des points $M$ tels que $(z-a)(z-b)$ soit réel ?
($a$ et $b$ sont deux nombres complexes donnés.)

**Ex. 90.** ./1965/dakarmelem/exo-2/texte.tex

Construire un cercle $(\gamma)$ tangent à un cercle donné, (C), et à une droite donnée, (D), en un point donné, A de cette droite.

## Problème 23

./1965/dakarmelem/pb/texte

Soit $(\gamma)$ la courbe d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ par rapport à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ; $a$ et $b$ sont deux longueurs données.

**1.** Á partir de la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

de $(\gamma)$, montrer que l'équation cartésienne de la tangente au point $M_0\,(x_0\ ;\ y_0)$ de $(\gamma)$ est

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

**2.** Á tout point $M_0\,(x_0\ ;\ y_0)$ du plan distinct de $O$, on fait correspondre la droite $(m_0)$ d'équation

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

Vérifier que, lorsque $a = b$, la droite $(m_0)$ est la polaire de $M_0$ par rapport au cercle $(\gamma)$.



Retour page 1

**3.** Montrer que l'application $m \longmapsto (m_0)$ est une application biunivoque (ou une bijection) de l'ensemble des points du plan distincts de $O$ sur l'ensemble des droites ne passant pas par $O$.

Pour toute droite $(m_0)$ d'équation $ux+vy+h=0$ ne passant pas par $O$, donner les coordonnées du point $M$ correspondant.

**4.** Montrer qu'un condition nécessaire et suffisante pour que $(m_0)$ soit tangente à $(\gamma)$ est que $M_0 \in (\gamma)$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la droite d'équation $ux+vy+h=0$ soit tangente à $(\gamma)$ est que

$$a^2u^2+b^2v^2-h^2=0.$$

**5.** Utiliser cette dernière relation pour discuter le nombre de tangentes à $(\gamma)$ issues d'un point $P(\lambda\ ;\ \mu)$ donné (on pourra former l'équation donnant les pentes de ces tangentes).

En utilisant cette même relation trouver l'ensemble des points $M$ d'où l'on peut mener à $(\gamma)$ deux tangentes perpendiculaires.

**6.** On suppose que $M_0$ décrit une droite $(d)$ donnée ne passant pas par $O$. Montrer que $(m_0)$ passe par un point fixe. Que devient ce résultat lorsque $(d)$ passe par $O$ ?

# XXVII. Dakar, Mathématiques et technique

**Ex. 91.** ./1965/dakarmatech/exo-1/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y=\frac{-4x^2+x+3}{2x^2+2x-9}$$

et construire la courbe représentative.

**Ex. 92.** ./1965/dakarmatech/exo-2/texte.tex

On considère les coniques admettant pour cercle directeur un cercle $(F)$ donné, de centre $F$, de rayon $R$, et passant par un point $M$ donné intérieur au cercle $(C)$.
Quel est l'ensemble des seconds foyers de ces coniques ?
Préciser la nature de ces coniques, suivant la position du deuxième foyer sur son ensemble.
Dans le cas où ce sont des ellipses, trouver l'enveloppe de leur axe non focal. Discuter la nature de cette enveloppe suivnat la position de $M$.

**Ex. 93.** ./1965/dakarmatech/exo-3/texte.tex

On considère un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ donné. Soit $(x,\ y)$ les coordonnées d'un point $M$ quelconque du plan et $(x',\ y')$ les coordonnées de son homologue, $M'$, dans une transformation ponctuelle, $T$.

A) Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$, $y$ et des données dans chacun des cas suivants :

1° $T$ est la translation de vecteur $\vec{V}$ de composantes scalaires $(u,\ v)$ données ;

2° $T$ est la rotation de centre $O$, d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ;

3° $T$ est la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega$ de coordonnées $(\alpha,\ \beta)$ données ;

4° $T$ est la similitude directe d'angle $+\frac{\pi}{2}$, de rapport $k$ donné et de centre $\omega$ de coordonnées $(\alpha,\ \beta)$ données.

Quelle est la transformation ponctuelle définie par

$$\begin{cases} x'=-ay+b \\ y'=ax+c, \end{cases}$$

$a,\ b,\ c$ étant des nombres réels données ?

B) $T$ est la transformation ponctuelle définie par

$$\begin{cases} x'=4y+3 \\ y'=9x+8. \end{cases}$$

Retour page 1

a) Trouver le point double de $T$ et effectuer une translation des axes de coordonnées en prenant ce point comme nouvelle origine.
Peut-on décomposer $T$ en produit de transformations ponctuelles connues ?
Un tel produit est-il commutatif ?

b) Montrer qu'il existe deux droites issues de la nouvelle origine qui sont globalement invariante par $T$.
Montrer que, pour les points de l'une (ou l'autre) de ces deux droites, la transformation $T$ est équivalente à une homothétie, pour chacune de ces deux droites, on précisera le rapport.
$M$ étant un point quelconque du plan, donner une construction géométrique de son transformé $M'$ en utilisant ce qui précède.

c)

C)

## XXVIII. Dakar, série Technique et économie

Ex. 94. ./1965/dakartecheco/exo-1/texte.tex

Une urne referme 32 boules parmi lesquelles 4 sont blanches. On extrait successivement 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité :

**1.** pour qu'elles soient blanches toutes les trois ;

**2.** pour qu'il y en ait une blanche et 2 noires ?

Ex. 95. ./1965/dakartecheco/exo-2/texte.tex

En désignant par $n$ un nombre entier, démontrer que le produit $(n^2-1)n^2(n^2+1)$ est toujours divisible par 60.

Ex. 96. ./1965/dakartecheco/exo-3/texte.tex

A l'aide d'une annuité $x$, pendant $n$ années,Jean se constitue un capital $X$, grâce à une annuité $y$ pendant $n$ années, Paul amortit la dette $Y$ qu'il a contracté.

**1.** Quelle relation existe-t-il entre leurs annuités si la capital constitué est égal à la somme empruntée ?

**2.** Si leurs annuités sont les mêmes, quelle relation cela entraîne-t-il entre le capital et la somme empruntée ?
Interpréter les résultats obtenus, au point de vue de la théorie des intérêts composés.

**3.** Calculer numériquement au bout de combien de temps un capital placé à intérêts composés à 5% aura doublé de valeurs, l'intérêt produit étant ajouté annuellement au capital.

## XXIX. Dakar remplacement, Sciences expérimentales

## XXX. Dakar, Sciences expérimentales

Ex. 97. ./1965/dakarscexprem/exo-1/texte.tex

**1.** Quel est le nombre de diagonales d'un polygone de $n$ côtés ?

**2.** On suppose que $n$ soit égal à 6, que deux diagonales quelconques ne soient pas parallèles, que trois diagonales quelconques ne soient pas concourantes. Quel est alors le nombre de points, autres que les sommets, d'intersection des diagonales ?

Retour page 1

Ex. 98. ./1965/dakarscexprem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $y = \dfrac{27}{x^2} - \dfrac{8}{(x+1)^2}$.

1. Indiquer son domaine de définition. Calculer sa dérivée, dont on mettra le numérateur sous forme d'un produit de facteurs.
2. Étudier les variations de la fonction $y$. Construire avec soin son graphe relativement à un repère orthonormé (l'unité étant le centimètre).
3. Calculer l'aire de la surface limitée par le graphe, $x'x$ et les droites d'équations $x = 3$, $x = m$ ($m > 3$). Que devient cette aire lorsque $m$ tend vers $+\infty$ ?

## XXXI. Dakar remplacement, Mathématiques élémentaires

Ex. 99. ./1965/dakarmelemrem/exo-1/texte.tex

Trouver le reste de la division par 8 du nombre

$$A = 13^{23} \times 27^{41}.$$

Ex. 100. ./1965/dakarmelemrem/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y = \sin x(1+\cos x)$$

et tracer la courbe représentative de ces variations.

### Problème 24 ./1965/dakarmelemrem/pb/texte

1. On considère, dans un repère orthonormé $xOy$, les cercles (C) d(équation

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2 = 0,$$

où $m$ est un paramètre réel variable. Montrer que ces cercles forment un faisceau, dont on déterminera les éléments.

2. On considère maintenant les cercles (C') d'équation

$$x^2 + y^2 - 2m'y + k = 0$$

($m'$ variable, $k$ constant).

Déterminer la valeur de $k$ pour laquelle ces cercles sont orthogonaux aux cercles (C) précédents. Les cercles (C') ainsi déterminés forment une faisceau. Donner l'équation du cercle (C') passant par le point $F(+2\ ;\ +2)$.

3. Montrer que, lorsque $(C)$ varie, la polaire de $F$ par rapport à (C) passe par un point fixe.
4. On considère maintenant les coniques qui admettent $F$ comme foyer et le cercle variable (C) pour cercle principal. Discuter, suivant les valeurs de $m$, la nature de ces coniques. Trouver, en particulier, les valeurs de $m$ pour lesquelles ces coniques sont des hyperboles équilatères.
5. Montrer que l'axe non focal des ces coniques reste tangent à une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice.

Montrer que la directrice associée à $F$ passe par un point fixe. Trouver le lieu du deuxième foyer de ces coniques.

6. Montrer que ces coniques restent tangentes à deux droites fixes.



Retour page 1

# XXXII. Dijon, Sciences expérimentales

N.B.- Dans tous les textes log désigne le logarithme népérien.

**Ex. 101.** ./1965/dijonscexp/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $Y = \log u$, où $u$ est une fonction positive définie et dérivable de la variable $x$.
Calculer directement la dérivée de $Y$ par rapport à $x$ et montrer que

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{u'}{u} \qquad \left(u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right).$$

**Ex. 102.** ./1965/dijonscexp/exo-2/texte.tex

On considère la fonction

$$Z = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Pour quelles valeurs de $x$ est-elle définie ? Montrer que, dans les intervalles où elle l'est,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x^2-1}.$$

**Ex. 103.** ./1965/dijonscexp/exo-3/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement la fonction $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.
Calculer l'aire de la surface comprise entre cette courbe, l'axe $0x$ et les droites d'équations

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0{,}5.$$

**Ex. 104.** ./1965/dijonscexp/exo-4/texte.tex

Le temps étant désigné par $t$, on étudie à partir de l'instant zéro le point $M$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = t+2 \\[2ex] y = \dfrac{1}{t^2+4t+3}. \end{cases}$$

Montrer que la trajectoire de $M$ appartient à la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{x^2-1}.$$

Dans quel sens est-elle parcourue ?
Montrer que l'une des composantes du vecteur vitesse a une expression très simple. En déduire :

a) la courbe à laquelle appartient l'hodographe ;

b) la particularité du vecteur accélération.

# XXXIII. Dijon, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 105.** ./1965/dijonmelem/exo-1/texte.tex

Construire la courbe (C) d'équation

$$y^2 = x^2 + 2x - 3,$$

dans un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. (Unité graphique : 1 cm).
On indiquera la nature de la courbe (C) et l'on en précisera les éléments suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.
On donnera les coordonnées du centre, des sommets et des foyers, ainsi que les équations de asymptotes, dans le repère $x'Ox$, $y'Oy$.



Retour page 1

### Problème 25

./1965/dijonmelem/pb/texte

Dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le cercle $(a)$, de centre $A(+3\ ;\ 0)$ et de rayon 2, et le cercle $(b)$, de centre $B(0\ ;\ +4)$ et de rayon 4.
Soit $M$ un point variable de l'axe $x'Ox$.
On désigne par $x$ l'abscisse de $M$, par $p_a$ la puissance de $M$ par rapport au cercle $(a)$, par $p_b$ a puissance de $M$ par rapport au cercle $(b)$.

**1.** Écrire une équation des cercles $(a)$ et $(b)$.

**2.** Calculer en fonction de $x$ la valeur du rapport

$$u = \frac{p_a}{p_b}\ ;$$

étudier les variations de la fonction $u(x)$ ainsi définie et en construire la courbe représentative $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé.

**3.** $k$ étant un nombre réel donné, existe-t-il sur l'axe $x'Ox$ des points $M$ tels que $\dfrac{p_a}{p_b} = k$ ?

Discuter, suivant la valeur de $k$, le nombre de ces points $M$.
Quand il en existe deux, $M'$ et $M''$, montrer que leurs abscisses, $x'$ et $x''$, sont liées par une relation indépendante de $k$.
Écrire cette relation.

**4.** Montrer qu'il existe un cercle $(c)$ centré sur $x'Ox$ et orthogonal à $(a)$ et à $(b)$ .
En préciser le centre et le rayon. Construire un cercle $(d)$ centre sur $y'Oy$ et orthogonal à $(a)$ et à $(b)$.
Calculer les coordonnées du centre et le rayon $R$ de $(d)$.

On donnera de $R$ la valeur décimale approchée par défaut à $\dfrac{1}{10^3}$ près.

**5.** On considère la courbe $(\Gamma)$ construite au 2. Calculer l'aire arithmétique S limitée par l'axe des abscisses et l'arc $(\Gamma)$ dont les extrémités sont sur l'axe des abscisses.

Donner de S l'expression exacte la plus simple, puis la valeur décimale approchée par défaut à $\dfrac{1}{10^3}$ près.

N.B. – Les calculs numériques peuvent être faits à l'aide d'une des tables de valeurs numériques autorisées.

## XXXIV. Dijon, série Technique et économie

**Ex. 106.**

./1965/dijontecheco/exo-1/texte.tex

Un dé est taillé en octaèdre régulier et ses faces numérotées de 1 à 8. On appelle événement $(E)$ l'obtention, sur la face non visible du dè (côté tapis) de l'un des points 7 ou 8.

**1.** Calculer la moyenne et l'écart type des arrivées de $(E)$ sur 7 500 épreuves, le lancer du dé ayant lieu au hasard.

**2.** $(E)$ s'est produit 1 740 sur 7 500 essais réellement effectués ; ce résultat vous paraît-il normal ? Pourquoi ?

**3.** Donner la limite supérieure de la probabilité d'obtenir le résultat précédent :

a) d'après l'inégalité de Bienaymé ;

b) en considérant la distribution comme gaussienne avec la moyenne et l'écart-type précédent.
On donne un extrait de la table de Gauss ; aires sous la courbe normale

$$A = \int_0^t \Phi(T)\,\mathrm{d}t$$

| Valeurs de $t$ | 3,60 | 3,61 | 3,62 |
|---|---|---|---|
| Valeurs de $A$ | 0,499 8 | 0,499 8 | 0,499 9 |



Retour page 1

c) Avec un risque d'erreur de l'ordre de 5%, dire dans quel intervalle se trouve la vraie valeur de la probabilité de $(E)$, dans l'essai de la question 2 (on appelle qu'un tel risque d'erreur correspond, dans une distribution gaussienne, à un écart réduit d'environ deux écarts-type).

Ex. 107. ./1965/dijontecheco/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{4x^2 - 15x + 9}{3x} = \frac{4x}{3} - 5 + \frac{3}{x}$$

et en tracer le graphe $(H)$, dans un repère orthonormé.
On marquera, en particulier, les asymptotes, se coupant en $C$.

**2.** Calculer, en fonction de $x$, l'expression de l'aire comprise entre $(H)$, l'axe des $x$, les parallèles à $Oy$ d'abscisses 3 et $x$ $(x \geqslant 3)$. Valeur numérique de cette aire pour $x = 6$.

**3.** La tangente à $(H)$ au point d'abscisse $+3$ coupe les asymptotes en $I$ et $J$. Calculer l'aire du triangle $ICJ$.

**4.** On coupe $(H)$ par une parallèle variable à $Ox$, d'ordonnée $m$. Déterminer, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points communs à cette droite et à $(H)$ dont les abscisses appartiennent à l'intervalle fermé $[-3\,;+3]$. (On pourra utiliser le graphe de la question 1.)

**5.** Soit l'équation

$$4\cos^2 u - (m+5)\cos u + 1 = 0, \tag{1}$$

$u$ étant un arc exprimé en radians. Discuter algébriquement, suivant les valeurs de $m$, le nombre de racines de l'équation 1 appartenant à l'intervalle fermé $[0\,;\pi]$.
Montrer ensuite que les résultats de la discussion peuvent être vérifiés à l'aide de ceux de la question 4. (On posera $\cos u = \dfrac{x}{3}$ et l'on mettra 1 sous la forme $m = f(x)$.)

# XXXV. Dijon, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon. Lyon remplacement

# XXXVI. Grenoble, Sciences expérimentales

Ex. 108. ./1965/grenoblescexp/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier la variation de la fonction

$$y = x - 1 - \frac{4}{x^2}.$$

(Pour étudier le signe de la dérivée on utilisera l'identité $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 4x + 4)$.)

**2.** $M$ étant le point d'abscisse $x$ de la représentation graphique correspondante $(\Gamma)$ et $P$ le point d'abscisse $x$ de la droite $(\Delta)$ qui a pour équation $y = x - 1$, calculer $z = \overline{MP}$.
Quel est la signe de $z$ et quelle est sa limite lorsque $x$ croît indéfiniment en valeur absolue ?

**3.** Figurer $(\Delta)$ et $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé, en prenant le centimètre comme unité de longueur.

**4.** Calculer l'aire, S, de la surface limité par $(\Gamma)$, l'axe des abscisses et les ordonnées d'abscisses 2 et 4.

Ex. 109. ./1965/grenoblescexp/exo-2/texte.tex

Dans ce qui suit, $x$ représente un nombre positif et les logarithmes sont des logarithmes népériens.
Mettre sous sa forme la plus simple possible l'expression

$$\log \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\log x}.$$

Résoudre l'équation

$$\log\left(\log \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\log x}\right) = 1 + 2\log x.$$

# XXXVII. Grenoble, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 110.** ./1965/grenoblemelem/exo-1/texte.tex

Deux points A et B, et une longueur $a$ étant donnés, construire une ellipse admettant A comme sommet du grand axe, B comme sommet du petit axe et $2a$ comme longueur du grand axe. Discuter.

**Problème 26** ./1965/grenoblemelem/pb/texte

On considère le fonction $y = \frac{3}{x} + \frac{3}{4}x$.

**1.** Étudier cette fonction : intervalles de définition, variation, valeurs aux bornes des intervalles de définition.

Montrer que la courbe représentative, (C), admet un centre de symétrie.

Déterminer les asymptotes de cette courbe.

Tracer le courbe (C) dans un système d'axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unité $\vec{i}$ et $\vec{j}$, l'unité de longueur étant le centimètre.

**2.** On se propose de déterminer les points de (C) dont les coordonnées $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

Pour cela écrire $y$ sous forme d'une fraction.

Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'un point de (C) ait ses deux coordonnées entières est que $x$ soit pair.

En déduire tous les points de (C) dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

Déterminer l'équation de la tangente en celui des points ainsi obtenus dont l'abscisse $x$ est positive et différente de 2. Construire cette tangente.

**3.** On considère l'aire limitée par la courbe, l'axe $x'Ox$, et deux parallèles à $y'Oy$, d'abscisses 2 et 4.

Calculer l'aire ainsi limitée.

**4.** On choisit de nouveaux axes de coordonnées, de même origine que le précédent :

$X'OX$ a même direction et même sens que le vecteur dont les composantes scalaires par rapport à $x'Ox$ et $y'Oy$ sont respectivement 3 et 4 ;

$Y'OY$ est confondu avec $y'Oy$. $\vec{I}$ et $\vec{J}$, vecteurs unité sur $X'OX$ et $Y'OY$ ont le même module que $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exprimer $\vec{I}$ et $\vec{J}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Les coordonnées d'un point $M$ étant $x$ et $y$ par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ et $X$ et $Y$ par rapport aux axes $X'OX$ et $Y'OY$, déterminer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

En déduire une équation de la courbe (C) par rapport aux axes $X'OX$, $Y'OY$.

Quelle est la nature de cette courbe ? En déterminer l'axe focal ; écrire son équation par rapport aux axes $X'OX$ et $Y'OY$, puis par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

En déduire les sommets de la courbe.

N.B. – les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.

# XXXVIII. Grenoble, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon : Lyon remplacement :

# XXXIX. Groupe I, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 111.** ./1965/groupeImelem/exo-1/texte.tex

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x-2} > x-4$, où $x$ est un nombre réel.

**Ex. 112.** ./1965/groupeImelem/exo-2/texte.tex

Étudier la variation de la fonction $f$ définie, pour tout $x$ réel, par

$$f(x) = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2},$$

$a$ étant un nombre réel positif.
Tracer le graphe de $f$ dans un repère orthonormé.

### Problème 27

./1965/groupeImelem/pb/texte

On donne, dans un plan fixe, un repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.
Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = a$, $a$ étant une constante réelle positive donnée.
A tout point $M$ de la droite $\Delta$ on associe le point $P$ tel que les droites $OP$ et $x'x$ soient symétriques par rapport à $OM$ et que les points $P$ et $M$ aient même projection orthogonale sur $x'x$.

**1.** Le point $M$ peut-il être pris arbitrairement sur $\Delta$ ?
On pose

$$(x'x,\ Om) = \varphi.$$

Évaluer, en fonction de $\varphi$, les coordonnées des points $M$ et $P$ ; en déduire l'équation cartésienne de l'ensemble des points $P$ et cet ensemble lui-même.

**2.** Étant donné une droite $z'z$ passant par $O$, construire géométriquement les points $M$ respectivement associés aux points $P$ situés sur $z'z$ et ces points $P$ eux-mêmes ; il en existe généralement deux, $P_1$ et $P_2$ ; trouver l'ensemble des points $N$, milieux des segments $P_1P_2$ correspondant à l'ensemble des droites $z'z$ passant par $O$.
Retrouver ces résultats en calculant les coordonnées de $P_1$, $P_2$ et $N$ en fonction de la mesure $\theta$ de l'angle $(x'x,\ z'z)$.

**3.** Soit $Q$ le symétrique de $O$ par rapport à $MP$. Montrer que la droite $QM$ passe par un point fixe et qu'elle est une bissectrice de l'angle $Q$ du triangle $OPQ$.
Quelle est l'enveloppe $(\gamma)$ de la droite $u'u$, seconde bissectrice de l'angle $Q$ du triangle $OPQ$ ?
Discuter, suivant la position de $M$ sur $\Delta$, si $QM$ est bissectrice intérieure ou extérieure du triangle $OPQ$.
Discuter, sur la courbe $(\gamma)$, les arcs enveloppés par des droites $u'u$ bissectrices intérieures, des arcs enveloppés par des droites $u'u$ bissectrices extérieures de l'angle $Q$ du triangle $OPQ$.

## XL. Groupe I, Sciences expérimentales

**Ex. 113.** ./1965/groupeIscexp/exo-1/texte.tex

**Ex. 114.** ./1965/groupeIscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Combien existe-t-il de combinaisons de 5 éléments pris dans un ensemble de 11 éléments ?

**2.** Une urne contient 5 boules noires et 6 boules blanches. On tire 5 boules au hasard. Calculer la probabilité :

— $p_1$ pour qu'on ait les 5 boules noires ;

— $p_2$ pour qu'on ait les 5 boules blanches ;

— $p_3$ pour qu'on ait au moins 3 boules noires.

**Ex. 115.** ./1965/groupeIscexp/exo-3/texte.tex

Le symbole log désigne le logarithme népérien.
Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{1}{x} + \log x,$$

lorsque $x$ varie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\ ;\ \mathrm{e}\right]$.
Construire la courbe représentative $(C)$ par rapport à un repère orthonormé, $Ox$, $Oy$, ( le segment unité mesure 2 cm).

Calculer à $\frac{1}{100}$ près les valeurs de $y$ pour

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{e}.$$

Calculer la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $u = x \log x$. En déduire une primitive de $y$. Calculer, en centimètres carrés, à $\frac{1}{100}$ près, l'aire de la surface limitée par $(C)$, $Ox$ et les droites d'abscisses respectives $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $\mathrm{e}$.

## XLI. Groupe I, série technique et économie

**Ex. 116.** ./1965/groupeItecheco/exo-1/texte.tex

Décomposer le nombre 539 en un produit de facteurs premiers.
En déduire tous les diviseurs de 539.

**Ex. 117.** ./1965/groupeItecheco/exo-2/texte.tex

On jette trois dés cubiques identiques. Les faces de chacun de ces dés sont numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité pour que la somme des points obtenus soit égale à 6.

### Problème 28

./1965/groupeItecheco/pb/texte

A) 1° Étudier la variation de la fonction

$$y = 2x - 1 + \frac{2}{x}.$$

2° Le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées perpendiculaires, $x'Ox$, $y'Oy$ ; l'unité, sur chacun des axes, est le centimètre.

Construire sur le même graphique la droite $(D)$ d'équation $y = 2x - 1$ et la courbe $(C)$ représentant la variation de la fonction étudiée au A1. Montrer que la courbe $(C)$ admet une centre de symétrie.

3° Déterminer tous les points de $(C)$ dont les deux coordonnées sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

4° Déterminer la primitive de la fonction

$$y = 2x - 1 + \frac{2}{x}$$

qui s'annule pour $x = 1$.

Calculer, avec la précision que permet la table de logarithmes, l'aire de la surface limitée par la courbe $(C)$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations

$$x = 1, \qquad x = 4.$$

B) Soit l'équation

$$\cos 2u - (m-3)\cos u - m + 4 = 0 \tag{1}$$

où $u$ désigne la mesure en degrés d'un arc de l'intervalle $[0\,;\pi]$ et $m$ un paramètre.

1° On pose

$$\cos u = x - 1.$$

Montrer que l'on peut étudier le nombre de solutions de l'équation (1) en utilisant la courbe $(C)$. Indiquer, suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions.

2° Déterminer $\cos u$ pour $m = 7$. En déduire la valeur correspondante de $u$ à $10'$ près.

# XLII. Groupe I remplacement, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 118.** ./1965/groupeImelemrem/exo-1/texte.tex

Dans cet exercice, $n$ est un nombre premier.

1. $C_n^p$ désignant le nombre de combinaisons de $n$ éléments distincts pris $p$ à $n$, montrer que si $p$ est différent de 0 et de $n$, ${}_{\circ}n^p$ est divisible par $n$.
2. Montrer que, si $a$ est entier, $(a+1)^n - a^n - 1$ est divisible par $n$.
3. Montrer, en raisonnant par récurrence sur $b$, que, si $b$ est entier, $b^n - b$ est divisible par $n$.

N.B. – on rappelle la formule

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots +_{\circ} n^p x^{n-p} y^p + \cdots + y^n.$$

## Problème 29

./1965/groupeImelemrem/pb/texte

On donne, dans le plan, un cercle $(O)$, de centre $O$, de rayon $R$, et un point fixe $P$ intérieur au cercle ; $OP = p$.
Deux droites, $\Delta$ et $\Delta'$, perpendiculaires entre elles pivotent autour de $P$ et coupent le cercle, la première en $A$ et $C$, la seconde en $B$ et $D$.
$\omega$ désigne le milieu de $OP$, $H$ et $K$ les projections orthogonales des points $O$ et $P$ sur $AB$, $H'$ et $K'$ les projections des mêmes points $O$ et $P$ sur $CD$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OP}$.
   Exprimer au moyen de $\overrightarrow{OP}$ les sommes
   $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}.$$
2. On rapporte la figure à un repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$, la demi-droite $Ox$ contenant le point $P$.
   On pose
   $$(x'Ox,\ \Delta) = \theta \text{ modulo } \pi.$$
   Former les équations ayant respectivement pour racines les abscisses des points $A$ et $C$ d'une part, des points $B$ et $D$ d'autres part. Si l'on pose
   $$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OA}) = \alpha,\ (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OB}) = \beta,\ (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OC}) = \gamma,\ (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OD}) = \delta,$$
   angles de demi-droites définis modulo $2\pi$, calculer
   $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$$
   $$\text{et} \qquad \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\delta.$$
   Calculer les expressions analogues relatives aux sinus.
   Peut-on retrouver ici les résultats obtenus au 1 ?
3. Établir les relations
   $$OH^2 + PH^2 = OK^2 + PK^2 = R^2$$
   et en déduire l'ensemble des points $H$ et $K$, ainsi que l'enveloppe de la droite $AB$ ; on précisera les éléments.
4. Les droites $AB$ et $CD$ se coupent en $E$ ; $AD$ et $Bc$ se coupent en $F$. Quelle est la polaire par rapport au cercle $(O)$ de chacun des points $E$, $F$ et $P$ ? Quel est l'ensemble des points $E$ et $F$ ?
   Montrer que le cercle de diamètre $EF$ est orthogonal à $(O)$ et qu'il appartient à un faisceau linéaire ; préciser la nature de ce faisceau. Montrer que l'axe radical du cercle de diamètre $EF$ et du cercle $(O)$ passe par un point fixe.

N.B. – Les quatres parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Retour page 1

# XLIII. Groupe I remplacement, Sciences expérimentales

Ex. 119. ./1965/groupeIscexprem/exo-1/texte.tex

Vous devez régler un achat de 70 centimes. Vous savez que, dans votre poche, se trouvent une pièce de 1 F, deux pièces de 50 centimes, quatre pièces de 20 centimes.
Quelle est la probabilité pour que, en sortant simultanément, au hasard, deux pièces de votre poche, vous puissiez :

1. présenter une somme exacte de 70 centimes;
2. présenter une somme d'au moins 70 centimes?

Ex. 120. ./1965/groupeIscexprem/exo-2/texte.tex

On désigne par $\log x$ le logarithme népérien de $x$ et l'on considère la fonction

$$y = 2x^2 - \log x$$

de la variable $x$.

1. Calculer les valeurs de $y$ pour les valeurs $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\frac{1}{2}$, $\mathrm{e}$, de la variable, puis en déterminer les valeurs approchées à $0{,}01$ près.
   (Le candidat utilisera les tables numériques autorisées, soit table de valeurs naturelles, soit table de logarithmes; il indiquera celle dont il se sera servi.)
2. Étudier les variations de $y$ lorsque $x$ varie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right]$; et tracer la courbe $(C)$ représentant ces variations; on choisira un repère orthonormé, le segment unité mesurant 2 cm.
3. Démontrer que $x\log x - x$ est une primitive de $\log x$; en déduire toutes les primitives de la fonction $y$.
4. Évaluer, en centimètres carrés, l'aire de la surface limitée par $Ox$, $(C)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

# XLIV. Guinée session normale, séries B et Technique.

Ex. 121. ./1965/guineBtech/exo-1/texte.tex

La conserverie de Mamou veut fabriquer une boîte de conserves d'une capacité de 1,750 l et ayant le forme d'une cylindre droit.
Déterminer, en centimètres, le rayon et la hauteur pour que la quantité de métal utilisé soit minimale. (On admettra, que 1,750 l est équivalent à 549,25 cm$^3$.)

Ex. 122. ./1965/guineBtech/exo-2/texte.tex

Soit la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = y = \frac{x^5 + ax^3}{x^2 - 1} \in \mathbb{R},$$

où $a$ est un paramètre différent de $-1$.

1. Calculer la dérivée de $y$ et discuter, suivant les valeurs de $a$, le nombre des valeurs de $x$ qui annulent cette dérivée.
2. Dans toute la suite du problème, on se place dans le cas où $a = 2$.
   Étudier la variation de $y$ et construire la courbe représentative.
3. Lorsque $x$ est un entier positif, pour quelles valeurs de $x$ la fraction $y = \frac{x^5 + 2x^3}{x^2 - 1}$, est-elle irréductible?
   Pour quelles valeurs de $x$, $y$ peut-il être entier?

N.B.– les questions 2 et 3 sont indépendantes de la question 1



Retour page 1

# XLV. Guinée, séries B et Technique.

**Ex. 123.** ./1965/guineBtechbis/exo-1/texte.tex

Un bateau est au mouillage à 9 km du point le plus proche d'une côte rectiligne.
Un message doit parvenir au plus vite à une localité située sur la côte à 15 km du point de la berge le plus proche du bateau.
Étant donné que le messager parcourt 5 km à l'heure à pied et 4 km à l'heure en canot, en quel point de la berge doit-il accoster pour arriver au plus vite à la localité ?

**Ex. 124.** ./1965/guineBtechbis/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{a_1x^3 + a_2}{a_1x^2}$, où $a_1$ et $a_2$ sont les racines de l'équation en $a$ :

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 4 & a & a \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9 & a & 1 \\ a & -6 & 2 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

avec $a_1 > a_2$.

**1.** Une fois $a_1$ et $a_2$ déterminés, remplacer-les dans $f(x)$ par leurs valeurs et étudiez les variations de la fonction $\longmapsto f(x)$ ; représenter-la graphiquement par une courbe $(C)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

**2.** Soit une droite $(\Delta)$ d'équation $y = x + \lambda$ coupe le courbe en deux points, $M'$ et $M''$. Soit $M$ le milieu du segment $M'M''$. Déterminer le lieu de $M$ lorsque $\lambda$ varie.

**3.** Calculez l'aire de la surface comprise entre la courbe $(C)$, la première bissectrice et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

# XLVI. Liban, bac Libanais, séries mathématiques.

**Ex. 125.** ./1965/libanmat/exo-1/texte.tex

**1.** Définition d'une fonction primitive d'une fonction donnée.

**2.** Montrer que l'aire limitée par l'axe $x'Ox$, les parallèles à $y'Oy$ d'abscisses respectives $a$ et $x$ la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ est donnée par une primitive de $f$. (la fonction $f(x)$ est supposée continue, positive dans l'intervalle $(a,\ b)$ et $x$ appartient à cet intervalle.)

**3.** *Application :* calculer l'aire limitée par les axes $x'Ox$, $y'Oy$, et la courbe représentant la variation de la fonction $y = \sin^2 x$ et la droite d'équation $x = \pi$. (On ne tracera pas la courbe $y = \sin^2 x$ .)

**Ex. 126.** ./1965/libanmat/exo-2/texte.tex

Établir entre les éléments d'un triangle $ABC$ les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$
$$A + B + C = \pi.$$

Réciproquement, six nombres $a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C$ vérifiant les relations de ce système sont-ils les mesures des côtés et des angles d'un triangle $ABC$ ?

**Ex. 127.** ./1965/libanmat/exo-3/texte.tex

**1.** Étudier algébriquement le mouvement rectiligne d'un mobile dont l'abscisse $x$ est donnée en fonction de $t$ par l'expression $x = a\cos\omega t$ ($a$ et $\omega$ étant deux constantes positives données).
Établir, entre l'abscisse et la vitesse, une relation indépendante du temps.

**2.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse se réduire à une fraction décimale.

**3.** *Application :* pour quelles valeurs de nombre entier $m$ la fraction $\dfrac{17m}{150}$ peut-elle se réduire à une fraction décimale ?



Retour page 1

### PROBLÈME 30

./1965/libanmat/pb/texte

On donne, dans un plan, deux cercles $(O)$ et $(O')$, de centres $O$ et $O'$, de rayons respectifs $R$ et $3R$, tangents extérieurement en $A$.
Soit $B$ leur centre d'homothétie positive et $(\Delta)$ leur axe radical.
On mène par $B$ une sécante variable $(D)$, qui coupe $(O)$ en $I$ et $J$ et $(O')$ en $I'$ et $J'$ de façon que $OI$ et $O'J'$ ne soient pas parallèles. $OJ$ et $O'I'$ se coupent en $M$, $OI$ et $O'J'$ en $N$.

**1.** Montrer que $M$ et $N$ sont les centres de cercles tangents en $(O)$ et $(O')$. Ces cercles seront désignés par $(M)$ et $(N)$. En déduire le lieu $(H)$ de $M$ et $N$ lorsque la sécante varie.

**2.** Montrer que les cercles de diamètres $OM$ et $O'M$ sont tangents à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

**3.** Déterminer les lieux géométriques des centres des cercles inscrits et exinscrit dans l'angle $M$ au triangle $MOO'$.

**4.** Le cercle $(M)$ rencontre $(\Delta)$ en $L$ et $S$.

a) Montrer qu'il existe un second cercle, $(M')$, passant par $L$ et tangent à $(O)$ et $(O')$. Construire géométriquement les cercles $(M)$ et $(M')$, connaissant un point $L$ de $(\Delta)$.

b) Calculer l'angle aigu formé par les cercles $(M)$ et $(M')$.

c) Le cercle $(M')$ rencontre $(\Delta)$ en $L$ et en $S'$. Montrer que les quatre points $L$, $A$, $S$, $S'$ forment une division harmonique.

**5.** En désignant par $x$ l'angle aigu formé par $(D)$ et $OO'$, calculer en fonction de $R$ et $x$ les segments $BI$, $BJ$, $BI'$, $BJ'$.
En déduire que le produit $\overline{BI}.\overline{BJ'}$ est constant.
Pouvait-on prévoir le résultat ?

N.B.– Les parties 2, 3, 4, 5, du problème sont indépendantes.

## XLVII. Lille, Sciences expérimentales

Ex. 128. ./1965/lillescexp/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre l'équation

$$1+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 4x=0,$$

où l'inconnue $x$ est la mesure d'un arc radians.
Indiquer sur le cercle trigonométrique, les extrémités de tous les arcs ayant même origine, A, et dont la mesure en radians est solution de l'équation.
Donner toutes les solutions de l'équation appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

**2.** Transformer l'expression

$$E=1+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 4x$$

en produit de sinus et de cosinus.

Ex. 129. ./1965/lillescexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction

$$y=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}.$$

Tracer sa courbe représentative, $(C)$, dans un système d'axes orthonormés $Ox$, $Oy$.
Construire les tangentes à cette courbe aux points, $A$ et $B$ d'abscisses 1 et 0.

**2.** Soit $O'$ le point d'abscisse 2 de l'axe $Ox$.
On considère le repère orthonormé formé par les axes $O'X$ et $O'Y$ ayant respectivement même direction et même sens que $Ox$ et $Oy$, l'unité de longueur n'étant pas modifiée.
Former une équation de $(C)$ dans ce nouveau repère et en déduire une propriété de symétrie de cette courbe.
Dans la suite du problème on utilisera les axes $O'X$ et $O'Y$.



Retour page 1

**3.** Calculer les aires des surfaces limitées, la première par la courbe $(C)$, l'axe $O'X$ et les droites d'équations $X=1$ et $X=3$, la seconde par la courbe $(C)$, l'axe $O'X$ et les droites d'équations $X=\dfrac{1}{3}$ et $X=1$.

**4.** soit $(\Delta)$ une droite variable, d'équation

$$Y=m(X+1).$$

Discuter, suivant la valeur de $m$, l'existence et le nombre de points communs à $(C)$ et $(\Delta)$. Préciser à quelle branche de la courbe ils appartiennent.

## XLVIII. Lille, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 130. ./1965/lillemelem/exo-1/texte.tex

On donne le nombre complexe

$$4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i}).$$

**1.** Donner le module et un argument de ce nombre.

**2.** Donner, sous forme trigonométrique et sous forme cartésienne, les racines cubiques de ce nombre.

**Problème 31** ./1965/lillemelem/pb/texte

On considère la courbe (H) d'équation $xy=1$, rapportée à deux axes orthonormés $Ox$, $Oy$. Soit $M_1$ et $M_2$ les points de (H) d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$ telles que $0<x_1<x_2$.
Les parallèles aux axes $Ox$ et $Oy$ issues de $M_1$ et $M_2$ forment le rectangle $M_1IM_2J$ de centre $P$ ; les tangentes $(D_1)$ et $(D_2)$ à la courbe (H) en $M_1$ et $M_2$ se coupent en $Q$.

**1.** Déterminer une équation de $(D_1)$ et $(D_2)$ et les coordonnées de $Q$. Établir que les points $O$, $Q$, $I$, $J$ sont alignés et qu'ils forment une division harmonique .

**2.** Évaluer, en fonction de $x_1$ et $x_2$ l'aire $S$ (positive) comprise entre la corde $M_1M_2$, l'arc $M_1M_2$ de la courbe (H).

On suppose que $M_1$ et $M_2$ décrivent la portion de (H) située dans le demi-plan $x>0$, de telle façon que $\dfrac{x_2}{x_1}=t$ demeure constant supérieur à1. Montrer que $S$ est constante, ainsi que le produit des coordonnées de $Q$. Quel est l'ensemble des points $Q$ ?

**3.** Calculer la dérivée de la fonction $f$ telle que $S=f(t)$. Calculer la limite de $u=\dfrac{S}{t}$ quand $t\to\infty$, puis celle du produit $S=u\times t$.

En déduire la variation de $S$ en fonction de $t$ quand $t\geqslant 1$ (il n'est pas demandé de graphe) et montrer que, si $S$ est constant, $t$ est constant.

**4.** $t$ demeurant constant, évaluer les rapports

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{PI}}.$$

Quel est l'ensemble des points $P$ ? Prouver que $M_1M_2$ est la tangente en $P$ à cet ensemble et que les aires des triangles $IM_1M_2$, $QM_1M_2$ et $OM_1M_2$ sont constantes.

## XLIX. Lille, série Technique et économie

Ex. 131. ./1965/lilletecheco/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $y=x(x-1)^2$.

**1.** Calculer sa dérivée ; établir son tableau de variation ; tracer son graphe, $(C)$ (repère orthogonal).

**2.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $x=+\dfrac{1}{3}$ et l'abscisse du deuxième point commun à cette tangente et à la courbe $(C)$.

Retour page 1

Ex. 132. ./1965/lilletecheco/exo-2/texte.tex

Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$. On désigne par $b$ la longueur du côté $AC$, par $c$ celle du côté $AB$. Soit $D$ un point du côté $AC$ tel que $AD = \frac{3b}{4}$.

**1.** Calculer $\tan CBD$ en fonction de $b$ et $c$.

**2.** On suppose que $b = c$.
Quelle est alors la valeur numérique de $\tan CBD$ ?
Quelle relation autre que $b = c$ doit-il exister entre les longueurs $b$ et $c$ pour que $\tan CBD$ prenne cette valeur numérique ?
Que peut-on dire, en ce cas, du triangle, $ABD$ ?

**Problème 32** ./1965/lilletecheco/pb/texte

On dispose de 8 jetons, qu'on peut imaginer sous la forme de petits disques numérotés de 1 à 8 sur une seule face de façon que rien ne les différencie quand ils sont placés sur une table en présentant à l'œil leur face non numérotée.
Les jetons sont mêlés avant chaque expérience : on procède alors à l'expérience, les faces numérotées des jetons n'étant pas visibles, puis on constate le résultat en retournant chaque jeton.

**1.** On dispose les jetons en ligne droite. Quelle est la probabilité pour que les numéros soient placés dans l'ordre

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

qu'on lise de droite à gauche, ou de gauche à droite, indifféremment ?

**2.** On dispose les jetons en cercle. Quelle est la probabilité pour que les jetons soient placés dans le même ordre que dans la question 1, qu'on les lise indifféremment en tournant dans un sens ou dans l'autre sens ?

**3.** On sépare les 8 jetons en 4 groupes de 2 jetons. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres portés par les deux jetons de chaque groupe soit la même, c'est à dire 9 ?

**4.** On retire 4 jetons sur les 8. Quelle est la probabilité pour que les 4 jetons retirés portent tous des numéros pairs ?

**5.** On retire 6 jetons sur les 8 ; la somme des nombres portés par les 6 jetons retirés est un nombre $Z$.
Montrer que $Z$ est un nombre entier de l'intervalle $[21 ; 33]$.
Ce nombre $Z$ est un variable aléatoire discrète.
Présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de $Z$.
Calculer son espérance mathématique et sa variance.

N.B. – Les cinq questions sont indépendantes.

## L. Lille, remplacement

Même sujets que ceux de Paris. Paris remplacement

## LI. Lyon, Sciences expérimentales

Ex. 133. ./1965/lyonscexp/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2x^2 + x + 1}{2x - 1}.$$

Montrer que $y$ peut se mettre sous la forme

$$y = ax + b + \frac{c}{2x - 1},$$

$a,\ b,\ c$ étant deux coefficients, qu'on déterminera.

**2.** Utiliser la courbe obtenue pour étudier, suivant les valeurs du paramètre $m$, l'existence des racines de l'équation
$$2x^2-(2m-1)x+m+1=0.$$

**3.** Appliquer la méthode précédente à la recherche, suivant les valeurs du paramètre $m$, du nombre de solutions de l'équation en $\alpha$ :
$$2\cos^2\alpha-(2m-1)\cos\alpha+m+1=0,$$
$\alpha$ désignant la mesure en degrés d'un angle d'un triangle.

Ex. 134. ./1965/lyonscexp/exo-2/texte.tex

On lance 3 dés. Quelle est la probabilité pour obtenir :

**1.** un total de 16;

**2.** un total au moins égal à 16;

**3.** un total strictement supérieur à 16?

Ex. 135. ./1965/lyonscexp/exo-3/texte.tex

Résoudre l'équation
$$2\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^{-2x}=13.$$

## LII. Lyon, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 136. ./1965/lyonmelem/exo-1/texte.tex

Sur le cercle de centre $O$ et de rayon 1, tracé dans un repère orthonormé $xOy$, on place les points A et B tels que
$$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{4},\quad (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}.$$

**1.** Quelles sont les nombres complexes ayant respectivement pour images A et B?

**2.** Évaluer, de deux façons différentes, leur produit.
En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

### Problème 33 ./1965/lyonmelem/pb/texte

Dans un repère orthonormé $xOy$, on place le point C de coordonnées $(0\ ;\ R)$, $R$ désignant un nombre positif donné.
On trace le cercle $(C)$ de centre C et de rayon $R$ et l'on désigne par $M$ un point variable de ce cercle tel que $(\overrightarrow{\mathrm{C}x},\ \overrightarrow{\mathrm{C}M})=\varphi$, $\varphi$ variant de $0$ à $2\pi$.

**1.** Soit $H$ la projection orthogonale de $M$ sur $Ox$ et $P$ le milieu de $HM$.
Trouver le lieu géométrique du point $P$.
Préciser les éléments de ce lieu : centre, foyers, directrices, excentricité et tangent en $P$.

**2.** Évaluer en fonction de $R$ et $\varphi$, les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point $M$.
Pour quelles valeurs de $\varphi$ ces coordonnées vérifient-elle la relation
$$y+2x=a,$$
$a$ désignant un nombre algébrique donné?
Discuter suivant les valeurs de $a$.
Retrouver géométriquement les résultats de cette discussion.

**3.** La droite $OM$ rencontre C$P$ en $D$ et, en $E$, le diamètre $(\Delta)$ du cercle $(C)$ parallèle à $Oy$; montrer que la division $(O,\ M,\ D,\ E)$ est harmonique.
Former l'équation de la droite $OM$; trouver les coordonnées du point $D$ en fonction de $R$ et $\varphi$; en déduire le lieu géométrique du point $D$.
Préciser les points communs à ce lieu et au cercle $(C)$; expliquer ce résultat.

**4.** On effectue l'inversion de centre $O$ et de puissance $2R^2$. Montrer que le point $D$ a pour inverse le symétrique $D'$ du point $M$ par rapport à $E$.
En déduire, les coordonnées de $D'$ en fonction de $R$ et $\varphi$, puis l'équation du lieu de $D'$ ; construire ce lieu.

## LIII. Lyon, série Technique et économie

**Ex. 137.** ./1965/lyontecheco/exo-1/texte.tex

Si l'on divise 644 et 1095 par un même nombre, on obtient respectivement 15 et 22 pour restes. Quel est ce nombre ?

**Ex. 138.** ./1965/lyontecheco/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$\log(2x-3)+\log(x-4)=2\log 5.$$

**Ex. 139.** ./1965/lyontecheco/exo-3/texte.tex

La moyenne des capacités respiratoires $X$ d'un échantillon de 400 personnes du sexe masculin est $3{,}7$ l, avec un écart type de $0{,}7$ l.
Sachant que les capacités respiratoires $X$ sont distribués suivant une loi normale, trouver le nombre de personnes ayant un capacité respiratoire comprise entre 3 l et $4{,}4$ l.
On rappelle que, dans une distribution normale, la probabilité d'avoir un écart réduit à un écart type est voisine de $0{,}68$.

**Ex. 140.** ./1965/lyontecheco/exo-4/texte.tex

**1.** Soit la fonction $y=ax^2+bx+c$. Déterminer $a,\ b,\ c$, sachant que :

a) la courbe représentative $(P)$ de cette fonction rencontre l'axe des $y$ au point d'ordonnée $(-6)$ ;

b) la fonction admet un maximum, égal à $+2$, pour $x=+2$.

**2.** Étudier la variation de cette fonction et construire la courbe représentative, $(P)$.

**3.** Calculer l'aire comprise entre la courbe $(P)$, l'axe des $x$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

**4.** Calculer la primitive $Y$ de la fonction $y$ qui s'annule pour $x=1$. En déduire les racines de l'équation $Y=0$.

**5.** Étudier la variation de la fonction $Y$ définie dans la question **??** et la représenter graphiquement sur le même graphique que la fonction $y$.

**6.** Déterminer les intersections des deux courbes représentatives $y$ et $Y$.

## LIV. Lyon remplacement, Sciences expérimentales

**Ex. 141.** ./1965/lyonscexprem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer trois nombres algébriques, $x,\ y,\ z$ tels qu'ils satisfassent aux conditions simultanées suivantes :

a) choisis dans l'ordre $x,\ y,\ z$, ils forment une progression arithmétique ;

b) choisis dans l'ordre $x,\ z,\ y$, ils forment une progression géométrique ;

c) leur somme est égale à 60.

**Ex. 142.** ./1965/lyonscexprem/exo-2/texte.tex

**1.** On envisage la fonction

$$y=2x+1-2\log x.$$

Étudier les variations et construire la courbe représentative de $y$, en se bornant aux valeurs de $x$ telles que $0<x\leqslant \mathrm{e}$, $\mathrm{e}$ étant la base des logarithmes népériens.
Le graphe sera construit dans un repère orthogonal $x'Ox,\ y'Oy$ tel que :

unité sur l'axe $Ox = 3$ cm ;
unité sur l'axe $Oy = 2$ cm.

On calculera, à $10^{-3}$ près, la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse $\mathrm{e}$.

**2.** Déterminer la fonction dérivée première de la fonction

$$Z = x(\log x - 1).$$

**3.** Déterminer les fonctions primitives de la fonction $y$ envisagée dans la question 1).

**4.** Calculer, à $10^{-3}$ près, en centimètres carrés, l'aire de la surface délimitée par la courbe, l'axe $Ox$ et les parallèles à l'axe $Oy$ d'équations

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{e}.$$

Ex. 143. ./1965/lyonscexprem/exo-3/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{-2x} = 13.$$

## LV. Lyon remplacement, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 144. ./1965/lyonmelemrem/exo-1/texte.tex

Les lettres $\mathrm{e}$ et $x$ désignant respectivement la base des logarithmes népériens et l'inconnue, résoudre, sur le corps de réels, l'équation

$$7\mathrm{e}^{-5x} - 8\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Les valeurs numériques des solutions seront données à l'approximation permise par les tables usuelles.

**Problème 34** ./1965/lyonmelemrem/pb/texte

Sur un axe $x'x$ d'origine $O$ on donne deux points fixes A et B, tels que $\overline{\mathrm{OA}} = -a$ et $\overline{\mathrm{OB}} = b$ ; $a$ et $b$ étant deux nombres réels tels que $a > b > 0$.
Un axe $zz'$ tourne autour de $O$.

**1.** $N$ désignant le symétrique de A par rapport à $z'z$ et $P$ celui de B par rapport à $z'z$, déterminer chacun des ensembles de points auxquels appartiennent $N$ et $P$.

**2.** Les droites A$P$ et $N$B se coupent en $M$.

a) Montrer que $M$ appartient à $z'z$.

b) La perpendiculaire en $M$ à $z'z$ coupe $x'x$ en $O'$. Prouver que $O'$ est un point fixe.

c) En déduire que l'ensemble des points $M$, lorsque $z'z$ varie, est un cercle $(M)$, dont on calculera le rayon et dont on précisera l'abscisse du centre, noté $F$.

**3.** a) Démontrer que le cercle $(M)$ précédent et le cercle ($M$AB) circonscrit au triangle $M$AB sont orthogonaux.

En déduire la tangente en $M$ au cercle ($M$AB) et l'enveloppe de cette tangente.

b) $\omega$ désignant le centre du cercle ($M$AB), on considère la droite $(\Delta)$ perpendiculaire en $\omega$ à $F\omega$.

Déterminer l'enveloppe de $(\Delta)$ lorsque $M$ varie. On indiquera avec précision les éléments fondamentaux et l'on construira le point de contact, $\mu$, de $(\Delta)$ avec son enveloppe.

**4.** On pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.

a) Déterminer l'intervalle de variation de $\theta$ lorsque $M$ décrit tout l'ensemble auquel il appartient.

b) Calculer $BM^2$ en fonction de $a$, $b$ et $\theta$.

c) Faisant l'hypothèse supplémentaire $a = 2b$, étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = BM$.



Retour page 1

# LVI. Madagascar, Sciences expérimentales

**Ex. 145.** ./1965/madagascarscexp/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction
$$y=\frac{x^2-2x+5}{x-1}.$$
Tracer le graphe $(G)$ de cette fonction.

**2.** Pour quelles valeurs de $m$ l'équation paramétrique
$$x^2-(m+2)x+m+5=0$$
a-t-elle deux racines négatives ?

**Ex. 146.** ./1965/madagascarscexp/exo-2/texte.tex

On donne l'expression
$$E=\tan x+\cot x-\tan 3x-\cot 3x.$$

**1.** Démontrer que l'on a aussi
$$E=\frac{4\cos 4x}{\sin 6x}.$$

**2.** Résoudre l'équation $E=4$. On indiquera, combien il y a, sur le cercle trigonométrique, d'extrémités d'arcs solutions.

**Ex. 147.** ./1965/madagascarscexp/exo-3/texte.tex

Un nombre naturel de quatre chiffres est le carré d'un autre nombre naturel ; le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

**1.** Montrer que ce nombre est divisible par $121$. Trouver ce nombre.

**2.** Donner une représentation chiffrée de ce nombre dans le système de numération octaval (système à base 8).

# LVII. Madagascar, Maths élémentaires

**Ex. 148.** ./1965/madagascarmelem/exo-1/texte.tex

On désigne pat $\theta$ la mesure d'un arc compris entre $\pi$ et $2\pi$ radians.
Calculer le module et l'argument de chacune des racines carrés du nombre complexe
$$z=\frac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}.$$

**Ex. 149.** ./1965/madagascarmelem/exo-2/texte.tex

Soit $x$ un nombre réel. Discuter, par la méthode graphique, suivant les valeurs du paramètre $m$, le nombre de racines de l'équation
$$x-\sqrt{-3x^2+6x+9}=m(x-3),$$
en utilisant le graphe, construit en repère orthonormé, de la fonction
$$y=x-\sqrt{-3x^2+6x+9}.$$

### Problème 35

./1965/madagascarmelem/pb/texte

Soit deux cercles $(O)$ et $(O')$, de centres respectifs $O$ et $O'$ et de rayons $R$ et $R'$ $(R > R')$, extérieurs l'un à l'autre, et de rayons parallèles variables, $OA$ et $OA'$, de même sens. La droite $AA'$ recoupe $(O)$ en $B$ et $(O')$ en $B'$.
La tangente en $B$ à $(O)$ coupe en $M$ la tangente en $A$ à $(0)$ et en $Q$ la tangente en $A'$ à $(O')$.
La tangente en $B'$ à $(O')$ coupe en $N$ la tangente en $A'$ à $(O')$ et en $P$ la tangente en $A$ à $(O)$.

**1.** Montrer que la droite $MN$ passe par un point fixe, $U$, et que les points $P$ et $Q$ sont sur une droite fixe. Quels sont les ensembles des points $M$ et $N$ ?

**2.** Les droites $OA$ et $O'B'$ se coupent en $S$ et les droites $OB$ et $O'A'$ en $S'$. Quel est l'ensemble des points $S$ et $S'$ ?
Déterminer les tangentes à cet ensemble en $S$ et $S'$. Montrer que le cercle de centre $S$ et de rayon $SA$ et le cercle de centre $S'$ et de rayon $S'A'$ ont orthogonaux à un cercle fixe, de centre $U$.

**3.** Le cercle $(P)$ de centre $P$ et de rayon $PA$ recoupe le cercle $(O)$ en C et le cercle $(O')$ en $C'$ et $B'$.
Montrer que chacune des droites $AC$ et $B'C'$ passent chacune par un point fixe quand $A$ varie. Que dire du point $T$ intersection de $AC$ et $C'B'$ ?
Montrer que les deux cercles de diamètre $PT$ forment un faisceau linéaire à points de base.

N.B.– la question 3 est indépendante de la question 2

## LVIII. Maroc, Sciences expérimentales

**Ex. 150.** ./1965/marocscexp/exo-1/texte.tex

On considère, dans un repère orthonormé $Ox$, $Oy$, le graphe $(L)$ de la fonction $y = \log x$.

**1.** Former l'équation de la tangente à $(L)$ au point $T$ de cette courbe d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

**2.** Calculer la dérivée de $F(x) = x\log x - x$ et calculer l'aire du triangle mixtiligne par l'axe $Ox$, la droite $OT$ et la courbe $(L)$.

**Ex. 151.** ./1965/marocscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Calculer $\cos 3t$ en fonction de $\cos t$.

**2.** Un point $M$, mobile sur la courbe d'équation $y = 4x^3 - 3x$, a pour abscisse $x = \cos t$ à l'instant $t$.
Construire dans un repère orthonormé $Ox$, $Oy$, la trajectoire de $M$.
Montrer que le mouvement projeté de $M$ sur $Oy$ est un mouvement sinusoïdal, dont on précisera l'amplitude.

**3.** Calculer les abscisses du mobile à ses passages aux points de la trajectoire d'ordonnée $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

## LIX. Maroc, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 152.** ./1965/marocmelem/exo-1/texte.tex

Montrer que la fraction $\dfrac{n+1}{2n+3}$ est irréductible quel que soit le nombre entier $n$.

**Ex. 153.** ./1965/marocmelem/exo-2/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$y = \frac{1 + (\log x)^2}{1 - (\log x)^2}.$$



Retour page 1

### PROBLÈME 36

./1965/marocmelem/pb/texte

Dans un plan on donne deux points fixes, $O$ et $A$ ($OA = 1$). Á chaque point $m$ quelconque du plan, on fait correspondre la point $M$ tel que $Om$ soit la bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et que $(OM) = (Om)^2$.

**1.** La transformation admet-elle des points doubles? Quels sont les transformés :

a) des points de la droite $OA$;

b) des points d'une droite quelconque passant par $O$;

c) du cercle de centre $O$ de rayon $1$;

d) d'un cercle quelconque de centre $O$?

**2.** Montrer que le symétrique, $m'$, de $m$ pour $O$ a même transformé que $m$ et que le cercle $(\Omega)$ de centre $\omega$ passant par $A$, $m$, $m'$ passe par $M$, recoupe $OM$ en $A'$, symétrique de $A$ par rapport au diamètre $O\omega$, et recoupe également $OA$ en $\mu$, symétrique de $M$ par rapport à $O\omega$.

En déduire la construction de $m$ connaissant $M$.

**3.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé où l'axe $x'Ox$ porte $\overrightarrow{OA}$.

On désignera par $(x, y)$ les coordonnées de $m$, par $(X, Y)$ celles de $M$. Établir les deux relations liant $x$, $y$, $X$, $Y$.

En déduire :

a) l'ensemble des positions de $M$ quand $m$ se déplace sur une parallèle à $Oy$ ou sur une parallèle à $Ox$;

b) sur quelles courbes doit se déplacer $M$ pour que $m$ décrive une hyperbole équilatère admettant les axes de coordonnées, soit pour asymptotes, soit pour axes de symétrie.

## LX. Maroc, série Technique et économie

### Ex. 154.

./1965/maroctecheco/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{4} + u\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)$.

En déduire les valeurs de

$$\cos u - \sin u \qquad \text{et} \qquad \cos u + \sin u.$$

**2.** Résoudre l'équation

$$\cos x - \cos 4x = \sin x + \sin 4x.$$

On indiquera sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

### Ex. 155.

./1965/maroctecheco/exo-2/texte.tex

**1.** Soit le nombre $A$ qui s'écrit 990 dans le système décimal. L'écrire dans le système de base huit.

**2.** Soit le nombre $B$ qui s'écrit 12 144 dans le système de base cinq. L'écrire dans le système décimal.

**3.** Trouver le p.g.c.d et le p.p.c.m des nombres $A$ et $B$ écrits dans le système décimal.

### Ex. 156.

./1965/maroctecheco/exo-3/texte.tex

On considère la fonction $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$.

**1.** Étudier les variations de cette fonction. Construire le graphe $(C)$ et montrer que ce graphe admet un point d'inflexion, $I$, dont on calculera les coordonnées.

**2.** Une droite variable, d'équation $y = h$, coupe le courbe $(C)$ en deux points $M_1$ et $M_2$, pour $h > 0$.

Quelle est l'équation du second degré qui donne les abscisses de $M_1$ et $M_2$?

Calculer en fonction de $h$ les coordonnées du milieu, $Q$, de $M_1M_2$. En déduire le lieu de ce point $Q$ lorsque $h$ varie.

**3.** On considère le cas particulier où $h = 4$; calculer $x_1$ et $x_2$. La tangente en $M_1$ recoupe la courbe $(C)$ en un point $P_1$; la tangente en $M_2$ recoupe $(C)$ en un autre point, $P_2$. Calculer les coordonnées de $P_1$ et $P_2$.

Retour page 1

# LXI. Maroc remplacement, Sciences expérimentales

**Ex. 157.** ./1965/marocscexprem/exo-1/texte.tex

**Ex. 158.** ./1965/marocscexprem/exo-2/texte.tex

Étudier les variations et tracer (par rapport à un système d'axes orthonormé) la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos 2x.$$

**Ex. 159.** ./1965/marocscexprem/exo-3/texte.tex

**1.** Vérifier l'identité

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) + 2x^2y^2.$$

**2.** Résoudre le système de deux équations à deux inconnues $x$ et $y$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2, \\ x^4 + y^4 = 160\ 625. \end{cases}$$

($\log$ veut dire, ici logarithme décimal.)

# LXII. Maroc remplacement, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 160.** ./1965/marocmelemrem/exo-1/texte.tex

$ABC$ étant un triangle équilatéral, trouver l'ensemble des points $M$ du plan tels que

$$2\overline{MA^2} + \overline{MB^2} + \overline{MC^2} = k^2,$$

$k$ étant un réel donné.
Discuter en fonction de $k$ et du côté $a$ du triangle.

**Ex. 161.** ./1965/marocmelemrem/exo-2/texte.tex

A- Déterminer les limites, quand $x \to 0$ des expressions

$$\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^4+1-\sqrt{1-x^4}}{x^2\sqrt{1-x^4}}.$$

B- On considère la fonction

$$y = \frac{1+\epsilon\sqrt{1-x^4}}{x} \quad (\text{où } \epsilon = \pm 1).$$

a) Calculer le fonction dérivée.

b) Étudier les variations et construire le graphe en repère orthonormé dans les deux cas suivants :

$$\epsilon = +1 \qquad \text{et} \qquad \epsilon = -1.$$

c) En déduire l'ensemble $(C)$ des points $M$ dont les coordonnées sont liées par la relation

$$xy^2 - 2y + x^3 = 0.$$

C- a) Montrer que les relations

$$(OM,\ OP) \equiv 0 \ (\text{mod. } \pi) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = k$$

sont, dans le plan équivalentes à :
« $P$ est l'inverse de $M$ dans l'inversion de pôle $O$ et de puissance $k$ ».

Retour page 1

b) Soit, dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, $x$ et $y$les coordonnées de $M$, $X$ et $Y$ les coordonnées de $P$, calculer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

c) Montrer que la courbe $(C)$ est invariante dans l'inversion de pôle $A(+1\ ;\ +1)$ et de puissance 4.

D- Soit, dans un même repère orthonormé, $\Delta$ la droite d'équation $x=1$, qui coupe $xx'$ en $B$.
Un droite $D$ variable, passant par $O$, coupe $\Delta$ en $T$.
La droite $D$ est telle que

$$(x'x,\ D) \equiv \theta \ (\text{mod. } \pi), \qquad \text{avec } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

On construit sur $x'x$ le point $K$ défini par

$$OK = 2\ BT, \qquad \overline{OK} > 0.$$

a) Construire les cercles $(\gamma)$ et $(\gamma')$ passant par $B$ et $K$ et tangents à $D$.

b) Trouver, lorsque $D$ varie, l'ensemble des points de contact, $M$ et $M'$, de $D$ avec $(\gamma)$ et $(\gamma')$.

c) On donne les points

$$A(+1\ ;\ +1) \qquad \text{et} \qquad A'(-1\ ;\ -1).$$

Soit $(\gamma_1)$ et $(\gamma'_1)$ les inverses de $(\gamma)$ et $(\gamma')$ dans l'inversion de pôle $A$ et de puissance 4.
Montrer qu'il existe un cercle $(d)$ passant par $A$ et $A'$ et tangent à $(\gamma_1)$ et $(\gamma'_1)$.
Trouver, lorsque $\theta$ varie, l'ensemble des points de contact.

## LXIII. Maroc remplacement, série Technique et économie

**Ex. 162.** ./1965/maroctechecorem/exo-1/texte.tex

Montrer que le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 60 lorsque le nombre intermédiaire est un carré parfait.

**Ex. 163.** ./1965/maroctechecorem/exo-2/texte.tex

Calculer la dérivée de

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Expliquer le résultat.

**Ex. 164.** ./1965/maroctechecorem/exo-3/texte.tex

Étudier les variations de la fonction $y = 2x\log x$, où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$. Construire le graphe correspondant.
(On admettra que, lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives, $x\log x$ tend vers zéro.)

**Ex. 165.** ./1965/maroctechecorem/exo-4/texte.tex

On considère la fonction

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

**1.** a) Déterminer les coefficients $a$, $b$, $c$, $d$ pour qu'elle admette un minimum égal à -2 pour $x=0$ et un maximum égal à 10 pour $x=2$.

b) Étudier les variations de la fonction

$$y = -3x^3 + 9x^2 - 2$$

et tracer le graphe (C).

(On prendra 2 cm comme unité d'abscisse et 1 cm comme unité d'ordonnée.)

**2.** La droite $y=10$ rencontre (C) en un point $M$ d'abscisse +2 et en un autre point, $P$, dont on calculera l'abscisse.

La droite $y=-2$ rencontre (C) en un point $m$ d'abscisse 0 et en un autre point, $p$, dont on calculera aussi l'abscisse.

Vérifier que les droites $mM$ et $Pp$ se coupent en un point $I$ situé sur (C) et que la tangente en $I$, dont on calculera le coefficient directeur, est une tangente d'inflexion.

Montrer que le point $I$ est centre de symétrie de (C).

**3.** Calculer, en centimètres carrés, l'aire $(PmpM)$ limitée par les segments de droite $PM$ et $pm$ d'une part et par les arcs $Pm$ et $Mp$ de la courbe (C) d'autre part.

## LXIV. Maroc, bac Marocain, série mathématiques

Ex. 166. ./1965/marocbacmaths/exo-1/texte.tex

On désigne par $z = a + ib$ un nombre complexe quelconque ($a$ et $b$ réels), par $\overline{z} = a - ib$ le nombre conjugué de $z$ et $|z|$ le module de $z$.
On définit sur l'ensemble des nombres complexes une loi de composition interne en posant

$$z \star z' = z.\overline{z'}.$$

($z.\overline{z'}$ désigne le produit de $a$ par le conjugué de $z'$.)

**1.** Montrer que l'on a

$$\left|z \star z'\right| = \left|z.z'\right|.$$

**2.** la loi considérée est-elle commutative ? est-elle associative ?
Est-elle distributive par rapport à l'addition de deux nombres complexes ?

**3.** On donne $z = a + b\text{i}$. Déterminer le nombre complexe $z' = x + y\text{i}$ ($x$ et $y$ réels) tels que

$$z \star z' = 1.$$

Vérifier que $z'$ peut s'exprimer en fonction de $z$ et $|z|$.
A-t-on alors $z' \star z = 1$ ?

**4.** Déterminer le nombre complexe $z = x + y\text{i}$ tel que

$$(z \star z) \star z = \text{i}.$$

Ex. 167. ./1965/marocbacmaths/exo-2/texte.tex

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction

$$y = \text{e}^{\frac{x-1}{x+1}}$$

de la variable $x$ et le tracé de son graphe.
On suivra rigoureusement le plan suivant :

**1.** Quels sont les intervalles de définition de $y$ ?
Étudier le comportement de $y$ au voisinage des bornes de ces intervalles.

**2.** Calculer la dérivée de $y$ et en déduire les variations de $y$.

**3.** Le graphe $(G)$ de $y$ se compose de deux arcs dont l'une a une extrémité à distance finie : déterminer la demi-tangente en ce point à $(G)$. Déterminer le point d'inflexion de $(G)$.

**4.** Construire $G$ avec soin, dans un repère orthonormé ; on prendra des vecteurs unitaires ayant 3 cm de longueur. Le nombre e, base des logarithmes népériens, vaut environ 2,718. . . .

Ex. 168. ./1965/marocbacmaths/exo-3/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On se donne, dans ce plan, les points $A$, $B$, $M$ et $m$ dont les coordonnées figurent dans le tableau ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | $a$ | 0 |
| $B$ | $-a$ | 0 |
| $M$ | $x_0$ | $y_0$ |
| $m$ | $x_0$ | 0 |

On suppose que $a$ est positif et $y_0$ non nul. $P$ et $Q$ sont les projections orthogonales de $m$ sur les droites $MA$ et $MB$.

Retour page 1

**1.** Montrer que les points $A$, $B$, $P$ et $Q$ sont sur un même cercle, qui sera désigné par $(C)$.

**2.** Évaluer, en fonction des coordonnées de $M$, la puissance de $M$ par rapport à $(C)$, écrire alors l'équation de $(C)$.

**3.** Écrire l'équation du cercle $(C')$ de diamètre $Mm$ ; quel est le rôle de $PQ$ pour les cercles $(C)$ et $(C')$ ? En déduire l'équation de $PQ$.

N.B.- les coefficients des diverses équations seront calculées en fonction de $a$, $x_0$ et $y_0$.

**4.** Quel est l'ensemble des points $M$ fournissant :

a) des droites $PQ$ parallèles à $y'Oy$ ;

b) des droites $PQ$ passant par le point fixe $I$ de coordonnées $(b,\ 0)$ avec $|b| > a$ ?

Ex. 169. ./1965/marocbacmaths/exo-4/texte.tex

Soit $n$ un entier donné. On désigne par $S$ la suite d'entiers naturels $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n)$.
Soit $a$ un nombre premier inférieur ou égal à $n$.

**1.** Déterminer, en fonction de $n$ et $a$, le nombre $q_1$ de termes de $S$ qui sont multiples de $a$.
Comment obtenir à partir de $q_1$ et de $a$, le nombre $q_2$ de termes de $S$ qui sont multiples de $a^2$ ?

**2.** D'une façon générale, $q_k$ étant le nombre de termes de $S$ qui sont multiples de $a^k$, déterminer, en fonction de $q_k$ et de $a$, le nombre $q_{k+1}$ de termes de $S$ qui sont multiples de $a^{k+1}$.

**3.** On considère le produit

$$1.2.3\ \ldots\ (n-1).n = n! \quad \text{(factorielle } n\text{)}.$$

Soit $a$ un des facteurs premiers figurant dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers.
Déterminer l'exposant $N$ de $a$ dans cette composition, en fonction de $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_k,\ q_{k+1},\ \ldots,\ q_n$.
($N$ est le plus grand entier tel que $a^N \leqslant n$.)

**4.** *Application :* Décomposer $50!$ (factorielle 50) en facteurs premiers.

# LXV. Maroc, bac Marocain, section mathématiques

Ex. 170. ./1965/marocsecmath/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier et représenter graphiquement les variations de

$$y = \log|\log x|\,.$$

On précisera l'intervalle de définition, l'étude des branches infinies, les coordonnées du point d'inflexion, $I$, et le coefficient directeur de la tangente au graphe en ce point.

**2.** *Application :* l'équation $\log|\log x| = m$ admet-elle deux racines, $x_1$ et $x_2$, quel que soit $m$ ? Quand elles existent, montrer que leur produit est une constante, que l'on déterminera.

**3.**

Ex. 171. ./1965/marocsecmath/exo-2/texte.tex

$M_1,\ M_2,\ M_3$ sont trois points fixes du plan complexe, formant un véritable triangle, d'affixes $z_1,\ z_2,\ z_3$ respectivement.
Soit $M$ un point variable, d'affixe $z$.
On considère le nombre complexe

$$z' = \frac{z-z_2}{z-z_1} : \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

**1.** Interpréter géométriquement, et dans cet ordre, le module et l'argument des nombres complexes

$$\frac{z-z_2}{z-z_1},\ qquad \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \qquad z'.$$

**2.** *Application :*

a) Trouver l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit un nombre réel.

b) Trouver l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ ait 1pour module.



Retour page 1

**Ex. 172.** ./1965/marocsecmath/exo-3/texte.tex

$Oxyz$ étant un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite $(D)$ définie par $x=0$, $z=R$ et la droite $(D')$ définie par $y=0$, $z=-R$.
On prend sur $(D)$, le point $M$ de coordonnées

$$x=0, \qquad y=R\sqrt{2}\tan\alpha, \qquad z=R$$

et, sur $(D')$, le point $P$ de coordonnées

$$x=R\sqrt{2}\cot\alpha, \qquad y=0, \qquad z=-R.$$

Soit $A$ l'intersection de $(D)$ et $(Oz)$, $B$ celle de $(D')$ et $Oz$.

**1.** Vérifier que le produit $\overline{AM}.\overline{BP}$ est constant lorsque $\alpha$ varie et donner sa valeur en fonction de $R$.

**2.** Calculer les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{MP}$.

Soit $I$ le point de $MP$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{MI}}{\overrightarrow{MP}}=\rho$, $\rho$ étant un nombre réel donné.

Calculer les coordonnées, $x$, $y$, $z$ de $I$ en fonction de $R$, $\rho$ et $\alpha$.

**3.** Soit $(\Pi)$ le plan mené de $O$ perpendiculairement à $MP$. On suppose que $I$ appartient à $(\Pi)$ : calculer $\rho$ et vérifier que l'on a $\rho=\sin^2\alpha$.

**4.** Montrer que l'on peut alors exprimer $x$, $y$, $z$ en fonction de $R$ et des fonctions circulaires de $2\alpha$.

Trouver, entre $x$, $y$, $z$, deux relations indépendantes de $\alpha$ et en déduire que le lieu de $I$, lorsque $\alpha$ varie, est un cercle, que l'on déterminera.

## LXVI. Montpellier

Même sujets que pour Aix Marseille. Aix Marseille.

## LXVII. Montréal & New York, Sciences expérimentales

**Ex. 173.** ./1965/newyorkscexp/exo-1/texte.tex

Étudier la variation et tracer la courbe représentative de la fonction

$$y=\frac{x}{x^2-1}.$$

Montrer que la courbe représentative admet un centre de symétrie.

**Ex. 174.** ./1965/newyorkscexp/exo-2/texte.tex

Calculer, avec l'aide des tables, toutes les solutions de l'équation

$$\sin 12x = 0{,}3$$

comprises entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

**Ex. 175.** ./1965/newyorkscexp/exo-3/texte.tex

En utilisant la table des logarithmes, calculer l'expression

$$\frac{\pi\sqrt[3]{320}}{\cos\frac{\pi}{12}}.$$

**Ex. 176.** ./1965/newyorkscexp/exo-4/texte.tex

Résoudre l'équation

$$\exp\left(2\frac{x+1}{x}\right)-4\exp\left(\frac{x+1}{x}\right)=5,$$

où $x$ est l'inconnue.

# LXVIII. Montréal & New York, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 177.** ./1965/newyorkmelem/exo-1/texte.tex

Chercher tous les ensembles de trois nombres entiers naturels $x,\ y$ et $z$ tels que

$$\begin{cases} 2x = y+z \\ x+y+z = xyz. \end{cases}$$

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n \ldots\}.$$

**Ex. 178.** ./1965/newyorkmelem/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$2\left(\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin^2 x\right) = \sqrt{2} - 1.$$

On placera sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

**Ex. 179.** ./1965/newyorkmelem/exo-3/texte.tex

Les deux nombres réels $a$ et $b$ sont liés par la relation

$$2a + \mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b} = 0.$$

Montrer que cette égalité entraîne la suivante :

$$b = \log(a + \sqrt{a^2+1}),$$

$\mathrm{e}$ désignant la base des logarithmes népériens.

**Ex. 180.** ./1965/newyorkmelem/exo-4/texte.tex

On considère la fonction $y_\lambda = \dfrac{\lambda x^2 - 2x + \lambda}{x^2 + 5x + 4}$ de la variable réelle $x$ ; $\lambda$ étant un paramètre réel.

**1.** Déterminer $\lambda$ pour que cette fonction présente un maximum et un minimum. Déterminer $\lambda$ pour que cette fonction soit décroissante sur la droite réelle $\mathbb{R}$.
   Cette fonction peut-elle être croissante sur $\mathbb{R}$.
   Exite-t-il une valeur $\lambda_0$ du paramètre $\lambda$ pour laquelle la fonction $y_{\lambda_0}$ a un seul maximum ou un seul minimum ?

**2.** Construire la courbe représentative de la fonction $y_1$ obtenue en donnant au paramètre $\lambda$ la valeur $+1$.
   Soit $(\Gamma)$ cette courbe.

**3.** Étudier l'intersection de la courbe $(\Gamma)$ avec une parallèle variable à l'axe des abscisses, d'ordonnée $k$.
   Lorsque l'intersection précédente n'est pas vide, elle comprend, en général, deux points, $M(k)$ et $M'(k)$.
   Soit $A(k)$ le point dont les coordonnées sont $(0\ ;\ k)$. Soit $B(k)$ le conjugué harmonique de $A(k)$ par rapport aux points $M(k)$ et $M'(k)$.
   Déterminer et construire l'ensemble des points $B(k)$ lorsque $k$ varie.

# LXIX. Nancy, Sciences expérimentales

**Ex. 181.** ./1965/nancyscexp/exo-1/texte.tex

Montrer que, pour tout entier $n$ positif ou nul, le nombre $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7.

Retour page 1

**Ex. 182.** ./1965/nancyscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier la fonction $y = \dfrac{x^3 - 10x^2}{1-x}$. En tracer la courbe représentative, $(C)$, par rapport à un repère orthonormé $Ox$, $Oy$.

**2.** On mène par le point $A$ de coordonnées $x = 10$, $y = 0$ une droite de pente $m$. Calculer les coordonnées des points communs à cette droite et à la courbe $(C)$.
Discuter le nombre suivant les valeurs de $m$.
Déterminer les points de contact des tangentes issues de $A$ à $(C)$. On désignera par $M$ celui des points qui n'est pas sur $Ox$.

**3.** On pose $X = x - 1$. Exprimer $y$ en fonction de $X$. Utiliser ce résultat :

a) pour calculer l'aire comprise entre la courbe $(C)$ et le segment de droite $AM$ ;

b) pour trouver les points de $(C)$ dont les coordonnées sont des nombres entiers.

## LXX. Nancy, Mathématiques élémentaires

**Ex. 183.** ./1965/nancymelem/exo-1/texte.tex

Déterminer les entiers naturels $x$ et $y$ qui admettent comme P.G.C.D le nombre 11 et comme produit le nombre 10 164.

**PROBLÈME 37** ./1965/nancymelem/pb/texte

Soit un repère orthonormé $x'ox$, $y'Oy$ et un point $I$ de coordonnées $a$ et $b$. Écrire une équation du cercle (C) de centre $I$, de rayon $R$, puis choisir $R$ pour que la puissance de l'origine $O$ par rapport au cercle (C) soit égale à 1.
Soit E l'ensemble des cercles (C) ainsi définis. On propose, dans toute la suite du problème, l'étude de certains sous-ensembles, $E_1$, $E_2$, $E_3$ de l'ensemble E.

**1.** Soit $E_1$ l'ensemble des cercles ($C_1$), appartenant à E et tels que $b = 2a$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Déterminer les cercles ($C_1$) qui passent par un point donné $M$, de coordonnées $(x_0,\ +1)$. Discuter.

c) Caractériser géométriquement l'ensemble $E_1$ et donner une solution géométrique de la question précédente.

**2.** Soit $E_2$ l'ensemble des cercles ($C_2$) appartenant à E, qui passent par le point $P(+1,\ +1)$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Démontrer que ces cercles passent par un deuxième point fixe, $P'$.

c) Déterminer par le calcul et construire géométriquement les cercles ($C_2$) tangents à $x'Ox$.

**3.** Soit $E_3$ l'ensemble des cercles ($C_3$) appartenant à E et tangents à la droite $(D)$ d'équation $y = -1$.

a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

b) Retrouver géométriquement cet ensemble en faisant une inversion de centre $O$, de puissance 1, et en montrant que les cercles ($C_3$) sont tangents à un cercle fixe.

## LXXI. Nancy, Mathématiques et Technique

**Ex. 184.** ./1965/nancymatech/exo-1/texte.tex

Trouver les expressions cartésiennes et trigonométriques des racines cubiques du nombre complexe $z = -8\mathrm{i}$.

**Ex. 185.** ./1965/nancymatech/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^3 x = 0.$$



Retour page 1

## 🏛Problème 38

./1965/nancymatech/pb/texte

On considère un faisceau linéaire de cercles, à points de base A et B. On appelle $(\Delta)$ la médiatrice du segment AB. Un cercle variable $(\Omega)$, de centre $\omega$, appartenant au faisceau, coupe $(\Delta)$ en D et D'.
Les droites BD et BD' coupent respectivement la tangente en A à $(\Omega)$ en C et C'.

**1.** Montrer que AD et AD' sont bissectrices de l'angle BAC du triangle ABC. En déduire que l'ensemble des points C et C' est une hyperbole (H) de foyer A et de directrice associée $(\Delta)$. Déterminer les éléments de (H).

On appellera F le second foyer de (H). Montrer que, si K est le symétrique de A par rapport à B, on a

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FK}} = -\frac{1}{2}.$$

**2.** Soit I le pôle de la droite BD par rapport au cercle $(\Omega)$. Montrer que CI passe par K. Soi CT la tangente, autre que CA, menée par C à $(\Omega)$. En étudiant le faisceau des droites CI, CB, CT, CA, prouver que CT passe par F. Quel est le point de concours des tangentes à l'hyperbole (H) en C et C'?

**3.** On suppose que C est du même côté que A par rapport à $(\Delta)$ et que le triangle ABC existe. Soit $a$, $b$ et $c$ les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. Démontrer que $a^2 = b(b+c)$ et que $b < a < 2b$.

**4.** On suppose que $a$, $b$ et $c$ sont des nombres entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Démontrer que $b$ et $c$ sont premiers entre eux, ainsi que $b$ et $b+c$.

En déduire que $b$ et $b+c$ sont des nombres parfaits .

On donne $b = 25$; déterminer $a$ et $c$.

# LXXII. Nancy, série Technique et économie

**Ex. 186.** ./1965/nancytecheco/exo-1/texte.tex

On considère un jeu classique de 32 cartes.

a) Quel nombre de donnes différentes de 8 cartes peut-on obtenir?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir, dans une donne de 8 cartes, simultanément l'as, le roi et le dame de cœur?

**Ex. 187.** ./1965/nancytecheco/exo-2/texte.tex

Trouver les angles $x$ compris entre $0$ et $2\pi$ vérifiant l'équation

$$\frac{4(1-\cos x)^2}{\cos^2 x - 4} = -3.$$

**Ex. 188.** ./1965/nancytecheco/exo-3/texte.tex

On considère la fonction

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x+1}. \tag{1}$$

**1.** Pour quelle valeur de $x$ cette fonction n'est-elle pas définie? En supposant que $x$ ne prenne pas cette valeur, calculer la dérivée de $y$ par rapport à $x$.

**2.** Selon les valeurs de $x$, étudier le sens de variation de la fonction $y$.

**3.** Soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction ((1)), le plan étant rapporté à un repère orthonormé. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $(C)$ avec la droite $(D)$ d'équation

$$y = \frac{3x}{4} + m.$$

Pour quelle valeur de $m$ ce problème est-il impossible?



Retour page 1

## LXXIII. Nancy, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon : Lyon remplacement

## LXXIV. Nantes, Sciences expérimentales

**Ex. 189.** ./1965/nantesscexp/exo-1/texte.tex

Existe-t-il une fraction décimale égale à

**1.** $\dfrac{1\,365}{390}$ ;

**2.** $\dfrac{660}{780}$ ?

**Ex. 190.** ./1965/nantesscexp/exo-2/texte.tex

Soit la fonction

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + b'x + c'}.$$

**1.** Déterminer cette fonction de telle sorte que le graphe ait pour asymptotes $y = 1$ et $x = 1$, $x = 2$.

**2.** Étudier ses variations et construire la courbe représentative $(C)$ (axes orthonormés).

**3.** Soit $(\Gamma)$ la courbe d'équation

$$y = k(x+1)(x+2), \quad k = \text{constante}.$$

Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de $(C)$ et $(\Gamma)$. Discuter cette équation.

**4.** Montrer que les courbes $(C)$ et $(\Gamma)$ peuvent être tangente pour une valeur de $k \neq 0$.

Construire $(\Gamma)$ dans cette hypothèse. Équation de la tangente commune en chacun des points de contact.

**5.** Si $k = -1$, calculer l'aire comprise entre l'axe des $x$ et la courbe $(\Gamma)$.

## LXXV. Nantes, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille, maths élémentaires

## LXXVI. Nantes, série Technique et économie

**Ex. 191.** ./1965/nantestecheco/exo-1/texte.tex

Résoudre en nombres entiers positifs $x^2 - y^2 = 33$.

**Ex. 192.** ./1965/nantestecheco/exo-2/texte.tex

Dans un jeu de 32 cartes, on extrait 8 cartes. Quelle est la probabilité pour que, parmi les cartes extraites, il y ait respectivement :

**1.** les 4 rois,

**2.** 3 rois seulement,

**3.** 2 rois seulement,

**4.** 1 roi au plus.

Vérification.

**Ex. 193.** ./1965/nantestecheco/exo-3/texte.tex

On trace deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle de centre $O$ et de rayon $R$.
On considère sur ce cercle, le point fixe $A$ défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$, le symétrique $B$ de $A$ par rapport à $x'Ox$ et le point $M$ variable défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, avec $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, l'unité d'angle est le radian.

**1.** Écrire les équations des droites $AM$ et $BM$. On pose $z = \overline{DM}$, $C$ et $D$ étant les points d'intersection des droites $AM$ et $BM$ avec $x'Ox$, respectivement.
Montrer que
$$z = 2R\sqrt{3}\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}.$$

**2.** Rendre $z$ calculable par logarithmes et calculer sa valeur lorsque la mesure de l'angle $\theta$ est $28°39'$ et $R = 5$ cm, avec la précision des tables de logarithmes.

**3.** Étudier les variations de $z$ en fonction de $\theta$ exprimé en radians.
Construire le graphe par rapport à deux axes $\omega\theta$ et $\omega z$ perpendiculaires, avec $R = 5$ cm, en prenant pour $\pi$ la valeur approchée 3,14 et les échelles graphiques suivantes : 2 cm pour représenter 1 radian sur l'axe $\omega\theta$ et 0,5 cm pour 1 cm sur $\omega z$.

**4.** Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe $\omega\theta$, le point $\omega$ et la droite $\theta = \frac{\pi}{2}$.
(On utilisera le résultat suivant : si $u$ est une fonction de $x$, non nulle pour la valeur considérée, dérivable, la dérivée de $\log|u|$ est $\frac{u'}{u}$.)

## LXXVII. Nantes, remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille remplacement

## LXXVIII. Paris, Sciences expérimentales

**Ex. 194.** ./1965/parisscexp/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathrm{C}_n^p$ le nombre de combinaisons $p$ à $p$ de $n$ éléments.
Trouver une fraction égale à $\mathrm{C}_7^4 : \mathrm{C}_9^3$ et telle que le plus grand commun diviseur de ses termes soit 24.

**Ex. 195.** ./1965/parisscexp/exo-2/texte.tex

On rappelle que la dérivée de $\mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^x$.

**1.** Calculer les deux premières dérivées de la fonction
$$y(x) = \mathrm{e}^x(3x+5).$$

**2.** Établir la formule donnant la dérivée d'ordre $n$ de $y$.

**3.** Exprimer la somme
$$y(x) + y'(x) + \cdots + y^{(n)}(x)$$
sous forme aussi réduite que possible.

**Ex. 196.** ./1965/parisscexp/exo-3/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction
$$x(t) = 2\cos^2 t + \sin 2t \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

**2.** Tracer le graphe (C) de cette fonction par rapport à un système d'axes orthonormé $t'Ot$, $x'Ox$.

**3.** Construire la tangente $(C)$ au point d'abscisse $t = 0$.

**4.** Évaluer l'aire du domaine limité par les deux demi-droites $Ox$ et $Ot$ et l'arc de courbe (C) qui correspond à $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**Ex. 197.** ./1965/parisscexp/exo-4/texte.tex

L'équation $x(t) = 2\cos^2 t + \sin 2t$, dans laquelle $t$ prend toutes les valeurs réelles, est l'équation horaire du mouvement d'un point $M$ sur un axe $x'Ox$.
Montrer que ce mouvement est un mouvement vibratoire simple, dont on cherchera l'équation réduite sous la forme $x = a + b\cos(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$ et $b > 0$, et dont on donnera les caractéristiques.

## LXXIX. Paris, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 198.** ./1965/parismelem/exo-1/texte.tex

Trouver tous les entiers naturels diviseurs du nombre 108.
Trouver tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels tels que leur plus grand commun diviseur $d$ et leur plus petit commun multiple $m$ satisfassent à

$$m - 3d = 108, \qquad 10 < d < 15.$$

**Ex. 199.** ./1965/parismelem/exo-2/texte.tex

a) Déterminer, en posant $x = \dfrac{1}{u}$, la limite de $x\ln x$ quand $x$ tend vers zéro $(x > 0)$.

b) Déterminer les nombres $a$ et $b$ de manière que la fonction $z = x(a\ln x + b)$ soit une primitive de la fonction $y = -\ln x$.

c) On désigne par $S(t)$, pour $0 < t < 1$, l'aire du domaine plan délimité par l'axe $x'x$ et la courbe

$$y = -\ln x$$

compris entre les parallèles à $y'y$ d'abscisses $t$ et 1.
Calculer $S(t)$ et déterminer la limite de $S(t)$ quand $t$ tend vers zéro. (Le repère utilisé est supposé orthonormé.)

**Problème 39** ./1965/parismelem/pb/texte

Par rapport à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ (origine $O$, axes $x'Ox$ et $y'Oy$) une conique E a pour équation

$$12x^2 + 16y^2 + 12ax - 9a^2 = 0,$$

où $a$ désigne la mesure d'une longueur donnée $(a > 0)$.

**1.** Calculer les coordonnées de son centre, de ses foyers, et de ses sommets. Écrire les équations de ses directrices D et D' (on désignera par D celel qui rencontre l'axe focal en un point d'abscisse positive). Calculer son excentricité $e$.
Soit $M$ un point quelconque de E. Calculer en fonction de $a$ et de l'abscisse $x$ du point $M$ l'expression rationnelle de la longueur $OM$. On pose

$$OM = \rho \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}) = \theta.$$

Calculer $\rho$ en fonction de $a$ et de $\theta$.

**2.** A chaque point $M$ de E, de coordonnées $x$ , $y$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, affixe de $M$.
Écrire l'expression trigonométrique de $z$ (on désignera par $\theta$ son argument et l'on exprimera le module de $z$ en fonction de $a$ et de $\theta$).
Soit $z'$ et $z''$ les affixes des deux points $M'$ et $M''$ de E, d'arguments respectifs $\alpha$ et $\alpha + \pi$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' - z''$ et en déduire la longueur du segment $M'M''$.

b) On considère, dans le plan, le point $P$ dont l'affixe $Z$ est définie par la relation :

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Écrire l'expression trigonométrique de $Z$. En déduire le lien géométrique de $P$ quand $\alpha$ varie. Que peut-on dire de la figure formée par les points $O,\ P,\ M',\ M''$ ?

Retour page 1

**3.** Soit $(J)$ l'inversion de pôle $O$ qui laisse invariant le cercle principal de E et $m'$, $m''$, $p$ les transformés de $M'$, $M''$, $P$ par $(J)$. Quelle particularité présente la figure formée par les trois points $m'$, $m''$, $p$ ? Calculer la longueur du segment $m'm''$. Quel est le lieu géométrique de $p$ ? En déduire une définition géométrique de la courbe transformée de E par $(J)$.

## LXXX. Paris composition refaite, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 200.** ./1965/parismelembis/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\tan\alpha}$ suivant la valeur de l'angle $\alpha$.

Placer, relativement à un repère orthonormé, les images A et B des nombres

$$z_0 = z = \frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{1+\mathrm{i}\tan\frac{2\pi}{3}}.$$

**2.** Soit $M$ l'image du nombre complexe

$$Z = \frac{1+\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}\tan\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}x\left(1+\mathrm{i}\tan\frac{2\pi}{3}\right)},$$

où $x$ est un nombre réel quelconque.

Calculer le module $r$ et l'argument $\theta$ de $\dfrac{Z-z_0}{Z-z_1}$.

Quels sont les affixes complexes des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ?

Du calcul de $r$ et $\theta$ déduire l'ensemble des points $M$ obtenus lorsque $x$ varie de $0$ à $+\infty$.

### Problème 40

./1965/parismelembis/pb/texte

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $(Ox,\ Oy)$.

**1.** Soit $a$, $b$, $c$, $d$ quatre nombres réels. On considère les deux systèmes de relation

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+c^2=1,\\ b^2+d^2=1,\\ ab+cd=0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \begin{cases} |ad-bc|=1\\ a^2=d^2,\\ b^2=c^2. \end{cases}$$

Montrer, soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que,si $\alpha^2+\beta^2=1$, il existe au moins un angle $\theta$ tel que $\alpha=\cos\theta$ et $\beta=\sin\theta$), que $(1)$ implique $(2)$. La réciproque est-elle vraie ?

**2.** On considère la transformation ponctuelle $\mathscr{R}$ qui, à chaque point $m(x,\ y)$, fait correspondre le point $M'(X',\ Y')$ tel que

$$\begin{cases} X' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y,\\ Y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont les points doubles de $\mathscr{R}$ ?

b) Montrer que $Om = OM'$ et que, si $P'$ est l'image de $p$, on a toujours $pm = P'M'$.

c) Calculer, à $2k\pi$ près, l'angle de vecteurs $\left(\widehat{\overrightarrow{Om};\overrightarrow{OM'}}\right)$ et reconnaître la nature de $\mathscr{R}$.

**3.** Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathscr{S}$ qui à chaque point $m(x,\ y)$ fait correspondre le point $M''(X'',\ Y'')$ tel que

$$\begin{cases} X'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y,\\ Y'' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont ses points doubles ?

b) Montrer que $\mathscr{S}$ est une symétrie axiale.

**4.** Plus généralement, tout système de relations

$$\begin{cases} X = ax + by, \\ Y = cx + dy, \end{cases}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$) sont des nombres réels vérifiant l'inégalité $ad - bc \neq 0$, définit une transformation ponctuelle $\mathscr{T}$ pour laquelle tout point $m(x, y)$ a pour image $M(X, Y)$.

a) Rechercher un ensemble de conditions nécessaire et suffisant entre les nombres $a$, $b$, $c$, $d$ pour que la transformation correspondante soit une isométrie, c'est-à-dire conserve les distances ($M$ et $P$ étant les images de $m$ et $p$, on a $mp = MP$ quels que soient $m$ et $p$).
Á quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement ?
Á quelle condition est-elle une symétrie axiale ?

b) $\mathscr{T}$ peut-elle être une similitude ?

**5.** On se propose maintenant d'étudier la transformation $\mathscr{T}'$ particulière définie par

$$\begin{cases} X = x, \\ Y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

a) Á-t-elle des points doubles ?

b) Quelle est la figure transformée, soit d'une droite parallèle à $Ox$, soit d'une droite parallèle à $Oy$ ?

c) Donner un procédé graphique simple de construction de l'image $M$ d'un point quelconque $m$ et reconnaître la transformation $\mathscr{T}'$.

N.B. – Les questions 1, 2 et 3 du problème sont indépendantes.

## LXXXI. Paris, série technique et économie

**Ex. 201.** ./1965/paristecheco/exo-1/texte.tex

Démontrer que, si $A$, $B$, $C$ sont les angles d'un triangle, on a la relation

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

**Ex. 202.** ./1965/paristecheco/exo-2/texte.tex

On met dans un sac les lettres mobiles susceptibles de former le mot « CONSTANTINOPLE » et l'on tire successivement au hasard 6 lettres de ce sac, chacune d'elles, après chaque tirage, restant hors du sac. Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre d'obtention, ces lettres forment le mot « PANTIN » ?

### Problème 41

./1965/paristecheco/pb/texte

**1.** On considère la fonction

$$y = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$$

et on rappelle que la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ admet comme dérivée $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Calculer la dérivée première $y'$ et la dérivée seconde $y''$ de la fonction $y$, par rapport à $x$. Quelle sont les valeurs numériques de $y'$ et $y''$ pour $x = 0$ ?

b) Étudier, $x \geqslant 0$, le signe de $y''$. En déduire que $y$ et $y'$ restent positifs pour $x > 0$. Utiliser le résultat $y > 0$ pour $x > 0$ pour montrer que le rapport $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et déduire de ce dernier calcul la limite de $x\mathrm{e}^x$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

**2.** On considère les fonctions

$$y_1 = x\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

a) Étudier les variations de la fonction $y_1$ en précisant le comportement de cette fonction quand $x$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et en utilisant le signe de sa dérivée (la dérivée de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ a été rappellée à la question 1).

b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(C_1)$, représentative de la fonction $y_1$, au point d'abscisse $x = 0$.
Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle la dérivée seconde de $y_1$ s'annule. Calculer, à $10^{-4}$ près, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(C_1)$ au point correspondant.

c) Construire la courbe $(C_1)$ par rapport à un système d'axes orthonormé (on représentera l'unité par 5 cm sur chacun des deux axes).

d) Montrer que la courbe $(C_2)$, représentative de la fonction $y_2$, se déduit de $(C_1)$ par une symétrie, que l'on précisera.
Construire $(C_2)$ dans le même repère d'axes que $(C_1)$.

**3.** Déterminer les coefficients $a$ et $b$ de telle manière que la fonction

$$F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$$

soit une primitive de $y_1 = x\mathrm{e}^x$.
Désignant par $u$ un nombre positif, exprimer en fonction de $u$ l'aire $S(u)$ comprise entre la courbe $(C_1)$, l'axe $x'x$ et les droites d'équations

$$x = 0, \qquad x = -u.$$

Calculer $S(u)$ à $10^{-3}$ près pour $u = 2$.
Déterminer la limite de $S(u)$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$.

Paris remplacement :

# LXXXII. Paris remplacement, sciences expérimentales.

**Ex. 203.** ./1965/parisscexprem/exo-1/texte.tex

Une boîte contient 4 boules vertes et 8 boules blanches. On tire au hasard 4 boules. Calculer les probabilités pour que, dans les 4 boules tirées, on trouve :

a) 1 boule verte et 3 boules blanches ;

b) au moins une boule verte.

**Ex. 204.** ./1965/parisscexprem/exo-2/texte.tex

Calculer toutes les fractions de numérateur $a$, de dénominateur 425, dont une valeur approchée à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut est 3,28. Parmi ces fractions, déterminer celles qui sont irréductibles.

**Ex. 205.** ./1965/parisscexprem/exo-3/texte.tex

L'unité d'arc est le radian ; l'unité de temps, la seconde, l'unité de longueur, le mètre.
Un point $M$ est mobile sur un axe $x'Ox$. Sa vitesse numérique, $v$, en fonction du temps $t$, supposé positif, est

$$v = 2\sin\pi t\cos\pi t + \frac{1}{t}.$$

Calculer l'abscisse $x = \overline{OM}$ du point $M$ en fonction de $t$, sachant que, pour $t = 1$, $x = 0$.
Calculer l'accélération numérique de $M$ au temps $t = \dfrac{2}{3}$ (valeur exacte, puis valeur approchée à $\dfrac{1}{1\,000}$ près).

**Ex. 206.** ./1965/parisscexprem/exo-4/texte.tex

Une demi-droite $Az$ est perpendiculaire en $A$ a un segment $AB$ de longueur $1$.
Deux points, $M$ et $P$, varient sur $Az$ de façon que $AM = x$ et $AP = 3x$.
Calculer en fonction de $x$ la tangente de l'angle $\widehat{MBP}$.
Étudier la variation de cette tangente quand $x$ varie de zéro vers l'infini. En déduire le sens de variation de $\widehat{MBP}$ et la valeur maximale de cet angle lorsque $M$ décrit la demi-droite $Az$.

Retour page 1

# LXXXIII. Paris remplacement, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Ex. 207. ./1965/parismelemrem/exo-1/texte.tex

**1.** Développer $(\alpha+1)^4$.

**2.** Le nombre $\alpha$ appartenant à l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 6, en déduire l'écriture de $'\alpha+1)^4$ dans le système de numération de base $\alpha$.

Ex. 208. ./1965/parismelemrem/exo-2/texte.tex

Étude de la variation et graphe de la fonction $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$. On commencera par étudier le domaine de définition, la périodicité et la parité de la fonction.

**Problème 42** ./1965/parismelemrem/pb/texte

Dans ce problème, la lettre $\alpha$ désigne un nombre réel donné, strictement positif, et la lettre $\lambda$ un paramètre variable appartenant à l'ensemble des nombres réels.
On considère, dans un repère cartésien orthonormé, les points fixes $A(0,\ \alpha)$ et $B(0,\ -\alpha)$, ainsi que l'ensemble $\Phi$ des cercles $C(\lambda)$ d'équation

$$x^2+y^2-2\lambda x-\alpha^2=0.$$

**1.** Démontrer que l'ensemble $\Phi$ est un faisceau de cercles, que l'on précisera.

Étant donné un cercle $C(\lambda)$, avec $\lambda \neq 0$, démontrer qu'il existe un cercle $C(\lambda')$ et un seul orthogonal à $C(\lambda)$ et construire ce cercle.

Exprimer $\lambda'$ en fonction de $\lambda$ et de $\alpha$. Étudier le cas $\lambda=0$.

**2.** Soit $\mathscr{I}$ l'inversion de pôle $B$ et de puissance $4\alpha^2$.

a) Démontrer que cette inversion transforme les deux cercles orthogonaux $C(\lambda)$ et $C(\lambda')$ en deux droites perpendiculaires $(\Delta)$ et $(\Delta')$ passant par $A$.

b) $(D)$ étant une tangente commune extérieure aux deux cercles $C(\lambda)$ et $C(\lambda')$, soit $\Omega$ le cercle inverse de $(D)$ dans l'inversion $\mathscr{I}$ et soit $\omega$ son centre.

Démontrer que le rapport des distances du point $\omega$ aux points $A$ et $B$ est constant quand $\lambda$ varie.

En déduire que l'ensemble des points $\omega$ est un cercle $(\Gamma)$ appartenant au faisceau conjugué du faisceau $\Phi$.

c) Déterminer l'équation du cercle $(\Gamma)$ et les coordonnées de son centre. Calculer son rayon.

**3.** a) Calculer la puissance du point $B$ pour le cercle $(\Gamma)$. Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\Gamma')$, inverse du cercle $(\Gamma)$ dans l'inversion $\mathscr{I}$.

b) En désignant par $\omega'$, l'inverse de $\omega$ dans l'inversion $\mathscr{I}$, démontrer que la droite $(D)$ est la médiatrice du segment $B\omega'$.

En déduire que la droite $(D)$ est tangente à une conique. Déterminer l'équation de cette conique.

c)

# LXXXIV. Paris remplacement, série technique et économie

Ex. 209. ./1965/paristechecorem/exo-1/texte.tex

La division d'un nombre entier $a$ par 64 donne un quotient entier $q$ et un reste $q^3$.
Déterminer les nombres $a$ possédant cette propriété.

Ex. 210. ./1965/paristechecorem/exo-2/texte.tex

Une personne a emprunté 10 000 F le 1^ier^ février 1963. Elle a remboursé 2 000 F le 1^ier^ février 1964, 3 000 F le 1^ier^ février 1965. Quelle somme devra-t-elle verser le 1^ier^ février 1966 pour se libérer entièrement de sa dette ?
Taux annuel de capitalisation des intérêts 5 %.



Retour page 1

### PROBLÈME 43
./1965/paristechecorem/pb/texte

On considère un angle droit $XOY$ ; l'unité de longueur étant le centimètre, on désigne par $A$ et $B$ les points de $OY$ tels que $OA = 1$, $OB = 6$.
Soit $M$ un point variable de $OX$ ; on pose $OM = x$.

**1.** Calculer, en fonction de $x$, l'aire du triangle $AMB$, ainsi que les longueurs des segments $AM$ et $BM$ ; en déduire $\sin AMB$.

**2.** Calculer $\cos AMB$ en fonction de $x$ ; en déduire $\tan AMB$.

**3.** En utilisant les formules donnant le sinus et le cosinus de la différence de deux angles, montrer que

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Utiliser cette relation pour calculer directement $\tan AMB$ en fonction de $x$.

**4.** Étudier la variation de la fonction $y = \tan AMB$ en fonction de $x$, quand $x$ varie de $0$ à l'infini.
Tracer la courbe représentative.

**5.** Pour une certaine valeur $x_1$ de $x$, l'angle $AMB$ est maximal. Calculer, dans ce cas, en degrés, minutes et secondes, la valeur de l'angle $AMB$.

**6.** Déterminer les valeurs $x'$ et $x''$ de $x$ pour lesquelles $\widehat{AMB} = 40°$. Trouver une relation simple entre $x_1$, $x'$, $x''$.

## LXXXV. Poitiers, Sciences expérimentales

Ex. 211.
./1965/poitiersscexp/exo-1/texte.tex

Déterminer deux nombres, $a$ et $b$, appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, sachant que leur somme est 5 664 et leur plus grand commun diviseur 354.

Ex. 212.
./1965/poitiersscexp/exo-2/texte.tex

Mettre sous la forme de produit de facteurs l'expression

$$E = \cos x + \cos 2x - \cos 4x - \cos 7x.$$

Résoudre l'équation $E = 0$ et marquer sur le cercle trigonométrique, pour chaque famille, les extrémités des arcs solutions.

### PROBLÈME 44
./1965/poitiersscexp/pb/texte

Soit $f$ la fonction $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 2}{2(x+1)}$.

**1.** Montrer que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+1)},$$

$a$, $b$, $c$ étant des coefficients, que l'on déterminera.
Étudier les variations de cette fonction et construire la représentation graphique $(C)$ correspondante dans un repère orthonormé, en prenant le centimètre pour unité de longueur.

**2.** Déterminer, pour $x$ positif, une primitive de cette fonction et calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(C)$ et les droites $y = ax + b$, $x = 0$ et $x = 3$.
Donner ce dernier résultat à 1 mm$^2$ près. (Tous les calculs numériques devront figurer sur la feuille.)
$\log 10 = \dfrac{1}{M} = 2{,}302\,585$ ($\log$ = logarithme népérien).

## LXXXVI. Poitiers, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille Maths élémentaires



Retour page 1

# LXXXVII. Poitiers, remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille remplacement

# LXXXVIII. Pondichéry , Maths élémentaires

**Ex. 213.** ./1965/pondicherymelem/exo-1/texte.tex

Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés, $Ox$ et $Oy$, on demande de déterminer la nature de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $x$, $y$ vérifiant

$$y^2 - 2x^2 + 3x = 0,$$

puis de construire le graphe correspondant.

**Problème 45** ./1965/pondicherymelem/pb/texte

Dans un plan orienté, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ tels que leurs modules soient égaux, leurs supports perpendiculaires et sécants en un point $O$ de manière que

$$(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{2}.$$

1. Expliquer pourquoi il existe une rotation transformant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en le vecteur $\overrightarrow{BD}$ déterminer son centre (noté $I$) et son angle.
2. Déterminer, de même, le centre, $J$ de la rotation associant le vecteur $\overrightarrow{DB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   En désignant par $M$ le milieu de $AC$, par $N$ celui de $BD$, déterminer la forme du quadrilatère $IMJN$.
3. Construire les points $C$ et $D$, connaissant seulement les points $A$ et $B$ en position, la longueur $BC$ et la longueur $CD$. Discuter.
4. On désigne par $P$ et $R$ les points diamétralement opposés à $I$ respectivement sur chacun des cercles de diamètres $AB$ et $CD$.
   Démontrer que les points $P$, $I$, $J$ sont alignés. Démontrer, de même, que les points $Q$, $I$, $S$ sont alignés, sachant que $Q$ et $S$ sont diamétralement opposés à $J$ sur les cercles de diamètres $BC$ et $AD$.
   Prouver que $(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IP},\ \overrightarrow{IR})$ et que $\dfrac{IA}{IP} = \dfrac{IC}{IR} =$ Constante ; en déduire la transformation qui transforme $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{PR}$. (On donnera le nom de cette transformation et l'on déterminera ses éléments fondamentaux réduits.)

N.B.– La résolution de la question 3 n'est pas indispensable à celle des autres questions.

# LXXXIX. Reims

Mêmes sujets que ceux de Nancy : Nancy

# XC. Rennes, Sciences expérimentales

**Ex. 214.** ./1965/rennessexp/exo-1/texte.tex

a) Déterminer les diviseurs communs de 4 512 et 4 128.

b) Trouver un nombre entier $d$ tel que, si l'on divise par $d$ les nombres 4 525 et 4 147, les restes obtenus soient respectivement 13 et 19. Préciser le nombre des solutions.

**Ex. 215.** ./1965/rennessexp/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation

$$\log(x+1) - \log(2-x) + \log 2 = \log 7 - \log(4-x).$$

**Ex. 216.** ./1965/rennesscexp/exo-3/texte.tex

Donner, sans démonstration, l'expression de la dérivée du produit $uv$, où $u$ et $v$ désignent des fonctions d'une variable.

**Ex. 217.** ./1965/rennesscexp/exo-4/texte.tex

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

La représenter graphiquement, en choisissant un repère orthonormé.

## XCI. Rennes, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille Maths élementaires

## XCII. Rennes, série Technique et économie

**Ex. 218.** ./1965/rennestecheco/exo-1/texte.tex

Trouver une fraction équivalente à $\frac{8}{15}$ dont la somme des termes soit 575.

**Ex. 219.** ./1965/rennestecheco/exo-2/texte.tex

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \log x + \log y = \log 163. \end{cases}$$

**Ex. 220.** ./1965/rennestecheco/exo-3/texte.tex

Résoudre l'équation trigonmétrique

$$\sin(3x + \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

**Ex. 221.** ./1965/rennestecheco/exo-4/texte.tex

On considère la fonction

$$y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 1}.$$

**1.** Étudier cette fonction et construire son graphe $(\Gamma)$ dans un repère cartésien orthonormé $(\overrightarrow{x'Ox}, \overrightarrow{y'Oy})$.

**2.** Á l'aide du graphe $(\Gamma)$, discuter, suivant les valeurs du paramètre $m$, le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 1} = m.$$

**3.** On désigne par $A$ et $B$ les points de $(\Gamma)$ se trouvant sur $x'Ox$ ($A$ étant le point de plus petiet abscisse) et par $C$ le point de $(\Gamma)$ d'ordonnée $+1$.
Déterminer les sinus, cosinus et tangente de l'angle $BAC$.
En déduire la valeur, en degrés, minutes et secondes, de cet angle.

**4.** Former l'équation de la tangente à $(\Gamma)$ en $C$.
Cette droite recoupe $(\Gamma)$ en un point $D$, dont on déterminera les coordonnées.

N.B.-

a) Graphe est synonyme de courbe graphique.

b) Un repère cartésien orthonormé est constitué par l'ensemble de deux axes rectangulaires $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ sur lesquels on a choisi la même unité de longueur.

Retour page 1

# XCIII. Rennes, remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille remplacement

# XCIV. Réunion , Sciences expérimentales

Ex. 222. ./1965/reunionscexp/exo-1/texte.tex

Un sac renferme 20 boules numérotées avec les 20 premiers nombres entiers : 10 boules blanches numérotées de 1 à 10 et 10 boules noires numérotées de 11 à 20. On extrait, *simultanément*, deux boules.

**1.** Quelle est la probabilité $p_1$ pour que les deux boules soient blanches ?
Quelle est la probabilité $p_2$ pour que les deux boules soient de couleurs différentes ? Quelle est la valeur de $p_1 + 2p2$ ? Aurait-on pu prévoir le résultat ?

**2.** Quelle est la probabilité $p$ pour que *l'une au moins* des deux boules soit numérotée avec un multiple de 3 ?

Ex. 223. ./1965/reunionscexp/exo-1/texte.tex

Un sac renferme 20 boules numérotées avec les 20 premiers nombres entiers : 10 boules blanches numérotées de 1 à 10 et 10 boules noires numérotées de 11 à 20. On extrait, *simultanément*, deux boules.

**1.** Quelle est la probabilité $p_1$ pour que les deux boules soient blanches ?
Quelle est la probabilité $p_2$ pour que les deux boules soient de couleurs différentes ? Quelle est la valeur de $p_1 + 2p2$ ? Aurait-on pu prévoir le résultat ?

**2.** Quelle est la probabilité $p$ pour que *l'une au moins* des deux boules soit numérotée avec un multiple de 3 ?

# XCV. Réunion , Maths élémentaires

Ex. 224. ./1965/reunionmelem/exo-1/texte.tex

Tous les nombres envisagés sont réels.

**1.** Étudier la variation de la fonction

$$y = 2\frac{x-2}{x^2-4x-5}$$

et tracer la graphe $(C)$ (axes orthonormés).

**2.** Déterminer $a$ et $b$ tels que, pour toutes les valeurs de $x$, appartenant au domaine de définition de la fonction, on ait

$$2\frac{x-2}{x^2-4x-5} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5}.$$

**3.** Calculer l'aire $S$ limitée par $(C)$, l'axe $x'Ox$ et les deux droites $x = \lambda$ et $x = \lambda\mathrm{e}$ ($\mathrm{e}$ base des logarithmes népériens et $\lambda > 5$).
Cette aire a-t-elle une limite si $\lambda \to +\infty$ ?

**Problème 46** ./1965/reunionmelem/pb/texte

Ce problème est un problème plan ; les axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont orthonormés et tous les segments sont mesurés avec le même segment unitaire.
On considère la parabole $(P)$ de foyer $O$ et de directrice $y = 2$.

**1.** Former l'équation de $(P)$.

**2.** Soit la droite $(D)$ $y = ax + b$ ; comment choisir $a$ et $b$ pour que $(P)$ et $(D)$ soient tangentes ?

**3.** On envisage la transformation ponctuelle $(T)$ qui, au point $m(x\ ;\ y)$, associe le point $M(X\ ;\ Y)$ tel que

$$X = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

On pose $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) = \alpha$, $\quad \overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \beta$ (mod. $2\pi$).
Calculer $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $OM \times Om$ en fonction de $x$ et $y$, puis préciser la transformation $(T)$ ; donner alors, si possible sans aucun calcul, les expressions de $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

**4.** $m$ est dorénavant, et pour toute la suite, la projection orthogonale de $O$ sur $(D)$ ; calculer successivement :

$$\begin{array}{ll} x \text{ et } y & \text{en fonction de } a \text{ et de } b\ ; \\ a \text{ et } b & \text{en fonction de } x \text{ et de } y\ ; \\ a \text{ et } b & \text{en fonction de } X \text{ et de } Y. \end{array}$$

**5.** $(D)$ est maintenant tangente à $(P)$ ; préciser l'ensemble (ou lieu) $(L)$ des points $M$. Quelle est la transformation classique (non ponctuelle) qui permute $(P)$ et $(L)$ ?

## XCVI. Strasbourg, Sciences expérimentales

Ex. 225. ./1965/strasbourgscexp/exo-1/texte.tex

Étudier, par une méthode algébrique ou géométrique, le mouvement rectiligne horaire

$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Préciser l'amplitude, la période et la phase initiale.
Les unités sont le centimètre et la seconde.

Ex. 226. ./1965/strasbourgscexp/exo-2/texte.tex

On désigne par $y$ la fonction définie par

$$y = x - x\log x,$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

**1.** Pour quelles valeurs de $x$ est-elle définie ?

**2.** Étudier les variations de $y$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}^2\right]$, c'est à dire pour $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2$. Calculer, à $0{,}01$ près, les coordonnées des points de graphe de $y$ d'abscisses $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $\mathrm{e}^2$.

**3.** Construire l'arc $\mathscr{C}$ du graphe de $y$ relatif à l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}^2\right]$ dans un repère orthonormé dont les vecteurs de base ont 2 cm de longueur. Construire les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\mathrm{e}$ et $\mathrm{e}^2$.

**4.** Vérifier que la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\log x)$$

est une primitive de la fonction $y$.

En déduire l'aire $A$ de la surface délimitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = \mathrm{e}$.

Donner une valeur approchée de $A$, à $0{,}01$ près, en centimètres carrés.

## XCVII. Strasbourg, Maths élémentaires.

Ex. 227. ./1965/strasbourgmelem/exo-1/texte.tex

Montrer que le polynôme

$$x^3 - 8x^2 + 25x - 26$$

est divisible par $x - 2$. En déduire ses racines, réelles ou complexes.



Retour page 1

**Ex. 228.** ./1965/strasbourgmelem/exo-2/texte.tex

Mettre l'expression $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ sous la forme $a\cos(x-\varphi)$.
Étudier les variations de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2}.$$

## Problème 47

./1965/strasbourgmelem/pb/texte

Soit $(P)$ un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On considère, dans $(P)$, les droites

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{d'équation} & x = a \quad (a > 0), \\ (D') & \text{d'équation} & x = -a\,. \end{array}$$

On désigne par $E$ le complémentaire (dans $P$) de la réunion des droites $x'Ox$, $(D)$, $(D')$, et par $C$ l'intersection de $x'Ox$ et de $(D)$, par $B$ l'intersection de $x'Ox$ et de $(D')$.

**1.** Soit $M_1 \in E$ et $A'$, $B'$, $C'$ les projections orthogonales de $M_1$ respectivement sur $x'Ox$, $(D)$ et $(D')$. Calculer les coordonnées de $A'$, $B'$, $C'$ en fonction des coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $M_1$.
Calculer les coordonnées du centre, $I$, du cercle $(\gamma)$ circonscrit au triangle $A'B'C'$.

**2.** a) Soit $M_2$, de coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$, le symétrique de $M_1$ par rapport à $I$. Montrer que

$$x_2 = -x_1, \qquad y_2 = \frac{a^2 - x_1^2}{y_1}.$$

b) On désigne par $\mathscr{T}$ la transformation qui, à $M_1 \in E$, fait correspondre $M_2$ : montrer que $\mathscr{T}$ est une application biunivoque de $E$ sur $E$. Montrer que $\mathscr{T}$ est involutive.
Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.

**3.** a) Soit $(\Delta)$ la droite d'équation

$$x = b \quad (b \neq \pm a) \quad \text{et} \quad (\Delta') = (\Delta) \cap E.$$

Déterminer le transformé $\mathscr{T}(\Delta')$ de $(\Delta')$ par $\mathscr{T}$ $\big[$c'est-à-dire l'ensemble des points $\mathscr{T}(M_1)$ où $M_1 \in (\Delta')\big]$.

b) Soit $(\Delta_1)$ la droite d'équation

$$y = c \quad (c \neq 0) \quad \text{et} \quad (\Delta_1') = (\Delta_1) \cap E.$$

Déterminer l'ensemble $\mathscr{T}(\Delta_1')$.

**4.** Montrer que $M_2$ est le centre d'un cercle passant par les symétriques, $A_2$, $B_2$, $C_2$, de $M_1$ respectivement $x'Ox$, $(D)$ et $(D')$.
Montrer que $B$ est le milieu de $A_2C_2$.
Comparer les angles de droites $(BC',\ BM_1)$ et $(BM_2,\ BC)$ ; quelles sont les bissectrices de $(BM_1,\ BM_2)$ ?
Déterminer de façon analogue les bissectrices de $(CM_1,\ CM_2)$.
Déduire de ce qui précède une construction simple de $M_2 = \mathscr{T}(M_1)$.
Retrouver les propriétés de la transformation $\mathscr{T}$ établies au 2b.

**5.** Montrer qu'il existe une conique et une seule de foyer $M_1$ ($M_1 \in E$) tangente à $(D)$, $(D')$ et $x'Ox$. La déterminer et préciser son second foyer.

# XCVIII. Strasbourg, série Mathématiques et Technique.

**Ex. 229.** ./1965/strasbourgmatech/exo-1/texte.tex

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. En déduire la valeur de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8.$$



Retour page 1

**Ex. 230.** ./1965/strasbourgmatech/exo-2/texte.tex

$\log$ désignant la fonction logarithme népérien (base e) et $\log_a$ la fonction logarithme de base $a$, résoudre la système

$$\begin{cases} \log_x \mathrm{e} + \log_y \mathrm{e} = \dfrac{7}{3}, \\ \log xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

## Problème 48

./1965/strasbourgmatech/pb/texte

Dans le problème ci-dessous, il s'agit de points tous situés dans un même plan $(P)$.

**1.** On se donne dans $(P)$ un triangle $ABC$. Soit $M$ un point quelconque de $(P)$.
Montrer que le vecteur

$$\vec{V}_M = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$$

est équipollent à un vecteur non nul, $\vec{V}$, indépendant de $M$. Construire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ équipollent à $\vec{V}$ :

$$\overrightarrow{AP} = \vec{V}_M = \vec{V}.$$

La droite $AP$ coupe la droite $BC$ en $U$ ; montrer que $\dfrac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = 3$.

**2.** Soit $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$. Établir la relation

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MO}.\vec{V}.$$

En déduire que le lieu géométrique des points $M$ du plan tels que

$$2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 0$$

est la droite $(\Delta)$ passant par $O$ et perpendiculaire à $AU$.

**3.** Dans cette question le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, $B$ et $C$ étant deux points fixes et $A$ étant variable.
Montrer que la perpendiculaire en $O$ à $(\Delta)$ passe par un point fixe, que l'on caractérisera. Quelle est, quand $A$ varie, l'enveloppe de la droite $(\Delta)$ ?

**4.** Considérant toujours la figure définie dans les questions 1 et 2 à partir du triangle $ABC$, on appelle $F$ l'ensemble des triangles $ABC$ rectangles en $A$ et tels que $B$ et $(\Delta)$ soient, respectivement, un point et une droite fixes données [$(\Delta)$ ne passant pas par $B$].
Montrer que, lorsque le triangle $ABC$ appartient à l'ensemble $F$, les points $C$ et $U$ restent sur deux droites fixes, $(D)$ et $(D')$.
Montrer que réciproquement, si $Q$ est un point de $(D')$, pour qu'il existe un triangle $ABC$ de l'ensemble $F$ tel que le point $U$ correspondant soit en $Q$, il faut et il suffit que, $H$ étant la projection orthogonale de $Q$ sur $(\Delta)$,

$$\frac{QB}{QH} \leqslant \sqrt{3},$$

c'est à dire que $Q$ soit intérieur à une conique, que l'on caractérisera.
Quels sont les lieux géométriques des points $U$ et $C$ lorsque le triangle $ABC$ appartient à l'ensemble $F$ ?
Déterminer le lieu géométrique du point $A$ dans les mêmes conditions ; on pourra former son équation dans un système orthonormé d'axes portés par $(\Delta)$ et la perpendiculaire menée de $B$ à $(\Delta)$ ; on désignera par $a$ la distance de $B$ à $(\Delta)$.

N.B.– Les questions 3 et4 peuvent être traitées indépendamment des questions 1 et 2, mais on trouvera, dans le texte des deux premières questions, la définition d'une partie des notations utilisées par la suite.



Retour page 1

# XCIX. Strasbourg, série Technique et économie

**Ex. 231.** ./1965/strasbourgtecheco/exo-1/texte.tex

Dans la suite des nombres $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9,\ 10$ on prend au hasard 6 nombres distincts.

**1.** Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi eux :

a) 3 nombres pairs et 3 seulement ;

b) au moins un nombre impair ;

c) un seul nombre impair ;

d) au moins 2 nombres impairs ?

**2.** On considère tous les chiffres $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 8,\ 9$ (sauf 0) ; on prend au hasard 3 chiffres distincts parmi eux.

Combien peut-on former de nombres avec ces 3 chiffres ?

Montrer que si, l'un de ces nombres est divisible par 3, les autres le sont aussi.

Quelle est la probabilité pour que ces trois chiffres soient tous impairs et chiffres d'un nombre divisible par 3 ?

## Problème 49

./1965/strasbourgtecheco/pb/texte

On considère la fonction

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

**1.** Calculer la dérivée de $f(x)$.

**2.** Étudier les variations de $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**3.** Construire le graphe correspondant $(\mathscr{C})$ dans un système d'axes rectangulaires, $xOy$. On prendra l'axe $Ox$ parallèle au côté le plus long de la feuille ; les unités de longueur seront les mêmes sur les deux axes et égales à 3 cm.

Montrer que la droite $x=\frac{\pi}{4}$ est un axe des symétrie de $(\mathscr{C})$.

Calculer exactement $f(x)$ pour $x$ égal successivement à

$$\frac{\pi}{12} \qquad \frac{\pi}{8} \qquad \frac{\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{3} \qquad \frac{3\pi}{8} \qquad \frac{5\pi}{12}$$

et construire avec précision les points correspondants (au besoin à l'aide de constructions géométriques simples).

Déterminer la tangente à $(\mathscr{C})$ en $O$.

**4.** Comment peut-on construire à partir de $(\mathscr{C})$ le graphe complet $(\mathscr{L})$ de la fonction $f(x)$ ? Compléter le dessin jusqu'aux limites de la feuille ?

**5.** Trouver l'abscisse $x$ du point de $(\mathscr{L})$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ satisfont à

$$\begin{cases} 0<x<\frac{\pi}{4}, \\ y=1. \end{cases}$$

On choisira comme inconnue auxiliaire $\sin 2x = X$. On calculera $x$ avec la précision permise par les tables de logarithmes.

**6.** Vérifier que

$$F(x)=\frac{1}{2\cos 2x}$$

est une primitive de $f(x)$. Calculer l'aire $A$ du domaine limité par $Ox$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $x=\frac{\pi}{6}$.

On prendra d'abord pour unité l'aire du graphique, puis le centimètre carré.

Retour page 1

## C. Strasbourg, remplacement

Mêmes sujets que ceux de Lyon : Lyon remplacement

## CI. Sud Vietnam, Sciences expérimentales

**Ex. 232.** ./1965/sudvietnamscexp/exo-1/texte.tex

**1.** Transformer les expressions

$$A = \sin x + \cos x \qquad \text{et} \qquad B = \sin x \cos x$$

en utilisant le changement de variable défini par

$$x = \frac{\pi}{4} - u$$

et montrer que $A$ et $B$ s'expriment en fonction de $\cos u$.

**2.** En déduire la résolution de l'équation

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0.$$

**Ex. 233.** ./1965/sudvietnamscexp/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Construire la courbe représentative $(C)$ rapporté à un système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. (On prendra 2 cm comme unités sur les axes.)

La courbe $(C)$ coupe l'axe $Ox$ en deux points. Construire avec précision ces points et les tangentes correspondantes.

**2.** La courbe $(C)$ partage l'intérieur du triangle limité par l'axe $Ox$, la droite $x = 1$ et l'asymptote oblique de la courbe $(C)$ en deux parties, dont on demande d'évaluer l'aire en centimètres carrés (on en donnera d'abord une expression exacte, puis on en calculera une valeur approchée à 1 mm$^2$ près.)

## CII. Sud Vietnam, Maths élémentaires

**Ex. 234.** ./1965/sudvietnammelem/exo-1/texte.tex

Soit les nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}$$

($\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$ sont les formes algébriques de $z_1$ et $z_2$.)

**1.** Calculer les modules et arguments de $z_1$ et $z_2$.

**2.** Calculer le rapport $\dfrac{z_1}{z_2}$ :

a) à l'aide des formes algébriques de $z_1$ et $z_2$,

b) à l'aide des modules et arguments de $z_1$ et $z_2$.

**3.** En déduire $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

Ex. 235. ./1965/sudvietnammelem/exo-2/texte.tex

A) Soit, dans un plan, deux points fixes $A$ et $B$. A tout point $M$ distinct du point $A$ et de $B$, on associe le point $M'$ de la manière suivante :

$M'$ est le point diamétralement opposé à $M$ sur le cercle circonscrit au triangle $MAB$.

1° Trouver l'ensemble $(E')$ des points $M'$ lorsque l'ensemble $(E)$ des points $M$ est :

a) une droite passant par $A$ (ou par $B$) ;

b) une droite perpendiculaire à $AB$.

2° On suppose, dans cette question, que l'ensemble $(E)$ des points $M$ est un cercle $(O)$, de centre $O$, passant par $A$ et $B$.

a) $P$ étant l'intersection de $MA$ et $BM'$, $P'$ étant l'intersection de $M'A$ et $MB$, démontrer que $P$ et $P'$ sont conjugués par rapport au cercle $(O)$.

b) En déduire l'ensemble des points $P$ et l'ensemble des points $P'$.

c) Quel est l'orthocentre du triangle $SPP'$, $S$ étant l'intersection des droites $AB$ et $MM'$ ?

B) Soit deux cercles orthogonaux $(O)$ et $(O')$ ; se coupant en $A$ et $B$. $P$ étant un point variable de $(O')$, les droites $PA$ et $PB$ recoupent le cercle $(O)$ respectivement en $M$ et $M'$.

1° Démontrer que $MM'$ passe par un point fixe.

2° $P'$ étant l'orthocentre de triangle $PMM'$, quel est l'ensemble des points $P'$ ?

C)

# CIII. Sud Vietnam remplacement, Sciences expérimentales

Ex. 236. ./1965/sudvietnamscexprem/exo-1/texte.tex

On considère la fraction $F = \dfrac{126}{231}$.

**1.** Trouver l'expression générale des fractions égales à $F$.

**2.** Trouver les fractions égales à $F$ dont la somme des termes soit un diviseur de 204, y compris 204 lui-même.

**3.** Trouver une fraction égale à $F$ dont les deux termes aient 594 pour plus petit commun multiple.

Ex. 237. ./1965/sudvietnamscexprem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction qui à un nombre $x$ fait correspondre le nombre

$$y = f(x) = 3\log x - \frac{x^3}{8}$$

($\log x$ désignant le logarithme népérien de $x$).

**1.** Quel est l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles $y$ est défini ?
On se propose d'étudier la variation de $y$ quand $x$ varie de $0$ à $\mathrm{e}$.
Que devient $y$ quand $x$ tend vers $0$ ? Calculer la dérivée de cette fonction.

**2.** Étudier la variation de cette fonction quand $x$ varie de $0$ à $\mathrm{e}$.
Calculer, à 0,01 près, la valeur de $y$, pour $x = 1$, pour $x = 2$, pour $x = \mathrm{e}$.
Représenter graphiquement, dans un système d'axes rectangulaires, cette variation.
On appellera $(C)$ le courbe obtenue.
On prendra pour unité : sur $Ox$, 1cm, sur $Oy$, 2 cm.

**3.** Calculer la dérivée de la fonction $z = 3x(\log x - 1)$ et en déduire une primitive de $f(x)$.
Calculer, à 0,01 près, en centimètres carrés, l'aire limitée par la courbe $(C)$, l'axe $Ox$ et les deux parallèles à $Oy$ d'abscisses 2 et $\mathrm{e}$.
N.B.– On pourra utiliser certaines des valeurs approchées suivantes :

$$\mathrm{e} = 2{,}718, \qquad \mathrm{e}^2 = 7{,}389, \qquad \mathrm{e}^3 = 20{,}086, \qquad \mathrm{e}^4 = 54{,}498.$$

Retour page 1

# CIV. Sud Vietnam remplacement, Maths élémentaires

**Ex. 238.** ./1965/sudvietnammelemrem/exo-1/texte.tex

Déterminer un nombre complexe $z$, de façon que $\overline{z}$ (conjugué de $z$), $z^2$ et $1-z$ aient même module.

**Ex. 239.** ./1965/sudvietnammelemrem/exo-2/texte.tex

Deux droites $(D)$ et $(D')$ passant par un même point fixe $A$ pivotent autour de $A$ de manière à former un angle constant.
Soit $(\Delta)$ une droite fixe qui ne passe pas par $A$.
Démontrer que, lorsque $(D)$ et $(D')$ rencontrent $(Delta)$ en $M$ et $M'$, le cercle de diamètre $MM'$ reste tangent à une courbe fixe, que l'on déterminera.

**Ex. 240.** ./1965/sudvietnammelemrem/exo-3/texte.tex

Soit la fonction $y = \dfrac{x(1-x)}{1+x}$ et $(\Gamma)$ don graphe.

1. Déterminer les asymptotes de $(\Gamma)$.
   Montrer que $y$ peut se mettre sous la forme
$$y = Ax + B + \frac{C}{x+1},$$
   $A$, $B$ et $C$ étant des constantes, qu'on déterminera.
2. Étudier les variations de $y$ et tracer $(\Gamma)$. On déterminera le centre de symétrie.
3. Déterminer tous les points de $(\Gamma)$ à coordonnées entières.
4. Soit $(\Gamma_1)$ le graphe de $y_1 = \dfrac{|x|(1-x)}{1+x}$. Comment passe-t-on de $(\Gamma)$ à $(\Gamma_1)$ ?
   Tracer $(\Gamma_1)$ sur le même graphique que $(\Gamma)$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la droite d'équation $x = m$ $(-1 < m < 0)$, $(\Gamma)$, $(\Gamma_1)$ et $Ox$. Cette aire a-t-elle une limite lorsque $m$ tend vers $-1$ ?

# CV. Tahiti, Sciences expérimentales

**Ex. 241.** ./1965/tahitiscexp/exo-1/texte.tex

1. Étudier et représenter graphiquement dans un système d'axes orthonormé les variations de la fonction
$$y = \frac{2x^2+3x}{4x-2}.$$
2. Calculer la valeur de la fonction pour $x = 1{,}001$.
3. Utiliser la courbe tracée au 1 pour discuter, suivant les valeurs du paramètre $m$, l'existence et le nombre de solutions de l'équation
$$2\sin^2\theta + (3-4m)\sin\theta + 2m = 0,$$
   $\theta$ étant un arc compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$.

**Ex. 242.** ./1965/tahitiscexp/exo-2/texte.tex

Dans un jeu de 32 cartes, on tire 5 cartes au hasard. Trouver la probabilité pour que, parmi les 5 cartes tirées, il y ait 3 rois.



Retour page 1

# CVI. Tahiti, Maths élémentaires et Mathématiques et Technique

**Ex. 243.** ./1965/tahitimelem/exo-1/texte.tex

Déterminer le module et l'argument de
$$z=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$
Calculer $u=z^3$.

**Ex. 244.** ./1965/tahitimelem/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction
$$y=x-\frac{1}{x}.$$
Tracer le courbe représentative dans un repère orthonormé dont l'unité est 1 cm.

**2.** Calculer l'aire comprise entre l'axe des $x$, les droites d'équations $x=2$ et $x=3$ et la courbe.

**Ex. 245.** ./1965/tahitimelem/exo-3/texte.tex

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et un point $A$ de $Ox$ tel que $\overline{OA}=2a$ $(a>0)$.
On trace le cercle $(C)$ de centre $A$ et de rayon $R=a$ et l'on considère le point $M$ de $(C)$ défini par $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{AM})=\theta$.

**1.** Établir l'équation de la tangente en $M$ au cercle $(C)$ en fonction de $\theta$ et $a$. En déduire les coordonnées du point $B$, intersection de cette tangente avec l'axe $Oy$.

**2.** On appelle $(T)$ le cercle de centre $B$ et de rayon $BM$. Montrer que $(T)$ appartient à un faisceau linéaire de cercles, dont on précisera les éléments.
On appelle $(D)$ la polaire de $B$ par rapport à $(C)$. Montrer que $(D)$ passe par un point fixe, que l'on déterminera. Lieu du pied de cette polaire lorsque $\theta$ varie.

**3.** On désigne par $J$ le point de l'axe $Ox$ d'abscisse $-a\sqrt{3}$. Quels sont les transformés de $(T)$, $(C)$ et $BM$ par l'inversion de centre $J$ et de puissance $6a^2$ ?

# CVII. Toulouse, Sciences expérimentales

**Ex. 246.** ./1965/toulousescexp/exo-1/texte.tex

Déterminer le paramètre $m$ de façon que les quatre racines de l'équation bicarrée
$$x^4-(3m+4)x^2+m^2=0$$
soient en progression géométrique.

**Ex. 247.** ./1965/toulousescexp/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $y=\dfrac{(x-1)^2}{2x}$.

**1.** Étudier la variation de la fonction $y$ et la représenter graphiquement. Montrer que cette courbe admet un centre de symétrie.

**2.** Vérifier que la fonction $Y=\dfrac{x^2}{4}-x+\dfrac{\log x}{2}$ est une primitive de $y$. ($\log x$ signifie logarithme népérien de $x$.)

**3.** Si $A$ et $B$ sont les points de la courbe d'abscisses respectives $1$ et $m$, avec $m>1$, calculer en fonction de $m$ l'aire limitée par l'arc $AB$ de la courbe, l'axe $Ox$ et la droite d'équation $x=m$.

**4.** Calculer, à $0{,}01$ près, à l'aide des tables, la valeur de cette aire pour les valeurs suivantes de $m$ :
$$\mathrm{e},\qquad 2,\qquad 3,\qquad 4.$$



Retour page 1

## CVIII. Toulouse,

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille Maths élémentaires

## CIX. Toulouse, série Technique et économie

Ex. 248. ./1965/toulousetecheco/exo-1/texte.tex

Un club de football, $A$, possède, 18 joueurs.
Combien d'équipes différentes peut-il former, si l'on ne tient pas compte de la place des joueurs ?
Un second club, $B$, possède 20 joueurs.
Quelle est la probabilité que Monsieur $X$, du club $A$, fasse partie de l'équipe qui jouera contre l'équipe où se trouve Monsieur $Y$, du club $B$ ?
N.B.– Une équipe de football comporte 11 joueurs.

Ex. 249. ./1965/toulousetecheco/exo-2/texte.tex

**1.** Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

**2.** Résoudre et discuter l'équation

$$\sin 3x = (n^2 - 5n + 3)\sin x,$$

où $n$ désigne un nombre donné.

**3.** Quelles sont les solutions quand $n$ est racine de l'équation $y^2 - 5y + 1 = 0$ ?

Ex. 250. ./1965/toulousetecheco/exo-3/texte.tex

**1.** Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

et construire sa courbe représentative, $(C)$, dans un repère orthonormé. Quel est la'xe de symétrie de cette courbe ?

**2.** Quelle set l'équation de la droite $(D)$ passant par le point $A$ $(x = -1,\ y = 0)$ et de pente $m$ ?
La droite $(D)$ coupe la courbe $(C)$ en deux points, $M_1$ et $M_2$, en plus du point $A$. Discuter en fonction de $m$ l'existence de ces points.
Quelles sont les coordonnées du milieu, $I$, de $M_1M_2$ ?
Quelle courbe $(H)$ décrit $I$ quand $m$ varie ?

**3.** Quelle est la dérivée de $y_1 = \dfrac{1}{x-2}$ ?
Déterminer $a$ et $b$ tels que

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + b.$$

Quelle est l'aire limitée par la courbe $(C)$ l'axe $Ox$ et les parallèles à $Oy$ d'équation, $x = 5$ et $x = 11$ ?

*

## CX. Toulouse, remplacement

Mêmes sujets que ceux d'Aix Marseille : Aix Marseille remplacement

# CXI. Toulouse, Maths élémentaires et mathématiques & technique remplacement juin 1965

**Ex. 251.** ./1965/toulousemelemettechrem/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x + 1 = 0.$$

**Ex. 252.** ./1965/toulousemelemettechrem/exo-2/texte.tex

1. Démontrer que l'égalité $a^2 = db^2$, où $a$, $b$, $d$ sont des entiers positifs et où $a$ et $b$ sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$ (on montrera que $b$ divise $a$).

   En déduire que, si $d$ n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à $\sqrt{d}$.
2. On désigne par $A(\sqrt{d})$ l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$, où $m$ et $n$ sont des entiers relatifs quelconques et où l'entier $d$ n'est pas un carré parfait.

   Déterminer l'intersection des deux ensembles $A(\sqrt{2})$ et $A(\sqrt{3})$.

   (On pourra commencer par démontrer que toute égalité de la forme $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$, où $m,\ n,\ p$ sont des entiers relatifs, entraîne $m = n = p = 0$.)

# CXII. Tunisie, Sciences expérimentales

**Ex. 253.** ./1965/tunisiescexp/exo-1/texte.tex

Soit le nombre $\overline{34x5y}$, dont $x$ est le chiffres des centaines et $y$ celui des unités.
Indiquer toutes les façons possibles de choisir les chiffres $x$ et $y$ pour que ce nombre soit divisible par 36.

**Ex. 254.** ./1965/tunisiescexp/exo-2/texte.tex

Discuter suivant les valeurs du paramètre $m$ le nombre de racines de l'équation

$$\mathrm{e}^{2x} - 4m\mathrm{e}^{x} + 2m + 2 = 0.$$

Résoudre l'équation dans le cas où $m = 1$.

**Ex. 255.** ./1965/tunisiescexp/exo-3/texte.tex

**1.** Étudier les variations de

$$y = 8x^3 - 6x - 1 \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant +1. \text{ Graphe.}$$

Quelles sont approximativement, d'après ce graphe, les racines de l'équation

$$8x^3 - 6x - 1 = 0\ ? \tag{1}$$

**2.** En évaluant $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$ et en posant $\cos a = x$, trouver les solutions exactes de l'équation (1).

# CXIII. Bac Tunisien, Sciences expérimentales

**Ex. 256.** ./1965/tunisiebactunisien/exo-1/texte.tex

Calculer, par logarithmes,

$$x = \frac{\sqrt[3]{7} \times 1{,}7223 \times \cos 32ř14'12''}{\tan 55ř27'44''}.$$

Retour page 1

Ex. 257. ./1965/tunisiebactunisien/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ et déterminer les constantes pour que la solution vérifie les données suivantes :

$$x = \frac{\pi}{12}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$
$$x = \frac{\pi}{3}, \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Ex. 258. ./1965/tunisiebactunisien/exo-3/texte.tex

**1.** Déterminer les constantes $a,\ b$ et $c$ pour que la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 - bx + c}$$

admette pour asymptote les droites d'équations

$$x = 0, \qquad x = 2 \qquad \text{et} \qquad y = 1.$$

**2.** Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x}.$$

En construire le graphe $(C)$ dans un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$.

**3.** Mettre $y$ sous la forme

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 2},$$

$A,\ B$ et $C$ étant des constantes, que l'on déterminera.
Déterminer la primitive $Y$ de $y$ qui s'annule pour $x = 1$.

**4.** Déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe $(C)$, l'axe des $x$ et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

Retour page 1

# Chapitre VIII

# 1966.

## Sommaire



## I. Aix Marseille, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 259. ./1966/aixmelem/exo-1/texte.tex

On donne, dans un plan, un vecteur fixe $\vec{V}$ non nul,et un point fixe $O$.

**1.** $M$ étant un point quelconque du plan, $M'$ est le transformé de $M$ par la translation $(T)$ de vecteur $\vec{V}$ et $M''$ le transformé de $M$ par la symétrie $(S)$ de centre $O$, quel est l'ensemble des points $M$ tels que $\left|\overrightarrow{M'M''}\right| = \left|\vec{V}\right|$ ?

**2.** Quels sont les points doubles respectifs des deux transformations $(S\circ T)$ et $(T\circ S)$ produits de la translation et de la symétrie précédente ?

**3.** Montrer que chacune des deux transformations $(S\circ T)$ et $(T\circ S)$ et $(S\circ T)$ et $(T\circ S)$ est involutive.

### Problème 50

./1966/aixmelem/pb/texte

Soit $z = x+\mathrm{i}y$ et $Z = X+\mathrm{i}Y$ deux nombres complexes liés par la relation

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels tels que

$$ad - bc \neq 0.$$

La relation (1) définit une transformation ponctuelle du plan orthonormé $Oxy$, faisant correspondre au point $m$ d'affixe $z$ (c'est-à-dire dont les coordonnées dans le plan cartésien $Oxy$ sont les nombres réels $x$ et $y$) le point $M$ d'affixe $Z$.

1. Cette transformation conserve l'axe $x'x$ (c'est-à-dire transforme tout point de $x'x$ en un point de $x'x$). Dire pourquoi.

   On considère sur l'axe $y'y$, un point quelconque $m$ d'affixe $z = \text{i}y$ ; calculer l'affixe $Z = X + \text{i}Y$ du point $M$ correspondant ; comment faut-il choisir $a$, $b$, $c$ et $d$pour que (1) conserve non seulement l'axe $x'x$ mais aussi l'axe $y'y$ ?

   On trouvera qu'il existe deux transformations répondant à la question $\left(Z = kz \qquad \text{et} \qquad Z = \dfrac{k}{z}, \quad k \text{ réel}\right)$.

2. On considère celle, $(T)$, des deux transformations précédentes (autre que l'identité) admettant le point $A(+1\ ;\ 0)$ pour point double. Montrer qu'elle est involutive et qu'elle admet le deuxième point double $B(-1\ ;\ 0)$.

   Montrer que les deux points correspondants quelconques $m$ et $M$ et les points $A$ et $B$ sont situés sur un même cercle, $(C)$, que l'axe $x'x$ bissecte l'angle $mOM$ et que le point où la droite $mM$ coupe $y'y$ est le pôle de $x'x$ par rapport à $(C)$.

3. A tout point $m$ du plan autre que $A$ ou $B$, $(T)$ attache la droite $(D)$ joignant $m$ à son transformé, $M$.

   Réciproquement, toute droite $D$ du plan provient-elle d'un point $m$ ?

   Préciser l'ensemble des droites $D$ pour lesquelles il en est ainsi.

   Indiquer une construction géométrique du couple de points transformés $(m,\ M)$ situés sur une droite $D$ donnée.

   Lieu géométrique du point $M$ lorsque $m$ décrit une droite $\Delta$ passant par $O$ ; lieu du milieu du segment $mM$ dans la même hypothèse.

4. On suppose que $m$ décrive un cercle $(C)$, de centre $O$ et de rayon donné $r$, et l'on pose $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}) = \varphi$.

   a) Former, relativement aux axes $Ox$, $Oy$, l'équation de la droite $D$ attachée à $m$ et celle du lieu géométrique du point $P$ se projetant orthogonalement sur les axes aux points où ils sont coupés par $D$.

   b) $(\Gamma)$ étant l'enveloppe de $D$, et sans chercher à déterminer $(\Gamma)$, trouver le nombre maximal de tangentes qu'on peut mener par un point donné $p(x_0\ ;\ y_0)$ du plan. (On pourra former l'équation donnant $\tan \dfrac{\varphi}{2}$.)

N.B.– les candidats qui seraient arrêtés par le résultat demandé à la fin du 2° peuvent l'admettre et traiter les questions 3° et 4°, rendues ainsi indépendantes des deux précédentes.

## II. Besançon, séries Mathématiques élémentaires & Mathématiques et technique.

**Ex. 260.** ./1966/besanconmelemettech/exo-1/texte.tex

Deux points, $M$ et $M'$ , varient en restant conjugués harmoniques par rapport aux sommets $B$ et $C$ d'un triangle $ABC$ fixe. Montrer que le cercle $(AMM')$, de centre $\omega$, est orthogonal à un cercle fixe ayant son centre sur la droite $BC$, qu'il passe par un point fixe (en général distinct de $A$) et que la polaire de$\omega$ par rapport au cercle fixe passe par un point fixe.

**Ex. 261.** ./1966/besanconmelemettech/exo-2/texte.tex

On appelle « mot » toute permutation de lettres données ; par exemple avec a, i, m et r, les mots rima, mari, mria, ... , airm ... Avec les lettres du mot « François », combien peut-on former de mots :

1. commençant et finissant par une voyelle ;
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?

### Problème 51

./1966/besanconmelemettech/pb/texte

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ ; sur l'axe $x'x$ on considère les points fixes, $A$ et $B$, d'abscisses positives respectives $a$ et $b$ $(0 < a < b)$ et, sur $y'y$ un point $M$ variable, d'ordonnée $\lambda$ non nulle.

1. Déterminer les coordonnées du point, $P$, de rencontre des perpendiculaires en $A$ à $MA$ et en $B$ à $MB$. Ensemble des points $P$ ?



Retour page 1

2. Soit $L$ la droite symétrique de la droite $x'x$ par rapport à la droite $MA$. Trouver l'équation de $L$. (On pourra écrire que $M$ est équidistant de $L$ et $x'x$.) Exprimer sa pente, $\mu$, à l'aide de $\lambda$ ; étudier les variations de la fonction ainsi définie et construire son graphe.
3. Soit $L'$ la droite symétrique de $x'x$ par rapport à $MB$ et $Q$ l'intersection de $L$ et $L'$. Calculer les coordonnées au point $Q$. Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $Q$ :

   a) en formant d'abord $\dfrac{x}{y}$ ;

   b) en calculant $\overline{RO}.\overline{RI}$, $R$ étant la projection de $Q$ sur $x'x$ et $I$ celle de $P$. Montrer que les points $M$, $P$ et $Q$ sont alignés :

   $\alpha$ par un raisonnement géométrique ;

   $\alpha$ par le calcul.

4. $t$ désignant le temps, on pose $\lambda = \sqrt{ab}\mathrm{e}^t$.
   Soit $S$ le point ayant pour abscisse $\lambda$ (ordonnée de $M$) et pour ordonnée celle de $P$.
   Construire l'ensemble $(\Sigma)$ des points $S$, le vecteur vitesse et le vecteur accélération de $S$, l'hodographe du mouvement de $S$ par rapport au point $O$.
   Préciser, suivant la position de $S$ sur $(\Sigma)$, si son mouvement est accéléré ou retardé.
   **N. B.** - La dernière partie est indépendante des deux précédentes.

## III. Antilles remplacement, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 262. ./1966/antillesmelemrem/exo-1/texte.tex

**1.** Trois points $A$, $B$ et $C$, étant donnés dans l'espace, construire le point $G$ tel que

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

On distinguera le cas où $A$, $B$, $C$ sont alignés de celui où ils ne sont pas alignés.

**2.** En utilisant le point $G$ précédent, rechercher l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$$

($k$ : constante réelle donnée).

### Problème 52 ./1966/antillesmelemrem/pb/texte

**1.** Dans le repère $Ox$, $Oy$ orthonormé, on envisage les graphiques $(C)$ et $(C')$, des fonctions

$$x \longmapsto 2\sqrt{x+1} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto -2\sqrt{x+1}.$$

Montrer que $(C) \cap (C')$ est une parabole, $(P)$, dont on précisera le foyer, la directrice, le paramètre et l'axe de symétrie.

**2.** $M$ est un point de $(P)$, d'abscisse $m$. Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ les droites d'équations respectives $y = x + 2$ et $x = -1$ ; soit $M_1$ et $M_2$ les intersections de la tangente en $M$ à $(P)$ avec $(D_1)$ et $(D_2)$.
On introduit les points $A_1(-1\ ;\ +1)$ et $A_2(-1\ ;\ 0)$.
Calculer, en fonction de $m$, les composantes, sur les axes, des vecteurs $\overrightarrow{A_1M_1}$ et $\overrightarrow{A_2M_2}$.
On considèrera successivement le cas où $M$ est sur $(C)$ et le cas où $M$ est sur $(C')$.

**3.** Montrer qu'on passe de $\overrightarrow{A_1M_1}$ à $\overrightarrow{A_2M_2}$ par une similitude, dont on précisera le centre, l'angle et la rapport.

**4.** Vérifier que la médiatrice de $OM_1$ coïncide avec la médiane issue de $M_2$, du triangle $OM_1M_2$. En déduire l'enveloppe de cette médiane, quand $m$ varie.
On distinguera les cas suivants : $M$ sur $(C)$ et $M$ et $(C')$.

Retour page 1

# IV. Bordeaux, séries mathématiques élémentaires et maths & technique

**Ex. 263.** ./1966/bordeauxmelem/exo-1/texte.tex

Dans le corps des nombres complexes, calculer les racines cubiques du nombre 1 et le cube du nombre $z = 1+\text{i}$.
Utiliser les résultats obtenus pour déterminer les trois racines cubiques du nombre $Z = -2+2\text{i}$.

**Ex. 264.** ./1966/bordeauxmelem/exo-2/texte.tex

Calculer en grades, avec le précision permis par le stables de logarithmes, la mesure da l'angle $x$ comprises entre 0 et 400 grades, qui satisfont à l'équation :

$$0{,}752\cos x + 1{,}752\sin x = 0{,}897.$$

## Problème 53

./1966/bordeauxmelem/pb/texte

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le point fixe $A$ dont les coordonnées sont $a$ et $0$ ($a$ étant un nombre strictement positif ) ; on étudie la transformation ponctuelle $T$ qui à un point $M$ quelconque du plan associe le point $M'$ défini de la manière suivante :
les points $A$, $M$ et $M'$ sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont perpendiculaires.

1. Déterminer l'ensemble des points $M$ qui n'ont pas de transformé.
   Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que le transformé de chacun d'eux soit le point $A$.
   La transformation $T$ admet-elle un point double (ou invariant) ?
   Quelle est la transformée d'une droite passant par $O$ ?
   Existe-t-il une transformation réciproque (oui inverse) de $T$ ?
2. On désigne par $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de $M$ et par $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ celles de $M'$. Établir entre ces coordonnées deux relations ayant la propriété suivante : le fait qu ?elles soient simultanément vérifiées est une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ et $M'$ soient homologues par $T$.
   Exprimer les coordonnées de $M'$ en fonction de celles de $M$, puis les coordonnées de $M$ en fonction de celles de $M'$.
3. On suppose que M décrit la droite D dont l'équation est $x = 2x$. Déterminer l'ensemble D' des points $M'$ transformés des points $M$ de D.
4. Les coordonnées du point $M$ sont définies en fonction du temps par les relations $x = -at$, $y = at$ ($t$ variant de $-\infty$ à $+\infty$).
   Déterminer la trajectoire, C, du point $M$, en précisant ses éléments.
   Exprimer en fonction de $t$ les coordonnées du point $M'$ et en déduire l'équation cartésienne de la transformée, C', de C.
   Comparer $C'$ à $D'$.
   Déterminer, à l'instant $t$, les composantes du vecteur vitesse de $M$ et celles du vecteur vitesse de $M'$.
   Établir les équations cartésiennes de la tangente en $M$ à C et de la tangente en $M'$ à $C'$.
   Donner les équations de deux des tangentes communes a ? C et C'.

# V. Bordeaux remplacement, série mathématiques élémentaires

**Ex. 265.** ./1966/bordeauxmelemrem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x + 1.$$

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, les équations :

1. $f(x) = 0$ ;
2. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x + \frac{f(x)}{1-\sqrt{3}}}$.



Retour page 1

**Ex. 266.** ./1966/bordeauxmelemrem/exo-2/texte.tex

Soit quatre points fixes, $O$, $A$, $B$ et $C$, non coplanaires.
On appelle $(\Delta)$ la droite $OC$ et $\Pi$ le plan $OAB$.
Tout point $M$ de l'espace est repéré par le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de ses coordonnées réelles telles que

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + z.\overrightarrow{OC}.$$

Quel que soit le nombre réel $k$, $f_k$ désigne l'application de l'espace dans lui-même telle que l'image $M'$ du point $M$ soit définie par $\overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$ où $H$ est la projection de $M$ sur $(\Delta)$ parallèlement à $\Pi$.

A- 1. Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction de celles de $M$.
Soit un second point $M_1$, et son image, $M'_1$. Comparer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M'M'_1}$.
Qu'en déduit-on pour les images de deux bipoints (ou vecteurs liés) équipollents ?

2. Lorsque $i = 1$ ou $i = 2$, on pose $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{V_i}$ et $\overrightarrow{M'M'_i} = \overrightarrow{V'_i}$, en désignant par $M'_i$ l'image de $M_i$.
On note alors $f_k(\overrightarrow{V_i}) = \overrightarrow{V'_i}$.
Justifier l'égalité

$$f_k(\overrightarrow{MM_i}) = \overrightarrow{M'M'_i}.$$

Démontrer que $f_k(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}) = f_k(\overrightarrow{MM_1}) + f_k(\overrightarrow{MM_2})$ et que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_k(\lambda\overrightarrow{MM_1}) = \lambda f_k(\overrightarrow{MM_1}.)$

B- 1. Soit $\Pi'$ un plan parallèle à $\Pi$ ; préciser l'image de $\Pi'$ par $f_k$ et trouver une application classique simple donnant de chaque point de $\Pi'$ la même image que $f_k$.
Même question pour un plan $\Pi''$ contenant $(\Delta)$.
Quel est l'ensemble des points invariants dans $f_k$ ?
Pour quelles valeurs de $k$, $f_k$ est-elle une application biunivoque ? On suppose cette condition remplie dans toute la suite du problème.

2. Établir que toute application $f_k$ admet une application réciproque, qui est $f_{k'}$ pour une valeur de $k'$ à préciser.
Pour quelles valeurs de $k$, $f_{k'}$ coïncide-t-elle avec $f_k$ ? Reconnaître, en particulier, ces applications lorsque $(\Delta)$ est perpendiculaire à $\Pi$.

3. Établir que l'ensemble E des applications $f_k$ biunivoques a une structure de groupe commutatif pour la loi « produit d'applications ». Ce groupe est-il commutatif ?

C- On suppose, dans cette partie exclusivement que le repère $(O,\ A,\ B,\ C)$ est orthonormé.

1. Quel est l'ensemble des points $M$ tels que les droites $OM$ et $OM'$ soient perpendiculaires ?
Discuter suivant les valeurs de $k$et indiquer avec précision le résultat lorsque $k = -3$.

2. Á quelle condition deux points $M$ et $M_1$ sont-ils à la même distance l'un de l'autre que leurs images dans $f_k$ ?

D- 1. Démontrer que l'image dans $f_k$ d'un barycentre de deux ou de trois points est le barycentre de leurs images affectées des mêmes coefficients.

2. Déterminer les images par $f_k$ d'un segment $M_1M_2$, d'une droite $M_1M_2$, d'un plan défini par trois points $M_1$, $M_2$ et $M_3$.

## VI. Bordeaux remplacement, séries mathématiques et technique

**Ex. 267.** ./1966/bordeauxmathtechrem/exo-1/texte.tex

1. Montrer que la fonction

$$y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}$$

est définie, continue et positive pour tout $x$ réel.

2. Étudier les limites de $y$ quand $x$ tend vers $\pm\infty$.



Retour page 1

### Problème 54

./1966/bordeauxmathtechrem/pb/texte

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$.
Soit $A$ le point de coordonnées $x=0$ et $y=a$ et (C) le cercle de diamètre $OA$.
Soit $M$ un point distinct de $O$. La droite $OM$ coupe en $I$ le cercle (C).
On peut associer à $M$, en général, un point $M'$ et un seul de la droite $OM$ défini par

$$\overline{OM}^2=\overline{MI}.\overline{MM'}. \tag{1}$$

A- 1. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé ? Quel est la transformé d'un point de $x'Ox$ ?
2. Si $M$ décrit un cercle tangent en $O$ à $Ox$ et distinct de (C), quel est l'ensemble des points $M'$ ?
3. Démontrer que le point $A$ a même puissance par rapport au cercle de diamètre $MM'$ et au cercle de centre $M$ passant par $O$.

B- Soit $z'z$ l'un des deux axes portés par le droite $OM$. On pose $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{Oz})=\theta+2k\pi$.
1. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation

$$\overline{OM}.\overline{OM'}=a\overline{MM'}\sin\theta. \tag{2}$$

En déduire $m'=\overline{OM'}$ en fonction de $a$, de $\theta$ et de $m=\overline{OM}$.
2. Le point $M$ décrit la droite $y=a$ sauf le point $A$. Quel est l'ensemble des points $M'$ ?

C- Soit deux points $M$ et $N$, et leurs transformés respectifs, $M'$ et $N'$. Les droites $OM$ et $ON$ coupent respectivement en $I$ et $J$ le cercle de diamètre $OA$.
Soit $P$ et $Q$ les points définis par

$$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{ON}.$$

1. Démontrer que les droites $PQ$, $IJ$, $M'N'$ sont concourantes ou parallèles.
2. Les droites $MN$ et $M'N'$ se coupent en $S$ ; démontrer que les couples de droites $OM$, $ON$ et $Ox$, $OS$ ont les mêmes bissectrices.

ℹ- La partie C est indépendante de B

## VII. Dijon, série Mathématiques élémentaires & Technique remplacement

**Ex. 268.** ./1966/dijonmelemathechremp/exo-2/texte.tex

Quelles sont les valeurs de $n$, entier naturel, pour lesquelles $\dfrac{3n+24}{n-4}$ est un entier naturel ?

## VIII. Grenoble, série Mathématiques élémentaires & Technique

**Ex. 269.** ./1966/grenoblemelem/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe $z=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Déterminer le module et l'argument de $z$.
2. Calculer $z^6$.
3. Déterminer les modules et arguments des racines carrées de $z$.

### Problème 55

./1966/grenoblemelem/pb/texte

On donne un repère orthonormé d'axe $x'Ox$, $y'Oy$, le point $A$ de l'axe $x'Ox$ d'abscisse $a$, $a$ désignant un nombre positif, et la droite $(D)$ d'équation $x-2y=0$.
Un droite variable $(\Delta)$, passant par $A$, de pente $m$, coupe la droite $(D)$ en $P$ et l'axe $y'Oy$ en $Q$.

1. Calculer, en fonction de $m$ et de $a$, les coordonnées des points $P$ et $Q$.

2. Montrer que l'aire arithmétique $S$ du triangle $OPQ$ est donné par la formule

$$S = \frac{a^2m^2}{|2m-1|}.$$

3. $S$ est une fonction de $m$, dont on étudiera la variation et dont on tracera le graphe.
   Discuter, suivant les valeur de $k$, le nombre de solutions de l'équation

$$S = k^2, \qquad (k \geqslant 0).$$

4. On considère l'inversion de centre $O$, de puissance $a^2$ ; soit $P_1$ l'inverse de $P$, $Q_1$ celui de $Q$.
   $S_1$ désignant l'aire arithmétique du triangle $OP_1Q_1$, montrer que

$$SS_1 = \frac{a^4}{5}.$$

   Pour quelles valeurs de $m$ a-t-on $S = 5S_1$ ? Préciser les positions correspondantes de la droite $(\Delta)$.
5. Montrer que, quand $m$ varie, la droite $P_1Q_1$ reste tangente à une parabole, dont on déterminera le foyer et la directrice. Former une équation de cette parabole.
6. Montrer que le point $Q_1$ se déduit du point $P_1$ par une similitude indépendante de $m$.
   En déduire, quand $m$ varie, le lieu du milieu, $I$, du segment $P_1Q_1$.

## IX. Groupe I, série Mathématiques élémentaires & Technique

**Ex. 270.** ./1966/groupeImelemettech/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe $\alpha = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
Calculer le module et l'argument de $\alpha$.
Calculer le module et l'argument du nombre

$$\beta = 2\mathrm{i} - \alpha.$$

Calculer le module et l'argument du nombre

$$\gamma = 2\mathrm{i} + \alpha.$$

Calculer le module et l'argument du nombre

$$\delta = \frac{\gamma}{\beta}.$$

## X. Lyon, série Mathématiques élémentaires remplacement

**Ex. 271.** ./1966/lyonmelemrem/exo-1/texte.tex

Comment faut-il choisir l'entier naturel $n$ pour que $A = 2^n - 1$ soit divisible par 9 ?
Cette condition étant supposée réalisée, montrer que $A$ est divisible par 7. Quel est le reste de la division euclidienne de $A$ par 21 ?

## XI. Mexico, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 272.** ./1966/mexicomelem/exo-1/texte.tex

Décomposer en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels le trinôme bicarré $y = x^4 - 3x^2 + 9$.
Calculer les zéros du trinôme dans le corps des complexes ; donner les solution sous forme trigonométrique et en construire les images dans le plan complexe.

Retour page 1

**Ex. 273.** ./1966/mexicomelem/exo-2/texte.tex

Montrer que l'on peut décomposer de trois façons différentes le trinôme $y = x^4 - 10x^2 + 9$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Effectuer ces trois décompositions.

## XII. Nantes, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 274.** ./1966/nantesmelem/exo-1/texte.tex

Quels sont le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 + \mathrm{i}\ ?$$

En déduire les modules et les arguments de $z_1 \times z_2$ et de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Utiliser les résultats trouvés pour calculer

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12}.$$

## XIII. Nantes, série Mathématiques & Technique.

**Ex. 275.** ./1966/nantesmathech/exo-1/texte.tex

Le repère étant orthonormé, construire la courbe représentative de la fonction qui, à $x$ réel, fait correspondre

$$y = 2\sin^2 x - 2\sin x - 1.$$

**Ex. 276.** ./1966/nantesmathech/exo-2/texte.tex

On sait que l'ensemble des homothéties-translations forme un groupe pour le produit des transformations ponctuelles.

Rappeler la signification de ce théorème.

Le théorème subsiste-t-il :

a) pour l'ensemble des homothéties $(H)$ de centre $O$, dont le rapport est un nombre rationnel strictement positif;

b) pour l'ensemble des homothéties $(H_n)$ de centre $O$ donné, de rapport $n$, où $n$ est un entier relatif différent de zéro?

## XIV. Nice, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 277.** ./1966/nicemelem/exo-1/texte.tex

On donne un angle quelconque $xOy$. Un point $M$ décrit la demi-droite $Ox$. Un point $N$ varie sur $Oy$ de façon que $ON - OM = \ell$, $\ell$ étant une longueur donnée.

1. Trouver le lieu du milieu, $\alpha$, du segment $MN$. (On pourra utiliser la voie analytique, les axes étant $Ox$, $Oy$.)
2. On appelle $\beta$ le point du segment $MN$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{M\beta}}{\overrightarrow{MN}} = k$, $k$ étant un nombre donné.

   Trouver le lieu de $\beta$ quand $M$ varie.



Retour page 1

Ex. 278. ./1966/nicemelem/exo-2/texte.tex

On donne un repère orthonormé et le cercle de centre $O$ (origine du repère), de rayon $R$ et orienté dans le sens trigonométrique?

On appelle $A$ le point $(+R\ ;\ 0)$ et $A'$ le point $(-R\ ;\ 0)$ ; $M$ et $N$ désignent deux points quelconques du cercle et l'on pose

$$(\overrightarrow{OA}, vecteurOM) = a, \qquad (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{ON}) = b,$$

$a$ et $b$ étant les mesures en radians des angles correspondants, comprises entre 0 et $2\pi$.

**1.** Démontrer que l'équation de la droite $MN$ peut s'écrire

$$x\cos\frac{a+b}{2} + y\sin\frac{a+b}{2} - R\cos\frac{a-b}{2} = 0.$$

**2.** On suppose que la droite $MN$ coupe l'axe $y'Oy$ en $I$ et l'on appelle $C$ la deuxième point où la droite $AI$ recoupe le cercle. $C$ sera appelé « point associé » au couple de points $M$, $N$ et l'on pose

$$(\overrightarrow{OA}, vecteurOC) = c$$

($c$ étant compris entre 0 et $2\pi$).

Former la relation liant les trois nombres $a$, $b$ et $c$.

A cet effet, on formera d'abord l'équation de la droite $AC$, puis on exprimera que les droites $MN$ et $AC$ coupent $y'Oy$ au même point.

Montrer que la relation trouvée peut s'écrire, en général,

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\tan\frac{a}{2} + \tan\frac{b}{2}}{1 + \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}}.$$

Où se trouve le point $C$ lorsque l'un des points $M$, $N$ est confondu avec $A$?

Lorsque la droite $MN$ est parallèle à $y'Oy$, quel point la relation trouvée permet-elle d'associer au couple $M$, $N$?

**3.** Exprimer $\sin c$ et $\cos c$ en fonction rationnelle de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$, $\cos b$.

**4.** On donne trois points $X$, $Y$ et $Z$ définis par

$$(\overrightarrow{OA}, vecteurOX) = x, \qquad (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OY}) = y,, \qquad (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OZ}) = z$$

($x$, $y$, $z$ étant compris entre 0 et $2\pi$).

Au couple $(X,\ Y)$ il correspond, d'après le 2, un « point associé » $P$ ; on note $x \circ y$ l'angle $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OP})$. De même, on notera $Q$ le « point associé » au couple $(Y,\ Z)$ et $y \circ z$ l'angle $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ})$.

On pose

$$\tan\frac{x}{2} = t_1, \qquad \tan\frac{y}{2} = t_2, \qquad \tan\frac{z}{2} = t_3.$$

Démontrer que

$$\tan\frac{(x\circ y)\circ z}{2} = \tan\frac{x\circ(y\circ z)}{2} = \frac{t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3}{1+t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3}.$$

Donner la construction, sur le cercle, des points $U$ et $V$ tels que

$$(\overrightarrow{OA}, vecteurOU) = x\circ(y\circ z), \qquad (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OV}) = (x\circ y)\circ z,$$

à partir de $X$, $Y$, $Z$. Énoncer la propriété géométrique correspondant à l'égalité trouvée.



Retour page 1

# XV. Orléans, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 279.** ./1966/orleansmelem/exo-1/texte.tex

a) Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} \sin 2x.$$

b) Étudier le signe de cette dérivée pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**Ex. 280.** ./1966/orleansmelem/exo-2/texte.tex

On donne un repère orthonormé $Ox$, $Oy$, $Oz$.

a) Trouver l'équation du cône de révolution d'axe $Oz$, de sommet S de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et tangent à la droite $(D)$ du plan $xOy$ qui a pour équation dans ce plan $3x + y - 3 = 0$.

b) Trouver l'équation du plan tangent au cône et contenant $(D)$.

**Ex. 281.** ./1966/orleansmelem/exo-3/texte.tex

On donne, dans un plan P, un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et deux points situés sur $x'Ox$ : $A$ d'abscisse $+1$, et $A'$ d'abscisse $-1$. On se propose d'étudier une transformation ponctuelle, $T$. $M$ étant un point quelconque du plan, la perpendiculaire à $A'M$ passant par $A$ et la perpendiculaire à $AM$ passant par $A'$ se coupent en un point $M'$. $M'$ est la transformé de $M$ par la transformation $T$.

A- 1. On désigne par $x$, $y$ les coordonnées de $M$, par $X$, $Y$ les coordonnées de $M'$.
Donner les expressions de $X$ et de $Y$ en fonction de $x$ et $y$. Tout point $M$ du plan a-t-il un transformé $M'$, bien déterminé ?
Donner les expressions de $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

2. Démontrer géométriquement que $MM'$ est perpendiculaire à $x'Ox$ et trouver une relation simple entre $\overline{IA}$, $\overline{IA'}$, $\overline{IM}$ et $\overline{IM'}$,
en désignant par $I$ le point commun aux droites $AA'$ et $MM'$.

B- Déterminer l'ensemble des points $M'$ dans les cas suivants :

1. $M$ décrit la droite d'équation $y = 2x - 1$ ; construire l'ensemble des points $M'$.
2. $M$ décrit la droite d'équation $y = 3(x - 1)$ ; préciser la nature de l'ensemble des points $M'$.
3. $M$ décrit la droite d'équation $y = k$ ; préciser la nature de l'ensemble des points $M'$.
4. $M$ décrit la parabole déterminée par ce qui suit : $y'y$ est axe de symétrie, $AA'$ est corde focale, l'ordonnée du sommet est négative.
5. $M$ décrit un cercle passant par $A$ et $A'$.
6. $M$ décrit une ellipse de grand axe $AA'$. (On désignera par $b$ le demi-petit axe de cette ellipse).

# XVI. Orléans, série Mathématiques et technique.

**Ex. 282.** ./1966/orleansmt/exo-1/texte.tex

Soit deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, $a$ et $b$ deux longueurs données, $(E)$ l'ensemble des points $M$ définis en fonction du paramètre $t$ par

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

**1.** Calculer les composantes du vecteur dérivé de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}$ de la variable $t$. Former une équation de la tangente à $(E)$ en $M$.

**2.** Déterminer les valeurs de $t$ correspondant aux points de contact des tangentes à $(E)$ passant par $A$ donné, de coordonnées $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$.

Retour page 1

**Ex. 283.** ./1966/orleansmt/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté au système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unitaires $\imath$ et $\jmath$.

1. a) Soit $(A)$ l'affinité qui a pour axe la droite d'équation $y=-x$, pour direction $y'Oy$, pour rapport 2. Montrer qu'elle transforme le point $M(x\ ;\ y)$ en le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x+2y. \end{cases}$$

   b) Soit $(T)$ la transformation ponctuelle qui à $M(x\ ;\ y)$ fait correspondre $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = x+2y, \\ y_1 = x. \end{cases}$$

   Montrer que $(T)$ est le produit ordonné de $(A)$ par une deuxième transformation, $(S)$, que l'on définira. Soit $(T)=(S)\circ(A)$.

   c) Définir la transformation $(T^{-1})$ réciproque de $(T)$. Calculer $x_1+y_1$ et $x_1-2y_1$.

2. a) Montrer que les directions définies par $y=-x$ et $y=\dfrac{x}{2}$ sont invariantes dans $(T)$.

   b) Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathscr{H})$ d'équation $x^2-4y^2=1$ ? Déterminer et représenter dans le plan $xOy$ l'ensemble $\mathscr{H}_1$ transformé de $\mathscr{H}$ par $(T)$.

3. Dans cette question, les coordonnées $x$ et $y$ de $M$ sont des entiers positifs. Soit $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ l'homologue de $M$ dans la transformation $(T)$, $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ l'homologue de $M_1$ dans la transformation $(T)$, et soit $M_n(x_n\ ;\ y_n)$ l'homologue de $M_{n-1}(x_{n-1}\ ;\ y_{n-1})$ dans la transformation $(T)$, pour tout entier $n$ positif.
   On considère la suite des fractions

$$r_0=\frac{y}{x},\ r_1=\frac{y_1}{x_1},\ r_2=\frac{y_2}{x_2},\ \ldots,\ r_n=\frac{y_n}{x_n}.$$

   a) Montrer que si $r_0$ est irréductible et $x$ impair, toues les fractions de la suite sont irréductibles. Écrire les cinq premières fractions de la suite lorsque $x=y=1$.

   b) Montrer que $r_n=\dfrac{1}{1+2r_{n-1}}$ pour $n\geqslant 1$ et vérifier que la relation $v=\dfrac{1}{1+2u}$ peut se mettre, pour $u>0$ sous la forme

$$\frac{v-\frac{1}{2}}{v+1}=-\frac{1}{2}\frac{u-\frac{1}{2}}{u+1}.$$

   c) En déduire l'expression du rapport $\dfrac{r_n-\frac{1}{2}}{r_n+1}$, en fonction de $n$ et du rapport $\dfrac{r_0-\frac{1}{2}}{r_0+1}$, et la limite de $r_n$ quand $n$ entier tend vers $+\infty$.

   d) Déterminer l'expression $(x_n+y_n)$ en fonction de $n$ et de $(x+y)$. Montrer que, quand $n$ entier tend vers $+\infty$, $(x_n+y_n)$, $x_n$ et $y_n$ tendent vers $+\infty$.
   Dire ce que devient, quand $n$ tend vers $+\infty$, la somme

$$\Sigma_n=\ln r_0+\ln r_1+\cdots+\ln r_n.$$

   N.B. la question 3 est indépendante de la question 2

## XVII. Paris, série Mathématiques élémentaires et Technique.

**Ex. 284.** ./1966/parismelem/exo-1/texte.tex

a) Étudier la variation de la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$y=f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

b) Construire sa représentation graphique.

Retour page 1

Ex. 285. ./1966/parismelem/exo-2/texte.tex

a) $z$ étant un nombre complexe, développer $(z+1)^3$. Résoudre l'équation

$$z^3+3z^2+3z-7=0.$$

b) Construire les images des racines.

c) Trouver tous les nombres entiers relatifs $n$ tels que $n^3+3n^2+3n-7$ soit divisible par $8$.

# XVIII. Poitiers, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 286. ./1966/poitiersmelem/exo-1/texte.tex

Déterminer les fonctions $y$ de la variable $x$ vérifiant l'équation

$$2y'+3y=0.$$

Soit $y_1$ la fonction particulière qui prend la valeur $\mathrm{e}$ ($\mathrm{e}$ : base des logarithmes népériens) lorsque $x=-\dfrac{2}{3}$.
Étudier cette fonction et construire son graphe. Préciser, à $10^{-4}$ près, la valeur de $y_1$ pour $x=1$.
Montrer que tous les graphes des fonctions $y$ de déduisent du graphe de la fonction $y_1$ par une transformation géométrique simple.

## Problème 56

./1966/poitiersmelem/pb/texte

On donne, dans un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, le cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon $a$ ($a>0$). On appelle $(D)$ la polaire d'un point $M$ par rapport à $(C)$, $H$ étant le point d'intersection de $(D)$ et $OM$.

1° On suppose que $M$ décrit un cercle $(\Gamma)$. Trouver l'ensemble des points $H$ et l'enveloppe de la droite $(D)$. Discuter la nature de cette enveloppe suivant la position de $O$ par rapport à $(\Gamma)$.

2° Soit $x_0,\ y_0$ les coordonnées de $M$ ; établir l'équation de $(D)$. ($R$ décrivant la droite $(D)$, on pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OM}$.)
Calculer, en fonction de $x_0$ et $y_0$, les coordonnées des points $P$ et $Q$ intersection de $(D)$ avec $Ox$ et $Oy$.
Montrer analytiquement que, si $(D)$ passe par un point fixe de coordonnées $p$ et $q$, $M$ décrit une droite fixe, dont on formera l'équation en fonction de $p$ et $q$.
Expliquer géométriquement ce résultat.

3° Soit $M'$ le quatrième sommet du rectangle $OPM'Q$ construit sur $OP$ et $OQ$ comme côtés.
Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction des coordonnées $x_0$ et $y_0$ de $M$.
Montrer que l'on a ainsi défini une transformation ponctuelle associant $M'$ à $M$. Comment faut-il choisir $M$ pour que $M'$ soit défini ?
La transformation est-elle involutive ?
Quels sont les points doubles ?
Trouver, en fonction de $x_0$ et $y_0$, l'équation du cercle $(L)$ de diamètre $MM'$ et montrer que la puissance de l'origine par rapport à ce cercle est constante.
En dédure que $(L)$ est orthogonal à un cercle fixe.
On suppose que le milieu de $MM'$ décrit une droite $(\Delta)$. Montrer que le cercle $(L)$ appartient à un faisceau, dont on discutera la nature suivant la distance de $O$ à $(\Delta)$.
Donner une construction simple des points remarquables de ce faisceau dans chaque cas.

4° Montrer que, si $M$ décrit une droite d'équation $ux+vy+w=0$, $M'$ décrit une hyperbole, dont on donnera l'équation en fonction de $u,\ v$ et $w$.
Soit $(H)$ l'hyperbole correspondant à la droite

$$x+2y-a=0.$$

Construire $(H)$ dans un repère orthonormé (unité : 1 cm). Déterminer, à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut, l'aire $(S)$ comprise entre $(H)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=-3$.



Retour page 1

# XIX. Reims, série Mathématiques élémentaires et Technique remplacement.

Ex. 287. ./1966/reimsmelemetetchrem/exo-1/texte.tex

1. Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes $x$ qui satisfont l'équation

$$x^5 + 1 = 0.$$

2. En déduire que $x^5 + 1$ peut mettre sous la forme d'un produit de cinq binômes du premier degré en $x$, à coefficients réels ou complexes.
   Démontrer que l'on peut écrire

$$x^5 + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{5} + 1\right).$$

3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.



Retour page 1

# Chapitre IX

# 1967.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 288. ./1967/aixmarseillemelem/exo-1/texte.tex

Déterminer le module et l'argument de chaque solution de l'équation

$$z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0,$$

où $z$ appartient au corps des nombres complexes.

Ex. 289. ./1967/aixmarseillemelem/exo-2/texte.tex

Étant donné deux cercles, $(C)$ et $(C')$, de rayons $R$ et $R'$, tangents extérieurement en $A$, déterminer l'inversion (pôle et puissance) qui transforme le cercle $(C)$ en une droite $(d)$ tangente à $(C')$ et le cercle $(C')$ en une droite $(d')$ tangente à $(C)$.

En déduire une construction de deux cercles, $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$, orthogonaux, tangents tous deux aux cercles $(C)$ et $(C')$.

## PROBLÈME 57

./1967/aixmarseillemelem/pb/texte

**1.** Soit $m$ un paramètre réel *strictement positif.*

a) On considère les polynômes $P(x) = x^2 + mx - 2$ et $Q(x) = mx - 1$.
Pour quelle valeur de $m$ le polynôme $P(x)$ est-il divisible par $Q(x)$ ?

b) On suppose, dans toute la suite du problème, que $m$, qui reste strictement positif, est différent de 1.
Soit $f$ la fonction définie, pour tout réel $x$ différent de $\frac{1}{m}$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}.$$

On désigne par $C_m$ la courbe représentative par rapport à un repère orthonormé $xOy$, de la fonction $f$ correspondant à la valeur $m$ du paramètre.
Pour quelles valeurs de $m$ la fonction $f$ admet-elle un maximum (relatif) ? Construire $C_2$ et $C_{\frac{1}{2}}$ (on ne demande pas la construction de $C_m$ dans le cas général).
Montrer que les courbes $C_m$ passent par trois points fixes.

**2.** Soit $y = kx$ l'équation d'une droite $D_k$ passant par $O$. Établir une équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de $C_m$ et $D_k$.
Comment faut-il choisir $m$ pour que toutes les droites $D_k$ coupent $C_m$ ?

**3.** On se donne un point $M$ distinct de $O$, de coordonnées $x_1$ et $y_1$ et l'on écrit les équations paramétriques de la droite $OM_1$ sous la forme

$$x = \frac{x_1}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1}{1+\lambda}.$$

Donner une signification géométrique du paramètre $\lambda$.
Montrer que, pour que le point de paramètre $\lambda$ appartienne à $C_m$, il faut et il suffit que $\lambda$ soit solution d'une équation du second degré, qu'on établira.
Quelle inégalité $m$ doit-il vérifier pour qu'un des points d'intersection, et un seul, appartienne au segment $OM_1$ ?

**4.** On se donne un nombre réel, $a$, et l'on considère une courbe $C_m$ correspondant à une valeur $m < 1$.
Quel est l'ensemble $\Delta_m$ des points $M_1$ tels que la droite $OM_1$ coupe $C_m$ en deux points $M'$ et $M''$ et que

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''O}} = a \ ?$$

Montrer que, si $m$ varie et si $a$ reste fixe, $\Delta_m$ passe par un point fixe.

# II. Aix Marseille remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 290.** ./1967/aixmarseillemelemrem/exo-1/texte.tex

Variations et représentation graphique de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = 3\sin x - 2\sin^3 x \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

Déterminer $A$ et $B$ pour que

$$F(x) = A\cos x + B\cos^3 x$$

($A$ et $B$ étant constants) soit une primitive de la fonction $f$ ci-dessus.
En déduire l'aire de la partie définie par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

**Ex. 291.** ./1967/aixmarseillemelemrem/exo-2/texte.tex

Soit $n$ un entier strictement positif. Démontrer que $3^n - 2n - 1$ est divisible par 4.



Retour page 1

**Ex. 292.** ./1967/aixmarseillemelemrem/exo-3/texte.tex

1. On donne un cercle fixe, $(C)$, de centre $O$ et de rayon $R$, et un point fixe, $A$, distinct de $O$.
   Soit $M$ un point variable, $(\Omega)$ le cercle de diamètre $MA$ et $E$ le point où ce cercle $(\Omega)$ recoupe $OA$.
   Trouver l'ensemble $(\Delta)$ des points $M$ tels que $(\Omega)$ coupe le cercle $(C)$ en deux points diamétralement opposés sur $(C)$.
   Que peut-on dire de $(\Delta)$ et de la polaire de $A$ par rapport à $(C)$ ?
   Étudier la position de $(\Delta)$ par rapport à $(C)$, suivant le position de $A$ par rapport à $(C)$.
2. On choisit, dans le plan du cercle $(C)$, une repère orthonormé $xOy$, dont l'origine est la centre, $O$, de $(C)$.
   Soit $x_0$ et $y_0$ les coordonnées de $A$, $x$ et $y$ étant celles du point $M$.
   Montrer que, pour que le cercle de diamètre $AM$ coupe $(C)$ en deux points diamétralement opposés sur $(C)$, il faut et il suffit que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}+R^2=0$.
   En déduire l'équation cartésienne de l'ensemble $(\Delta)$ trouvé à la question 1.
   A un point $A$ correspond l'ensemble $(\Delta)$ ; à un autre point $A'$, l'ensemble $(\Delta')$. Quel est l'ensemble correspondant au point $B$ commun à $(\Delta)$ et à $(\Delta')$ (si ce point $B$ existe) ?
3. On suppose, dans toute cette question, que les coordonnées du point $A$ dépendent du paramètre, $\alpha$ ; soit $x_0 = R\cos\alpha$ et $y_0 = R\sin\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$.
   a) Déterminer le nombre de valeurs de $\alpha$ et, par conséquent, le nombre de points $A$, pour lesquels l'enveloppe correspondant à $(\Delta)$ passe par un point donné, $P$, de coordonnées $x$ et $y$. Discuter suivant la position de $P$ dans le plan.
   b) Trouver l'ensemble $(\gamma)$, des points $A$ quand $\alpha$ varie. Transformer $(\gamma)$ par inversion de pôle $O$ et de puissance $-R^2$.
      En déduire la construction des ensembles $(\Delta)$ passant par un point donné, $P$, et celle des points $A$ correspondants (on ne demande pas des discussion).

## III. Bac Algérien, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 293.** ./1967/bacalgeriemelem/exo-1/texte.tex

Soit $a$ un nombre réel et $z$ le nombre complexe

$$z = \frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a}.$$

On pose $a = \tan\alpha$, avec $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Trouver le module et l'argument de $z$.
Trouver tous les nombres complexes $u$ tels que

$$u^5 = z.$$

**Ex. 294.** ./1967/bacalgeriemelem/exo-2/texte.tex

Soit $(C)$ et $(C')$ deux cercles égaux, de centres respectifs $O$ et $O'$, tangents extérieurement en $A$.
Á tout point $M$ du cercle $(C)$ on associe le point $M'$ du cercle $(C')$ tel que

$$(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\text{mod. } 2\pi].$$

**1.** Démontrer que $M'$ est le transformé de $M$ dans une rotation, dont on demande de construire le centre, $I$.

**2.** Soit $H$ le milieu du segment de droite $MM'$. Par quelle transformation peut-on passer du point $M$ au point $H$ ? Quel est l'ensemble des points $H$ ?

**3.**

## Problème 58

./1967/bacalgeriemelem/pb/texte

Soit un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$et $m$ un nombre réel.
On considère la transformation $T_m$ qui, au point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, associe le point $P$ dont les coordonnées sont

$$\begin{cases} X = (1+m)x - y, \\ Y = x + (1+m)y + C, \end{cases}$$

où $C$ est une constante réelle.

**1.** Montrer que chaque transformation $T_m$ a un point double et calculer les coordonnées $x_0$ et $y_0$, de ce point en fonction de $m$ et $C$.
En supposant $x_0 \neq 0$, calculer $\dfrac{y_0}{x_0}$ et en déduire une relation indépendante de $m$ liant $x_0$ et $y_0$.
Quel est dans ce cas, l'ensemble, $(E)$, des points doubles des transformations $T_m$ quand le paramètre $m$ prend toutes les valeurs réelles ?
Dans quel cas peut-on avoir $x_0 = 0$ ? Quel est alors l'ensemble $(E)$ ?
Que peut-on dire des ensembles $(E)$ quand $C$ prend toutes les valeurs réelles ?

**2.** On considère la transformation $T$ obtenue en faisant $m = -1$. Montrer que, dans ce cas, la transformation $T$ est une isométrie (c'est à dire qu'elle conserve les distances).
Montrer que c'est la seule valeur de $m$ pour laquelle la transformation $T_m$ est une isométrie.

**3.** On suppose, dans cette question, que le nombre $C$ n'est plus indépendant de $m$, mais que l'on a $C = m^2$ ; soit $T_m$ la transformation définie par

$$\begin{cases} X = (1+m)x - y, \\ Y = x + (1+m)y + m^2. \end{cases}$$

Soit $(x_0 \ ; \ y_0)$ les coordonnées de son point double.
Trouver une relation indépendante de $m$ qui lie $x_0$ et $y_0$. Calculer $y_0$ en fonction de $x_0$.
Tracer l'ensemble des points doubles des transformations $T_m$ quand $m$ prend toutes les valeurs réelles.

# IV. Amiens, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 295.** ./1967/amiensmelem/exo-1/texte.tex

Déterminer le nombre réel $a$ pour que l'équation

$$z^3 - az^2 + 3az + 37 = 0$$

admette pour racine $-1$.
Calculer alors les deux autres racines, $z_1$ et $z_2$, dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes.
Représenter les points $A$, $M_1$, $M_2$ d'affixes respectives $-1$, $z_1$, $z_2$. Quelle est la nature du triangle $AM_1M_2$ ?

**Ex. 296.** ./1967/amiensmelem/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations et tracer la courbe représentative (axes orthonormés) de la fonction qui, à la variable réelle $x$, fait correspondre

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^2}.$$

**2.** Calculer, l'aire du domaine délimité par la courbe, les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

# V. Amiens remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Retour page 1

# VI. Antilles, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 297.** ./1967/antillesmelem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$2(x-1) \leqslant \sqrt{x^2-4x+3}.$$

**Ex. 298.** ./1967/antillesmelem/exo-2/texte.tex

Trouver l'ensemble des points $M$ du plan qui sont images des nombres complexes $z$ tels que

$$|z| = 2\,|z-\mathrm{i}|\,.$$

## Problème 59

./1967/antillesmelem/pb/texte

Soit un cercle $(O)$, de centre $O$, de rayon $R$.
Un droite $(D)$ et son pôle, $S$, par rapport à ce cercle.
On pose $SO = d$. On supposera :

— d'une part que $(D)$ n'est pas tangente à $(O)$ ;

— d'autre part que $(D)$ n'est pas un diamètre de $(O)$.

Soit $M$ un point du plan, supposé non situé sur la perpendiculaire en $S$ à $SO$.
On définit sa position par la mesure algébrique, $x$, de la projection orthogonale sur l'axe $\overrightarrow{SO}$ du vecteur $\overrightarrow{SM}$ et par l'angle $(\overrightarrow{SO},\ \overrightarrow{SM}) = \theta$ (mod. $2\pi$).
La droite $SM$ coupe $(D)$ en $Q$.

**1.** Calculer, en utilisant les données $R$, $d$, $x$ et $\theta$ :

a) le puissance, $\mathscr{P}$, de $M$ par rapport à $(O)$ ;

b) la distance $MQ$ ;

c) l'expression $y = \mathscr{P} - MQ^2$. (On mettra en facteur l'expression $\left(2x - \dfrac{d^2-R^2}{d}\right)$).

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $y = 0$ (suivant les cas, on trouvera une ou trois droites).

**3.** On suppose que $d = 2R$ et, de plus, on impose au point $M$ de décrire le cercle de diamètre $SO$.
Quelle relation existe-t-il entre $x$, $R$ et $\theta$ ?
Calculer $y$ en fonction de $R$ et $x$.
Variations de $y = f(x)$. Représentation graphique pour $R = 1$.

N.B.- les questions 2 et 3 sont indépendantes.

# VII. Antilles remplacement, série Mathématiques élémentaires.

# VIII. Antilles remplacement, série Mathématiques & Technique.

# IX. Besançon, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 299.** ./1967/besanconmelem/exo-1/texte.tex

Déterminer la base du système de numération dans lequel on a

$$\overline{46} + \overline{53} = \overline{132}$$

et effectuer, dans ce système, l'opération $\overline{46} \times \overline{53}$.

Retour page 1

**Ex. 300.** ./1967/besanconmelem/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations des fonctions définies par

$$f_1 : x \longmapsto y_1 = \frac{\tan x}{\tan x - 2} \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \longmapsto y_2 = \frac{\tan x}{\tan x + 2}$$

et construire leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.

**2.** Étudier le signe de

$$\Delta(x,\ y) = \tan^2 x(1-y)^2 - 4y^2$$

suivant la position d'un point $M(x\ ;\ y)$ dans un repère orthonormé, en supposant l'abscisse de $M$ telle que $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

## X. Besançon remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XI. Bordeaux, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 301.** ./1967/bordeauxmelem/exo-1/texte.tex

Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ et utiliser le résultat obtenu pour résoudre l'équation

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\cos 2x.$$

**Ex. 302.** ./1967/bordeauxmelem/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $y_1$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} y_1(x) = 3x + \dfrac{\sqrt{4x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y_1(0) = 2. \end{cases}$$

Étude de la continuité pour $x = 0$. Représentation graphique.

**2.** Soit $y_2$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} y_2(x) = 3x + \dfrac{\sqrt{4x^2}}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ y_2(0) = 2. \end{cases}$$

Étude de la continuité pour $x = 0$. Représentation graphique.

### Problème 60

./1967/bordeauxmelem/pb/texte

Dans un repère quelconque, d'axes $Ox$, $Oy$, de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, dans le plan , on considère les points $A$ et $A'$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OA'} = -\vec{i}$ et $B$ tel $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.‘
Soit $\Delta$ la droite parallèle à $Ox$ menée par $B$. On se propose d'étudier la transformation ponctuelle, $T$ , qui, à un point $M$ du plan, fait correspondre le point $M' = T(M)$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} O,\ M,\ M' \text{ sont alignés} \\ AM \text{ et } A'M' \text{ se coupent sur } \Delta. \end{cases}$$



Retour page 1

A) 1. Quels sont les points du plan où la transformation $T$ n'est pas définie ? (Dans toute la suite, les figures dont il sera question seront supposées privées de ces points.)
Quels sont les points doubles ?
Calculer les coordonnées, $x'$ et $y'$, de $M'$ en fonction des coordonnées, $x$ et $y$, de $M$.
2. La transformation $T$ est-elle involutive ? (Donner une démonstration analytique.)

B) Étude de l'image d'une droite par la transformation $T$.

1. Soit $D$ une droite, d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. Montrer analytiquement que son image est une droite, $D'$.
2. Si $D$ coupe $\Delta$, étudier les intersections de $D$ et $D'$ avec $Ox$ (soit $C$ et $C'$ ces points). En déduire un méthode de construction rapide de $D'$ à partir de $D$.
3. $D$ et $D'$ peuvent-elles être parallèles ou confondues et dans quels cas ?

C) 1. Montrer géométriquement que, si $O'$ est l'intersection de la droite $OM$ avec$\Delta$ et $M'$ l'image de $M$ par $T$, les points $O$, $O'$, $M$, $M'$ forment une division harmonique. Retrouver géométriquement les résultats de A2 et B1.
2. On fait varier $M$ sur une droite passant par $O$ et distincte de $Ox$. Que peut-on dire des cercles de diamètre $MM'$ ?
3. Soit $\omega$ la projection orthogonale de $O$ sur $\Delta$.
Si $M$ est sur $O\omega$ (et distinct du milieu de $O\omega$), montrer que le cercle de diamètre $MM'$ est invariant par la transformation T.

D) En repère orthonormé d'origine $O$, en supposant que $B=\omega$ et que $OB=OA$, on donnera l'équation du cercle de diamètre $O\omega$, puis celle de l'image de ce cercle par $T$. Reconnaître ensuite cette figure, en faisant une translation d'axes avec, comme nouvelle origine, le milieu de $O\omega$.

## XII. Bordeaux, série Mathématiques & Technique.

**Ex. 303.** ./1967/bordeauxmatech/exo-1/texte.tex

Déterminer les nombres entiers $n$ tels que $n^5-2$ soit divisible par 7.

**Ex. 304.** ./1967/bordeauxmatech/exo-2/texte.tex

Déterminer les racines carrées du nombre complexe

$$z=5-12\mathrm{i}.$$

### Problème 61 ./1967/bordeauxmatech/pb/texte

Les données sont :

— une longueur $a$,

— un repère orthonormé $xOy$, dans le plan ,

— trois points $A$, $B$, $C$ de coordonnées respectives $(a\ ;\ 0)$, $(-a\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ a)$.

On considère la transformation ponctuelle qui, au point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$, de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, tel que

$$x\overrightarrow{M'A}+y\overrightarrow{M'B}+2a\overrightarrow{M'C}=\vec{0}.$$

$M'$, quand il existe, est ainsi barycentre des points $A$, $B$, $C$, respectivement affectés des coefficient $x$, $y$, $2a$.

1. Déterminer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
Quel est l'ensemble des points $M$ qui n'ont pas de transformé ?
Déterminer les points doubles de la transformation.

2. Déterminer la transformation réciproque, qui, au point $M'$, fait correspondre le point $M$.
   On trouvera
   $$x = a\frac{a + x' - y'}{y'}$$
   et
   $$y = a\frac{a - x' - y'}{y'}.$$
   La transformation étudiée est-elle involutive ?
3. Déterminer par son équation l'ensemble $(\Gamma')$ des transformés des points du cercle de diamètre $AB$. Construire $(\Gamma')$.
4. Déterminer par son équation l'ensemble $(E'_t)$ des transformés des points de la courbe $(E_t)$ d'équation
   $$xy = ta^2,$$
   où $t$ est un nombre réel donné.
   Déterminer avec précision la nature de $(E'_t)$, suivant les valeurs de $t$.

*les quatre questions du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.*

Ex. 305. ./1967/bordeauxmelemathtechrem/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, chacune des équations suivantes :
$$3x \equiv 3 \qquad (\text{modulo } 6),$$
$$3x \equiv 3 \qquad (\text{modulo } 5),$$
$$3x \equiv 8 \qquad (\text{modulo } 5).$$

Ex. 306. ./1967/bordeauxmelemathtechrem/exo-2/texte.tex

On donne un parallélogramme $ABCD$. On pose $\dfrac{AD}{AB} = k$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \alpha$ (mod. $2\pi$).
Construire, avec la règle et le compas, la transformé du parallélogramme $ABCD$ dans la similitude de centre $A$ de rapport $k$, d'angle $\alpha$. Justifier cette construction.

## Problème 62 ./1967/bordeauxmelemathtechrem/pb/texte

1. Donner le tableau de variation et le graphique, $(\mathscr{C})$, par rapport à un repère orthonormé, de la fonction définie par
   $$y = -x + \frac{1}{1-x}.$$
   On justifiera la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote oblique.
2. a) Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, l'équation
   $$m = -x + \frac{1}{1-x},$$
   où $m$ désigne un paramètre.

   b) On appelle $M'$ et $M''$ les points d'intersection, quand ils existent, de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = m$.
   Calculer la longueur $M'M''$ en fonction de $m$.

   c) Démontrer que l'ensemble des milieux de $M'M''$ appartient à une droite $(D)$ qui passe par l'intersection, $\Omega$, des asymptotes de $(\mathscr{C})$.
   Démontrer que le faisceau constitué par les deux asymptotes à $(\mathscr{C})$, la droite $(D)$ et la parallèle à $Ox$ menée par $\Omega$ est harmonique.

   d) On appelle $P'$ et $P''$ les projections de $M'$ et $M''$ sur l'axe $Ox$. Démontrer que l'ensemble des cercles de diamètre $P'P''$ est un faisceau, $(\mathscr{F})$, dont on indiquera la nature.

   e) Soit $A$ le point de $Ox$ dont l'abscisse rend minimal $y = \left|-x + \dfrac{1}{1-x}\right|$. Comment le faisceau $(\mathscr{F})$ est-il transformé dans une inversion de centre $A$ et de puissance arbitraire ?



Retour page 1

3. a) En supposant $|x| < \dfrac{1}{2}$, montrer qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\left|x + \frac{1}{1-x} - 1\right| < k\,|x|\,.$$

b) Étant donné $\epsilon > 0$, existe-t-il un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$|x| < \alpha \qquad \text{implique} \qquad \left|x + \frac{1}{1-x} - 1\right| < \epsilon\ ?$$

4. Étudier la fonction définie par

$$y = |-x| + \left|\frac{1}{1-x}\right|.$$

On précisera les demi-tangentes au point anguleux.

ℹ*On pourra traiter le 3 avant le 4.*

## XIII. Caen, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 307.** ./1967/caenmelem/exo-1/texte.tex

Un nombre s'écrit 1 101 010 011 dans le système binaire. Écrire ce nombre dans le système de base 8.

**Ex. 308.** ./1967/caenmelem/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On désigne par $f_1$ la primitive de $f$ telle que $f_1(0) = 0$, par $f_2$ la primitive de $f_1$ telle que $f_2(0) = 0$, par $f_3$ la primitive de $f_2$ telle que $f_3(0) = 0$.
On suppose $f(x)$ positive pour tout $x$ positif.
Montrer que $f_1(x),\ f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont positives pour tout $x$ positif.

**2.** Si $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, calculer $f_1(x),\ f_2(x)$ et $f_3(x)$.
Établir, pour $x$ positif, la double inégalité

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} < \mathrm{e}^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}.$$

**3.**

### Problème 63

./1967/caenmelem/pb/texte

On donne un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite $\Delta$ d'équation $x - y = 0$ et le cercle $(O)$ de centre $O$ et de rayon $a\sqrt{2}$, $a$ étant une longueur donnée.
Soit T la transformation plane qui, à un point M, associe le point M', intersection de la polaire de M par rapport à $(O)$ et de la droite O$u$ symétrique de OM par rapport à $\Delta$.

**1.** Étudier géométriquement les questions suivantes :

a) Quels sont les points du plan qui n'ont pas de transformé par T ?

b) Quels sont les points invariants par T ?

c) T est-elle involutive ?

**2.** On désigne par $x$ et $y$ les coordonnées de M, par $x'$ et $y'$ celles de M'. Établir les relations :

$$xx' = a^2, \quad yy' = a^2.$$

*(On pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.)*
Retrouver les résultats précédents.

**3.** Déterminer l'ensemble, E, des points M tels que la droite MM' passe par le point A$(-a\ ;\ a)$ ou que les points M et M' soient confondus.
E est la réunion d'une droite, D, et d'une courbe, C. Montrer que D et C sont invariantes dans T.



Retour page 1

**4.** Déterminer l'ensemble, E' , des points M tels que la droite MM' soit perpendiculaire à $\Delta$ ou que les points M et M' soient confondus.

E' est la réunion d'une droite, D', et d'une courbe, C'. Montrer que D' et C' sont invariantes dans T.
Montrer que l'ensemble des cercles de diamètre MM' est un faisceau, $F_1$, lorsque M décrit D', et un faisceau, $F_2$, lorsque M décrit C'. Définir $F_1$ et $F_2$ avec précision.

*N.B - Les questions* $1^\circ$ *et* $2^\circ$ *sont indépendantes.*

## XIV. Caen remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XV. Clermont Ferrand, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 309.** ./1967/clermontmelem/exo-1/texte.tex

Un point $M$ parcourt l'arc du cercle fixe $AB$. Trouver l'ensemble des points $P$ obtenus en portant sur la demi-droite $BM$, à partir de $B$, une longueur égale à $AM$.

**Ex. 310.** ./1967/clermontmelem/exo-2/texte.tex

On donne l'équation

$$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = m.$$

Résoudre cette équation pour $m = 1$.
Pour quelles valeurs de $m$ cette équation a-t-elle des solutions ?

## XVI. Clermont remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XVII. Dakar, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 311.** ./1967/dakarmelem/exo-1/texte.tex

Démontrer que $2^{2n} + 2$ est divisible par 3 quel que soit l'entier naturel $n$. En déduire, ou démontrer directement, que

$$2^2 + 15n - 1$$

est un multiple de 9. (On pourra raisonner par récurrence.)

**Ex. 312.** ./1967/dakarmelem/exo-2/texte.tex

Simplifier l'écriture du nombre complexe

$$Z = \frac{(\mathrm{i}-1)^4}{(\mathrm{i}+1)^5}.$$

Préciser le module et l'argument.

Retour page 1

# XVIII. Dakar, série Mathématiques & Technique.

**Ex. 313.** ./1967/dakarmatech/exo-1/texte.tex

a) Résoudre et discuter le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x+y=m. \end{cases}$$

b) Interprétation géométrique ?

**Ex. 314.** ./1967/dakarmatech/exo-2/texte.tex

Étudier, dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \pi$, le sens de variation de la fonction $y = \dfrac{x}{2} - \sin x \cos x$. Le graphique n'est pas demandé.

# XIX. Dijon, séries Mathématiques élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 315.** ./1967/dijonmelem/exo-1/texte.tex

Soit une droite $D$, un point $O$ appartenant à cette droite et un nombre réel $\alpha$. On désigne par $S$ la symétrie orthogonale par rapport à $D$ et par $R$ la rotation de centre $O$ et de mesure $\alpha$. En décomposant $R$ en le produit de deux symétries convenables, étudier les transformations $R \circ S$ et $S \circ R$.

**Ex. 316.** ./1967/dijonmelem/exo-2/texte.tex

Soit le nombre complexe $Z = 10 - 4\mathrm{i}\sqrt{6}$ ; trouver les nombres complexes $z$ de la forme $z = x + \mathrm{i}y$ tels que $z^2 = Z$.

## Problème 64

./1967/dijonmelem/pb/texte

**1.** Étudier les variations de la fonction qui, à $x$, associe $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a^2}{x}\right)$, où $a$ est un nombre réel positif.

On désigne $C_{(a)}$ la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction correspondant à une valeur positive déterminée. Construire $C_{(1)}$, correspondant à la valeur $a = 1$ (on prendra 2 cm comme unité).

**2.** On considère l'homothétie de centre $O$, de rapport $k$, qui transforme un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$. Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$. Montrer que la courbe $C_{(a)}$ est homothétique de $C_{(1)}$.

**3.** Dans cette question, on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point $M$ quelconque de $C_{(1)}$, distinct du point de coordonnées $(+1\ ;\ +1)$. On pose $x = 1 + \dfrac{1}{u}$, $y = 1 + \dfrac{1}{v}$. Calculer $v$ en fonction de $u$. Montrer que les coordonnées de ce point $M$ sont rationnelles si, et seulement si, $u$ est rationnel.

**4.** On désigne par $f$ la fonction

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

On considère la suite :

$$x_0 = 2, \quad x_1 = f(x_0), \quad \ldots, \quad x_n = f(x_{n-1}).$$

Montrer $x_n > 1$.

Soit $u_n$ le nombre défini par $x_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que $u_{n+1} = 2u_n(1+u_n)$.

Montrer par récurrence que les nombres $u_n$ sont des entiers positifs et que $u_n$ est, pour $n \geqslant 1$ divisible par $2^{n+1}$ sans l'être par $2^{n+2}$.

Démontrer que le reste de la division par 3 de $u_n$ est 1 et que, pour $n \geqslant 2$, $u_n$ est divisible par 5 sans l'être par 25.

Déterminer la limite de $x_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

Retour page 1

# XX. Dijon remplacement, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 317. ./1967/dijonmelemrem/exo-1/texte.tex

Déterminer le plus grand diviseur commun des deux nombres suivants, écrits dans le système décimal :

$$52\,884 \qquad \text{et} \qquad 66\,105.$$

Ex. 318. ./1967/dijonmelemrem/exo-2/texte.tex

On considère un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et les deux points $A(0\ ;\ a)$, $B(0\ ;\ -a)$ ($a$ : longueur donnée). Deux droites, $(D)$ et $(D')$, pivotent respectivement autour de $A$ et $B$ de sorte que le produit de leurs pentes soit égal à $k$, $k$ étant un nombre relatif donné.
Écrire l'équation du lieu géométrique du point $M$, intersection de $(D)$ et $(D')$.
Discuter la nature de ce lieu suivant les valeurs de $k$.

### Problème 65 ./1967/dijonmelemrem/pb/texte

On désigne par $f$ la fonction

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

où $x$ est une variable réelle.

**1.** Étudier les variations de $f$. Construire la courbe représentative, $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

**2.** La tangente à $(\mathscr{C})$ au point $M$, d'abscisse $x$, coupe $x'Ox$ en $T$. Calculer l'abscisse de $T$ en fonction de $x$. (On désignera par $X$ et $Y$ les coordonnées d'un point quelconque de cette tangente.)

**3.** Le point $M$ de la courbe $(\mathscr{C})$ se projette orthogonalement en $P$ sur $x'Ox$ et en $Q$ sur $y'Oy$.
Écrire l'équation de la droite $PQ$ en fonction de l'abscisse, $x$, du point $M$.
Montrer que la droite $PQ$ reste tangente à un cercle $(\Gamma)$ de centre $O$, lorsque $M$ décrit $(\mathscr{C})$.
Soit $(\Delta)$ une tangente variable à $(\Gamma)$, rencontrant $x'Ox$ en $P$ et $y'Oy$ en $Q$ ; soit $M'$ le point se projetant orthogonalement sur $x'Ox$ en $P'$, sur $y'Oy$ en $Q'$.
Quel est le lieu de $M'$ quand $(\Delta)$ varie en restant tangente à $(\Gamma)$.

**4.** Calculer l'aire du domaine, $S$, compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations

$$x = \lambda \qquad \text{et} \qquad x = \lambda + 1 \quad (\lambda > 1).$$

$S$ a-t-elle une limite quand $\lambda$ croît indéfiniment ?
Peut-on prévoir l'existence de cette limite sans effectuer le calcul de $S$ ?

N.B.- la question 4 est indépendante de la question 3.

# XXI. Grenoble, séries Mathématiques élémentaires & Maths et technique.

Ex. 319. ./1967/grenoblemelem/exo-1/texte.tex

Le nombre $z$ appartenant à l'ensemble des nombres complexes et $u$ est un paramètre réel tel que $0 \leqslant u \leqslant \pi$. On considère l'équation

$$z^2 + 2(1-\cos u)z + 2(1-\cos u) = 0. \qquad \text{(E)}$$

Résoudre (E). Soit $z_1$ et $z_2$ les racines de (E).
Déterminer les modules, $\rho_1$ et $\rho_2$, ainsi que les arguments, $\theta_1$ et $\theta_2$, de $z_1$ et $z_2$ ($\theta_1$ et $\theta_2$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et $\theta_2 \leqslant \theta_1$).



Retour page 1

**Ex. 320.** ./1967/grenoblemelem/exo-2/texte.tex

Mettre la fonction $y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ sous la forme

$$y = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1},$$

$a$ et $b$ étant des constantes à déterminer.
Calculer une primitive de cette fonction et une primitive du carré de cette même fonction.

## XXII. Grenoble remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XXIII. Groupe I, séries Mathématiques élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 321.** ./1967/groupeImelem/exo-1/texte.tex

Soit un parallélépipède rectangle ; $ABCD$ en est une face, $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ en sont des arêtes ; on fait successivement et dans cet ordre, les symétries orthogonales suivantes (ou retournements) :

$$S_1 \text{d'axe } AD, \quad S_2 \text{d'axe } BB', S_3 \text{d'axe } C'D'.$$

Le produit de ces symétries, qu'on pourra noter $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, équivaut à une transformation $T$, que l'on reconnaîtra et que l'on énoncera en utilisant seulement des lettres de la figure donnée.

**Ex. 322.** ./1967/groupeImelem/exo-2/texte.tex

Le repère, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, est orthonormé ; soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction définie par $y = \mathrm{e}^x$ ; $(C)$ coupe $y'Oy$ en $A$.
Le point $M(a\ ;\ b)$ de $(C)$ est projeté sur $x'Ox$ en $P$ et sur $y'Oy$ en $Q$.

**1.** Évaluer par différence et selon le signe de $a$ l'aire de la région du plan que limitent les segments $AQ$, $QM$ et l'arc $AM$ de $(C)$.

**2.** En déduire une fonction primitive de la fonction logarithme népérien.

## XXIV. Groupe I remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XXV. Israël, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 323.** ./1967/israelmelem/exo-1/texte.tex

On donne le fonction de la variable réelle $x$, définie par

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x - \lambda \cos 4x,$$

où $\lambda$ est un paramètre réel.

**1.** Calculer sa dérivée ; vérifier que, pour $\lambda = \dfrac{3}{8}$, $y$ a une valeur constante, que l'on calculera.

**2.** Calculer la valeur de la somme

$$S=\cos^6 x+\cos^6\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\frac{2\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\frac{3\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\frac{4\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\frac{5\pi}{6}\right).$$

**3.**

Ex. 324. ./1967/israelmelem/exo-2/texte.tex

On donne, dans un plan, une droite $(D)$ et un cercle $(C)$ dont le centre est $O$ et le rayon $R$.
Pour tout point $M$ du plan, non situé sur $(D)$, il passe un cercle $(\Gamma)$ du faisceau linéaire défini par $(C)$ et $(D)$.; on appelle $\omega$ le centre de $(\Gamma)$, $H$ la projection orthogonale de $M$ sur $(D)$.

**1.** Calculer la puissance, $p$, de $M$ par rapport au cercle $(C)$, en fonction des données $\overline{HM}$ et $\overline{O\omega}$, ces deux mesures algébriques étant prises sur un même axe $x'x$ perpendiculaire à $(D)$.

**2.** Reconnaître, suivant la position relative de $(C)$ et $(D)$, l'ensemble des points $I$ du plan, pôles des inversions qui transforment le cercle $(C)$ et la droite $(D)$ en deux cercles égaux.

## Problème 66 ./1967/israelmelem/pb/texte

Les lettres minuscules utilisées dans l'énoncé désigne des réels, $a$ et $b$ sont fixes et distincts, $\lambda$ et $\mu$ sont deux paramètres.

**1.** On envisage l'ensemble (E) des polynômes de la forme

$$\lambda(x-a)^2+\mu(x-b)^2. \tag{1}$$

a) Quelle relation doit-il exister entre les coefficients $u$, $v$, $w$ pour que le polynôme $ux^2-2vx+w$ appartienne à (E) ?

Quand il en est ainsi, calculer $\lambda$ et $\mu$ au moyen de $u$ et $v$.

b) Vérifier que la polynôme $x^2-ab$ appartient à (E) ; en donner une expression sous la forme (1).

**2.** On envisage la fonction définie par

$$y=\frac{(b-a)(x^2-ab)}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

Calculer sa dérivée ; étudier sa variation, *en se bornant aux deux cas suivants :*

a) $a=-1$, $b=8$ ;

b) $a=1$, $b=8$.

**3.** Un plan (Q) est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ ; $A(a\ ;\ 0)$ et $B(-a\ ;\ 0)$ sont deux points fixes de ce plan, $a$donné strictement positif.

Un plan (K) est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $X'\omega X$ $Y'\omega Y$. A chaque point $L(\lambda\ ;\ \mu)$ du plan (K) on associe l'ensemble, $(\Gamma)$, des points $M(x\ ;\ y)$ du plan (Q) tels que

$$y^2=\lambda(x-a)^2+\mu(x+a)^2.$$

a) Où le point $L$ doit-il se trouver pour que l'ensemble $(\Gamma)$ associé :

— ne contiennent aucun point $M$ ;

— soit un cercle (C) ? Il y a une famille $\mathscr{C}$ de tels cercles, former leur équation en fonction d'un paramètre et reconnaître géométriquement la famille $\mathscr{C}$ ;

— soit une parabole $(P)$ ? Il y a une famille $\mathscr{P}$ de telles paraboles, former leur équation en fonction d'un paramètre et reconnaître géométriquement la famille $\mathscr{P}$.

b) On donne un point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ du plan (Q) ; on suppose que $x_0y_0\neq 0$. Par le point $M_0$ passe une cercle $(C_0)$ de la famille $\mathscr{C}$ et une parabole $(P_0)$ de la famille $\mathscr{P}$ ; $(C_0)$ et $(P_0)$ se coupent en $M_0$et en $M_0'(x_0\ ;\ -y_0)$ d'une part ; en $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ et $M_1(x_1\ ;\ -y_1)$ d'autre part ; calculer $x_1$ et $y_1$ en fonction de $x_0$ et $y_0$.

Vérifier que l'une des deux droites $M_0M_1$ et $M_0M_1'$ passe par $A$ et l'autre par $B$.

## XXVI. Laos, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 325. ./1967/laosmelem/exo-1/texte.tex

Quels sont les restes respectifs de la division par 7 des six premières puissances de 10 :

$$10,\ 10^2,\ \ldots,\ 10^6\ ?$$

*Application :* Déterminer $n$ de façon que le nombre qui s'écrit dans le système décimal 3 725 $n$69 soit divisible par 7.

Ex. 326. ./1967/laosmelem/exo-2/texte.tex

On suppose que $\tan a$ et $\tan b$ sont les racines de l'équation à l'inconnue $x$

$$x^2+px+q=0.$$

Déterminer la relation entre $p$ et $q$ pour que $a+b=\dfrac{\pi}{3}$.

## XXVII. Laos remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## XXVIII. Bac Libanais, série Mathématiques

## XXIX. Bac Libanais remplacement, série Mathématiques

## XXX. Lille, série Mathématiques élémentaires & Maths et technique..

Ex. 327. ./1967/lillemelem/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

a) Déterminer deux constantes réelles, $A$ et $k$, telles que $f(x)=A\cos(x-k)$.

b) Démontrer que, dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet deux racines, $x_1$ et $x_2$ $(x_1<x_2)$, que l'on déterminera.

c) Ces deux racines, $x_1$ et $x_2$, sont respectivement les arguments de deux nombres complexes, $z_1$ et $z_2$, de module 1.*
Calculer la module et l'argument de chacun des deux nombres $q=\dfrac{z_2}{z_1}$ et $s=z_1+z_2$.

Ex. 328. ./1967/lillemelem/exo-2/texte.tex

a) Trouver tous les entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $3u-5v=0$.

b) Trouver tous les entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $3x-5y=18$.

Retour page 1

# XXXI. Lille remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

# XXXII. Limoges, séries Mathématiques élémentaires & Maths et technique.

Ex. 329. ./1967/limogesmelem/exo-1/texte.tex

Montrer que $n^7 - n$ est divisible par $42$, quel que soit l'entier $n$ supérieur à 1.

Ex. 330. ./1967/limogesmelem/exo-2/texte.tex

Résoudre l'équation trigonométrique

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
Déterminer toutes les solutions de l'inéquation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x < \sqrt{2}.$$

# XXXIII. Limoges remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 331. ./1967/limogesmelemrem/exo-1/texte.tex

On donne les deux nombres complexes

$$z_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \sqrt{2}(-1+\mathrm{i}).$$

**1.** Déterminer le module et l'argument de chacun des deux nombres complexes $z_1$ et $z_2$, ainsi que le module et l'argument de leur produit, $z_1 z_2$.

**2.** Déterminer le module et l'argument de chacun des deux nombres complexes $z$ tels que

$$z^2 = z_1 z_2.$$

Ex. 332. ./1967/limogesmelemrem/exo-2/texte.tex

**1.** Factoriser les deux polynômes suivants :

$$A(x) = 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60,$$
$$B(x) = 6x^2 + 18x + 12.$$

**2.** On suppose que $x$ est un entier naturel : $x = n$.
Déterminer le p.g.c.d et le p.p.c.m des deux entiers naturels $A(n)$ et $B(n)$.

## Problème 67 ./1967/limogesmelemrem/pb/texte

Soit $\Delta$ une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{i}$ et sur laquelle on désigne l'origine $O$.
Soit $a$, $b$ et $d$ trois nombres réels donnés, tels que $ad - b \neq 0$. On désigne par $\Delta_1$ l'ensemble des points de $\Delta$ d'abscisse $x$ telle que $x \neq d$ et $x \neq a$.
On définit la transformation ponctuelle $h$ suivante :
à tout point $m$ de $\Delta_1$, d'abscisse $x$, on associe le point $M = h(m)$, d'abscisse $X$ telle que

$$X = \frac{ax+b}{x+d}.$$

Retour page 1

**1.** Montrer que la transformation $h$ admet une transformation réciproque et la définir. A quelle condition la transformation $h$ est-elle involutive ?

**2.** Quelle condition les nombres $a$, $b$ et $d$ doivent-ils vérifier pour la transformation $h$ admette deux points invariants distincts, $A$ et $B$, d'abscisses respectives $\alpha$ et $\beta$ ? Calculer, dans ce cas, $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$. On supposera cette condition remplie dans toute la suite du problème.

**3.** Montrer que les points $A$ et $B$ sont symétriques par rapport à un point, $C$, dont on déterminera l'abscisse et qu'ils sont, en général, inverses l'un de l'autre dans une inversion de centre $O$, dont on déterminera la puissance.

Montrer, en discutant le signe de $b$, que le cercle de diamètre $AB$ est orthogonal à un cercle de centre $O$ ou coupe un cercle de centre $O$ en deux points diamétralement opposés.

En déduire une construction des points $A$ et $B$ dans les deux cas particuliers suivants :

$$X=\frac{7x+4}{x+5} \qquad \text{et} \qquad X=\frac{7x-1}{x+4}.$$

**4.** Soit $m$ un point quelconque de $\Delta_1$ distinct de $A$ et de $B$.

Montrer que $X-\alpha=\lambda\dfrac{x-\alpha}{x+d}$, $\lambda$ étant une constante, que l'on déterminera.

(on pourra pour cela utiliser la relation $\alpha=\dfrac{a\alpha+b}{\alpha+d}$.)

Déterminer de même la constante $\mu$ telle que $X-$
$beta=\lambda\dfrac{x-\beta}{x+d}$.

Montrer que

$$\frac{X-\alpha}{X-\beta}=k\frac{x-\alpha}{x-\beta}$$

et vérifier que

$$k=\frac{\beta+d}{\alpha+d}=\frac{a-\alpha}{a-\beta}.$$

Étudier la disposition des points $A$, $B$, $M$ et $m$, dans le cas particulier $k=-1$.

**5.** Soit $m_1$, $m_2$, $\dots, m_p$ une suite de $p$ points de $\Delta_1$, d'abscisses respectives $x_1$, $x_2$, $\dots$, $x_p$, tels que chacun d'eux soit le transformé du précédent par la transformation $h$.

On pose $u_i=\dfrac{x_i-\alpha}{x_i-\beta}$.

Montrer que la suite $u_1$, $u_2$, $\dots$, $u_p$ est une progression géométrique.

*Application numérique :* On donne $X=\dfrac{5x-3}{x+1}$, avec $x_1=2$. Calculer $u_1$, $k$ et $u_p$ en supposant $\alpha >_\beta$.

Calculer à $\dfrac{1}{100}$ près, les valeurs numériques de $x_2$, $x_3$ et $x_4$.

## XXXIV. Lyon, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 333.** ./1967/lyonmelem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie, pour tout nombre réel $x$, par $f(x)=\cos x-\cos^2 x$.

a) Étudier les variations de $f$ et tracer la graphique, $\mathscr{C}$, de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $xOy$ (on étudiera d'abord $f$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$).

b) Déterminer l'aire du domaine limité par le segment $OA$, où $A$ est le point de $Ox$ d'abscisse $+\dfrac{\pi}{2}$ et par l'arc $OA$ de $\mathscr{C}$.

**Ex. 334.** ./1967/lyonmelem/exo-2/texte.tex

Déterminer, en fonction des valeurs de $\theta\in[-\pi\,;+\pi[$, le module et l'argument du nombre complexe

$$z=\sin\theta(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta).$$



Retour page 1

# XXXV. Lyon remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 335.** ./1967/lyonmelemrem/exo-1/texte.tex

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1\,;+1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$.

a) Étudier les variations et tracer le graphique, $(\mathscr{C})$, da la fonction $f$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $xOy$.

b) Soit $A$ et $B$ les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la droite d'équation $y = \dfrac{8}{3}$.

Déterminer une primitive de $f$ et calculer l'aire du domaine limité par la segment $AB$ et l'arc $AB$ de $(\mathscr{C})$.

**2.** Montrer que, quels que soient les nombres réels $p$ et $q$, le polynôme

$$p(x) = x^3 + (p-q)x^2 + p(p-q)x - p^2q$$

est divisible par $x - q$. En déduire toutes les racines réelles ou complexes de l'équation $p(x) = 0$.

## Problème 68

./1967/lyonmelemrem/pb/texte

**1.** On considère la fonction définie, pour $x \in \left[-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x^2}{2}}$.

Étudier les variations de $f$ et tracer son graphique, $(\mathscr{C})$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $xOy$.

**2.** Soit $(\Gamma)$ la conique d'équation $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$, relativement au repère $xOy$.

a) Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ?

b) Quelles sont les coordonnées des foyers et des sommets de $(\Gamma)$ ?

c) Comment déduit-on $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C})$ ?

**3.** Soit $(\Delta)$ une droite variable, de pente $t$, issue du point $\omega\,(-1\,;\,-1)$.

a) Écrire l'équation de $(\Delta)$ relativement au repère $xOy$.

b) Déterminer, selon les valeurs de $t$, le nombre de points communs à $(\Gamma)$ et $(\Delta)$.

c) Dans chacun des cas où il n'y a qu'un point commun à $(\Gamma)$ et $(\Delta)$, écrire une équation de la droite $(\Delta)$ correspondante et déterminer les coordonnées du point commun à $(\Gamma)$ et $(\Delta)$.

**4.** Quand $(\Gamma)$ et $(\Delta)$ ont deux points en communs, $P$ et $P'$, on désigne par $M$ le conjugué harmonique de $\omega$ par rapport à $P$ et $P'$.
Déterminer l'ensemble des points $M$, quand $(\Delta)$ varie.

# XXXVI. Madagascar, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 336.** ./1967/madagascarmelem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer, *par la méthode algébrique*, les nombres complexes $z$ tels que

$$z^2 = 21 + 20\mathrm{i}.$$

**2.** Á l'aide d'une table de logarithmes, déterminer le module et l'argument ( à 1 minute près par défaut) du nombre complexe

$$z = 21 + 20\mathrm{i}.$$

En déduire les modules (à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut) et arguments des nombres complexes $z$ déterminés dans la question 1.



Retour page 1

## XXXVII. Maroc, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XXXVIII. Maroc remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 337. ./1967/marocmelemrem/exo-1/texte.tex

**1.** Écrire la formule donnant le développement du binôme $(1+x)^n$.
En donnant à $x$ deux valeurs particulières, que l'on choisira, en déduire la valeurs des sommes

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$$

et

$$\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+(-1)^n\,\mathrm{C}_n^n.$$

**2.** Déduire de la dernière formule la valeur de la somme

$$\frac{1}{0!n!}-\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}-\frac{1}{3!(n-3)!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!0!}.$$

(Par convention $0!=1$.)

Ex. 338. ./1967/marocmelemrem/exo-2/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que $p=\mathrm{e}^{n\log n}$ est aussi entier naturel.
Déterminer $n$ et $p$, sachant que $n$ est entier premier et que l'entier $p$ admet 4 diviseurs.

## XXXIX. Mexico, série Mathématiques élémentaires.

Ex. 339. ./1967/mexicomelem/exo-1/texte.tex

1. $\alpha$ étant un arc compris entre 0 et $\pi$ (unité le radian), on donne

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$. En déduire $\alpha$.

2. $x$ étant compris entre 0 et $2\pi$, résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3+2\cos x}>2\sin x.$$

Ex. 340. ./1967/mexicomelem/exo-2/texte.tex

A) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère la transformation ponctuelle S qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\[2ex] y'=x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{x}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation est involutive.



Retour page 1

2. Déterminer l'ensemble, $(\Delta)$, des points doubles, ainsi que l'ensemble des points $I$, milieu de $MM'$.
3. Montrer que $MM'$ reste parallèle à une direction fixe, que l'on comparera à la direction de $(\Delta)$.
4. Déduire de ce qui précède que S est une transformation ponctuelle simple, que l'on définira géométriquement.
5. Tracer $(\Gamma)$ ensemble des points $M\,(x\ ;\ y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{x}.$$

Quelle est la transformée de $(\Gamma)$ par S ?

B) On considère maintenant la transformation T qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \\ y' = x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que T admet un seul point double, dont on calculera les coordonnées.
2. Comparer les longueurs de $OM$ et de $OM'$.
3. $\theta$ étant un nombre réel, quel est le transformé du point $M$ de coordonnées $(\sin\theta\ ;\ \cos\theta)$ ?
4. Déduire de ce qui précède que T est un déplacement, que l'on caractérisera.
5. Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées S ∘ T et T ∘ S.

## Problème 69

./1967/mexicomelem/pb/texte

A) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère la transformation ponctuelle $S$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

1° Montrer que cette transformation est involutive.

2°

3°

B) On considère maintenant la transformation $T$ qui, au point $M\,(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)'$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

1° Montrer que $T$ a un seul point double, dont on calculera les coordonnées.

2° Comparer les longueurs de $OM$ et de $OM'$.

3° $\theta$ étant un nombre réel, quel est le transformé du point $M$ de coordonnées $(\sin\theta\ ;\ \cos\theta)$ ?

4° Déduire de ce qui précède que $T$ est un déplacement, que l'on caractérisera.

C) Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées $S \circ T$ et $T \circ S$.

# XL. Montpellier, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 341.** ./1967/montpelliermelem/exo-1/texte.tex

On donne le nombre complexe

$$z = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1).$$

Calculer son carré, $Z = z^2$.
En déduire le module et l'argument de $z$.

**Ex. 342.** ./1967/montpelliermelem/exo-2/texte.tex

**1.** Qu'appelle-t-on barycentre du système de trois points de l'espace, $A$, $B$, $C$, respectivement affectés des coefficients 1, 2, 3 ?

*Application :* On donne quatre points de l'espace, $A$, $B$, $C$ et $D$. Déterminer géométriquement l'ensemble des points $M$ tels que

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}) = 0.$$

**2.** On suppose maintenant que les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ ont pour coordonnées, dans un repère orthonormé d'origine $O$,

$$A(+2\ ;\ -2\ ;\ +3),\quad B\left(+\frac{1}{2}\ ;\ -2\ ;\ -3\right),\quad C(+3\ ;\ 0\ ;\ -3),\quad D(-4\ ;\ +2\ ;\ +3).$$

Donner l'équation de l'ensemble des points $M$ caractérisés comme précédemment.

# XLI. Montpellier remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

# XLII. Montréal & New York, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 343.** ./1967/montrealnymelem/exo-1/texte.tex

Résoudre les équations

$$Z^2 = 1 + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \frac{(1+z)^2}{1-z} = 1 + \mathrm{i}.$$

Les solutions sont des nombres complexes, qu'on écrira sous la forme $a + \mathrm{i}b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

**Ex. 344.** ./1967/montrealnymelem/exo-2/texte.tex

Déterminer les couples d'entiers positifs $x$ et $y$ solutions de l'équation

$$4x - 3y = 5.$$

**Problème 70** ./1967/montrealnymelem/pb/texte

1. a) Étudier les variations de la fonction définie par

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-2}.$$

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, construire la courbe $(\mathscr{C})$ qui a pour équation $y = f(x)$.

b) Utiliser cette courbe pour discuter, suivant les valeurs du paramètre $h$, le nombre de racines réelles de l'équation

$$2x^2 + (1-h)x + 2(h-3) = 0.$$



Retour page 1

2. La courbe $(\mathscr{C})$ se compose de deux branches, dont l'une, $(\mathscr{C}_1)$, rencontre l'axe $x'x$ en deux points, $A$ et $B$.
   a) Comment faut-il choisir le nombre réel $h$ pour que la droite d'équation $y = h$ rencontre $(\mathscr{C}_1)$ en deux points, $M$ et $N$ ?
   $h$ décrit alors le sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels, qu'on notera $\Delta$.
   Calculer, en fonction de $h$, les coordonnées du milieu, $I$, du segment $MN$.
   Quel est l'ensemble décrit par $I$ quand $h$ décrit $\Delta$ ?
   b) Calculer, en fonction de $h$ ($h \in \Delta$), la longueur du segment $MN$.
   Former l'équation du cercle $(\Gamma)$ de diamètre $MN$.
   Montrer que cette équation peut s'écrire
$$2x^2 + x - 6 - h(x-2) + 2(y-h)^2 = 0.$$
3. Pour $h \in \Delta_0$ ($\Delta_0 \subset \Delta$), le cercle $\Gamma$ rencontre $(\mathscr{C}_1)$ en deux points, $P$ et $Q$, distincts de $M$ et $N$. On se propose de déterminer $\Delta_0$.
   a) Montrer que l'ensemble des points communs à $(\mathscr{C}_1)$, et $(\Gamma)$ est l'ensemble des points communs à $(\mathscr{C}_1)$ et à deux droites, dont l'une est la droite $y = h$ et dont l'autre a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 1 + h$.
   On remarquera que l'équation de $(\mathscr{C})$ peut se mettre sous la forme
$$y(x-2) = 2x^2 + x - 6.$$
   b) Utiliser ce résultat pour former l'équation aux abscisses des points $P$ et $Q$. En déduire $\Delta_0$.
   Pour quelle valeur de $h$ les points $P$ et $Q$ sont-ils confondus en un point, $P_0$ ?
   Calculer les coordonnées de $P_0$.
   c)
4. a) Calculer, en fonction de $h$ ($h \in \Delta_0$), les coordonnées du milieu, $J$, du segment $PQ$.
   Quel est l'ensemble décrit par $J$ quand $h$ décrit $\Delta_0$ ?
   b) Montrer que les droites qui ont pour équations
$$y = 2x + 5, \qquad y = 4x + 1, \qquad y = \frac{9}{2}x, \qquad x = 2$$
   forment deux couples de droites isogonales (couples de droites ayant les mêmes bissectrices).
   c)

## XLIII. Montréal & New York remplacement, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 345.** ./1967/newyorkelemrem/exo-1/texte.tex

Le nombre $z$ appartenant au corps des complexes, résoudre les deux équations suivantes :
$$z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0, \tag{1}$$
$$z^2 + 2z + 4 = 0. \tag{2}$$
On désigne par $z_1$ et $z'_1$ les racines de l'équation (1), par $z_2$ et $z'_2$ celles de l'équation (2). Calculer le module et l'argument de $z_1$, de $z'_1$, de $z_2$ et de $z'_2$.

**Ex. 346.** ./1967/newyorkelemrem/exo-2/texte.tex

**1.** $a$ et $b$ étant deux entiers naturels, trouver l'expression générale des fractions $\frac{a}{b}$ telles que les fractions $\frac{a}{b+18}$ et $\frac{a-16}{b}$ soient équivalentes.
**2.** La fraction étant de la forme déterminée au 1, montrer que tout diviseur commun à $a$ et $b$ ne peut contenir que deux facteurs premiers distincts, que l'on précisera.

## 🏛Problème 71

./1967/newyorkelemrem/pb/texte

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, on désigne par $\overrightarrow{i}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{Ox}$ et par $\overrightarrow{j}$ celui de $\overrightarrow{Oy}$.

On désigne par $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\frac{1}{2}$, par $\mathscr{S}$ la similitude de centre $S$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radian.

On note $\mathscr{H}(M)$ le transformé de $M$ par $\mathscr{H}$ et $\mathscr{S}(M)$ le transformé de $M$ par $\mathscr{S}$.

1. a) Calculer, en fonction de coordonnées $x$ et $y$ d'un point $M$, celles de $x_1$ et $y_1$ de $M_1 = \mathscr{H}(M)$.

   b) Calculer en fonction des coordonnées $x'$ et $y'$ du point $\mathscr{S}$, de $r = SM$, et de $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{SM}}\right)$, les coordonnées $x$ et $y$ d'un point $M$ et celles $x_2$ et $y_2$ de $M_2 = \mathscr{S}(M)$.

   c) Déduire de la question 1b les expressions de $x_2$ et $y_2$ en fonction de $x'$, $y'$, $x$ et $y$.
2. Démontrer que $M_2$ est confondu avec $M_1$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{3}{2}y'. \end{cases}$$

   Ces relations définissent une nouvelle application, $\mathscr{T}$, qui, à tout point $S$, associe un point $M = \mathscr{T}(S)$.
3. Quelle est la figure transformée par $\mathscr{T}$ de la droite d'équation $ux' + vy' + w = 0$ ?

   Quelle est la figure transformée par $\mathscr{T}$ du cercle de centre $C\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon R ?
4. $S_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ étant fixé $(x_0 > 0)$, soit $M_0 = \mathscr{T}(S_0)$.

   Quel est l'ensemble des points $S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ pour lesquels $\overrightarrow{S_0M}$ et $\overrightarrow{SM_0}$ sont orthogonaux ? ($M = \mathscr{T}(S)$.)

   Quel est l'ensemble des points $S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ pour lesquels $\overrightarrow{S_0M}$ et $\overrightarrow{SM_0}$ ont même direction ?
5. Montrer que la transformation $\mathscr{T}$ est une similitude de centre $O$.

# XLIV. Nancy, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 347.** ./1967/nancymelem/exo-1/texte.tex

Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \pi$. On considère le nombre complexe

$$z = \cos 2\theta + \mathbf{i}\sin 2\theta.$$

Calculer, selon la valeur de $\theta$, le module du nombre complexe

$$w =' 1 + \mathbf{i})z + \mathbf{i}\sqrt{2}.$$

**Ex. 348.** ./1967/nancymelem/exo-2/texte.tex

1° Étudier les variations de la fonction $f$, qui, à tout $x$ réel tel que $-2 \leqslant x \leqslant 1$, fait correspondre $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$. Construire le graphe $(\Gamma)$ de $f$ dans un repère orthonormé. On prendra comme l'unité de longueur égale à 5 cm.

2° Déterminer les constantes réelles $a, \underline{,}\ c$ de sorte que $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$ ait pour dérivée $f(x)$. Calculer l'aire limitée par $(\Gamma)$, l'axe des $x$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.



Retour page 1

### Problème 72

./1967/nancymelem/pb/texte

Le plan est rapporté à un système d('axes orthonormé, $Ox$, $Oy$. On désigne par $(T)$ la transformation ponctuelle dans laquelle le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour image le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par les formules

$$x' = 2x + 3y\ ; \qquad y' = x + 2y.$$

1° $m$ étant un nombre réel, soit $(D_m)$ la droite d'équation $y = mx$. Montrer que $(T)$ transforme $(D_m)$ en une droite $(D'_m)$ passant par $O$, dont on donnera la pente en fonction de $m$. Quelle est la droite $(D'_m)$ quand $m = -\dfrac{2}{3}$ ?

2° a) Déterminer la droite $(\Delta)$ issue de $O$ qui est transformée par $(T)$ en une droite perpendiculaire à $(\Delta)$.

b) Si $M$ est sur $(\Delta)$, $M'$ se déduit de $M$ par une symétrie par rapport à une droite, qu'on déterminera.

3° a) Trouver les deux valeurs de $m$ telles que $(D_m)$ coïncide avec sa transformée $(D'_m)$. L'une des droites $(D_m)$ ainsi obtenues est de pente positive ; soit $(\Delta_1)$ cette droite. L'autre sera notée $(\Delta_2)$.

b) Si $M$ est sur $(\Delta_1)$, montrer que $M'$ se déduit de $M$ par une homothétie de centre $O$, dont on déterminera le rapport $k_1$. Étudier la même question pour $(\Delta_2)$.

4° a) Soit à nouveau $M$ un point quelconque du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, et soit $M'$, de coordonnées $(x'\ ;\ y')$, son image par $(T)$.

Calculer $x'^2 - 3y'^2$ en fonction de $x$ et $y$.

b) On désigne par $(H)$ la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$. Quelle est la nature de cette courbe ? Quelles sont ses asymptotes ? Quelle est la courbe transformée de $(H)$ par $(T)$ ?

c) Soit $P$ le milieu du segment $MM'$, où $M'$ est le transformé de $M$ par $(T)$. En fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$, calculer les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $P$, puis la quantité $X^2 - 3Y^2$.

d) Trouver la courbe $(C)$ décrite par $P$ quand $M$ parcourt $(H)$. La courbe $(C)$ se déduit de $(H)$ par une transformation simple, qu'on précisera.

## XLV. Nancy remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## XLVI. Nantes, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 349.**

./1967/nantesmelem/exo-1/texte.tex

Dans un plan orienté, on donne trois droites $D_1,\ D_2,\ D_3$ concourantes en $O$ et telles que :

a) $\dfrac{\pi}{6}$ est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{D_1,\ D_2})$ ;

b) $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{D_2,\ D_3})$.

On désigne respectivement par $S_1,\ S_2,\ S_3$ les symétries orthogonales par rapport à ces trois droites.

1. Indiquer la nature de l'application $T$ définie par : $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
2. Indiquer la nature de l'application $T_1$ définie par : $T = S_1 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

Baccalauréat Nantes, Juin 1967

**Ex. 350.**

./1967/nantesmelem/exo-2/texte.tex

On donne, dans un plan orienté, on donne trois droites $D_1,\ D_2,\ D_3$ concourantes en $O$ et satisfaisant à :

$$(D_1,\ D_2) = \frac{\pi}{6}\ (\text{mod. } \pi),$$

$$(D_2,\ D_3) = \frac{\pi}{4}\ (\text{mod. } \pi).$$

On désigne respectivement par $S_1,\ S_2,\ S_3$ les symétries axiales planes par rapport à ces trois droites.

1. Indiquer la nature de l'application $T$ définie par

$$T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

(composition des symétries axiales planes autour de $D_1$, $D_2$, $D_3$, prises dans cet ordre).

2. Indiquer la nature de l'application $T_1$ définie par

$$T = S_1 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

(composition des symétries axiales planes autour de $D_1$, $D_2$, $D_3$ et $D_1$, prises dans cet ordre).

## XLVII. Nantes, série Mathématique et Technique.

**Ex. 351.** *./1967/nantesmatech/exo-1/texte.tex*

Démontrer que le polynôme

$$x^2 - 2x^3 - 8x + 16$$

admet une racine double $x_0 = 2$.
Déterminer les valeurs de $x$, réelles ou complexes, qui annulent ce polynôme.

**Ex. 352.** *./1967/nantesmatech/exo-2/texte.tex*

Étude des variations et graphique de la fonction $f$, de la variable réelle $x$, définie par

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}.$$

On commencera par étudier le domaine de définition, la périodicité et la parité de cette fonction.

## XLVIII. Nantes remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## XLIX. Nantes remplacement, série Mathématiques & Technique.

## L. Nice, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 353.** *./1967/nicemelem/exo-1/texte.tex*

Si $a$ et $b$ son deux quelconques des chiffres de 0 à 9 (inclus), on considère le nombre entier $N$ qui s'écrit de la manière suivant, à l'aide de 6 chiffres, dans le système habituel de numération (à base 10) :

$$M = ababab.$$

L'ensemble, E, des nombres $N$ comprend 100 éléments (par exemple $N = 232\ 323$, ou bien $N = 080\ 808$).

**1.** Montrer que tous les nombres $N$ appartenant à E admettent plusieurs diviseurs communs et, en particulier, qu'ils sont divisibles par 37.

**2.** Indiquer la liste complète des nombres entiers qui sont des diviseurs communs aux 100 éléments de E.

Retour page 1

Ex. 354. ./1967/nicemelem/exo-2/texte.tex

Par rapport au repère orthonormé $Ox$, $Oy$, on définit deux points symétriques par rapport à $O$ : le point $A$, de coordonnées $(a\ ;\ b)$, et le point $B$, de coordonnées $(-a\ ;\ -b)$, tels que l'on ait $ab \neq 0$.
Quel est l'ensemble des points $M$ tels que les bissectrices de l'angle $AMB$ soient parallèles aux axes de coordonnées ?

## Problème 73

./1967/nicemelem/pb/texte

On donne une équation du second degré admettant, par hypothèse, deux racines réelles distinctes :

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Les deux racines sont désignées par $\alpha$ et $\beta$.

A) Dans cette question, on désigne par $P$ la fonction qui fait correspondre au réel $x$ le nombre $ax + b$, où $a$ et $b$ sont deux réels donnés.

A chaque couple $(a,\ b)$, correspond donc une fonction $P$.

On représente par $P(x)$ l'image de $x$ par la fonction $P$, c'est à dire que l'on pose $P(x) = ax + b$.

1° Montrer qu'il existe toujours une fonction $P$ et une seule telle que l'on ait

$$P(\alpha) = A \qquad \text{et} \qquad P(\beta) = B$$

où $A$ et $B$ sont deux nombres fixés arbitrairement.

2° A chaque entier naturel $(n \geqslant 0)$ on associe ainsi la fonction $P_n$, fonction particulière de $P$, définie par deux conditions

$$P_n(\alpha) = \alpha^n \qquad \text{et} \qquad P_(\beta) = \beta^n.$$

On forme une autre fonction $P$, notée $Q_n$, définie par

$$Q_n = P_{n+1} - \alpha P_n.$$

Calculer $Q_n(\alpha)$ et $Q_n(\beta)$. En déduire que l'on a

$$Q_n(x) = \beta^n(x - \alpha). \tag{1}$$

Montrer que l'on a les relations

$$Q_n = \beta Q_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

$$\text{et} \qquad P_{n+1} - sP_n + pP_{n-1} = 0. \tag{2}$$

B) On désigne par $u_n$ la dérivée (constante) de la fonction $P$.

1° Établir la relation

$$u_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}. \tag{3}$$

2° Déduire, d'autre part, des égalités (1) et (2) entre les binômes, les égalités numériques suivantes : pour $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n \tag{4}$$

$$\text{et} \qquad u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n \tag{4'}$$

et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - su_n + pu_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Prouver par conséquence, que les deux nombres $\alpha$ et $\beta$ sont racines de toute équation de la forme

$$x^n = u_n x - pu_{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$



Retour page 1

3° Si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels quelconques, on demande de vérifier la relation

$$u_{n+m} = u_n \alpha^m + u_m \beta^n.$$

(Il suffit d'utiliser des expressions analogues à (3).)
Étabir finalement la formule suivante (qui généralise la formule (5)) :

$$u_{m+n} = s.u_n u_m - p.(u_n u_{m-1} + u_m u_{n-1}). \tag{6}$$

C) *Application à la résolution approchée d'une équation.*

1° Expliquer la possibilité de calculer des termes successifs de la suite $\{u_n\}$ en utilisant systématiquement la relation (5) à partir de $u_0 = 0,\ u_1 = 1$.

2° On suppose, pour fixer les idées, $|\alpha| < |\beta|$. Montrer d'après (3), que la suite $\{x_n\}$ dont le $n$-ième terme est

$$x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \ (n \geqslant 1)$$

admet une limite égale à $\beta$.

3° Montrer, en outre, d'après (4) et (4'), que les rapports successifs $\dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ forment une progression géométrique de raison $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

4° On donne, par exemple, l'équation

$$x^2 - 6x - 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha = 3 - \sqrt{10} < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = 3 + \sqrt{10} > 0.$$

Calculer les termes de la suite $\{u_n\}$ correspondante pour $n \leqslant 5$, puis ceux de la suite $\{x_n\}$ pour

$$1 \leqslant n \leqslant 4.$$

En utilisant l'égalité $\dfrac{x_2 - \beta}{x_2 - \alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} . \dfrac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha}$, montrer que $\beta$ est compris entre $x_1$ et $x_2$. Montrer, plus généralement, que le nombre $\beta$ est encadré par deux termes consécutifs quelconques de la suite $\{x_n\}$.

## LI. Nice, série Mathématique et Technique.

Ex. 355. ./1967/nicematech/exo-1/texte.tex

On considère l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

dont les solutions sont les nombres complexes $z'$ et $z''$.
Donner l'expression de ces solutions sous la forme $a + \mathrm{i}b$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$).
Donner l'expression trigonométrique de ces solutions faisant apparaître le module et l'argument.
On désigne par $'z$ celle des solutions dont la partie imaginaire est positive.
Montrer que

$$z' + 1 = -z'',$$

$$z''^2 = z',$$

$$z''^3 = z'^3 = 1.$$

Calculer $z'^{20}$.

**Ex. 356.** ./1967/nicematech/exo-2/texte.tex

On se donne trois nombres réels, $a$, $b$ et $c$ tels que $ab \neq 0$.
Pour résoudre l'équation

$$a\cos x + b\sin x + c = 0,$$

on l'écrit sous la forme

$$a\left(\cos x + \frac{c_1}{a}\right) + b\left(\sin x + \frac{c_2}{b}\right) = 0,$$

avec $c_1 + c_2 = c$.
Quelle condition $a$, $b$ et $c$ doivent-ils vérifier pour que l'on puisse trouver $c_1$, $c_2$ et $\alpha$ tels que

$$\frac{c_1}{a} = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{c_2}{b} = \sin\alpha.$$

(On ne demande pas de calculer $c_1$ et $c_2$.)
Cette condition étant remplie, commente s'écrit alors l'équation et comment peut-on la résoudre ?
*Application numérique :* Résoudre par cette méthode l'équation

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x + -\sqrt{3} = 0.$$

## LII. Nice remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## LIII. Nice remplacement, série Mathématiques & Technique.

**Ex. 357.** ./1967/nicematechrem/exo-1/texte.tex

On dispose de 12 objets distincts, répartis en 3 séries :

1$^{\text{re}}$ série : 5 objets : $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ ;

2$^{\text{e}}$ série : 4 objets : $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ ;

3$^{\text{e}}$ série : 3 objets : $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$.

**1.** Combien peut-on constituer de groupes distincts de 4 objets, contenant 2 objets d'une même série et 1 objet de *chacune* des deux autres ?

**2.** Combien peut-on constituer de groupes distincts de 4 objets, contenant 3 objets d'une même série et 1 objet de *l'une* des deux autres ?

**Ex. 358.** ./1967/nicematechrem/exo-2/texte.tex

Les transformations ponctuelles considérées ci-après sont des transformations ponctuelles du plan ($O$ désigne un point fixe du plan).
L'ensemble des opérations ponctuelles du plan est muni d'une opération interne correspondant à la composition des transformations : si $A$ et $B$ sont deux transformations du plan, on notera $A \circ B$ la transformation obtenue en effectuant d'abord $B$, puis $A$.
$I$ désigne la transformation identique (qui fait correspondre à chaque point $M$ ce point $M$ lui-même).
$R$ désigne la rotation de centre $O$, d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
$R'$ désigne la rotation de centre $O$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
$S$ désigne la symétrie de centre $O$.

Retour page 1

Montrer que l'ensemble des ces quatre transformations muni de la loi $\circ$, a une structure de groupe commutatif.
Au cours de la démonstration, il sera commode d'utiliser ce tableau ci-contre, que l'on complétera conformément aux indications.
Exemple : on écrit $R$ au croisement de la $1^{\text{re}}$ ligne et de la $2^{\text{e}}$ colonne car $I \circ R = R$.)

*Deuxième facteur*

*premier facteur*

| | $I$ | $R$ | $R'$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | | $R$ | | |
| $R$ | | | | |
| $R'$ | | | | |
| $S$ | | | | |

### Problème 74

./1967/nicematechrem/pb/texte

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. $R$ est un nombre fixé positif, $(\Omega)$ désigne le cercle de centre $\Omega(R,\ 0)$ et de rayon $R$ : $(\Omega)$ est tangent en $O$ à $y'Oy$.
Deux points $A$ et $B$, se déplacent sur l'axe $y'Oy$ de manière que $\overline{OB} = -2\overline{OA}$. On désigne par $a$ l'ordonnée, variable, du point $A$.

**1.** Écrire les équations des tangentes au cercle $(\Omega)$, autres que $y'Oy$, issues de $A$ et de $B$.
Calculer, en fonction de $a$ et $R$, les coordonnées de leur point commun, $C$, soit $x_C$ et $y_C$.
Le triangle $ABC$ peut-il être isocèle ; équilatéral ?

**2.** En formant le rapport $\dfrac{x_C}{y_C}$, montrer qu'on peut éliminer $a$ entre les coordonnées de $C$. En déduire, lorsque $a$ varie, l'équation du lieu du point $C$.
Quelle la nature ce lieu ? (On pourra faire une translation des axes amenant l'origine en $\Omega$).

**3.** Exprimer, en fonction $a$ et $R$, la puissance, $p$, du point $C$ par rapport au cercle $(\Omega)$. Tracer, dans un repère d'axes orthonormé $Ia$, $Ib$, la courbe d'équation

$$b = \sqrt{p} = f(a).$$

## LIV. Orléans, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 359.** ./1967/orleansmelem/exo-1/texte.tex

Démontrer l'égalité $\cot x - 2\cot 2x = \tan x$ pour $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. En déduire une expression simple de

$$S = \tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \cdots \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

**Ex. 360.** ./1967/orleansmelem/exo-2/texte.tex

Déterminer le coefficient $a$ pour que le polynôme

$$P(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$$

soit divisible par $x - 2$.
Résoudre l'équation ($\log$ désignant le logarithme népérien)

$$3\log(x-1) = \log(x^2 + 2x - 7).$$

## LV. Orléans, série Mathématique et Technique.

**Ex. 361.** ./1967/orleansmatech/exo-1/texte.tex

On désigne par $x$ la mesure en radians d'un arc et l'on considère la fonction $f$, qui à tout réel $x$, fait correspondre

$$f(x) = \sin^2 x(1 + \cos x).$$

La fonction $f$ est-elle continue ; dérivable ?

Retour page 1

Étudier la périodicité et la parité de la fonction $f$.
Quelles simplifications en résulte-t-il pour l'étude ultérieure de la fonction $f$ ?
Calculer la dérivée de la fonction $f$ et en déduire le sens de variation de la fonction $f$ (pour abréger, on désignera par $\alpha$ l'arc compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ dont le cosinus est $\dfrac{1}{3}\Big)$.
Graphique de la fonction $f$ dans un repère orthonormé, d'unité 2 cm.

**Ex. 362.** ./1967/orleansmatech/exo-2/texte.tex

Étudier les restes des divisions par 9 des différentes puissances de 2.
Montrer que l'expression

$$E = 2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

est toujours divisible par 9.

# LVI. Orléans remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 363.** ./1967/orleansmelemrem/exo-1/texte.tex

Les lettres $\mathrm{e}$ et $x$ désignant respectivement la base des logarithmes népériens et l'inconnue, résoudre, sur le corps des réels, l'équation

$$\mathrm{e}^{-5x} - \mathrm{e}^{-3x} - 2\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

**Ex. 364.** ./1967/orleansmelemrem/exo-2/texte.tex

**1.** $n$ étant un entier supérieur à 1, déterminer le PGCD des nombres entiers

$$n(n+1) \qquad \text{et} \qquad (n-1)(n+2).$$

On pourra, pour cela, former leur différence.
Qu'en conclure pour les nombres

$$a = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(n-1)(n+2)}{2}\ ?$$

**2.** $n$ étant un entier supérieur à 2, on considère les nombres

$$b = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \qquad \text{et} \qquad c = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Déterminer le PGCD de $b$ et $c$, suivant les valeurs du reste de la division de $n$ par 4.

# LVII. Paris, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

**Ex. 365.** ./1967/parismelem/exo-1/texte.tex

La variable $x$ décrivant l'intervalle $[0\,;\pi]$, étudier la variation de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

et construire son graphique dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
Déterminer, à l'aide d'une table, l'abscisse, en radians, du point où ce graphique coupe l'axe $x'Ox$.

**Ex. 366.** ./1967/parismelem/exo-2/texte.tex

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, la position d'un point mobile $M$, à l'instant de date $t$, est défini par les relations

$$x = 1-3t^2 \quad \text{et} \quad y = 3t - t^3.$$

On appelle $P$ le point où la tangente en $M$ à la trajectoire de $M$ rencontre la droite (D) perpendiculaire à $x'Ox$ au point $M_0$ de coordonnées $(+1\ ;\ 0)$.
Trouver, à l'instant de date $t$, les composantes du vecteur vitesse du point $M$ et celles du vecteur vitesse du point $P$. Comparer les longueurs de ces deux vecteurs.

### PROBLÈME 75

./1967/parismelem/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La notation $M(x\ ;\ y)$ désigne le point $M$ d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y$.
On utilisera le point E$(1\ ;\ 0)$ et E'$(-1\ ;\ 0)$.

1. Étant donné un point $M(x\ ;\ y)$ du plan, on appelle $M_1$ son transformé dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite des ordonnées. Former la relation entre $x$ et $y$ qui équivaut à la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M_1E}$.

   Démontrer que l'ensemble des points $M$ qui satisfont à cette condition est l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ de sommets E et E'.
2. Étant donné deux points $M(x\ ;\ y)$ et $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $\mathscr{H}$, distincts ou non, on définit le point $S(X\ ;\ Y)$ par :
$$\begin{cases} X = xx' + yy' \\ Y = xy' + x'y. \end{cases}$$
   On dit que $S$ est le « produit » de $M$ par $M'$ et l'on note : $S = M \star M'$.
   On établira alors les propriétés suivantes :

   a) $S$ appartient à $\mathscr{H}$ ;

   b) on a $M \star M' = M' \star M$ ;

   c) étant donné un troisième point quelconque $M''\left(x''\ ;\ y''\right)$ de $\mathscr{H}$, on a :
$$(M \star M') \star M'' = M \star (M' \star M'').$$
   On calculera ensuite $M\star$E et l'on montrera que pour tout point $M(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{H}$, il existe un point $\overline{M}$ de $\mathscr{H}$, que l'on précisera, tel que $M \star \overline{M}$ =E. (En résumé, le « produit » noté $\star$ muni $\mathscr{H}$ d'une structure de groupe commutatif.)
3. Étant donné deux points distincts de $\mathscr{H}$, $M$ et $M'$, on pose $S = M \star M'$. Vérifier que $S$ est le point de $\mathscr{H}$ tel que les cordes E$S$ et $MM'$ sont parallèles.
   Que devient ce résultat quand $M$ tend vers $M'$ ?
   Trouver la propriété de la corde $[M,\ M']$ qui équivaut à $S$ =E'.
   Donner une propriété équivalente faisant intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{M\text{E}}.\overrightarrow{M'\text{E}}$.
4. a) Soit $[A,\ B]$ et $[C,\ D]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. On pose $A \star B = P$ et $C \star D = Q$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{P\text{E}}$ et $\overrightarrow{Q\text{E}}$ ?
   En déduire que le « produit » $A \star B \star C \star D$ est égal à E'.
   Déduire alors du 2 que les cordes $[A,\ C]$ et $[B,\ D]$ sont orthogonales, ainsi que les cordes $[A,\ D]$ et $[B,\ C]$.

   b) Soit $[A,\ B]$ et $[A,\ C]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. Calculer le « produit » $A \star A \star B \star C$.
   Que peut-on dire de la tangente en $A$ à $\mathscr{H}$ ?
   Démontrer que le cercle de diamètre $[B,\ C]$ recoupe $\mathscr{H}$ au point $A'$ symétrique de $A$ par rapport à $O$.

   c) On fixe $A$ de $\mathscr{H}$. On considère les cordes $[A,\ B]$ et $[A,\ C]$, qui varient en restant orthogonales. Que dire de la droite $(BC)$ ?

## LVIII. Paris remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 367.

./1967/parismelemrem/exo-1/texte.tex

Dans cet exercice, $a$ et $b$ désignent des nombres entiers naturels.
Déterminer les fractions $\frac{a}{b}$ satisfaisant aux conditions suivantes :
$$0 < \frac{a}{b} < 1, \qquad a + b = 264,$$
le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$ est 12.



Retour page 1

**Ex. 368.** ./1967/parismelemrem/exo-2/texte.tex

**1.** Un nombre complexe a pour module $\rho$ et argument $\theta$.
Quels sont le module et l'argument de son carré ?
Quels sont le module et l'argument de chacune de ses racines carrées ?

**2.** Dans le plan complexe, on désigne par $u'Ou$ la bissectrice de l'angle des axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
Un point $M$ parcourt $u'Ou$ ; on désigne par $\rho$ la distance de $M$ à $O$.

a) Exprimer, suivant la position de $M$ sur $u'Ou$, le module et l'argument du nombre complexe $z$ dont $M$ est l'image.

b) Soit $N$ l'image de $z^2$ ; quel est l'ensemble des points $N$ ? Soit $P_1$ et $P_2$ les images des racines carrées de $z$ ; quel est l'ensemble des points $P_1$ et $P_2$ ?

## Problème 76

./1967/parismelemrem/pb/texte

Dans la plan orienté, on considère deux points distincts, $O$ et $E$, la droite $\Delta_1$ passant par $O$ et telle que l'angle de droites $(OE,\ \Delta_1)$ soit égal à $\frac{\pi}{3}$, et la droite $\Delta_2$ perpendiculaire en $O$ à $OE$.
On note $S_1$ la symétrie orthogonale (ou axiale) d'axe $\Delta_1$, $S_2$ la symétrie orthogonale (ou axiale) d'axe $\Delta_2$ et $T$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OE}$.
Étant donné un point quelconque $M$ du plan, on note $M_1$ son transformé, $S_1(M)$, par $S_1$, $M_2$ la transformé, $S_2(M_1) = (S_2 \circ S_1)(M)$, de $M_1$ par $S_2$, et $M'$ la transformé, $T(M_2)$, de $M_2$ par $T$.

**1.** Quelle est la transformation $S_2 \circ S_1$, produit de $S_1$ par $S_2$ ? En déduire que la transformation $T \circ S_2 \circ S_1$ (qui transforme $M$ en $M'$) est une rotation $R$ ; déterminer l'angle et le centre, $I$, de $R$.

**2.** Soit $Ox$, $Oy$ un repère orthonormé tel que le point $O$ soit l'origine et le point $E$ ait pour abscisse 2 et pour ordonnée 0.
Calculer, en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $M$, les coordonnées $x_1$ et $y_1$ de $M_1$, puis les coordonnées $x_2$ et $y_2$ de $M_2$. Vérifier enfin que les coordonnées $x'$ et $y'$ du point $M'$ sont

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$$

$$\text{et} \qquad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Trouver les coordonnées du centre, $I$, de la rotation $R$ définie au 1.

**3.** Soit $m$ un paramètre réel. Montrer que la droite $D_m$ d'équation $mx - y + \sqrt{3} = 0$ passe par un point fixe $A$, indépendant de $m$. Quelle est l'équation de la droite $D'_m$ transformée de $D_m$ par la rotation $R$ ?
Montrer géométriquement que $D'_m$ passe par un point fixe, $A'$, indépendant de $m$ ; vérifier ceci analytiquement ?

# LIX. Poitiers, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 369.** ./1967/poitiersmelem/exo-1/texte.tex

Dans un repère orthonormé, on donne la droite $(d)$ de vecteur directeur $\vec{V}(-1\ ;\ +3\ ;\ +1)$ passant par le point $A(+1\ ;\ +2\ ;\ -3)$ et le plan d'équation

$$x - 3y + z - 1 = 0.$$

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite $(D)$ et du plan $P$.

**Ex. 370.** ./1967/poitiersmelem/exo-2/texte.tex

Montrer qu'on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

entre les extrémités de l'intervalle de définition.
Reconnaître son graphique et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

### PROBLÈME 77

./1967/poitiersmelem/pb/texte

**1.** Étudier et représenter les deux fonctions

$$z_1 = x + 1 - \mathrm{e}^x$$

$$\text{et} \qquad z_2 = -x - 1 - \mathrm{e}^x \qquad \text{(axes orthonormés).}$$

Faire deux figures différentes pour leurs graphiques respectifs.

**2.** $\lambda$ étant un nombre réel donné, soit $f_\lambda$ une fonction de la variable $x$ définie par

$$y_\lambda = f_\lambda(x) = \lambda(x+1) - \mathrm{e}^x$$

et $\Gamma_\lambda$ son graphique dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

Montrer que, quand $x$ tend vers $-\infty$, $\Gamma_\lambda$ admet une asymptote, qui passe par un point fixe, $A$, quand $\lambda$ varie.

Montrer que $\Gamma_\lambda$ passe également par un point fixe, $B$, quand $\lambda$ varie.

**3.** Quel est l'ensemble, $E_1$, des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ admet un maximum ? Soit $M_\lambda$ le point correspondant de $\Gamma_\lambda$. Déterminer et construire l'ensemble $(\gamma)$ des points $M_\lambda$ quand $\lambda$ varie.

Quelle est, en fonction de $\lambda$, l'équation de la tangente à $(\gamma)$ au point $M_\lambda$ ? En déduire les coordonnées du point $P_\lambda$, intersection de cette tangente avec $y'Oy$.

**4.** Le paramètre $t \in [1\,;+\infty[$ représente le temps et l'on considère le mouvement, dans le repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, d'un mobile dont la position à l'instant $t$ est le points $G(x\ ;\ y)$ défini par

$$x = \log t \qquad \text{et} \qquad y = 1 - t + \log t.$$

Si $t \in [1\,;+\infty[$ déterminer la trajectoire du mobile.

Quel est l'hodographe relatif à $O$ ? Étudier l'allure du mouvement.

## LX. Poitiers, série Mathématique et Technique.

**Ex. 371.** ./1967/poitiersmatech/exo-1/texte.tex

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = -2(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.
Calculer les racines carrées de $z$.

**Ex. 372.** ./1967/poitiersmatech/exo-2/texte.tex

Transformer l'expression

$$u = 2\left[1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

et étudier la fonction $y = \sqrt{u}$ pour $x$ variant dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
Construire la courbe représentative.

### PROBLÈME 78

./1967/poitiersmatech/pb/texte

La plan est rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux cercles $(A)$ et $(B)$, de centres $A(+4\ ;\ 0)$ et $B(+12\ ;\ 0)$ et de rayons $R_A = 2$ et $R_B = 6$.

**1.** Déterminer l'inversion, $J$, qui transforme $(A)$ en $(B)$.

**2.** Soit $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, et $M'$, de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, son transformé dans l'inversion ; montrer que

$$x = \frac{36x'}{x'^2 + y'^2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{36y'}{x'^2 + y'^2}.$$

**3.** On considère une droite $(D)$ d'équation

$$ax + by + c = 0,$$

avec $c \neq 0$.

a) Déterminer la relation que doivent vérifier les coefficients $a$, $b$ et $c$ pour que la droite $(D)$ soit tangente au cercle $(B)$.

Retour page 1

b) Montrer que, si $M$ appartient à la droite $(D)$, son transformé $M'$, appartient à un cercle $(\Gamma)$ qui passe par un point fixe.

Donner les coordonnées de son centre, $\gamma$.

Dans le cas où la droite $(D)$ est tangente au cercle $(B)$, quel est l'ensemble, $(G)$, décrit par $\gamma$ ? Construire $(G)$.

**4.** Trouver une équation générale des cercles $(\Omega)$ orthogonaux aux cercles $(A)$ et $(B)$. Quelle est l'équation de leurs transformés ? Interpréter géométriquement le résultat.

## LXI. Poitiers remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## LXII. Poitiers remplacement, série Mathématiques & Technique.

## LXIII. Pondichery, série Mathématiques élémentaires.

## LXIV. Pondichery remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## LXV. Reims, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 373. ./1967/reimsmelem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie, pour $x$ réel, par

$$f : x \longmapsto y = f(x) = x^3.$$

En appliquant à $f$ le théorème des accroissements finis (qu'on rappellera sans le démontrer) entre deux valeurs, $a$ et $b$, distinctes et positives, de la variable, établir qu'il existe, entre ces deux valeurs, un seul nombre, $c$, tel que $f'(c) = a^2 + ab + b^2$.

Montrer que ce nombre $c$ est strictement compris entre $\dfrac{a+b}{2}$ et $b$ (en supposant $b > a$).

Ex. 374. ./1967/reimsmelem/exo-2/texte.tex

Sachant que $\dfrac{\log X}{X}$ a pour limite zéro quand $X \to +\infty$ (résultat su cours, concernant le logarithme népérien, qu'on ne démontrera pas ici), en déduire que :

a) $x \log x$ tend vers zéro quand $x$ tend vers zéro par valeurs positives ;

b) $x.\mathrm{e}^x$ tend vers zéro quand $x \to -\infty$.

Retour page 1

# LXVI. Reims remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

# LXVII. Rennes série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 375.** ./1967/rennesmelem/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ la fonction qui, à tout réel $x$, fait correspondre le nombre réel $f(x)$ :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Étudier les variations de cette fonction, et tracer son graphique, $(C)$, dans un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$.

**2.** Soi $g$ la fonction qui, à tout réel $x$ différent de 1, fait correspondre le réel $g(x)$ :

$$g(x)=\frac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

et qui au nombre $1$ fait correspondre le nombre 1.

La fonction $g$ est-elle continue pour $x=1$ ; pour $x=-\dfrac{1}{2}$ ?

La fonction $g$ est-elle dérivable pour $x=-\dfrac{1}{2}$ ?

Comment peut-on déduire la graphique, $(C')$, de la fonction $g$ du graphique, $(C)$, de la fonction $f$ ?

**Ex. 376.** ./1967/rennesmelem/exo-2/texte.tex

Déterminer deux nombres entiers naturels dont la différence est 22 932 et le PPCM (plus petit commun multiple) est 98 280.

**Problème 79** ./1967/rennesmelem/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\overrightarrow{x'Ox}$, $\overrightarrow{y'Oy}$ les axes.
$A$ et $B$ sont deux points variables de $x'Ox$, d'abscisses respectives $a$ et $b$. $C$ est un point fixe de $y'Oy$, d'ordonnée $c$ positive ; $C'$ est le symétrique de $C$ par rapport à $O$.
Soit $(\mathscr{A})$ le cercle de centre $A$ et de rayon $AC$, $(\mathscr{B})$ le cercle de centre $B$ et de rayon $BC$.
La tangente $CT$ en $C$ au cercle $(\mathscr{A})$ et la tangente $C'T'$ en $C'$ au cercle $(\mathscr{B})$ ont, en général, un point commun, $M$.
Le problème a pour but l'étude de quelques ensembles de points $M$, dans des cas qui peuvent être traités *indépendamment les uns des autres.*

**1.** Déterminer les coordonnées de $M$. En déduire l'ensemble $(E_1)$ des points $M$ lorsque les points $A$ et $B$ varient sur $x'Ox$ en restant symétriques par rapport à un point fixe, $K$, d'abscisse $k$ $(k\neq 0)$.

Indiquer une construction simple de $(E_1)$ lorsque le point $K$ est donné.

**2.** Les points $A$ et $B$ varient de telle sorte que $\overline{AB}=l$, $l$ étant un nombre positif donné.

Déterminer et construire l'ensemble $(E_2)$ des points $M$ correspondants. Que devient $(E_2)$ si l'on suppose $\overline{AB}=-l$ ?

**3.** Les cercles $(\mathscr{A})$ et $(\mathscr{B})$ varient maintenant en se coupant sous un angle constant, c'est-à-dire que, si $CT_1$ est la tangente en $C$ à $(\mathscr{B})$,

$$(CT,\ CT_1)V \quad \text{(modulo } \pi),$$

$V$ étant un nombre donné $\left(-\dfrac{\pi}{2}<V\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. Calculer $\tan V$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

a) Déterminer analytiquement et construire l'ensemble $(E_3)$ des points $M$ quand $V=\dfrac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne, par rapport aux axes $\overrightarrow{x'Ox}$, $\overrightarrow{y'Oy}$, de l'ensemble $(E_4)$ des points $M$ pour $V$ tel que $-\frac{\pi}{2} < V \leqslant \frac{\pi}{2}$.

On considère dans le plan, un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, lié au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par les relations

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath}\sin\frac{V}{2} + \vec{\jmath}\cos\frac{V}{2}, \\ \vec{v} = -\vec{\imath}\cos\frac{V}{2} + \vec{\jmath}\sin\frac{V}{2}. \end{cases}$$

Déduire de ces relations et des égalités

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{u} + Y\vec{v}$$

les coordonnées, $x$ et $y$, d'un point $M$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en fonction des coordonnées, $X$ et $Y$, de ce point dans le nouveau repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Écrire l'équation de $(E_4)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, et préciser la nature de cet ensemble. Construire $(E_4)$.

**4.** Cette question a pour but de retrouver géométriquement $(E_1)$ et $(E_2)$. Elle est indépendante de la question 3.

Soit $B'$ le symétrique du point $B$ par rapport à $O$. Démontrer que les triangles $MCC'$ et $CAB'$ sont semblables.

Lorsque les points $A$ et $B$ varient sur $x'Ox$ en restant symétriques par rapport à un point fixe $K$, d'abscisse $k$, calculer $\overline{AB'}$.

En déduire géométriquement l'ensemble $(E_1)$ des points $M$ correspondants.

Lorsque les points $A$ et $B$ varient de telle sorte que $\overline{AB} = l$, quelle relation existe-t-il entre les points $A$ et $B'$ ? En déduire l'ensemble $(E_2)$ des points $M$ correspondants.

# LXVIII. Rennes remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

# LXIX. Réunion, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 377.** ./1967/reunionmelem/exo-1/texte.tex

Soit $a$ un entier supérieur à 2. On considère les nombres $N = 2(a-1)$ et $N' = (a-1)^2$. Écrire $N$ et $N'$ dans le système de numération de base $a$.

Vérifier que $N$ et $N'$ s'écrivent avec les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse.

**Ex. 378.** ./1967/reunionmelem/exo-2/texte.tex

On considère le nombre complexe

$$Z = 1 + \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha \quad (0 < \alpha < +\pi).$$

Calculer le module et l'argument de $Z$.

Calculer en fonction de $\alpha$ les nombres réels $p$ et $q$, sachant que $Z$ est solution de

$$Z^2 + pZ + q = 0.$$

Réciproquement, étant donné une équation

$$Z^2 + pZ + q = 0 \quad (p \text{ et} q \text{ réels}),$$

quelles conditions doivent vérifier $p$ et $q$ pour qu'on puisse trouver un nombre réel $\alpha$ vérifiant $0 < \alpha < +\pi$, tel que le nombre $1 + \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$ soit solution de cette équation.



Retour page 1

# LXX. Rouen série Mathématiques élémentaires.

Ex. 379. ./1967/rouenmelem/exo-1/texte.tex

Deux cercles, $(O_1)$ et $(O_2)$, se coupent en $A$ et $B$ sous l'angle $V$. Ils sont tangents *extérieurement* au cercle $(C)$, de centre $C$ et de rayon $R$.
On effectue l'inversion de centre $A$ qui conserve $(C)$. Construire la figure inverse.
Préciser l'inverse, $B'$, de $B$.
L'angle $V$ restant constant, $A$ et $(C)$ étant supposés fixes, $(O_1)$ et $(O_2)$ variables, quel est l'ensemble des positions du point $B'$ ? Même question pour le point $B$.

Ex. 380. ./1967/rouenmelem/exo-2/texte.tex

Par rapport à un système d'axes orthonormé, un cercle $(C)$ a pour équation

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

Soit $P$ le point de coordonnées $\left(+\frac{7}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$. Quelle est l'équation de la polaire de $P$ par rapport au cercle $(C)$ ?

# LXXI. Rouen remplacement, série Mathématiques élémentaires.

# LXXII. Rouen remplacement, série Mathématiques & Technique.

# LXXIII. Rouen série Mathématiques& Technique.

Ex. 381. ./1967/rouenmatech/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$x^4 - 90x^2 + 2\ 809 = 0.$$

Les solutions de l'équation seront données sous la forme algébrique.
On calculera ensuite avec la précision des tables de logarithmes à 5 décimales le module et l'argument de chacune des racines trouvées, l'angle qui représente l'argument étant exprimé en grades.

Ex. 382. ./1967/rouenmatech/exo-2/texte.tex

On prend pour unité de longueur 3 centimètres.

On donne, dans le plan orienté, on donne un repère orthonormé direct $Ox$, $Oy$ et les points $A\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$. On appelle $R_A$ la rotation de centre $A$ et d'angle $+\frac{\pi}{6}$ et $R_B$ la rotation de centre $B$ et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.
Quel est le produit $R_B \circ R_A$, des rotations $R_A$ et $R_B$ effectuées dans l'ordre $R_A$ puis $R_B$ ? On justifiera les éléments caractérisant ce produit.
Construire les transformé $A'B'$ de $AB$ par la transformation $R_B \circ R_A$ et montrer que $A'B'$ est portée par la médiatrice de $AB$.

Retour page 1

## LXXIV. Strasbourg, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

Ex. 383. ./1967/strasbourgmelem/exo-1/texte.tex

En utilisant la théorie des congruences, trouver les restes de la division par 7 des nombres

$$5^3, \qquad 5^6, \qquad 5^{6n+1}+5^{3n+2}-2.$$

($n$ est un entier naturel quelconque.)

### Problème 80 ./1967/strasbourgmelem/pb/texte

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. Soit $(T)$ l'application qui, au point $M$, de coordonnées $xy$, non toutes deux nulles, fait correspondre $M'(X\ ;\ Y)$ tel que

$$X=\frac{k^2x}{x^2+y^2}, \qquad Y=\frac{k^2y}{x^2+y^2},$$

$k$ étant un nombre réel donné, strictement positif.

1° $(T)$ a-t-elle des points doubles ?
Montrer que l'application $(T)$ du plan privé de $O$ est biunivoque et involutive.

2° Montrer que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés. Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$. En déduire la nature de l'application $(T)$.

B) Soit, dans le plan, le point $A$ de coordonnées $(a\ ;\ 0)$, $a>0$, la droite $(D)$ d'équation $x=2a$, le cercle $(C)$ de centre $A$, passant par $O$ et la droite $(L)$ passant par $O$ et telle que $(Ox,\ L)=u$ :

$$0\leqslant u<\pi, \qquad u\neq\frac{\pi}{2}.$$

1° $(L)$ coupe le cercle $(C)$ en $P$ et la droite $(L)$ en $Q$. Écrire l'équation de $(C)$ et trouver les coordonnées des points $P$ et $Q$.

2° Soit $N$ le point tel que $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{PQ}$. Calculer les coordonnées $x_1$ et $y_1$, de $N$. Trouver une relation indépendante de $u$ entre ces coordonnées.

3°

C) [1°]

Étudier les variations de la fonction

$$y=x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Tracer son graphique, $(G)$. On précisera la tangente en $O$.

b) En déduire le graphique, $(G')$, de la fonction

$$y=-x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

et l'ensemble, $(G'')$, des points dont les coordonnées sont liées par

$$x(x^2+y^2)=2ay^2.$$

D) Appliquer à $(G'')$ la transformation $(T)$. Montrer que l'on obtient alors une parabole privée du point $O$. Déterminer $k$ pour que le foyer de cette parabole soit le point $A$.

N.B.– on pourra considérer les parties A, B et C comme indépendantes.

## LXXV. Strasbourg remplacement, séries Maths élémentaires & Maths et technique.



Retour page 1

## LXXVI. Sud Viet-Nam, série Mathématiques élémentaires.

## LXXVII. Tahiti, séries Maths élémentaires & Maths et technique.

## LXXVIII. Toulouse, série Mathématiques élémentaires.

**Ex. 384.** ./1967/toulousemelem/exo-1/texte.tex

Former le tableau de diviseurs du nombre 504. Montrer qu'il existe un nombre inférieur à 504 et possédant autant de diviseurs que 504.
Déterminer un entier naturel $n$ de manière que les racines de l'équation $x^2-2nx+504=0$ soient des entiers naturels. (On ne demande qu'un seul entier $n$ répondant à la question.)

**Ex. 385.** ./1967/toulousemelem/exo-2/texte.tex

Les coordonnées d'un point $M$ sont données dans un repère orthonormé, en fonction du temps $t$, par

$$\begin{cases} x = t + 2a\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1} - b\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1} \\ y = a\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^{2t}+1} + 2b\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}, \end{cases}$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes indépendantes de $t$.

**1.** Trouver les coordonnées du vecteur vitesse de $M$ à l'instant $t$.

**2.** Calculer $a$ et $b$ pour que le vecteur vitesse du point $M$ soit nul à un instant donné $t_0$.

## LXXIX. Toulouse, série Mathématiques et Technique.

**Ex. 386.** ./1967/toulousematech/exo-1/texte.tex

**1.** On considère l'équation

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = m.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $m$ a-t-elle des solutions ?
La résoudre pour $m=\sqrt{2}$.

**2.** Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x > \sqrt{2}.$$

**Ex. 387.** ./1967/toulousematech/exo-2/texte.tex

**1.** Calculer la dérivée, $y'$, de la fonction suivante :

$$y = \sqrt{x^2+2x-3} - x.$$

**2.** Déterminer les limites vers lesquelles tendent $y$ et $y'$ :

a) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;

b) lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

Retour page 1

### Problème 81

./1967/toulousematech/pb/texte

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés, $x'Ox$, $x'Oy$ ;
$(\overrightarrow{x'Ox},\ \overrightarrow{y'Oy}) = \dfrac{\pi}{2}$ mod. $2\pi$.

**1.** a) Dans l'homothétie de rapport 2, dont le centre, S, a pour coordonnées $(+1\ ;\ 0)$, un point M, de coordonnées $(x, y)$, a pour image un point M', de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$.

Établir les formules donnant les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M.

Transformer dans cette homothétie la droite passant par le point A de coordonnées $(+1\ ;\ +1)$ et parallèle au vecteur $\vec{V}$ de composantes $(+1\ ;\ +1)$.

b) Dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, a pour image un point M', de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$. Établir les formules donnant les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M.

Transformer dans cette rotation la droite d'équation

$$3x - 2y - 1 = 0.$$

**2.** a) Dans le plan $x'Ox$, $y'Oy$, on donne la transformation $f$ définie par :

$$\mathrm{M}(x, y) \xrightarrow{f} \mathrm{M'}(x', y')$$

avec

$$x' = 2x - 1, \qquad y' = 2y$$

et la transformation $g$ définie par :

$$\mathrm{M}(x, y) \xrightarrow{g} \mathrm{M'}(x', y')$$

avec

$$x' = \frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y' = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}$$

Montrer que ces deux transformations sont biunivoques.

b) On définit la transformation $h_1 = g \circ f$ par $h_1(\mathrm{M}) = g\,[f(\mathrm{M})]$.

Montrer que $h_1$ est biunivoque et admet un point invariant, dont on calculera les coordonnées.

Montrer que la transformation $h_2 = f \circ g$ est, elle aussi, biunivoque et admet un point invariant, qu'on déterminera.

Quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison de $h_1$ et $h_2$ ?

**3.** a) Toujours dans la plan $x'Ox$, $x'Oy$, on considère l'inversion de pôle O et de puissance 8. Montrer qu'un point M, de coordonnées $(x, y)$, est transformé en un point M', de coordonnées $(x', y')$ telles que

$$x' = \frac{8x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{8y}{x^2 + y^2}.$$

b) On donne le point A, de coordonnées $(+1, +1)$ et le point B, de coordonnées $(+3\ ;\ +5)$. Écrire l'équation du cercle de diamètre AB.

Calculer la puissance de O par rapport à ce cercle. Écrire l'équation de la polaire de O par rapport à ce cercle.

c) Déterminer l'image de cette polaire dans l'inversion de pôle O et de puissance 8. Donner une solution analytique et une solution géométrique.

## LXXX. Toulouse remplacement, série Mathématiques élémentaires.

## LXXXI. Toulouse remplacement, série Mathématiques & Technique.

Retour page 1

# Chapitre X

# 1968.

**Sommaire**



## I. Algérie, série Mathématiques élémentaires et technique.

Ex. 388. ./1968/algerieelem/exo-1/texte.tex

Le plan $E_2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$. On définit, dans la suite, certaines applications associant à tout point $M$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le point $M'$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

A) 1. a) Reconnaître l'application définie par :

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y. \end{cases}$$

b) On considère l'application $t$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \ \ 3x \\ y' = -3y. \end{cases} \tag{t}$$

Démontrer que $t$ peut-être considérée de plusieurs manières comme le produit d'une homothétie et d'une symétrie.

2. On considère l'application $T$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \ \ x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y. \end{cases} \tag{T}$$

On désigne par $z$ l'affixe du point $M$ et par $z'$ celle de son transformé $M'$ par $T$.
Prouver que $z'$ peut se mettre sous la forme :

$$z' = \lambda(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)z,$$

où $\alpha$ désigne un nombre réel et $\lambda$ un nombre réel positif.
Démontrer que $T$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. L'application $t_1$ est définie par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y. \end{cases} \tag{$t_1$}$$

Démontrer :

a) que $t_1$ admet une droite de points doubles, $\Delta$, que l'on déterminera ;

b) que $t_1$ est la symétrie par rapport à $\Delta$.

B) On considère l'ensemble des applications $\mathscr{T}$ définies par :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \qquad (\mathscr{T})$$

où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des nombres réels donnés.

1. Démontrer que la composition des applications est une loi interne dans cet ensemble.
2. Á quelle condition une application $\mathscr{T}$ est-elle bijective ?
3. Á quelles conditions une application $\mathscr{T}$ est-elle une isométrie ? Dans ce cas quelle peut-être la nature de $\mathscr{T}$ ?

Baccalauréat Algérie, Juin 1968

Retour page 1

# Chapitre XI

# 1969.

## Sommaire



## I. Aix Marseille, série C & E

**Ex. 389.** ./1969/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

On considère la transformation T du plan complexe qui, au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ déterminée par

$$z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z - 2\sqrt{3}.$$

Montrer que T est une similitude directe, dont on précisera le centre, $\omega$, l'angle, $\theta$, et le rapport $k$. Caractériser le triangle formé par le centre, $\omega$, et deux points homologues, $M$ et $M'$.

**Ex. 390.** ./1969/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement en axes orthonormés la fonction $f$ définie, pour $x$ réel strictement positif, par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de $f$, l'axe $Ox$ et les droites $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.

### Problème 82

./1969/aixmarseilleC/pb/texte

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, $Ox$, $Oy$, les coordonnées, $x$, $y$, d'un point mobile $M$ sont données, à chaque instant $t$, par

$$x = 1 + 2\cos^2 t,$$

$$y = 2\sin t \cos t.$$

   Montrer que la trajectoire de $M$ est un cercle, $(\Gamma)$, décrit d'un mouvement uniforme. Écrire, en fonction de $t$, l'équation de la tangente en $M$ à $(\Gamma)$.

2. On appelle transformé du point $M(x\,;\,y)$ appartenant à $(\Gamma)$ le point $M'(X\,;\,Y)$ défini par les deux conditions suivantes :

   a) $OM'$ est perpendiculaire à la tangente en $M$ à $(\Gamma)$ ;

   b) le produit scalaire $OM.OM'$ est égal à 3.

   Soit $(C)$ l'ensemble des points $M'$. Établir que les coordonnées, $X$, $Y$, de $M'$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} X(2+\cos 2t)+Y\sin 2t=3, \\ X\sin 2t - Y\cos 2t=0. \end{cases}$$

   Former une équation cartésienne de $(C)$. Montrer que $(C)$ est une hyperbole.

3. Exprimer les coordonnées, $X$ et $Y$, de $M'$ en fonction de $t$. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en $M'$ à $(C)$. Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite $OM$ en un point $m$ ; vérifier que ce point $m$ appartient au cercle $(\Gamma)$.

4. On donne à $t$ deux valeurs, $t_1$ et $t_2$, qui diffèrent de $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants, $M_1$ et $M_2$, sont diamétralement opposés sur $(\Gamma)$ et que leurs transformés, $M'_1$ et $M'_2$, sont alignés avec $O$.
   Soit $P$ conjugué harmonique de $O$ par rapport à $M'_1$ et $M'_2$, $S$ l'intersection des tangentes à $(C)$ en ces points. Établir que, lorsque $t_1$ et $t_2$ varient $\left(\text{leur différence restant égale à } \dfrac{\pi}{2}\right)$, $P$ et $S$ se déplacent sur la même droite fixe, $(\Delta)$, qui est une droite remarquable pour la courbe $(C)$.
   (On pourra utiliser la résultat établi à la question 3

## II. Aix Marseille remplacement, séries C & E

**Ex. 391.** ./1969/aixmarseilleCErem/exo-1/texte.tex

Étudier le reste de la division par 7 des nombres

$$2^n \qquad \text{et} \qquad 3^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Résoudre alors l'équation

$$2^x + 3^x \equiv 0 \text{ [mod 7]}.$$

**Ex. 392.** ./1969/aixmarseilleCErem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ définie pour $x$ réel par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x+a)$$

où $a$ est une constante réelle, dont on calculera la valeur, sachant que $f'(-1) = 0$.
Variation et représentation graphique de la fonction $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$.
Calculer $A$ et $B$ pour que $(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de $f$.
Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe, l'axe $Ox$ et les parallèles à $Oy$ d'abscisses $-2$ et $-1$.

### Problème 83

./1969/aixmarseilleCErem/pb/texte

Le mouvement d'un point $M$ est rapporté à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$. Les coordonnées $x$ et $y$, de $M$ sont exprimées en fonction du temps $t$ par

$$x = \tan^2 t - 1 \qquad \text{et} \qquad y = 2\tan t \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

1. Déterminer analytiquement la trajectoire. LA construire dans un repère donné. Préciser ses éléments géométriques.
2. Soit $\overrightarrow{MV}$ le vecteur vitesse à la date $t$. Calculer en fonction de $t$ le module et l'argument de de chacun des nombres complexes $z$ et $Z$ ayant pour images respectives les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MV}$.



Retour page 1

3. Calculer le nombre complexe $Z'$ dont l'image est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ transformé de $\overrightarrow{MV}$ par la similitude directe de centre $M$, de rapport $k = \cos^2 t$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.
   En déduire les coordonnées de $N$ en fonction de $t$.
   Étudier l'ensemble des points $N$ quand $t$ varie.
   Expliquer géométriquement le résultat obtenu.
4. $M$ étant la position mobile à la date $t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < 0\right)$ et $M_1$ sa position à la date $t_1 = t + \frac{\pi}{2}$, montrer que $M$, $O$ et $M_1$ sont alignés et que les vecteurs $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{M_1V_1}$ (vecteurs vitesses aux dates $t$ et $t_1$)ont des supports perpendiculaires.
   Quel est, quand $t$ varie, l'ensemble des points $R$, conjugués harmoniques de $O$ par rapport à $M$ et $M_1$ ?
5. On transforme $M$ et $M_1$ respectivement en $P$ et $P_1$ par l'inversion de pôle $O$ et de puissance 4.
   Soit $I$ le milieu de $PP_1$. Calculer les affixes des points $P$, $P_1$ et $I$ en fonction de $t$.
   En déduire l'ensemble des points $I$ quand $t$ varie. Retrouver géométriquement ce résultat.

## III. Amiens, série C & E

**Ex. 393.** ./1969/amiensC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{R}$, des nombres réels l'équation suivante :

$$6(\ln x)^2 - 19\ln x - 7 = 0.$$

On donnera, pour chaque solution, la valeur exacte, puis la valeur approchée avec l'approximation de la tabel des logarithmes.

**Ex. 394.** ./1969/amiensC/exo-2/texte.tex

On considère le nombre complexe $z = 1 = \mathrm{i}\tan\varphi$ où $\varphi$ est un nombre réel tel que

$$0 < \varphi < \pi \quad \text{et} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Quel est le module et quel est l'argument du nombre complexe $Z = \dfrac{z}{1-z}$ ?

Si $Z_1$ et $Z_2$ sont les valeurs correspondants respectivement à $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$, placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points $M_1$ et $M_2$ ayant respectivement pour affixe $Z_1$ et $Z_2$.

### Problème 84

./1969/amiensC/pb/texte

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; on appelle $x'x$ et $y'y$ les parallèles menées par $O$ respectivement à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $(\Delta)$ la droite d'équation $x - y = 0$.
Un point $P(\alpha\ ;\ \alpha)$ de $(\Delta)$ se projette orthogonalement en $Q$ sur $y'y$. On considère les points $A$ et $B$ définis par

$$\overrightarrow{PA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PB} = a\vec{j},$$

$a$ étant un nombre réel donné, strictement positif.

**1.** La perpendiculaire en $Q$ à la droite BQ coupe la droite PB en N et la perpendiculaire en A à la droite AN coupe la droite PB en M. Calculer en fonction de $\alpha$ et $a$, les coordonnées $x$ et $y$, de M et en déduire qu'elles satisfont la relation

$$y = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

**2.** On appelle $(C_a)$ la courbe représentative de la fonction $f_a$ qui, à la variable réelle $x$, fait correspondre

$$f_a(x) = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

Étudier les variations de $f_a$.
Tracer la courbe $(C_1)$ correspondant à la valeur 1 du paramètre $a$.
Montrer que $(C_a)$ se déduit de $(C_1)$ par une homothétie de centre $O$. Quel est, lorsque $a$ varie, l'ensemble des points des courbes $(C_a)$ où la tangente est parallèle à $x'x$ ?
Dans la suite du problème on suppose $a = 1$.



Retour page 1

**3.** Soit $M(x_0\ ;\ y_0)$ un point de $(C_1)$ ; la tangente en $M$ à $(C_1)$ recoupe $y'y$ en $H$, coupe $(\Delta)$ en $K$ et recoupe $(C_1)$ en $M'$. Montre que l'on a, quel que soit la position de $M$ sur $(C_1)$, $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{M'H}$ et que le rapport $\dfrac{\overrightarrow{MH}}{\overrightarrow{MK}}$ est une constante, que l'on calculera.

**4.** Quelle est l'aire de la surface comprise entre $(\Delta)$, la courbe $(C_1)$ et les parallèles à $y'y$ d'équations

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = b\ (b > 1)\ ?$$

Cette aire admet-elle une limite lorsque $b \to +\infty$ ?

## IV. Amiens remplacement, séries C & E

**Ex. 395.** ./1969/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble $GC$, des nombres complexes, l'équation

$$Z^2 - 4(6+\mathrm{i})Z + 3(63+16\mathrm{i}) = 0.$$

**Ex. 396.** ./1969/amiensCrem/exo-2/texte.tex

$O$ et $O'$ étant deux points distincts du plan, on désigne par S la similitude de centre $O$ d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2, par S' la similitude de centre $O'$, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
On fait la transformation S d'abord, S' ensuite ; déterminer la transformation produit T=S'∘S (on montrera qu'il admet un point double, que l'on construira).

### Problème 85

./1969/amiensCrem/pb/texte

Le plan $E_2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne respectivement par $x'x$ et $y'y$ la droite des abscisses et la droite des ordonnées de ce repère. On donne les points fixes $A$, de coordonnées $(a\ ;\ -a)$, et $B$, de coordonnées $(a\ ;\ a)$, $a$ étant un nombre donné strictement positif. Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur le plan $E_2$ par :

$$m(x\ ;\ y)\mathscr{R}M(X\ ;\ Y) \iff 2a\overrightarrow{Mm} + (x-y)\overrightarrow{MA} + (x+y)\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $m$ pour lesquels il existe un point $M$, et un seul, tel que $m\mathscr{R}M$.
On désigne par **T** l'application qui, à tout point $m$ appartenant à $\mathscr{D}$, fait correspondre le point $M$ tel que $m\mathscr{R}M$.
Calculer les coordonnées, $X$ et $Y$, de $M$ en fonction de celles, $x$ et $y$, de $m$. Vérifier que l'on a la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2a}{x+a}\overrightarrow{Om}.$$

Déterminer l'image $\mathbf{T}(\mathscr{D})$ de $\mathscr{D}$ par **T**.
Quel est le transformé par **T** d'un point $m$ de la droite $y'y$ ?

**2.** Démontrer que la figure transformée par **T** d'une droite $\delta$ d'équation :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0,$$

est incluse dans une droite $\Delta$, dont on donnera l'équation.
Comment faut-il choisir $\delta$ pour sue les droites $\delta$ et $\Delta$ soient :

a) égales ?

b) strictement parallèles ?

c) concourantes ?
Dans ce dernier cas, démontrer que $\delta$ et $\Delta$ se coupent sur une droite fixe et donner alors une construction géométrique de $\Delta$ connaissant $\delta$. En déduire une construction du point $M$ connaissant $m$.

**3.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{Om}.\overrightarrow{OM}$ en fonction de $a$, $x$ et $y$. Comment faut-il choisir le nombre réel $k$ pour qu'il existe des points $m$ tels que :
$$\overrightarrow{Om}.\overrightarrow{OM} = k\ ?$$

**4.** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Démontrer que la figure transformée de $\mathscr{C}$ par $T$ est incluse dans une conique $\mathscr{C}'$ admettant la droite $x'x$ comme axe de symétrie.
Discuter, suivant la valeur de $R$, la nature de $\mathscr{C}'$.
Pouvait-on prévoir géométriquement le résultat ?
Construire $\mathscr{C}'$ dans le cas où $R = \dfrac{a}{2}$. Déterminer en particulier les sommets de $\mathscr{C}'$ est ses points d'intersection avec $y'y$.

## V. Besançon remplacement, série C

**Ex. 397.** ./1969/besanconCrem/exo-1/texte.tex

Calculer le plus grand diviseur commun des nombres
$$5\ 145,\ 4\ 410 \qquad \text{et} \qquad 3\ 675.$$
Résoudre l'équation :
$$3\ 675x - 5\ 145y = 4\ 410,$$
où $x$ et $y$ appartiennent à $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.
(On remarquera que $(x = 2, y = 4)$ est une solution particulière de l'équation.)

**Ex. 398.** ./1969/besanconCrem/exo-2/texte.tex

Démontrer que la fonction $(ax + b)\mathrm{e}^x$ admet une primitive de la fonction $(mx + p)\mathrm{e}^x$.
En déduire les primitives des fonctions
$$(x-1)\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad (2x-3)\mathrm{e}^x.$$

### Problème 86

./1969/besanconCrem/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$.
A tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$, on associe le point $m$ de coordonnées $x$ et $y$ ; $m$ est dit image de $z$ ; $z$ est dit l'affixe de $m$.
On désigne par $A$, $B$, $P$, $Q$ les images respectives des nombres $-1$, $+1$, $+\dfrac{1}{2}$, $+2$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $AB$.
A tout point $m$ différent de $Q$ on associe son affixe, $z$, puis le nombre $Z = \dfrac{(2z-1)z}{z-2}$ et enfin l'image, $M$, de $Z$.
On désigne par $T$ l'application qui à $m$ associe $M$.

**1.** On suppose que $m$ parcourt le segment $AB$. En étudiant, dans l'intervalle $[-1\,;1]$, la fonction $f$ de la variable réelle $x$, donnée par
$$f(x) = \frac{(2x-1)x}{x-2},$$
trouver l'ensemble transformé du segment $AB$ par $T$.

**2.** Démontrer que $Z$ peut s'écrire sous la forme
$$Z = az + b + \frac{c}{z-2},$$
$a$, $b$ et $c$ étant réels.
On pose $Z = X + \mathrm{i}Y$, $X$ et $Y$ réels. Calculer $Y$ en fonction de $x$ et $y$ et en déduire l'ensemble des positions de $m$ telles que $M$ appartienne à $x'x$.

**3.** On pose $Z_1 = \dfrac{2z-1}{2-z}$. Démontrer que
$$|Z_1| = 2\frac{mP}{mQ} \qquad \text{et} \qquad \arg Z_1 = (\overrightarrow{mQ},\ \overrightarrow{Pm}).$$



Retour page 1

**4.** Démontrer que, si $m$ est intérieur à $(\mathscr{C})$, c'est-à-dire si $|z| < 1$, alors $|Z_1| < 1$ et $M$ est aussi intérieur à $(\mathscr{C})$, puis que si $m$ est extérieur à $(\mathscr{C})$, alors $M$ est extérieur à $(\mathscr{C})$.

**5.** On suppose $m$ appartient au demi-cercle $(\mathscr{C}')$ de diamètre $AB$ qui contient l'image de i.
On désigne par $\theta$ l'argument de $z$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ et par $\varphi$ l'argument de $Z_1$. Montrer que $\sin\varphi \geqslant 0$.
On suppose $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Calculer $\cos\varphi$ en fonction de $\cos\theta$ et en déduire que $\varphi$ est une fonction croissante de $\theta$.

# VI. Bordeaux, série C

Ex. 399. ./1969/bordeauxC/exo-1/texte.tex

1. Soit la fonction $f$ définie, sur l?ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\log x \qquad \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $\log x$ représente le logarithme népérien du nombre $x$.
Étudier les variations de la fonction $f$, tracer la courbe (C) représentant ces variations et déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

2. Calculer la dérivée de la fonction $g$ définie,sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = x^2\log x - \dfrac{x^2}{2} \qquad \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit $h$ la fonction définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$h(x) = |f(x)|.$$

Soit (C') la courbe représentant les variations de la fonction $h$. Trouver l'aire de la boucle déterminée par les courbes (C) et (C').

Ex. 400. ./1969/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} = 0 \pmod 5.$$

## Problème 87

./1969/bordeauxC/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$.
Soit $\mathscr{J}$ l'inversion de pôle O et de puissance 9 et soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles du plan qui coupent $x'Ox$ en deux points, $M$ et $M'$, inverses dans $\mathscr{J}$.

**1.** Montrer que tout cercle de $\mathscr{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, $(O)$, qui coupe l'axe $x'x$ en $A$ et $B$ (l'abscisse de $A$ étant supérieure à celle de $B$). Déterminer l'ensemble des centres des cercles de $\mathscr{E}$. Soit l'équation

$$x^2 - y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \tag{1}$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de la famille $\mathscr{E}$ est $c = 9$ et $a \geqslant 9$.

**2.** Soit $(D_1)$ une droite non parallèle à $y'Oy$ et $\mathscr{E}_1$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles centrés sur $(D_1)$. Montrer que$\mathscr{E} - 1$ est contenu dans un faisceau linéaire de cercles.

**3.** Soit $(D_2)$ la droite d'équation $y = 1$ et $\mathscr{E}_2$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles tangents à la droite $(D_2)$.
Montrer, l'aide de l'inversion $\mathscr{J}$, que les cercles de $\mathscr{E}_2$ sont tangents à un cercle fixe, $(\Gamma)$, dont on précisera le centre et le rayon. Trouver une condition concernant $a$, $b$ et $c$ pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de $\mathscr{E}_2$. En déduire l'ensemble des centres des cercles de $\mathscr{E}_2$.



Retour page 1

**4.** Soit $\mathscr{E}_3$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles tangents au cercle (C), de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0\ ;\ +2)$. Montrer, a? l'aide de l'inversion $\mathscr{J}$, que les cercles de $\mathscr{E}_3$ sont tangents a? un cercle, (C'), dont on précisera le centre et le rayon.

Trouver une relation entre $a$ et $b$ pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de $\mathscr{E}_3$. En déduire l'ensemble des centres des cercles de $\mathscr{E}_3$. (Il pourra être utile d'effectuer une translation du repère, la nouvelle origine étant le point $(0\ ;\ +4)$.)

ℹ- Les questions 2, 3 et 4. sont indépendantes entre elles.

## VII. Bordeaux, série E

**Ex. 401.** ./1969/bordeauxE/exo-1/texte.tex

Trouver les deux nombres complexes, $z'$ et $z''$, qui satisfont l'équation

$$z^2 - (10\mathrm{i} - 7)z - (11 + 41\mathrm{i}) = 0.$$

Calculer les parties réelles et imaginaires de $z'$ et $z''$.

**Ex. 402.** ./1969/bordeauxE/exo-2/texte.tex

1. Soit $f$ la fonction qui à $x$ fait correspondre

$$f(x) = \frac{4}{3}\sin^2\frac{3x}{2}.$$

Montrer que $f$ est périodique.

2. Soit la fonction $g$ définie par

$$g(x) = f(x) + x.$$

Calculer la dérivée, $g'$, de la fonction $g$ et étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de $x$. Indiquer sur le cercle trigonométrique les valeurs de $x$ qui rendant $g'(x)$ positif.

### Problème 88

./1969/bordeauxE/pb/texte

1. Dans le plan orienté, soit $Ou$ et $Ov$ deux demi-droites telles que $(Ou,\ Ov) = +\frac{\pi}{3}$.

Soit $a \in Ou$, $B \in Ov$ deux points quelconques. La bissectrice de l'angle $(Ou,\ Ov)$ coupe $AB$ en $D$.

On projette orthogonalement $A$ et $B$ sur $OD$, en $H$ et $K$.

Montrer que le birapport des points $O$, $D$, $H$ et $K$ est égal à, $-1$. En déduire que

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{OD}.$$

2. $A$ et $B$ varient de manière que $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{OD}$.

Montrer que $AB$ passe par un point fixe.

On considère un repère orthonormé $Ox$, $Oy$, l'axe $Ox$ étant porté par $OD$ et orienté de $O$ vers $D$ et l'axe $Oy$ étant directement perpendiculaire à $Ox$.

En prenant pour paramètre, $t$, le coefficient directeur de $AB$, déterminer les coordonnées de $A$ et $B$ en fonction de $t$.

3. On considère la transformation T qui associe au point $M$, de coordonnées $x$, $y$, distinct de $O$, le point $M'$ dont les coordonnées $x'$, $y'$, vérifient le système

$$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ xx' + yy' = 1. \end{cases}$$

a) Montrer que $T$ est l'inversion de pôle $O$ et de puissance 1.

b) Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction de celles de $M$, puis celles de $M$ en fonction de celles de $M'$.

c) Si $A'$ et $B'$ sont les inverses de $A$ et de $B$ dans cette inversion, démontrer géométriquement que le cercle $OA'B'$, de centre $\omega$, passe par un deuxième point fixe. Prouver qu ele coefficient directeur de $A'B'$ est $-t$.

4. Trouver en fonction de $t$ les coordonnées du point $M$ de $A'B'$ qui a même ordonnée que $\omega$.
   Montrer que $M$ appartient, quel que soit $t$, à une conique, (P), dont on déterminera l'équation cartésienne et la nature.
   Calculer en fonction de $t$ un système de paramètres directeurs de la tangente en $M$ à (P). En conclure que cette tangente est $A'B'$.

- Le paramètre $t$ qui intervient dans les questions 2, 3 et 4 ne peut pas prendre toutes les valeurs réelles.

## VIII. Bordeaux remplacement, séries C & E

**Ex. 403.** ./1969/bordeauxCErem/exo-1/texte.tex

Dans le plan $xOy$ on considère l'arc de courbe $OA$ représentant, en repère orthonormé, les variations de la fonction définie par

$$y = \cos^2 x \sin 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

**1.** Tracer cet arc de courbe.

**2.** Déterminer l'aire de la partie limitée par $Ox$ et l'arc $OA$.

**Ex. 404.** ./1969/bordeauxCErem/exo-2/texte.tex

Trouver tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers relatifs satisfaisant

$$11x - 5y = 14, \tag{1}$$

sachant que le couple $(19,\ 39)$ est solution de (1).
Montrer qu'il existe un couple et un seul $(x_0,\ y_0)$ solution de (1) avec

$$0 \leqslant x_O < 5.$$

### Problème 89

./1969/bordeauxCErem/pb/texte

Soit $(\Pi)$ le plan rapporté à un repère orthonormé, $Ox,\ Oy$.
Soit $T$ la transformation ponctuelle qui à tout point $M$ d'affixe complexe $z$ associe le point $M'$ d'affixe complexe $(\overline{z})^2$ (le nombre complexe $\overline{z}$ étant le complexe conjugué du nombre complexe $z$).
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

A- 1. Calculer le module et l'argument de $(\overline{z})^2$ en fonction du module et de l'argument de $z$.
   2. Quels sont les points doubles de la transformation $T$ ? Montrer que la transformation $T$ n'est pas injective.

B- Soit $M$ le point de $(\mathscr{C})$tel que $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OM}) \equiv \theta\ [\text{mod } 2\pi]$, $M'$ son transformé par $T$
   Si $M$ n'est pas un point double pour la transformation $T$, $D_\theta$ est la droite $MM'$.
   Si $M$ est un point double, $D_\theta$ est la tangente en $M$ au cercle $(\mathscr{C})$.

   1. Déterminer $\theta$ pour que $D_\theta$ soit parallèle à $Ox$.
   2. Déterminer $\theta$ pour que $D_\theta$ soit parallèle à $Oy$.
   3. Déterminer $\theta$ pour que $D_\theta$ passe par $O$.
   4. Soit $A$ le point de $(\mathscr{C})$ qui n'est pas un point double, défini par $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OA}) \equiv \alpha\ [\text{mod } 2\pi]$.
      Montrer qu'il existe trois droites $D_\theta$ passant par $A$ ; calculer les valeurs correspondantes de $\theta$ en fonction de $\alpha$.
      Montrer que deux de ces droites sont perpendiculaires ; soit $M_1$ et $M_2$ les intersections, distinctes de $A$, de ces deux droites avec le cercle $(\mathscr{C})$. Montrer que la troisième droite est perpendiculaire à $M_1M_2$.

C- 1. Montrer que, si le point $M$ a pour coordonnées $x$ et $y$, le point $M'$, transformé de $M$ par $T$, a pour coordonnées $x^2 - y^2$ et $-2xy$.

2. Quelle est l'image, par la transformation $T$, de l'ensemble des points de figures suivantes :

a) droite passant par $O$ distincte des axes ;

b) cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{2}$ ?

3. Montrer que, si une figure (F) admet $Ox$ pour axe de symétrie, sa transformée, (F', par $T$ admet $Ox$ pour axe de symétrie et que, si (F) admet $Oy$ pour axe de symétrie, sa transformée, (F'), par $T$ admet $Ox$ pour axe de symétrie.

Trouver l'image par $T$ du carrée de côté 2, de centre $O$, dont les côtés sont parallèles aux axes $Ox$ et $Oy$.

## IX. Caen,série C

**Ex. 405.** ./1969/caenC/exo-1/texte.tex

Trouver le reste de la division du nombre $12^{1\,527}$ par 5.

**Ex. 406.** ./1969/caenC/exo-2/texte.tex

On considère le nombre complexe

$$z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

**1.** Mettre $z$ sous forme trigonométrique.

**2.** En déduire les racines cinquièmes de $z$.

### Problème 90 ./1969/caenC/pb/texte

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (R), d'axes $Ox$ et $Oy$. On considère par $\lambda$ et $\mu$ deux constantes réelles, avec $\mu \neq 0$. On considère la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ qui, au point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, fait correspondre le point $M' = T_{\lambda,\,\mu}(M)$ de coordonnées $x'$ et $y'$ données par

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda x + \mu y. \end{cases}$$

**1.** a) Montrer que $T_{\lambda,\,\mu}$ est une application bijective du plan (P) dans lui-même. Comment choisir $\lambda$ et $\mu$ pour que $T_{\lambda,\,\mu}$ soit une application involutive ?

$\lambda$ et $\mu$ étant donnés arbitrairement, avec $\mu \neq 0$, quel est l'ensemble des points invariants par la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ $\left[\text{c'est-à dire l'ensemble des points } M \text{ tels que } T_{\lambda,\,\mu}(M) = M\right]$ ?

b) Si $M$ décrit une droite $(d)$, montrer que le point $M'$ décrit une droite $(d')$. Démontrer que le birapport de l'ensemble ordonné de quatre points alignés et conservé par $T_{\lambda,\,\mu}$.

c) Montrer que l'ensemble des points $M$ pour lesquels il existe un réel $s$ tel que

$$\overrightarrow{OM'} = s\overrightarrow{OM}$$

se compose, si $\mu \neq 1$, de deux droites, chacune de ces droites correspondant à une valeur de $s$, que l'on précisera. Que devient cet ensemble si $\mu = 1$ ?

**2.** On considère l'ensemble (E) de toutes les transformations $T_{\lambda,\,\mu}$ pour $\lambda$ et $\mu$ réels et $\mu \neq 0$.

a) Définir le produit de la transformation $T_{\lambda,\,\mu}$ par la transformation $T_{\lambda',\,\mu'}$. Montrer que l'ensemble (E) admet, pour ce produit, une structure de groupe.

b) Montrer que ce groupe n'est pas commutatif, mais qu'à une transformation donnée, $T_{\lambda,\,\mu}$, on peu associer une infinité de transformations $T_{\lambda',\,\mu'}$, telles que

$$T_{\lambda,\,\mu} \circ T_{\lambda',\,\mu'} = T_{\lambda',\,\mu'} \circ T_{\lambda,\,\mu}.$$

Par quelle équation, $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$ doivent-ils être liés pour qu'il en soit ainsi ?

**3.** Dans ce paragraphe, on étudie la transformation $T = T_{1,\,1}$ définie par

$$x' = x \qquad \text{et} \qquad y' = x + y.$$

a) Quelle est l'équation du transformé, $(C')$ de cercle de centre $O$ et de rayon 1 ?

b) On considère le repère orthonormé (R') défini par les axes $OX$ et $OY$ obtenus respectivement en faisant subir aux axes $Ox$ et $Oy$ une rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, dans le sens direct.
Écrire l'équation de $(C')$ dans le repère (R'). Déterminer $\alpha$ pour que cette équation ne contienne pas de terme en $XY$. (On calculera $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$.)

c) Reconnaître et tracer la courbe $(C')$. Calculer l'aire du domaine intérieur à $(C')$.

d) Soit $\Sigma$ l'intersection des domaines intérieurs à $(C)$ et à $(C')$.
Montrer que les quatre domaines intérieurs à $(C)$ ou à $(C')$ et extérieurs à $\Sigma$ ont des aires égales.

## X. Dijon, série C

**Ex. 407.** ./1969/dijonC/exo-1/texte.tex

Étudier la fonction $y = \ln \cos x$.
Tracer le courbe représentative de cette fonction.

**Ex. 408.** ./1969/dijonC/exo-2/texte.tex

Déterminer un nombre $n$ de quatre chiffres, tel que les restes des divisions de 21 685 et 33 509 par $n$ soient respectivement 37 et 53.

### Problème 91

./1969/dijonC/pb/texte

On donne dans un plan, un cercle $(\Gamma)$ de centre $O$ fixe, un point fixe $I$, sur $\Gamma$ et une droite $(D)$ ne rencontrant pas $(\Gamma)$.
On définit sur l'ensemble des points de $(\Gamma)$ une loi de composition interne de la manière suivante.
Soit B et C deux points de $(\Gamma)$. La droite BC [qui est tangente à BC si B et C sont confondus] ou bien coupe la droite $(D)$ en $a$, ou bien est parallèle à $(D)$. Appelons $\delta$ dans le premier cas la droite $aI$, dans le deuxième cas la parallèle à $(D)$ menée par $I$.
Le composé de B et de C, noté B $\star$ C, est alors le deuxième point d'intersection de $(\Gamma)$ avec
$\delta$ [si $\delta$ est tangente à $\Gamma$ en $I$, ce point est confondu avec $I$].

A) 1° Montrer que, quels que soient les points B et C de $(\Gamma)$, on a

$$\mathrm{B} \star \mathrm{C} = \mathrm{C} \star \mathrm{B}.$$

2° Si B est un point quelconque de $(\Gamma)$, déterminer la composée B $\star$ I. Que peut-on dire du point $I$ vis-à-vis de cette loi de composition ?

3° Si A est un point quelconque de $(\Gamma)$, montrer qu'il existe deux points distincts de $(\Gamma)$ solutions de l'équation

$$\mathrm{X}^2 \star \mathrm{A},$$

où $X$ est un point inconnu et où $X^2$ désigne la composée X $\star$ X.

4° Montrer que, quels que soient les points A et B de $(\Gamma)$, il existe un point $X$ unique de $(\Gamma)$ tel que l'on ait

$$\mathrm{B} \star \mathrm{X} = A\,; \tag{1}$$

en particulier on notera $\mathrm{B}^{-1}$ le point de $(\Gamma)$ tel que

$$\mathrm{B} \star \mathrm{B}^{-1} = I.$$

Dans le cas où A et B sont quelconques, peut-on déterminer le point $X$ qui vérifie (1), à partir de $\mathrm{B}^{-1}$ et de A ?

N.B. – les parties B et C sont indépendantes.

B) Soit P et Q les points de Poncelet du faisceau défini par $(D)$ et $(\Gamma)$.
Soit B et C, deux points de $(\Gamma)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{B} \star \mathrm{C}$.
Soit $\mathrm{B}_1$, $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{A}'_1$, $\mathrm{I}_1$ et $\mathrm{Q}_1$ les transformés des points B, C, A', I et Q, respectivement, dans l'inversion $\mathscr{J}$ de pôle P et de puissance $k^2$ ($k$ réel non nul).

1° Montrer que
$$(\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{B}_1}) + (\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{C}_1}) = (\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{A}'_1}) \ (\text{mod. } 2\pi).$$

2° Soit $G$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

a) Montrer que $G$ est un groupe pour la loi « multiplication de deux nombres complexes ».

b) On considère un repère orthonormé $(\mathrm{Q}_1,\ \vec{i},\ \vec{j})$, d'origine $\mathrm{Q}_1$, où $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{I}_1}$.
Si $M$ est un point de $(\Gamma)$, on désigne par $M_1$ le transformé de $M$ dans l'inversion $\mathscr{J}$ et par $z$ le nombre complexe dont l'image est $M_1$ dans le repère considéré.
Montrer que $z$ appartient à $G$ et que l'application $\varphi$ de $(\Gamma)$ dans $G$ qui à $M$ associe $\varphi(M) = z$ est bijective.

3° Montrer que, si B et C sont deux points quelconques de $(\Gamma)$, on a
$$\varphi(\mathrm{B} \star \mathrm{C}) = \varphi(\mathrm{B}) \star \varphi(\mathrm{C}).$$
En déduire que l'ensemble $(\Gamma)$, muni de la loi $\star$, est un groupe.

C) Il résulte de la partie A) que la loi $\star$ est une loi associative sur $(\Gamma)$, c'est-à-dire que, pour tout A, pour tout B, pour tout C, l'égalité
$$\mathrm{A} \star (\mathrm{B} \star \mathrm{C}) \ = \ (\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \star \mathrm{C}. \tag{2}$$
est vraie.
Le but de cette partie est de faire établir cette égalité (2), non pour toutes les positions de A, B et C, mais en « en général », c'est-à-dire suivant certaines conditions, qu'on précisera.
On posera
$$\mathrm{B} \star \mathrm{C} \ = \ \mathrm{A}' \qquad \mathrm{A} \star \mathrm{B} = \ \mathrm{C}'.$$

***Lemme :***

1° Soit $(L)$ et $(L')$ deux cercles sécants en $S$ et $T$. Une droite passant par $S$ coupe $(L)$ en $P$ et $(L')$ en $P'$ ; une droite passant par $T$ coupe $(L)$ en $Q$ et $(L')$ en $Q'$.
Montrer que les droites $PQ$ et $P'Q'$ sont parallèles.

2° On suppose que les points A, B et C vérifient les conditions suivantes :

- chacun d'eux est distinct de I ;
- A est distinct de C ;
- la droite BC coupe (D) en $a$ ;
- la droite AB coupe (D) en $c$.

Montrer que les points $a$, B et I sont distincts et non alignés.
On désigne par $(\Gamma')$ le cercle circonscrit au triangle $a$BI. $(\Gamma')$ recoupe AB en $\alpha$, IC' en $\gamma$ et (D) en $a'$.

3° On suppose en outre que $a'$ est distinct de $c$.
Montrer que les points $a$, $\gamma$ et $\alpha$ sont distincts.
Montrer que les droites AA' et CC' ne sont pas parallèles ; on désigne par $\omega$ leur point de rencontre.
Montrer que les deux triangles $a\gamma\alpha$ et $\omega$C'A sont homothétiques. (On pourra utiliser le lemme.)
En déduire (dans les conditions envisagées) l'égalité (2).

# XI. Limoges, série C

Ex. 409. ./1969/limogesC/exo-1/texte.tex

En représentant par $a$ un élément de l'ensemble, $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs et par $\alpha$ un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$, des nombres rationnels, on désigne par $x = (a,\ \alpha)$ un élément du produit cartésien $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$.
Soit $x = (a,\ \alpha)$ et $y = (b,\ \beta)$ deux éléments de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ ; on définit les deux lois suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{loi } \star : & x\star y = (a+b,\ \alpha\beta)\,; \\ \text{loi T} : & x\mathrm{T}y = (ab,\ \alpha+\beta). \end{array}$$

Montrer que chacune de ces lois est commutative, associative et possède un élément neutre. Déterminer, pour chacune d'elles, l'ensemble des éléments ayant un symétrique.
La loi T est-elle distributive par rapport à la loi $\star$ ?

Ex. 410. ./1969/limogesC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction définie par

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2-4}.$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Étudier les branches infinies de sa représentation graphique ; donner les équations des asymptotes. (On ne demande pas la représentation graphique de la fonction.)

# XII. Montpellier, série C

Ex. 411. ./1969/montpellierC/exo-1/texte.tex

On désigne par $x$ et $y$ deux nombres réels, par $z$ le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ et par $Z$ le nombre complexe $\mathrm{i}z$.
On appelle $m$ l'image de $z$, $M$ l'image de $Z$ et $A$ l'image de i.

**1.** a) Décrire géométriquement la transformation ponctuelle $T$ qui, au point $m$, associe le point $M$.
 b) Calculer les coordonnées, $X$ et $Y$, de $M$ en fonction de celles de $m$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $m$ tels que les trois points $m$, $M$ et $A$ soient alignés.

Ex. 412. ./1969/montpellierC/exo-2/texte.tex

Démontrer que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, l'entier $A = n^2(n^2-1)$ est divisible par 12.

## Problème 92

./1969/montpellierC/pb/texte

Soit $a$ un nombre positif donné.
Dans un plan rapporté au repère orthonormé $xOy$, on considère le cercle, noté $(O)$, de centre $O$ et de rayon $a\sqrt{2}$, et le cercle, noté $(A)$, de centre $A(3a\ ;\ 0)$ et de rayon $a$.
On appelle $(D)$ la droite d'équation $y = a$.

**1.** Les cercles $(O)$ et $(A)$ définissent une faisceau $(F)$. Préciser l'axe radical, $\Delta$, de ce faisceau et ses points limites, $I$ et $J$.

**2.** On désigne par $u$ l'abscisse d'un point $M$ de $(D)$, et par $p$ la puissance de $M$ par rapport au cercle $(O)$ et par $p'$ la puissance de $M$ par rapport au cercle $(A)$.
Démontrer que le rapport $\dfrac{p}{p'}$ a l'expression suivante :

$$z = \frac{u^2-a^2}{(u-3a)^2}.$$

Étudier les variations de $z$ en fonction de $u$ et construire le graphe, $(C)$, de cette fonction par rapport à un repère orthonormé $u\Omega z$.
Utiliser ce graphe pour discuter, suivant la valeur de nombre réel $k$, l'existence et le nombre des points $M$ tels que $\dfrac{p}{p'} = k$.



Retour page 1

**3.** Calculer l'aire, $S$, du domaine plan limité par l'axe $\Omega u$ et l'arc du graphe $(C)$ défini par $-a \leqslant u \leqslant a$.
On pourra, pour cela, déterminer trois réels, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que

$$z = \alpha + \frac{\beta}{u-3a} + \frac{\gamma}{(u-3a)^2}.$$

**4.** On désigne par $N$ l'intersection des polaires de $M$ par rapports aux cercles $(O)$ et $(A)$ ; soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $MN$.
Quelle est la nature de la famille des cercles $(\Gamma)$ ainsi obtenus, lorsque $M$ décrit la droite $(D)$ ?
Donner, en utilisant les points $I$ et $J$, une construction géométrique du point $N$ associé à un point $N$ donné.

## XIII. Nantes, série C

**Ex. 413.** ./1969/NantesC/exo-1/texte.tex

Dans le plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $M_1$, dont les coordonnées sont définies en fonction du temps par :

$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t,$$

et le point $M_2$ dont les coordonnées sont définies par :

$$x = a\cos 2t \qquad y = -a\sin 2t.$$

a) Quelles sont les trajectoires des points $M_1$ et $M_2$ ?

b) Soit $M$ le point défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right)$. Á quelles dates les points $M$, $M_1$, $M_2$ sont-ils confondus ?

c) Démontrer que $M$ est un point du segment $[M_1M_2]$, quand ce segment est défini.
Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point $M$. Démontrer que les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

## XIV. Nantes remplacement, série C

**Ex. 414.** ./1969/NantesCrem/exo-1/texte.tex

Étudier la fonction définie par $y = \frac{1-\ln x}{x^2}$ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

**Ex. 415.** ./1969/NantesCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $M_1$, dont les coordonnées sont définies en fonction du temps par :

$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t,$$

et le point $M_2$ dont les coordonnées sont définies par :

$$x = a\cos 2t \qquad y = -a\sin 2t.$$

a) Quelles sont les trajectoires des points $M_1$ et $M_2$ ?

b) Soit $M$ le point défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right)$. Á quelles dates les points $M$, $M_1$, $M_2$ sont-ils confondus ?

c) Démontrer que $M$ est un point du segment $[M_1M_2]$, quand ce segment est défini.
Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point $M$. Démontrer que les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

Retour page 1

### PROBLÈME 93

./1969/NantesCrem/pb/texte

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère la parabole (P) ayant pour équation $y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$).
Á chaque point $M$ de (P), autre que $O$, on associe le cercle (C) ayant pour centre le point d'intersection, $C$, de $Ox$ et de la normale à (P) en $M$ (c'est à dire la perpendiculaire en $M$ à la tangente) et ayant pour rayon $r = CM$.

1. Calculer l'abscisse, $\lambda$, du centre, $C$, du cercle (C) correspondant au point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ de (P). Démontrer que ce cercle a pour équation
$$x^2 + y^2 - 2(x_0 + p)x + x_0^2 = 0.$$
Écrire l'équation de ce cercle en prenant pour paramètre, l'abscisse, $\lambda$, de $C$.
Quel est l'ensemble des points $C$ et quel est l'ensemble des valeurs de $r$ correspondant à l'ensemble des points $M$ de (P) ? Est-il possible d'envisager $M$ confondu avec $O$ ?
2. Discuter le nombres de cercles (C) passant par un point donné P$(\alpha\ ;\ \beta)$, suivant la position de ce point dans le plan : on aura à faire intervenir la parabole (P) et le cercle ($C_0$) correspondant à $x_0 = 0$.
3. Soit $Q$ et $Q'$ les extrémités du diamètre de (C) perpendiculaire à $Ox$ : démontrer que les points $Q$ et $Q'$ appartiennent à une parabole $(\Gamma)$ qui se déduit de (P) par une transformation, que l'on précisera. Définir avec précision l'ensemble des points $Q$ et $Q'$.
4. Soit $R$ et $R'$ les points de (C) où la tangente a une direction donnée non perpendiculaire à $Ox$, de pente $m$. Démontrer que $R$ et $R'$ appartiennent à une parabole $(\Gamma_m)$, dont on écrira l'équation ; examiner le cas où $m$ est nul.
Définir avec précision l'ensemble des points $R$ et $R'$.

## XV. Paris, série C

**Ex. 416.** ./1969/parisC/exo-1/texte.tex

Soit $(C)$ l'hyperbole représentée, dans un repère d'axes orthonormé par $Ox$ et $Oy$, par l'équation
$$y^2 = 3x^2 - 12x + 9.$$
Déterminer le centre de symétrie de $(C)$ (par ses coordonnées) et les asymptotes de $(C)$ (par leurs équations).
Dessiner $(C)$ et ses asymptotes.

**Ex. 417.** ./1969/parisC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction qui à $x$ fait correspondre
$$f(x) = \frac{x^3 + x + 3}{x},$$
$x$ décrivant l'intervalle fermé $[+1\,; +3]$.

a) Déterminer la primitive, $F$, de $f$ qui s'annule pour $x = 2$. Dans la suite, on pourra désigner par $a$ et $b$ respectivement les nombres $F(1)$ et $F(3)$ (qu'on ne demande pas de calculer).
b) Montrer en énonçant avec précision le théorème utilisé, que cette fonction $F$ de le variable $x$, $x$ décrivant l'intervalle $[+1\,; +3]$, admet une fonction réciproque, $G$, définie sur un intervalle que l'on précisera. Démontrer que la valeur $0$ appartient à cet intervalle.
Déterminer, pour la valeur $0$ de la variable, la valeur de la fonction $G$ et la valeur de sa dérivée.

## XVI. Paris remplacement, série C

**Ex. 418.** ./1969/parisCrem/exo-1/texte.tex

Les nombres $a$, $b$, $c$ sont des nombres entiers appartenant à l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. On représente par $\overline{abc}$ le nombre $5^2a + 5b + c$.

**1.** Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 4 si, et seulement si, $a + b + c$ est divisible par 4.
**2.** Montrer que $\overline{abc}$ est divisible par 6 si, et seulement si, $a - b + c$ est divisible par 6.



Retour page 1

**Ex. 419.** ./1969/parisCrem/exo-2/texte.tex

Un point mobile $M$ dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé a pour coordonnées à l'instant $t$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^4}{4} - \log t, \end{cases}$$

$\log$ désignant le logarithme népérien.

**1.** Construire la trajectoire, (C), du point $M$. Calculer la longueur du vecteur vitesse du point $M$ à l'instant $t$.

**2.** On oriente (C) dans le sens des $t$ croissants et l'on prend pour origine des arcs la position du point mobile à l'instant $t = 1$.

Déterminer la loi horaire du mouvement, donnant l'arc en fonction du temps.

## Problème 94

./1969/parisCrem/pb/texte

1. a) Démontrer que toute équation du 4ᵉ degré en $X$, à coefficients réels, dont on a rendu le coefficient de $X^4$ égal à 1 :

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{1}$$

peut être ramenée, par changement d'inconnue de la forme $X = \alpha + x$, à une équation de la forme :

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2}$$

b) Démontrer que l'équation (2) peut se mettre d'une infinité de façons, sous la forme :

$$T^2 + T' = 0, \tag{3}$$

$T$ et $T'$ étant deux polynômes du second degré en $x$, $T$ étant nécessairement de la forme : $T = x^2 + \beta$. 5on posera $T' = ux^2 + vx + w$ et l'on calculera $u$, $v$ et $w$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $\beta$.)

c) Démontrer que le polynôme $T'$ peut être mis sous la forme $T' = u(x+\gamma)^2$ pourvu que $\beta$ soit solution d'une équation du 3ᵉ degré définie par $\varphi(\beta) = 0$ que l'on formera.

En déduire que, si l'on peut trouver une solution de l'équation $\varphi(\beta) = 0$, on peut résoudre l'équation (1). (On rappelle que l'on peut factoriser, c'est à dire décomposer en un produit de facteurs l'expression $M^2 + N^2$, en écrivant :

$$(M + \mathrm{i}N)(M - \mathrm{i}N).)$$

Cette méthode a été inventée par le mathématicien bolonais Ferrari (1522-1565) et ramène ainsi la résolution d'une équation de 4ᵉ degré à celle d'une équation du 3ᵉ degré.

2. Appliquer ce qui précède à l'équation définie par :

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0. \tag{4}$$

Calculer, dans ce cas particulier, les solutions de l'équation définie par $\varphi(\beta) = 0$ (l'une des solutions est 1).

En déduire trois factorisations du polynôme $f(x)$ en un produit de deux trinômes à coefficients réels ou complexes, et la résolution de l'équation (4).

Représenter les images des solutions dans le plan complexe. Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

3. Résoudre l'équation définie par :

$$F(x) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8 = 0. \tag{5}$$

Quels sont les modules et les arguments des solutions ? Quelle est leur somme et quel est leur produit ?

Factoriser $F(X)$ sur le corps des réels.

Retour page 1

# XVII. Paris, série E

**Ex. 420.** ./1969/parisE/exo-1/texte.tex

Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre positif $a$, le système

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x.\mathrm{e}^y = a^2 \\ xy = 1, \end{cases}$$

où les deux inconnues $x$, $y$ sont des nombres réels et où e désigne la base des logarithmes népériens.

**Ex. 421.** ./1969/parisE/exo-2/texte.tex

Á tout nombre complexe $z = x + \ icy$ on fait correspondre, dans le plan (P) rapporté à une repère d'axes orthonormé $Ox$, $Oy$, le point $M$ de coordonnées $x$, $y$. On dit que $M$ est l'image de $z$ ; $z$ est dit affixe de $M$.

a) Trouver et construire dans le plan (P) l'ensemble, (H), des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie la relation

$$z^2 + (\overline{z})^2 = 1, \tag{1}$$

$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de $z$.

b) Calculer les arguments des nombres $z$ de module 1 qui satisfont à (1) et situer sur (H) les images de ces nombres.

## Problème 95

./1969/parisE/pb/texte

L'espace est rapporté, à un repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$.
Soit (D) la droite qui passe par les points A, de coordonnées $(+1\ ;\ +1\ ;\ +0)$, et B, de coordonnées $(+2\ ;\ +2\ ;\ +4)$.
Soit ($\Delta$) la droite qui passe par les points I, de coordonnées $(+4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, et J, de coordonnées $(0\ ;\ +4\ ;\ 0)$.

**1.** Montrer que les droites (D) et ($\delta$) sont orthogonales.

**2.** Á tout point $M$ de la droite (D) on associe la point du plan $\varphi(M)$ passant par ($\Delta$) et par $M$.

On pose $\dfrac{\overline{M\mathrm{A}}}{\overline{M\mathrm{B}}} = \lambda$, quand $M$ est différent de B.

a) Déterminer en fonction de $\lambda$ les coordonnées de $M$ et de l'équation de $\varphi(M)$.

b) Quelle est l'équation du plan $\varphi(H)$ perpendiculaire à la droite (D) ?

**3.** Les plans $xOy$ et $yOz$ étant respectivement choisis pour plan horizontal et plan frontal de projection, l'unité étant prise égale à 2 cm environ, on demande :

a) de faire l'épure des droites (D) et ($\Delta$),

b) de déterminer le plan $\varphi(H)$ par ses traces (c'est-à-dire ses intersections avec la plan horizontal et le plan frontal de projection),

c) de déterminer le point $H$ par ses projections.

**4.** Soit $\delta$ la distance à l'origine, $O$, au plan $\varphi(M)$.

a) Montrer que

$$\delta^2 = \frac{64\lambda^2}{8\lambda^2 + 1}.$$

b) Étudier la variation de $\delta$ en fonction de $\lambda$ et représenter graphiquement cette fonction.

c) Déterminer $\lambda$ pour que le plan $\varphi(M)$ correspondant soit tangent à la sphère d'équation

$$9(x^2 + y^2 + z^2) - 64 = 0.$$

# Chapitre XII

# 1970.

**Sommaire**



## I. Aix Marseille, série C & E

**Ex. 422.** ./1970/aixmarseilleCE/exo-1/texte.tex

On donne ABCD un carré dans le plan. Le point $M$ étant un point variable de la diagonale AC (entre A et C), on construit le cercle $(\alpha)$ tangent à AD en A et passant par $M$, ainsi que le cercle $(\gamma)$ tangent à CD en C et passant aussi par $M$.
Ces deux cercles ont un point commun, $P$, autre que $M$.
Montrer que l'axe radical de $(\alpha)$ et de $(\gamma)$ passe par un point fixe.
trouver l'ensemble des points $P$ quand $M$ parcourt la diagonale AC.

**Ex. 423.** ./1970/aixmarseilleCE/exo-2/texte.tex

Les entiers sont écrits ici en base dix.
En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier positif $n$

$$10^{3n} \equiv 1\ [37].$$

En déduire le reste de la division par 37 du nombre $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

## PROBLÈME 96

./1970/aixmarseilleCE/pb/texte

Dans tout le problème, $m$ est un paramètre strictement positif.

**1.** Soit $\varphi_m$ la fonction définie, pour $x > 0$, par la formule

$$\varphi_m(x) = x^2 + m\ln x.$$

Déduire des variations de $\varphi_m$ que cette fonction s'annule pour une et une seule valeur, $\alpha_m$, qui est comprise entre $0$ et $1$. (On ne cherchera pas à calculer $\alpha_m$.)

**2.** Soit $f_m$ la fonction définie, pour $x \geqslant 0$, par la formule

$$f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}(1 + \ln x).$$

Étudier les variations de $f_m$.

Montrer que les courbes $(C_m)$ représentatives des $f_m$ dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont l'une, (D), n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Préciser (D) $\cap$ $(C_m)$ et la position de $(C_m)$ par rapport à (D).

Construire $(C_1)$. (On montrera, à cet occasion, que $\frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha_1 < 1$.)

**3.** Montrer que $(C_m)$ est transformée de $(C_1)$ par une transformation géométrique très simple, à préciser, $A_m$.

Discuter le nombre de courbes $(C_m)$ passant par un point $P$, du plan, selon la position de $P$ dans le plan.

# II. Amiens, série C & E

**Ex. 424.**

./1970/amiensCE/exo-1/texte.tex

Un nombre complexe étant désigné par $z$, on note $\overline{z}$ son conjugué et $|z|$ son module.
Quel est l'ensemble des points du plan dont l'affixe, $z$, satisfait à la relation

$$z + \overline{z} = |z|.$$

Représenter cet ensemble.

**Ex. 425.**

./1970/amiensCE/exo-2/texte.tex

Étude de la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{|x-1|}.$$

Construire la représentation graphique dans un repère orthonormé.

## PROBLÈME 97

./1970/amiensCE/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. On désigne par $(\Delta)$ la droite d'équation $y = x$, par $S_\Delta$ et $S_y$ les symétries, respectivement par rapport à $(\Delta)$ et à $y'Oy$.
Un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ sera noté $M(x\ ;\ y)$.
Le nombre $h$ étant un réel donné, on considère la transformation $T_h$ qui, à chaque point $M(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = hx, \\ y_1 = x + hy. \end{cases}$$

**1.** a) La transformation $T_h$ a-t-elle des points doubles ?

b) Montrer que la transformation $T_0$, correspondant à la valeur $h = 0$, est le produit, dans cet ordre, de la symétrie d'axe $(\Delta)$ et d'une transformation simple, que l'on précisera.

c) On se donne deux réels, $h$ et $h'$. Écrire les formules définissant la transformation $T_{h'} \circ T_h$. Reconnaître cette transformation dans le cas où $h' = -h$.



Retour page 1

d) On considère le produit, dans cet ordre, des quatre transformations $S_\Delta$, $T_h$, $S_y$ et $T_h$ ; soit $U$ ce produit,

$$U = T_h \circ S_y \circ T_h S_\Delta.$$

Le point $M(x\ ;\ y)$ est transformé par $U$ en $P$

$$[P = U(M)],$$

de coordonnées $(X\ ;\ Y)$.
Montrer que

$$\begin{cases} X = -h^2 y, \\ Y = h^2 x. \end{cases} \tag{1}$$

On pose $Z = X + \mathrm{i}Y$ et $z = x + \mathrm{i}y$. Exprimer $Z$ en fonction de $z$ et reconnaître la transformation $U$.

**2.** On examine, dans cette partie, la transformation $T_1$

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = x + y. \end{cases}$$

a) Le point $H$ désignant la projection orthogonale de $M$ sur l'axe $y'Oy$, préciser les directions des droites $MM_1$ et $HM_1$ lorsque $M$ et $M_1$ sont distincts. En déduire la construction de $M_1 = T(M)$ en connaissant $M$.

b) Soit $(H)$ l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 9$.
Soit $(H_1)$ la courbe transformée de l'hyperbole $(H)$ par la transformation $T_1$ ;
Quelle relation les coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point $M$ du plan doivent-elles vérifier pour que $M$ appartienne à $(H_1)$ ?
Cette relation caractérise-t-elle les points de $(H_1)$ ?
Construire $(H)$ et $(H_1)$ dans le même repère $x'Ox$, $y'Oy$.

c) Rechercher tous les points de $(H)$ dont les coordonnées sont toutes deux des entiers relatifs. En déduire tous les points à coordonnées entières de $(H_1)$.

**3.** On reprend la transformation $T_h$ définie par les formules (1).
Partant d'un point donné $M_0(x_0\ ;\ y_0)$, on désigne par $M_1(x_1\ ;\ y_1)$, $M_2(x_2\ ;\ y_2), \dots, M_n(x_n\ ;\ y_n)$ les transformations par $T_h$ de $M_0$, $M_1$, $\dots$, $M_{n-1}$ :

$$M_1 = T_h(M_0),\ M_2 = T_h(M_1),\ \dots,\ M_n = T_h(M_{n-1}).$$

a) Calculer $x_n$ et $y_n$ en fonction de $h$, $x_0$, $y_0$. Montrer que, dans le cas où $x_0$ et $h$ sont tous deux strictement positifs et $h$ différent de 1, on peut écrire

$$y_n = \alpha x_n \log x_n + \beta x_n,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes, que l'on exprimera en fonction de $x_0$, $y_0$ et $h$.

b) $x_0$ étant strictement positif et $h$ strictement positif et différent de 1, comment faut-il choisir $h$ pour que $x_n$ tende vers une limite finie quand $n$ tend vers l'infini ? Quelle est cette limite ?
Montrer qu'alors $y_n$ tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini.

## III. Besançon, série C & E

Ex. 426. ./1970/besanconC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe, $z$, de module 1, d'argument $\alpha$ dont une détermination $\alpha_0$ est telle que $-\pi \leqslant \alpha_0 < \pi$.

a) Calculer, en fonction de $\alpha$, le module et l'argument du nombre complexe

$$Z = 1 + z + z^2.$$

b) On considère un deuxième nombre complexe, $z'$ de module 1, d'argument $\beta$. Dans le cas où il est défini, montrer que le nombre complexe $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel.

Retour page 1

**Ex. 427.** ./1970/besanconC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$, de la variable réelle $x$, définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

**1.** Étudier son domaine de définition. Montrer qu'elle est périodique de période $\pi$ et étudier ses variations dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$.
Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**2.** Calculer les primitives de $f$.
On mettra d'abord $f$ sous la forme

$$f(x) = A + B\left(\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\right),$$

où $A$ et $B$ sont des constantes à préciser.
On rappelle ensuite qu'une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\log|u|$ où le symbole $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.
En déduire la valeur de l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ parallèles à l'axe des ordonnées.

## IV. Bordeaux, série C

**Ex. 428.** ./1970/bordeauxC/exo-1/texte.tex

$\mathbb{N}$ désignant un entier naturel non nul, on considère les entiers de la forme $N^4 + 4$.

**1.** Décomposer, dans le corps des réels, le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré.
En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$.

**2.** Montrer que, si $N$ n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

**Ex. 429.** ./1970/bordeauxC/exo-2/texte.tex

On considère quatre points distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ alignés sur une droite $(\Delta)$ et un point $M$ extérieur à $(\Delta)$ tel que

$$(MA, MB) = (MC, MD) \pmod{\pi}.$$

Montrer que les cercles $MAB$ et $MCD$ se correspondent dans une translation de vecteur parallèle à $(\Delta)$ ou dans une homothétie dont le centre est situé sur $(\Delta)$

### Problème 98

./1970/bordeauxC/pb/texte

On suppose qu'il existe une fonction continue unique $f$ définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N}, \\ f(x+y) + x + y = [f(x) + x]\,[f(y) + y] \end{cases} \tag{1}$$

et

$$f(1) = \mathrm{e} - 1 \quad (\mathrm{e} : \text{base des logarithmes népériens}). \tag{2}$$

**1.** En posant $x = y = \frac{t}{2}$, vérifier que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \\ f(t) + t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

et montrer que, s'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0)+x_0=0,$$

alors

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\\ f(x)+x\geqslant 0.\end{cases}\tag{4}$$

En déduire, par la considération de (2), que $f(x)+x$ n'est jamais nul et établir que $f(0)=1$.

**2.** Montrer que

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\\ f(nx)=[f(x)+x]^n-nx.\end{cases}\tag{5}$$

Posant $y=-x$ dans (1), calculer $f(-x)-x$ et établir que (5) reste vérifiée $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$.

**3.** Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier $q$, l'expression

$$f\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}.$$

Montrer, en utilisant (5), que l'on a

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{Q}(\mathbb{Q}\ :\ \text{ensemble des rationnels})\\ f(x)=\mathrm{e}^x-x.\end{cases}\tag{6}$$

**4.** On admet, dans la suite, que la fonction $f$ ainsi déterminée sur les rationnels est encore définie par $f(x)=\mathrm{e}^x-x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ (on vérifiera que (1) a lieu).

a) Trouver, lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et lorsque $x$ tend vers $-\infty$, les limites de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-1$. En déduire, dans les mêmes conditions, les limites de f(x). Étudier et représenter graphiquement les variations de $f$, en soignant particulièrement l'étude des branches infinies.
Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative au point $x=1$ ?

b) Évaluer l'aire, $A(X)$, de la portion de plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droites d'équations $=0$ et $x=X\ (X<0)$. Que peut-on dire de $A(X)$ lorsque x tend vers $-\infty$ ?

**5.** a) Montrer que l'on a

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\\ 1+x\leqslant \mathrm{e}^x\end{cases}\tag{7}$$

b) On pose

$$P_n(a)=(1+a)(1+a^2)\dots(1+an),\ \text{pour}\ a>0.$$

Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de $n$ satisfaisant

$$0<P_n(a)<\mathrm{e}^{a\frac{1-a^n}{1-a}}\quad (n\geqslant 0).\tag{8}$$

Montrer enfin que, pour $0<a<1$, il existe des nombres $M$ dépendant de $a$ vérifiant

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\\ P_n(a)>M..\end{cases}\tag{9}$$

Préciser, en fonction de $a$, une valeur possible de $M$.

N.B.- les questions 4 et 5a sont indépendantes des questions précédentes.

Retour page 1

## V. Bordeaux, série E

**Ex. 430.** ./1970/bordeauxE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 3\sin x, \tag{1}$$

où $y$ est la fonction inconnue.
On pose $y = u + \alpha \sin x$, où $u$ est une nouvelle fonction inconnue et $\alpha$ une constante réelle.

a) Pour quelle valeur de $\alpha$ la fonction $u$ vérifie-t-elle l'équation différentielle

$$u'' + 4u = 0, \tag{2}$$

lorsque $y$ vérifie (1) ?

b) Quelle est la solution générale de (2) ? En déduire toutes les solutions de (1).

c) Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution de (1) vérifiant les conditions

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad y'(\pi) = 0.$$

Déterminer cette solution.

**Ex. 431.** ./1970/bordeauxE/exo-2/texte.tex

Dans un repère orthonormé, les droites (D) et (D') admettent les représentations paramétriques suivantes :

$$(D) \quad x = 1+\lambda, \quad y = 1-\lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}\ ;$$
$$(D') \quad x = 2\mu, \quad y = 1, \quad z = -2\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminer $A \in$(D) et $B \in (D')$ tels que la distance $AB$ soit minimale.

**Problème 99** ./1970/bordeauxE/pb/texte

Sujet identique à celui de la série C Problème C 1970

## VI. Bordeaux remplacement, séries C & E

**Ex. 432.** ./1970/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

1. Étudier les variations de la fonction $f$ définie, sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x + \frac{1}{x}^2 - \frac{1}{x}.$$

2. Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les axes étant $x'Ox$ et $y'Oy$, la courbe d'équation $y = f(x)$.
3. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe précédente et les droites d'équations respectives $y = x,\ x = \mathrm{e}$ et $x = 1$.

**Ex. 433.** ./1970/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Montrer que, pour $n \geqslant 1$, le nombre

$$A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$$

est divisible par 17.
(On pourra, soit raisonner par récurrence, soit utiliser les congruences modulo 17.)

## Problème 100

./1970/bordeauxCrem/pb/texte

Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on appelle $T$ la transformation ponctuelle qui à un point $m$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M$ d'affixe $Z$ telle que

$$Z=\frac{z^2+1}{z}.$$

On écrira $M=T(m)$.
On désigne par (P*) le plan privé du point O. Soit $(e)$ un sous-ensemble de (P*) ; on appelle $E=T(e)$ l'ensemble des points $M$ transformés par $T$ des points $m$ de $(e)$.

A- 1. Montrer que $T$ est une application de (P*) dans (P). Montrer que tout point $M$ de (P) est le transformé par $T$ de deux points $m_1$ et $m_2$ de (P*), à l'exception d'un point $A$ qui n'est le transformé que d'un point $a$ et d'un point $B$ qui n'est le transformé que d'un point $b$.

2. $z_1$ et $z_2$ étant les affixes des points $m_1$ et $m_2$ ayant le même transformé $M$ d'affixe $Z$ donnée, établir la relation

$$z_1.z_2=1\ ;$$

en déduire la construction de $m_2$ connaissant $m_1$. Montrer que $z_1+z_2=Z$ et construire alors $M=T(m)$ connaissant $m$.

3. Le sous-ensemble $(e)$ étant donné, il existe donc un deuxième sous-ensemble$(e')$ de (P) tel que

$$E=T(e)=T(e').$$

Montrer que $(e')$ est le transformé de $(e)$ par le produit commutatif d'une inversion et d'une symétrie droite.

4. Montrer que $T$ n'a pas de point double. Montrer que les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $M$ sont liées aux coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $m$ par les relations

$$X=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\qquad\text{et}\qquad Y=y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

B- 1. a) Déterminer $(e_1)$ tel que $T(e_1)$ soit la droite $x'x$.

b) Déterminer $(e_2)$ tel que $T(e_2)$ soit la droite $y'y$.

c) Déterminer $(e_3)$ tel que, quel que soit $m$ de $(e_3)$, les trois points $O$, $m$ et $M=T(m)$ soient alignés.

2. Soit $(e_4)$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$.

a) Montrer que $(E_4)=T(e_4)$ est un segment de droite si $R=1$ , une ellipse si $R\neq 1$.

b) Déterminer $(e'_4)$ tel que $(E_4)=T(e_4)=T(e'_4)$.

- Les questions B1 et B2 sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

# VII. Caen, série C

Ex. 434.

./1970/caenC/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation

$$(1+\mathrm{i})z^2-2\mathrm{i}(1+a)z+(\mathrm{i}-1)(a^2+1)=0,$$

où $z$ est l'inconnue complexe et $a$ un paramètre complexe.
Constater que les racines$z_1$ et $z_2$, sont deux monômes du premier degré en $a$.
En déduire une relation indépendante de $a$ liant $z_1$ et $z_2$.
Soient $M_1$ et $M_2$ les images de $z_1$ et $z_2$. Montrer que $M_2$ est l'image de $M_1$ dans une rotation, dont on précisera le centre et l'angle.



Retour page 1

## VIII. Cameroun, série C

Ex. 435. ./1970/camerounC/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs, on définit les deux lois de composition interne suivantes, notées $\star$ et $T$ :

$$(a,\ b)\star(a',\ b') = (a+a',\ b+b')$$
$$(a,\ b)T(a',\ b') = (aa',\ ab'+ba').$$

Donner les propriétés de ces deux lois ; montrer que la seconde est distributive par rapport à la première. Quelle est la structure de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ muni de ces deux lois ?

Ex. 436. ./1970/camerounC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

**1.** Étudier $f$ et tracer la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** Déterminer la primitive de $f$ qui s'annule pour $x=0$.
Calculer l'aire de la région limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x2$.

### Problème 101 ./1970/camerounC/pb/texte

On considère le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et les deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de module 1, tels que

$$(\vec{i},\ \vec{u}_1) \equiv -\frac{\alpha}{2}\ [\text{mod } 2\pi]$$
$$\text{et}\ \ (\vec{i},\ \vec{u}_2) \equiv +\frac{\alpha}{2}\ [\text{mod } 2\pi].$$

On considère les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sécantes en $O$, dont $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont respectivement les vecteurs directeurs.

**1.** Soit $M$ le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   a) Écrire l'équation paramétrique de la perpendiculaire menée de $M$ à $(D_1)$, en déterminant un vecteur directeur de cette perpendiculaire.
   Utiliser cette équation pour déterminer les coordonnées de $M_1$, point symétrique de $M$ par rapport à $(D_1)$ ; on écrira que le milieu de $MM_1$ appartient à $(D_1)$.
   b) Déterminer de même les coordonnées de $M_2$, point symétrique de $M$ par rapport à $(D_2)$.

**2.** a) Déterminer, en utilisant la question (1), l'ensemble des points $M$ tels que $M_1M_2 = \ell$, $\ell$ étant une longueur donnée.
   b) Donner une solution géométrique de cette question.

**3.** Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que la droite $(M_1M_2)$ passe par un point donné, $A$, de coordonnées $(a\ ;\ b)$. Discuter.
Vérifier que l'ensemble obtenu contient les symétriques $A_1$ et $A_2$, de $A$, respectivement par rapport à $(D_1)$ et $(D_2)$.

## IX. Cameroun, série E

Ex. 437. ./1970/camerounE/exo-1/texte.tex

Étudier les fonctions

$$f_1 : x \longmapsto f_1(x) = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{21x+2x})$$
$$\text{et}\qquad f_2 : x \longmapsto f_2(x) = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{21x+2x}).$$

Tracer leurs courbes représentatives $(C_1)$ et $(C_2)$, dans un même repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Montrer que les deux courbes sont symétriques par rapport à une droite, que l'on déterminera. Que peut-on dire de la réunion de $(C_1)$ et de $(C_2)$ ?



Retour page 1

**Ex. 438.** ./1970/camerounE/exo-2/texte.tex

On considère le polynôme en $x$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

dont les coefficients sont des nombres réels ou complexes, $a_n$ étant différent de zéro.
On appelle $M$ le plus grand des nombres

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \quad \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \quad \ldots, \left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \quad \left|\frac{a_0}{a_n}\right|.$$

**1.** Soit $x$ un nombre non nul. Démontrer que la relation $|x| \geqslant 1+M$ entraîne

$$\left|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|.\frac{1}{x} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|.\frac{1}{x^2} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|.\frac{1}{x^{n-1}} + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|.\frac{1}{x^n}\right| < 1.$$

En déduire que toute racine $x$ de ce polynôme vérifie la relation $|x| \geqslant 1+M$.

**2.** Quels sont les ensembles de définition des fonctions

$$x \xmapsto{f} \frac{\log(x^2-9)}{x^5+x^4+x^2+1}$$

$$\text{et} \qquad x \xmapsto{g} \sqrt{x^7 - 2x^5 - x + 1}.\log(x-5) \qquad ?$$

# X. Clermont, série C

**Ex. 439.** ./1970/clermontC/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels tels que $m + 11\Delta = 203$, $m$ étant le PPCM et $\Delta$ le PGCD de $a$ et $b$.

# XI. Dijon, série C

**Ex. 440.** ./1970/dijonC/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$, définie par

$$y = f(x) = x\sqrt{3-x}.$$

Déterminer son sens de variation et construire la courbe représentative, $(C)$, dans le repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

**2.** Vérifier que la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$$

est une primitive de la fonction $f$.
Calculer l'aire de la surface limitée par l'axe $x'Ox$, le courbes $(C)$ et les droites d'équations respectives

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 3.$$

**3.**

**Ex. 441.** ./1970/dijonC/exo-2/texte.tex

On considère la fraction $\dfrac{n+9}{n-6}$, où $n$ est un entier supérieur à 6.

**1.** Trouver les valeurs de $n$ pour lesquelles la fraction est équivalente à un entier.

**2.** Trouver les valeurs de $n$ pour lesquelles la fraction est réductible.



Retour page 1

# XII. Grenoble, série C & E

Ex. 442. ./1970/grenobleCE/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer toutes les racines du polynôme

$$2x^3+x^2-3,$$

en remarquant qu'il s'annule pour $x=1$.

**2.** Étudier la fonction $f$ définie par

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+3}{x}$$

et en construire la courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.

**3.** Préciser la position de $(C)$ par rapport à la parabole $(P)$ d'équation

$$y=x^2+x.$$

**4.** Calculer en fonction de $a$ l'aire de la région limitée par la courbe $(C)$, la parabole $(P)$, la droite $x=1$ et la droite $x=a$ $(a>1)$.

**5.** Déterminer $a$, à $0{,}01$ près, pour que cette aire soit égale à 1.

Ex. 443. ./1970/grenobleCE/exo-2/texte.tex

On considère, dans le corps des nombres complexes, l'équation

$$x^2+4x\cos u+2+4\cos 2u=0$$

où $u$ désigne un paramètre réel compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

**1.** Pour quelles valeurs de $u$ les deux racines de cette équation sont-elles réelles ?

**2.** Déterminer le module et l'argument de chaque racine dans le cas où $u=\frac{\pi}{6}$.

## Problème 102 ./1970/grenobleCE/pb/texte

N.B. – les parties A, B, C sont indépendantes.

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.
Soit $T$ l'application qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ non toutes deux nulles, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ définies par

$$X=\frac{k^2x}{x^2+y^2}\qquad\text{et}\qquad Y=\frac{k^2y}{x^2+y^2},$$

$k$ étant un nombre réel donné, *strictement positif*.

1° L'application $T$ a-t-elle des points doubles ? Montrer que l'application $T$ du plan privé du point $O$ dans lui-même est bijective et involutive.

2° Montrer que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$. En déduire la nature de l'application $T$.

B) On considère le point $A$ de coordonnées $(a\ ;\ 0)$, $a>0$, la droite $(D)$ d'équation $x=2a$, le cercle $(C)$ de centre $A$, passant par $O$ et la droite $(L)$ passant par $O$ et telle que

$$(Ox,\ L)=u,\qquad 0\leqslant u<\pi,\qquad u\neq\frac{\pi}{2}.$$

1° $(L)$ coupe la droite $(D)$ en $Q$ et recoupe le cercle $(C)$ en $P$. Écrire l'équation de $(C)$ et calculer les coordonnées des points $P$ et $Q$.

2° Soit $N$ le point tel que $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{PQ}$. Calculer les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $N$. Trouver une relation indépendante de $u$ entre $x_1$ et $y_1$.



Retour page 1

C) 1° Étudier la fonction $f$ définie par

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Tracer, en repère orthonormé sa courbe représentative, $(G)$. Préciser la tangente en $O$ à $(G)$.

2° En déduire la courbe $(G')$ ayant pour équation

$$y=-x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

et l'ensemble $(G'')$ des points dont les coordonnées vérifient la relation

$$x(x^2+y^2)=2ay^2.$$

3° Appliquer à $(G'')$ la transformation $T$. Montrer que l'on obtient ainsi une parabole privée de $O$. Déterminer $k$ pour que la foyer de cette parabole soit $A$.

## XIII. Lille, série C

Ex. 444. ./1970/lilleC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$(1-\mathrm{i})x^2-2x-(11+3\mathrm{i})=0.$$

Ex. 445. ./1970/lilleC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction

$$x\longmapsto\frac{1+\ln x}{x},$$

où la notation $\ln x$ désigne le logarithme népérien de $x$.
Étudier ses variations et construire avec précision sa représentation graphique $(C)$ (le repère d'axe $x'Ox$, $y'Oy$ sera choisi orthonormé, l'unité mesurant 4 cm). On déterminera en particulier les points suivants :

- $M_1$, d'abscisse $x_1$, intersection de $C$ et de l'axe $x'x$,
- $M_2$, d'abscisse $x_2$, point en lequel la tangente passe par l'origine,
- $M_3$, d'abscisse $x_3$, point en lequel la tangente est parallèle à l'axe $x'x$,
- $M_4$, d'abscisse $x_4$, point en lequel la dérivée seconde s'annule.

Vérifier que les quatre nombres $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x_4$ constituent une progression géométrique.

### Problème 103 ./1970/lilleC/pb/texte

On considère un triangle MAB, et H désigne le pied sur AB de la hauteur issue de M, on appelle P et Q les pieds des perpendiculaires menées de H sur les droites MA et MB.

A) 1. Montrer que les quatre points A, B, P et Q sont sur un même cercle, $(C)$, et que le point $M$ a la même puissance par rapport au cercle $(C)$ et au cercle de centre $O$ milieu de AB passant par H.
Déterminer l'axe radical de ces deux cercles.

2. La lettre $C$ désignant le centre du cercle $(C)$, établir la relation

$$\overline{\mathrm{HA}}.\overline{\mathrm{HB}}=2\overline{\mathrm{OC}}.\overline{\mathrm{HM}}. \qquad (1)$$

B) La figure précédente est étudiée dans un repère orthonormé associé aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ contenant les points A et B, dont les coordonnées sont ainsi $\mathrm{A}(0\ ;\ a)$ et $\mathrm{B}(0\ ;\ -a)$, $a$ désignant un nombre positif donné.
On désigne par $(x_0\ ;\ y_0)$ les coordonnées de M ($x_0\neq 0$).

1. En utilisant la relation (1), écrire l'équation du cercle $(C)$, puis l'équation de cercle de diamètre HM ; en déduire que l'équation de la droite PQ est :

$$(x_0^2-y_0^2+a^2)x+2x_0y_0y-x_0(y_0^2+a^2)=0.$$

(On pourra utiliser le fait que PQ est axe radical de ces deux cercles.)

2. En déduire l'ensemble des points M pour lesquels la droite PQ est parallèle à l'axe $x'x$.
3. On donne $\mathrm{K}\left(\frac{a}{2}\ ;\ 0\right)$ et l'on impose à la droite PQ de passer par ce point K.

   a) Écrire l'équation de la courbe $(E)$, ensemble des points M correspondants.

   b) Étudier les variations et le représentations graphique de la fonction $f$

   $$x \overset{f}{\mapsto} y = f(x) = \sqrt{a}\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}}.$$

   c) En déduire la construction de la courbe $(E)$.

   d) On se propose de calculer l'intégrale

   $$\int_l^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

   où $l$ est un nombre donné tel que $-\frac{a}{2} < l < a$.

   On montrera pour cela qu'il existe deux nombres réels constants, $\alpha$ et $\beta$, tels que

   $$\frac{x-a}{\sqrt{2x+a}} = \alpha\sqrt{2x+a} + \frac{\beta}{\sqrt{2x+a}}.$$

   En déduire que l'aire du domaine compris entre la courbe $(E)$, l'asymptote de cette courbe et son point double $(x = a)$ a une valeur finie, que l'on calculera.

## XIV. Lille série E

Ex. 446. ./1970/lilleE/exo-1/texte.tex

Mêmes sujets que pour la série C.

Une modification est toutefois à faire dans le texte dans la question A2, qu'il faut remplacer par le texte suivant :

2. On appelle A' l'intersection de HP et de la perpendiculaire en B à AB et B' l'intersection de HQ et de la perpendiculaire en A à AB. Quelle est la nature du quadrilatère ABA'B' ?

   On appelle $h$ l'intersection des droites HM et A'B'.

   En évaluant la puissance de H par rapport au cercle de diamètre MA' montrer que l'on a

   $$\overline{\mathrm{HP}}.\overline{\mathrm{HA'}} = 2\overline{\mathrm{Hh}}.\overline{\mathrm{HM}}.$$

   En déduire que l'on a

   $$\overline{\mathrm{HA}}.\overline{\mathrm{HB}} = 2\overline{\mathrm{OC}}.\overline{\mathrm{HM}}. \qquad (1)$$

## XV. Limoges, série E

Ex. 447. ./1970/limogesE/exo-2/texte.tex

Démontrer que, quel que soit l'entier naturel $n$, le nombre

$$N = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

est divisible par 7.

On pourra utiliser, soit la théorie des congruences, soit un raisonnement par récurrence.

## XVI. Limoges, série C remplacement

**Ex. 448.** ./1970/limogesCrem/exo-1/texte.tex

Démontrer que, quel que soit l'entier $n$, le nombre entier $N = n^2(n^4-1)$ est divisible par 60.

## XVII. Montpellier, série C

**Ex. 449.** ./1970/montpellierC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer le module et l'argument de

$$u = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

**2.** Soit $T$ la transformation ponctuelle plane qui associe au point $m$ (image de $z$) le point $M$ (image de $Z$), avec

$$Z = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})z + \sqrt{3}.$$

a) Déterminer le point double, $A$, de $T$.

b) Montrer que $T$ est une similitude plane directe, que l'on précisera (centre, rapport et angle).

**Ex. 450.** ./1970/montpellierC/exo-2/texte.tex

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division par 7 des nombres suivants : $5^6$, $5^{6p}$ ($p$ est un entier positif) et $33^{38}$.

### Problème 104

./1970/montpellierC/pb/texte

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on donne deux points fixes $A(a\ ;\ a)$ et $B(a\ ;\ -a)$, $a$ étant une longueur donnée.

Sur $Oy$ varient deux points $P(y=u)$ et $P'(y=v)$ de façon que

$$uv = 2a^2. \tag{1}$$

**1.** Montrer que (1) définit une application bijective $f$

$$P \xrightarrow{f} P'$$

de $y'Oy$ (privé de $O$) sur lui-même et que $P$ et $P'$ restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes $K$ et $K'$, que l'on précisera.

**2.** Donner les équations des droites $AP'$ et $BP$. Ces droites se coupent en $M$ ; donner l'équation cartésienne de l'ensemble $(H)$ des points $M$ obtenus quand $P$ et $P'$ varient.

On trouvera

$$y^2 - 3x^2 + 4ax - 2a^2 = 0. \tag{H}$$

**3.** Trouver l'équation réduite de la courbe (H). Préciser ses éléments : centre, axe, asymptotes et sommets. Construire (H).

**4.** On considère l'inversion, $I$, de pôle $O$, et de puissance $p = 2a^2$.

Donner une construction géométrique des figures inverses des droites $BP$ et $AP'$. En déduire que l'ensemble des points $N$, intersection des cercles $OBP'$ et $OAP$, est la courbe $(C)$ inverse de (H) dans l'inversion $I(O,\ 2a^2)$.

Les droites $AP$ et $BP'$ se coupent en général en un point, $S$. Quel est l'ensemble des points $S$ ?

Montrer que la droite $MS$ passe par un point fixe, $\omega$, que l'on précisera, et trouver le lieu du conjugué harmonique de $\omega$ par rapport aux points $M$ et $S$.

Retour page 1

# XVIII. Nantes, série C

**Ex. 451.** ./1970/nantesC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, l'équation

$$x^2 - 3x + 4 \equiv 0 \pmod 7,$$

où $x$ est l'inconnue.

# XIX. Niamey, série C & E

**Ex. 452.** ./1970/niameyCE/exo-1/texte.tex

on considère l'ensemble $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ des $n$ premiers entiers strictement positifs.

**1.** Montrer brièvement que l'ensemble $S_n$ des bijections de $I$ sur $I$, muni de la loi de composition $\circ$ des applications, est un groupe.

**2.** On dit qu'un élément $s$ de $S_n$ est une transposition s'il existe deux éléments distincts, $i$ et $j$, de $I$ tels que :

$$s(i) = j, \qquad s(j) = i, \qquad \forall k \in I - \{i, j\}, \qquad s(k) = k.$$

Prouver que si $s$ et $t$ sont deux transpositions, on a nécessairement

$$s \circ t = e \quad \text{ou} \qquad (s \circ t)^2 = e \quad \text{ou} \qquad (s \circ t)^3 = e,$$

$e$ étant l'élément neutre de $S_n$.

**Ex. 453.** ./1970/niameyCE/exo-2/texte.tex

Soit $Z = \dfrac{1 - \mathrm{i}z}{1 + \mathrm{i}z}$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$.

**1.** Déterminer une condition que doivent satisfaire $x$ et $y$ pour que $Z$ soit réel. Quel est alors l'ensemble des points $m$ d'affixe $z$ ?

**2.** Déterminer une condition que doivent satisfaire $x$ et $y$ pour que $Z$ soit imaginaire pur. Quel est alors l'ensemble des points $m$ d'affixe $z$ ?

**3.** Déterminer les complexes $z$ tels que $Z = z$. Placer les points correspondant à ces valeurs dans le plan complexe.

## Problème 105

./1970/niameyCE/pb/texte

A) Soit $f$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1° Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.

2° Déterminer les constantes $a$, $b$ et $c$ telles que

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{(t+1)} + \frac{c}{t} \qquad (t \neq -1 \qquad \text{et} \qquad t \neq 0).$$

3° Pour $0 < x < y$, on pose

$$A(x, y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que

$$A(x, y) = \frac{x - y}{(x+1)(y+1)} + \log \frac{y(x+1)}{x(y+1)}.$$

B) On considère la fonction $g(t) = \dfrac{-1}{t^2(t+1)}$.



Retour page 1

1° Vérifier que

$$g(t) - f(t) = -\frac{2t+1}{(t^2+t)^2}.$$

Déterminer une primitive de $g - f$.

2° En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \quad 0 < x < y.$$

3° En considérant $x$ fixe, positif, déterminer, lorsque $y \to +\infty$, les limites de $A(x,\ y)$ et $B(x,\ y)$ nommées respectivement $\Phi(x)$ et $\Gamma(x)$.

C) En appliquant le formule des accroissements finis à la fonction « Logarithme népérien de »,

1° Montrer que $\Gamma(x) < 0 < \Phi(x)$, $x$ étant positif.

2° En déduire que, pour $x > 0$, on a

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1} \quad ;$$

3° $n$ étant un entier naturel non nul, établir

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

## XX. Orléans, série C

**Ex. 454.** ./1970/orleansC/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans le corps des réels, l'équation

$$(x^2-1)\mathrm{e}^{\log(x-2)} = \log \mathrm{e}^{x+1},$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien.

**Ex. 455.** ./1970/orleansC/exo-2/texte.tex

Déterminer $n$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que la fraction

$$\frac{n^2+3}{n+2}$$

soit réductible.
Déterminer $n$ tel que cette fraction soit égale à un entier naturel.

### Problème 106

./1970/orleansC/pb/texte

**1.** Démontrer que le polynôme

$$Z^2 + 2(2+\mathrm{i})Z + 3 + 4\mathrm{i}$$

où $Z$ est un nombre complexe, est le carré d'un polynôme du premier degré.

**2.** On considère, sur le corps des complexes, l'équation en $U$

$$U^2 - 2(Z+4)U + 2Z^2 + 2(6+\mathrm{i})Z + 19 + 4\mathrm{i} = 0, \tag{E}$$

où $Z$ est un paramètre appartenant lui-même à l'ensemble des nombres complexes.

a) Déterminer $Z$ pour que cette équation ait une racine double.

b) Déterminer les deux solutions de l'équation (**??**) dans le cas général, on pourra appeler $U'$ et $U''$ ces deux solutions.

c) Déterminer l'ensemble des $Z$ tels que $Z$ soit lui-même une des solutions de l'équation (**??**) .



Retour page 1

**3.** Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, à tout point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ dont il est l'image.
Soit $Z$ et $U$ deux nombres complexes, $M$ l'image de $Z$ et $P$ l'image de $U$.
On dira que $M$ et $P$ vérifient la relation $\mathscr{R}$ et l'on écrira $M\mathscr{R}P$ si, et seulement si, $U$ est une racine de l'équation (**??**) correspondant à la valeur $Z$ du paramètre.
Démontrer que

$$M\mathscr{R}P \iff \begin{cases} P = \mathscr{S}'(M) \\ \text{ou} \\ P = \mathscr{S}''(M), \end{cases}$$

$\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$ étant des transformations planes, respectivement définies par

$$U' = Z(1+\mathrm{i}) + 3 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad U'' = Z(1-\mathrm{i}) + 5 - 2\mathrm{i},$$

que l'on caractérisera géométriquement, soit directement en s'aidant du 2.

**4.** a) Pour un point $M$ donné, on pose $P' = \mathscr{S}'(M)$ et $P'' = \mathscr{S}''(M)$.
Quelle est la transformation ponctuelle fixe $\mathscr{S}$ permettant de passer de $P'$ à $P''$ ? Caractériser $\mathscr{S}$ géométriquement.

b) Soit $I$ le milieu de $P'P''$. On pose $I = \mathscr{T}(M)$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une translation.
En déduire une construction simple de l'ensemble

$$\{P \mid M\mathscr{R}P\}, \text{ le point } M \text{ étant donné,}$$

puis de l'ensemble

$$\{M \mid M\mathscr{R}P\}, \text{ le point } M \text{ étant donné.}$$

c) Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $M$, $P'$ et $P''$ soient alignés. Quel est alors l'ensemble des points $P'$ et l'ensemble des points $P''$ ?

## XXI. Orléans, série E

**Ex. 456.** ./1970/orleansE/exo-1/texte.tex

Voir l'exercice Exercice 1 C 1970

**Ex. 457.** ./1970/orleansE/exo-2/texte.tex

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, on considère les plans $(\Pi)$ et $(\Pi')$ d'équations respectives

$$x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y - 2z + 5 = 0.$$

**1.** Donner une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$, intersection de ces deux plans.

**2.** Donner une représentation paramétrique du plan $(P)$ contenant $(\Delta)$ et perpendiculaire au plan $(Q)$ d'équation $x - y + z = 0$ ; en déduire l'équation cartésienne de $(P)$.

### Problème 107

./1970/orleansE/pb/texte

Voir le problème Problème orléans C 1970

## XXII. Paris, série C

**Ex. 458.** ./1970/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, on appelle image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ le point $M$ dont les coordonnées sont $(x\ ;\ y)$ ; le nombre $z$ est dit affixe de $M$.
On considère les deux points $A$ et $B$, d'affixes respectives $1 - \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
Calculer les affixes des points $C$ pour lesquels le triangle $ABC$ est

a) rectangle isocèle, l'angle droit étant en $B$ (deux cas possibles) ;

b) rectangle isocèle, l'angle droit étant en $C$ (deux cas possibles).

**Ex. 459.** ./1970/parisC/exo-2/texte.tex

On considère E= $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ; ses éléments sont les couples $(a,\ b)$, où $a$ et $b$ sont des *entiers relatifs*. On munit l'ensemble E de la loi, notée $\star$, définie par

$$(a,\ b)\star(a',\ b')=(aa',\ ab'+a'b).$$

1. La loi $\star$ est-elle commutative ; associative ? Montrer qu'il existe un élément neutre et le calculer.
2. Á un élément fixé $(a,\ b)$ de E, on associe l'application $f: E\to E$ définie par

$$(x,\ y)\longmapsto(a,\ b)\star(x,\ y).$$

   Montrer que, si $a\neq 0$, l'application $f$ est injective.
   Montrer que, pour que $f$ soit surjective, il faut et il suffit que $a=1$ ou $a=-1$.
3. a) On considère l'équation

$$3x+5y=1.$$

   Déterminer tous les couples $(x,\ y)$ d'*entiers relatifs* qui sont solutions de cette équation [on pourra remarquer que le couple $(+2,-1)$ est une solution].

   b) On considère l'application $f: E\to E$ associée à l'élément $(a,\ b)=(5,\ 3)$ de E. Pour quelles valeurs de l'entier relatif $\alpha$ l'élément $(\alpha,\ 1)$ de E est-il l'image, par $f$, d'un élément de E ?

## Problème 108

./1970/parisC/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0x,\ Oy)$, on considère l'équation

$$x^2+y^2-2\left[\ln(-t)\right]x-2ty+2t=0,$$

où $t$ désigne un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble, A, des valeurs de $t$ pour lesquelles l'équation précédente est celle d'un cercle, noté $(C_t)$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles $(C_t)$, lorsque $t$ parcourt A.
2. Montrer que tout cercle $(C_t)$ de $\mathscr{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, $(\Omega)$, de centre $\omega(0\ ;\ +1)$, dont on déterminera le rayon.
3. On appelle $\gamma_t$ le centre du cercle $(C_t)$. C'est la position à l'instant $t$ d'un mobile $M$ (le paramètre $t$ représente le temps, qui varie en croissant dans A).
   Déterminer et dessiner
   a) la trajectoire du mobile $M$ et le sens de son déplacement ;
   b) le vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ de $M$ à l'instant $t$ ;
   c) l'ensemble des points $\nu$ définis par la relation

$$\overrightarrow{O\nu}=\overrightarrow{MV}\ ;$$

   d) le vecteur accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ de $M$ à l'instant $t$.
   Indiquer si le mouvement de $M$ sur sa trajectoire est accéléré ou retardé.
4. a) Déterminer l'équation de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, des cercles $(C_t)$ et $(C_{t'})$ $(t\neq t')$.
   Démontrer qi'il existe une position limite, $(\Delta_t)$, de cette droite $D_{(t,\ t')}$ lorsque $t'$ tend vers $t$ fixé. Donner l'équation de $(\Delta_t)$.

   b) On a ainsi défini une application $\varphi$ de A dans l'ensemble, $\mathscr{D}$, des droites du plan, qui, à l'élément $t$ de A, fait correspondre la droite $\varphi(t)=\Delta_t$.
   L'application $\varphi$ est-elle injective ? Préciser l'ensemble des images par $\varphi$ des éléments $t$ de A.
5. *Solution géométrique de la question* (4) - Á l'aide des propriétés géométriques de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, démontrer à nouveau l'existence de la position limite $(\Delta_t)$ lorsque $t'$ tend vers $t$ fixé. Caractériser géométriquement la droite $(\Delta_t)$. En déduire les propriétés de l'application $\varphi$ démontrées dans la question (4).

Retour page 1

# XXIII. Paris remplacement, série C

**Ex. 460.** ./1970/parisCrem/exo-1/texte.tex

Considérons la fraction $\dfrac{2n-3}{n+1}$, où $n$ est un entier relatif différent de $-1$.
Pour quelles valeurs de $n$ la fraction est-elle équivalente à un entier relatif ?
Pour quelles valeurs de $n$ est-elle irréductible ?

# XXIV. Paris, série E

**Ex. 461.** ./1970/parisE/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $f$ définie par

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) = x - \cos x. \end{cases}$$

a) Montrer que $f$ est strictement croissante. Montrer que l'équation $x - \cos x = 0$ admet une racine, et une seule $x_0$, et que

$$x_0 \in \left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$$

.

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f$ sur l'intervalle $\left]x_0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$, montrer que l'on a

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c),$$

$c$ étant une valeur de l'intervalle $\left]x_0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que $f'(c) > \dfrac{3}{2}$.

En déduire

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}.$$

**Ex. 462.** ./1970/parisE/exo-2/texte.tex

Développer $(a+b)^7$.
En déduire que, si $a$ et $b$ sont des entiers relatifs, le reste de la division euclidienne par 7 de $(a+b)^7$ est égal au reste de la division euclidienne par 7 de $a^7 + b^7$.
Montrer que, pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, le reste de la division par 7 de $n^7$ est égale à $n$ [ on pourra, lorsque $n \neq 0$, écrire $n = 1 + (n-1)$ ].
Déduire de ce qui précède l'équivalence suivante :

$$(a+b) \text{ multiple de } 7 \iff (a^7 + b^7) \text{ est multiple de } 7.$$

Trouver tous les entiers relatifs $x$ vérifiant

$$\begin{cases} -10 \leqslant x \leqslant 10 \\ x^7 + 128 \text{ multiple de } 7. \end{cases}$$

## Problème 109

./1970/parisC/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0x,\ Oy)$, on considère l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\left[\ln(-t)\right]x - 2ty + 2t = 0,$$

où $t$ désigne un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble, A, des valeurs de $t$ pour lesquelles l'équation précédente est celle d'un cercle, noté $(C_t)$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des cercles $(C_t)$, lorsque $t$ parcourt A.
2. Montrer que tout cercle $(C_t)$ de $\mathscr{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, $(\Omega)$, de centre $\omega(0\,;\,+1)$, dont on déterminera le rayon.

3. On appelle $\gamma_t$ le centre du cercle $(C_t)$. C'est la position à l'instant $t$ d'un mobile $M$ (le paramètre $t$ représente le temps, qui varie en croissant dans A).
   Déterminer et dessiner
   a) la trajectoire du mobile $M$ et le sens de son déplacement ;
   b) le vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ de $M$ à l'instant $t$ ;
   c) l'ensemble des points $\nu$ définis par la relation
   $$\overrightarrow{O\nu} = \overrightarrow{MV}\ ;$$
   d) le vecteur accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ de $M$ à l'instant $t$.
   Indiquer si le mouvement de $M$ sur sa trajectoire est accéléré ou retardé.
4. a) Déterminer l'équation de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, des cercles $(C_t)$ et $(C_{t'})$ $(t \neq t')$.
   Démontrer qi'il existe une position limite, $(\Delta_t)$, de cette droite $D_{(t,\ t')}$ lorsque $t'$ tend vers $t$ fixé. Donner l'équation de $(\Delta_t)$.
   b) On a ainsi défini une application $\varphi$ de A dans l'ensemble, $\mathscr{D}$, des droites du plan, qui, à l'élément $t$ de A, fait correspondre la droite $\varphi(t) = \Delta_t$.
   L'application $\varphi$ est-elle injective ? Préciser l'ensemble des images par $\varphi$ des éléments $t$ de A.
5. *Solution géométrique de la question* (4) - Á l'aide des propriétés géométriques de l'axe radical $D_{(t,\ t')}$, démontrer à nouveau l'existence de la position limite $(\Delta_t)$ lorsque $t'$ tend vers $t$ fixé. Caractériser géométriquement la droite $(\Delta_t)$. En déduire les propriétés de l'application $\varphi$ démontrées dans la question (4).

# XXV. Poitiers, série C

**Ex. 463.** ./1970/poitiersC/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

**1.** Calculer le module et l'argument de $z$.

**2.** Montrer que les images, dans le plan complexe de $z$, $-z$, $z^2$ et $\dfrac{2}{z}$ sont situés sur un même cercle.

**Ex. 464.** ./1970/poitiersC/exo-2/texte.tex

Soit le nombre $a = 2n(n^2 + 5)$, où $n$ est un entier au moins égal à $1$.
Montrer que $a$ est divisible par $3$ et par $4$. En déduire qu'il existe au moins un autre entier $k$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $k$ divise $a$. Rappeler le théorème utilisé.

**Problème 110** ./1970/poitiersC/pb/texte

Dans tout le problème, on supposera le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(Ox,\ Oy)$.
Soit la transformation ponctuelle $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ qui, à tout point $m(x,\ y)$ du plan, fait correspondre le point $M(X,\ Y)$ dont les coordonnées sont
$$\begin{cases} X = x + a & \text{et} \\ Y = \lambda Y \end{cases}$$
où $a$ et $\lambda$ sont des réels donnés avec $\lambda \neq 0$.
On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des transformations $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$.

**Partie A.**

**1.** Quelle est, dans le plan $\mathscr{P}$, la transformation $\mathrm{U}_a$=$\mathrm{T}_{(a,\ 1)}$ ? Montrer que l'ensemble $\mathscr{U}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

**2.** Quelle est, dans le plan $\mathscr{P}$, la transformation $\mathrm{V}_\lambda$=$\mathrm{T}_{(0,\ \lambda)}$ ? Montrer que l'ensemble $\mathscr{V}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

**3.** Montrer que la transformation composée $\mathrm{T}_{(a',\ \lambda')} \circ \mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ appartient à $\mathscr{T}$.

**4.** Montrer que $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ peut être considérée comme la composée d'une transformation de $\mathscr{U}$ et d'une transformation de $\mathscr{V}$.

**Partie B.**
Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ telle que

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

**1.** Calculer les dérivées première et seconde de $f$ et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre $n$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f_n$ telle que

$$f_n(x) = (x+n)\mathrm{e}^x,$$

où $n$ est un entier relatif donné. Tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ des fonctions $f_{-1}$, $f_0$ et $f_1$.

**3.** Calculer $\mathrm{I}_0(h) = \displaystyle\int_0^h f_0(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_n(h) = \displaystyle\int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $h$ et établir la relation

$$\mathrm{I}_n(h) = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{I}_0(h). \tag{R}$$

**Partie C.**
Déterminer $a$ et $\lambda$ pour que le minimum de $\mathscr{C}_0$ ait pour transformé par $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ le minimum de $\mathscr{C}_n$ et montrer que $\mathscr{C}_0$ est transformé en $\mathscr{C}_n$.
Quelle relation existe-t-il entre l'aire du domaine du plan défini par les relations

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

où $g$ est une fonction continue, positive donnée, et l'aire du transformé de ce domaine par $\mathrm{T}_{(a,\ \lambda)}$ ?
Retrouver ainsi la relation (R).

## XXVI. Pondichery, série C

**Ex. 465.** ./1970/pondicheryC/exo-1/texte.tex

**1.** On donne deux entiers naturels, $a$ et $b$, premiers entre eux. Trouver un entier naturel $c$, tel que chacun des entiers $a$, $b$ et $c$, divise le produit des deux autres.

**2.** On donne deux entiers naturels, $a$ et $b$, et $d$ leur P.G.C.D. Trouver les entiers naturels, $c$, tel que chacun des entiers $a$, $b$ et $c$, divise le produit des deux autres. *Application numérique :* $a = 15$, $b = 12$.

**Ex. 466.** ./1970/pondicheryC/exo-2/texte.tex

On donne deux nombres réels $a$ et $\alpha$. Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = a\frac{(1+\mathrm{i}\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}.$$

### Problème 111

./1970/pondicheryC/pb/texte

la lettre $a$ désigne un nombre réel donné, strictement positif, la lettre $\lambda$ un paramètre variable appartenant à l'ensemble des nombres réels.
On considère, relativement à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, l'ensemble $\mathscr{F}$ des cercles d'équations

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y + 4a\lambda - 5a^2 = 0.$$

**1.** Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ est un faisceau linéaire de cercles à points de base, $A$ et $B$, dont on précisera les coordonnées.
Que représente la droite $(\Delta)$ d'équation $y = 2a$ pour ce faisceau ?

**2.** Soit $(O)$ le cercle du faisceau $\mathscr{F}$ de centre $O$ ; soit $F$ le centre du cercle de ce faisceau qui est tangent à $Ox$ et que l'on désignera par $(F)$.
Déterminer analytiquement, par son équation cartésienne, l'ensemble $(P)$ des points $\omega$, centres des cercles $(\Omega)$ orthogonaux au cercle $(O)$ et tangents à la droite $(\Delta)$.
$(P)$ est une parabole, dont on déterminera les éléments : foyer, directrice, paramètre.

**3.** Trouver l'équation de la tangente en $\omega$ à $(P)$. Montrer que cette tangente est perpendiculaire à $OS$, où $S$ désigne le point de contact du cercle $(\Omega)$, de centre $\omega$, avec $(\Delta)$. En déduire que $(P)$ est tangente en $A$ et $B$ au cercle $(O)$.

**4.** En utilisant une inversion de centre $S$ et de puissance convenable, montrer que le cercle $(\Omega)$ est tangent au cercle $(F)$, en un point que l'on appellera $T$. Utiliser cette dernière propriété pour retrouver géométriquement les résultats du 3.

**5.** La polaire à $\omega$, relativement au cercle $(O)$, coupe ce cercle en $I'$ et $J'$ et la droite $(\Delta)$ en $K$.
Montrer géométriquement que la tangente en $T$ au cercle $(F)$ et la tangente en $\omega$ à $(P)$ passent par $K$.
Montrer que le cercle de diamètre $KO$ est orthogonal à $(\Omega)$.

**6.** Montrer que les droites $SI'$ et $SJ'$ recoupent le cercle $(O)$ respectivement en $I$ et $J$, diamétralement opposés sur $(O)$.
Quel est l'inverse $\omega'$ du point $\omega$ dans l'inversion de centre $S$ et de puissance $\overline{SA}.\overline{SB}$ ?
Caractériser géométriquement l'ensemble des points $\omega'$ quand $\omega$ décrit $(P)$.

# XXVII. Reims, série C

Ex. 467. ./1970/reimsC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre l'équation
$$\log|x| < 1,$$
où le symbole log désigne le logarithme népérien.

**2.** On considère la fonction $f$ d'une variable réelle définie comme suit
$$\begin{cases} y = f(x) = 2x - x\log|x| & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$
Étudier la continuité de $f$, puis ses variations (pour l'étude en l'origine, on pourra poser $x = \dfrac{1}{X}$, où $X$ tend vers l'infini).

**3.** Dans un repère orthonormé, construire la courbe représentant les variations de $f$. Préciser la symétrie, la tangente au point d'abscisse zéro, les branches infinies.

Ex. 468. ./1970/reimsC/exo-2/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation
$$\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) + 1 = 0.$$

# XXVIII. Strasbourg, série E remplacement

Ex. 469. ./1970/strasbourgErem/exo-2/texte.tex

Démontrer, soit par récurrence sur $n$, soit par la méthode des congruences, que
$$N = n(2n+1)(7n+1)$$
est divisible par 6, quel que soit l'entier $n$, supérieur ou égal à 1.



Retour page 1

# CHAPITRE XIII

# 1971.

## Sommaire



## I. Abidjan, série C & E

**A**Ex. 470. ./1971/abidjanCE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation différentielle

$$y' + y = 2x.\mathrm{e}^{-x}, \tag{XIII.1}$$

dans laquelle $x$ est une variable réelle quelconque, $y$ est une fonction inconnue de la variable $x$ (qu'il s'agit précisément de déterminer).

**1.** Montrer que $y = \mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre (c'est à dire $y' + y = 0$).

**2.** On pose alors $y = z.\mathrm{e}^{-x}$, définissant ainsi une nouvelle fonction $z$ dont la dérivée est notée $z'$. Calculer $y'$ en fonction de $x$, $z$ et $z'$ et former l'équation satisfaite par $z'$ en reportant $y'$ et $y$ dans (XIII.1).

**3.** En déduire toutes les solutions de l'équation (XIII.1). Soit $y_1$ la solution particulière qui s'annule pour $x = 0$. Construire la représentation graphique de $y_1$ dans un repère orthonormé.

Ex. 471. ./1971/abidjanCE/exo-2/texte.tex

Soit les deux transformations $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ définies pour tout point du plan par

$$M(x\ ;\ y) \xmapsto{\mathrm{T}_1} M_1(x_1\ ;\ y_1) \quad \text{et} \quad M(x\ ;\ y) \xmapsto{\mathrm{T}_2} M_2(x_2\ ;\ y_2),$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = 1 - y, \\ y_1 = x - 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x - \dfrac{3}{2}, \\ y_2 = 2y + \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

**1.** Montrer que $\mathrm{T}_1$ est une rotation $\mathrm{R}(\omega,\theta)$. (On déterminera $\omega$ et $\theta$.)

**2.** Montrer que $\mathrm{T}_2$ est une homothétie, H, de même centre que la rotation.

**3.** En déduire $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1$. Quelle est la nature de ces transformations ?

## Problème 112

./1971/abidjanCE/pb/texte

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $(D)$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples $(x,\ y)$ de nombres réels muni de l'addition et de la multiplication suivantes :

$$(x,\ y) + (x',\ y') = (x + x',\ y + y')$$

et

$$(x,\ y).(x',\ y') = (xx',\ xy' + x'y).$$

A) Prouver que $(D,\ +,\ .)$ est un anneau commutatif, possédant une unité l'élément $(+1,\ 0)$. Les éléments de $(D)$ seront appelés *nombres duaux*

B) On note $(D_1)$ [respectivement $(D_2)$] l'ensemble des nombres duaux de la forme $(x,\ 0)$ [respectivement de la forme $(0,\ y)$].

1° Prouver que $(D_1)$ est un sous-anneau de $(D)$.

2° $(D_2)$ est-il un sous-anneau de $(D)$ ?

3° $(D)$ peut-il être un corps ?

4° Prouver que $f : x \longmapsto (x,\ 0)$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur $(D_1)$.

C) L'isomorphisme de la question B4 nous permet, dans la suite du problème, d'identifier $(D_1)$ à $\mathbb{R}$, en posant

$$(x,\ 0) = x$$

pour tout élément $(x,\ 0)$ de $(D_1)$.

1° Prouver que tout nombre dual $z$ peut s'écrire d'un manière, et d'une seule, sous la forme

$$z = x + \epsilon y,$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = (0,\ +1)$.

2° Étudier les puissances $\epsilon^p$ de $\epsilon$, $p \in \mathbb{R}^\star$.

3° Calculer $z^n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

4° Rechercher les éléments inversibles de $(D)$.

D) Soit $z = x + \epsilon y$ un nombre dual. On pose

$$\overline{z} = x - \epsilon y$$

et l'on définit le symbole $|z|$ en posant $|z| = |x|$, où le second membre désigne la valeur absolue du réel $x$.

1° Prouver que $z.\overline{z} = |x|^2$.



Retour page 1

2° Prouver que $|z.z'| = |z|.|z'|$.

3° Prouver que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

E) Soit $z \in (D) - (D_2)$. On pose $\arg(z) = \dfrac{y}{x}$.

Établir que
$$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z'), \quad z \notin (D_2),\ z' \notin (D_2).$$

F) Si $f$ est une fonction réelle d'un variable réelle, dérivable sur $\mathbb{R}$, on la prolonge à $(D)$ en posant, pour tout $z = x + \epsilon y$ de $(D)$,
$$f(z) = f(x) + \epsilon y f'(x).$$

1° Donner les expressions de $\cos z$ et de $\sin z$.

2° Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$.

3° Calculer $\cos(z+z')$.

4° Calculer $\sin(z+z')$.

## II. Aix Marseille, série C & E

**Ex. 472.** ./1971/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Rappeler sans démonstration la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

En déduire les limites quand $x$ tend vers $+\infty$ de $x - n\ln x$ et de $\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$ ($n$ désignant un entier positif fixé).

**Ex. 473.** ./1971/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit dans le plan un triangle équilatéral $ABC$. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ recoupe le cercle circonscrit en $D$. On suppose que $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = +\dfrac{\pi}{3}$.

Réduire à une transformation simple le produit
$$S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}.$$
($S_{XY}$ désigne la symétrie d'axe $XY$.)

### Problème 113 ./1971/aixmarseilleC/pb/texte

`N.B. - Les trois questions sont indépendantes.`

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

(P) désigne le plan **privé de l'origine**, $O$, de ce repère.

(E) désigne l'ensemble des triplets $(A,\ B,\ C)$ de trois points de (P) dont les affixes $a$, $b$ et $c$ dans ce repère vérifient la relation $ac = b^2$.

1. $B$ sera dans cette question un point fixe de (P), d'affixe $b$.
   Montrer qu'à tout point $M$ de (P) peut être associé un point, et un seul, point, $M'$ tel que
   $$(M,\ B,\ M') \in \text{(E)},$$
   ce qui définit une transformation T de (P).
   T est-elle involutive ? Quel est l'ensemble de ses points doubles ?
   Calculer le module et l'argument de l'affixe, $m'$, de $M'$ en fonction de ceux de l'affixe $m$ de $M$. En déduire que T est le produit commutatif d'une symétrie d'axe $OB$ et d'une inversion , que l'on précisera.
2. (F) désigne l'ensemble des triplets $(A,\ B,\ C)$ de (E) qui vérifient de plus la relation $a+b+c=0$.
   a) Si $(A,\ B,\ C)\in$(F), montrer que $(B,\ C,\ A)\in$(F) et que $(C,\ A,\ B)\in$(F).
   Que dire, réciproquement, si
   $$(A,\ B,\ C) \in \text{(E)} \qquad \text{et} \qquad (B,\ C,\ A) \in \text{(E)}?$$

b) Si $(A,\ B,\ C)\in$(F), montrer que $a,\ b$ et $c$ sont les trois racines d'une équation de la forme

$$z^3-k=0 \quad (k \text{ complexe}).$$

Étudier la réciproque.

3. $A_1$ et $A_2$ étant deux points donnés dans (P), montrer que l'on peut déterminer une suite de points $A_n$ ($n$ entier naturel) telle que l'on ait

$$(A_1,\ A_2,\ A_3)\in \text{(E)},\quad (A_2,\ A_3,\ A_4)\in \text{(E)},\ \dots,(A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2})\in \text{(E)},\dots$$

Comment $A_1$ et $A_2$ doivent-ils être choisis pour que les $A_n$ soient tous distincts ?

## III. Aix Marseille remplacement, série C & E

**Ex. 474.** ./1971/aixmarseilleCErem/exo-1/texte.tex

Résoudre l'inéquation

$$\log_2(x+1)+\log_4(x)<1.$$

($\log_a(x)$ est le logarithme de $x$ en base $a$.)

**Ex. 475.** ./1971/aixmarseilleCErem/exo-2/texte.tex

Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des points, $M$, d'affixes $z$, tels que $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}$ soit imaginaire pur. (Raisonner sur la signification géométrique des arguments de $z-1$ et $z+\mathrm{i}$ en introduisant les points d'affixes $1$ et $-\mathrm{i}$).

### Problème 114

./1971/aixmarseilleCErem/pb/texte

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{x'Ox},\ \overrightarrow{y'Oy}$, l'ellipse $(E)$ est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} \text{a et b réels} fixés \quad (0<b<a)\\ t \text{ paramètre} \quad (0\leqslant t<2\pi)\\ \text{coordonnées de } M \text{ de paramètre } t\\ x=a\cos t \qquad \text{et} \qquad y=b\sin t. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $(E)$ admet une tangente en tout point.
Écrire l'équation de la tangente $(D)$ à $(E)$ au point $M$ de paramètre $t$ (exprimer les coefficients de cette équation en fonction exclusivement de $a$, $b$ et $t$).

**2.** Si $t$ est différent de $0$ et $\pi$, calculer les coordonnées des intersections $P$ et $Q$ de $(D)$ avec les tangentes aux sommets du grand axe (qui sont les points de paramètre 0 et $\pi$).
Montrer que le cercle de diamètre $PQ$ passe par deux points fixes $F$ et $F'$. Quel est l'ensemble des centres de ces cercles quand $t$ varie ?

**3.** La normale en $M$ (c'est-à-dire la perpendiculaire en $M$ à $(D)$) coupe $x'Ox$ en un point $N$ (si $t$ est différent de $0$ et $\pi$).
Dans le cas où $(D)$ coupe également $x'Ox$ en un point $T$, étudier les birapports

$$(F,\ F',\ N,\ T) \qquad \text{et} \qquad (M,\ T,\ P,\ Q).$$

En déduire une construction géométrique de $M$ quand $N$ est donné. Discuter.

## IV. Amiens, série C & E

**Ex. 476.** ./1971/amiensC/exo-1/texte.tex

On pose $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}=2s$ ($s$ réel, e base des logarithmes népériens).

a) Exprimer $x$ en fonction de $s$.

b) Si $s=3$, calculer $x$ avec la précision permise par les tables de logarithmes. (On prendra $\sqrt{10}=3{,}162$.)

Ex. 477. ./1971/amiensC/exo-2/texte.tex

a) Linéariser $\sin^4 x$.

b) Calculer $f(t) = \int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

c) Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

## Problème 115

./1971/amiensC/pb/texte

A) Les nombres réels $x$ et $x'$ sont liés par la relation $xx' = -4$.
Soit $N$ et $N'$ les points d'abscisses respectives $x$ et $x'$ sur l'axe $(\overrightarrow{\Delta})$. Calculer en fonction de $x$ la longueur, notée $l(x)$, du segment $NN'$ (l'unité de longueur choisie étant celle choisie sur l'axe). Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto l(x)$ ainsi définie. Tracer son graphe dans un repère orthonormé. Utiliser ce graphe pour discuter de l'existence des points $N$ tels que la longueur ait une valeur donnée, $k$.

B) On note (P) le plan complexe et (P*) le plan complexe privé du point $O(0\,;\,0)$. A tout point $M \in$(P*), image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point $M' \in$(P*), image du nombre complexe $z' = x' = \mathrm{i}y'$ tel que $zz' = 4$.

On note $M(z) \overset{T}{\longmapsto} M'(z')$ la transformation ainsi définie.

1. $T$ est-elle involutive ? Quels sont les points $B$ et $B'$ invariants par $T$ ?
2. a) En étudiant les arguments de $z$ et $z'$, montrer que les demi-droites $OM$ et $OM'$ sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.

   b) En complétant cette étude par celles des modules de $z$ et de $z'$, montrer que $T$ est le produit de deux transformations géométriques simples, que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées $x$ et $y$ du point $M$ en fonction de celles $x'$ et $y'$ du point $M'$.
4. Écrire, quand il existe, l'équation du cercle $(\Omega)$, de centre donné $\Omega(0\,;\,\omega)$, orthogonal au cercle de diamètre $BB'$. Déterminer le transformé par $T$ de ce cercle $(\Omega)$.

   a) analytiquement,

   b) géométriquement.
5. Écrire l'équation du cercle $(\Gamma)$ passant par $B$ et par $B'$, de centre donné $P(\lambda\,;\,0)$. Déterminer le transformé par $T$ du cercle $(\Gamma)$

   a) analytiquement,

   b) géométriquement.
6. Conclure de ce qui précède que les points $B$, $B'$, $M$ et $M'$ sont cocycliques et que, lorsque $M$ décrit le cercle $(\Gamma)$, la droite $MM'$ passe par un point fixe $A$, que l'on précisera.
   En déduire une construction géométrique du point $M'$ transformé de $M$ par $T$, lorsque $M$ n'appartient pas à l'axe $y'Oy$.

# V. Bordeaux, série C

Ex. 478. ./1971/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soit $A$, $B$, $C$ et $B$ quatre points donnés d'un plan tels que $AB$ et $CD$ n'aient pas même milieu.
Déterminer les cercles $(\Gamma)$ tels que les points $A$ et $B$ d'une part, et $C$ et $D$ d'autre part, soient conjugués par rapport à $(\Gamma)$.

Ex. 479. ./1971/bordeauxC/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer le reste de la division de $2^n$ par 3, $n$ entier naturel.

**2.** Déterminer le reste de la division de $(275\ 423)^n$ par 3.

**3.** Déterminer $n$ pour que le nombre
$$N = (275\ 423)^n + (372\ 121)^n$$
soit divisible par 3.



Retour page 1

## 🏛Problème 116

./1971/bordeauxC/pb/texte

Dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$(z-1)Z^2 - \left[2\mathrm{i}z^2 - (3+2\mathrm{i})z + 2\right] Z - 2\mathrm{i}z + 3 = 0, \tag{1}$$

où $z \in \mathbb{C}$ est donné et $Z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue.

**1.** a) Montrer que, sauf pour une valeur $z_0$ de $z$, l'équation **(??)** a deux racines $Z_1$ et $Z_2 = \dfrac{1}{1-z}$.

Calculer $Z_1$.

Étudier le cas exceptionnel $z = z_0$.

b) Dans le plan complexe $(P)$, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par $m$ l'image de $z$ et par $M_1$ celle de $Z_1$.

Caractériser la transformation $T_1$ qui à $m$ fait correspondre $M_1$.

**2.** Soit $M_2$ l'image de $Z_2$ dans $(P)$. On désigne par $T_2$ la transformation qui à $m$ (défini au 1b) fait correspondre $M_2$.

a) Existe-t-il des points de $(P)$ qui n'ont pas de transformé par $T_2$ ? Lesquels ?

b) $(E)$ désignant l'ensemble des points de $(P)$ ayant des transformés, $T_2$ définit une application de $(E)$ dans $(P)$. Cette application est-elle bijective ?

c) La transformation $T_2$ admet-elle des points doubles ?

d) Calculer, relativement au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les coordonnées $X$ et $Y$ de $M_2$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ de $m$ ; inversement, calculer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et de $Y$.

**3.** Montrer que la figure transformée par $T_2$ de la droite

$$ax + by + c = 0 \tag{$\delta$}$$

est une droite ou un cercle.

Comment faut-il choisir $a$, $b$ et $c$ pour que la transformée de $(\delta)$ soit une droite $(\Delta)$ ?

Indiquer une construction géométrique de $(\Delta)$ connaissant $(\delta)$.

**4.** Si $z_1,\ z_2,\ z_3$ et $z_4$ sont quatre nombres complexes d'images respectives $m_1,\ m_2,\ m_3$ et $m_4$ appartenant à l'ensemble $(E)$, on convient de désigner par $M_2^1,\ M_2^2, M_2^3$ et $M_2^4$ leurs images par la transformation $T_2$ et par $Z_2^1,\ Z_2^2, Z_2^3$ et $Z_2^4$ les affixes respectives de ces derniers points.

Enfin, si $x,\ y,\ z$ et $t$ dont quatre nombres complexes, on note $(x,\ y,\ z,\ t)$ leur birapport , c'est à dire le nombre complexe

$$\frac{z-x}{z-y} : \frac{t-x}{t-y}.$$

a) Montrer que l'on a

$$(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = (Z_2^1,\ Z_2^2, Z_2^3,\ Z_2^4). \tag{2}$$

b) Montrer que, pour avoir

$$(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4) = k, \tag{3}$$

$k \in \mathbb{R}$) ($\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels), il faut et il suffit que $m_1,\ m_2,\ m_3$ et $m_4$ soient sur un même cercle ou soient alignés.

En déduire que la figure transformée d'un cercle par $T_2$ est un cercle ou une droite.

**5.** a) On considère la transformation $T_3$ qui à $m$ image de $z$ ($z \neq 0$) associe $M_3$ image de $Z_3$ défini par

$$Z_3.z = 1. \tag{4}$$

Calculer le module, $R$, et l'argument, $\Phi$, de $Z_3$ connaissant le module, $r$, et l'argument, $\phi$, de $z$.

Construire géométriquement $M_3$ connaissant $m$. Discuter.

b) Trouver une construction géométrique de $M_2$ (défini au 2) connaissant $m \in (E)$. (On pourra se ramener à la situation de 5a).

En déduire une décomposition de $T_2$ en produit de transformations simples et retrouver géométriquement les résultats des questions 3 et 4.



Retour page 1

# VI. Bordeaux, série E

**Ex. 480.** ./1971/bordeauxe/exo-1/texte.tex

On considère dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ la sphère d'équation

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+\frac{25}{2}=0.$$

On désigne par C son centre.

**1.** Quelle est l'équation de cette sphère dans le repère $(C,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ ?

**2.** Trouver l'équation du cône de sommet S tel que $\overrightarrow{OS}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ circonscrit à cette sphère.

**Ex. 481.** ./1971/bordeauxe/exo-2/texte.tex

Même sujet qu'en série C : Bordeaux série C exercice 2

## Problème 117

./1971/bordeauxe/pb/texte

Même sujet qu'en série C : Bordeaux série C problème

# VII. Bordeaux remplacement, série C & E

**Ex. 482.** ./1971/bordeauxCErem/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $xOy$, de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Un point $M$ se déplace dans le plan et le vecteur accélération, $\vec{\Gamma}$, de son mouvement est constamment égal au vecteur

$$\vec{i}+\vec{j}=\vec{b}\sqrt{2}.$$

Au temps $t=0$, le mobile est au point $O$ et le vecteur vitesse est alors $\vec{V}_0=\vec{i}$.
Former l'équation vectorielle du mouvement. Déterminer la trajectoire par son équation dans le repère $xOy$, puis la préciser en choisissant un repère orthonormé dans lequel un des vecteurs unitaires est $\vec{b}$.
Déterminer la loi horaire du point $M$ ; en particulier, déterminer la position de $M$ correspondant à la vitesse minimale.
(Faire un graphique en prenant 4 cm pour module des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.)

**Ex. 483.** ./1971/bordeauxCErem/exo-2/texte.tex

On donne l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\sqrt[3]{64+x}.$$

Utiliser le théorème des accroissements finis sur le segment $[0\,;1]$ pour déterminer un encadrement de $\sqrt[3]{65}$.

## Problème 118

./1971/bordeauxCErem/pb/texte

-A) On donne dans le plan deux droites $x'x$ et $y'y$ concourantes en $O$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Une transformation ponctuelle, $\mathscr{T}$,est définie dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ de la manière suivante :

le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour transformé le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=k'y \end{cases}$$

$k$ et $k'$ étant deux nombres réels donnés non nuls.

On désignera par $P$ et $P'$ les projections de $M$ et de $M'$ sur $x'x$ parallèlement a ? $y'y$ et par $Q$ et $Q'$ les projections de $M$ et $M'$ sur $y'y$ parallèlement a ? $x'x$.



Retour page 1

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est le produit, commutatif, de deux affinités, dont on précisera les éléments. Montrer que $T$ est une bijection du plan dans lui-même et définir la transformation réciproque, $\mathscr{T}^{-1}$.
   Quels sont les points doubles de $\mathscr{T}$ ? Discuter suivant les valeurs de $k$ et $k'$.
   Déterminer l'équation de la transformée $(D')$ par $\mathscr{T}$ de la droite $(D)$ d'équation $ax+by+c=0$.
   En déduire les droites globalement invariantes par $\mathscr{T}$ (c'est-à-dire telles que $(D)$ et $(D')$ soient confondues).
   Examiner avec soin tous les cas possibles.
2. On suppose dans cette question $k \neq 1$, $k' \neq 1$ et $k \neq k'$.
   a) Si $M$ et$M'$ sont distincts, la droite $MM'$ coupe $x'x$ en $N$ et $y'y$ en $N'$. Montrer que le birapport $(N,\ N',\ M,\ M'$ ne dépend que des nombres $k$ et $k'$.
   b) Soit (Δ) une droite passant par $O$ distincte de $x'x$ et $y'y$ et $(\Delta')$ sa transformée par $\mathscr{T}$.
   Montrer que les droites $x'x$, $y'y$, $(\Delta)$ et $(\Delta')$ forment un faisceau dont le birapport ne dépend pas du choix de $\Delta$. Peut-on choisir $k'$ et $k$ pour que ce faisceau soit harmonique ?
   *Dans toute la suite du problème, les droites $x'x$ et$y'y$ sont perpendiculaires et le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.*

-B) $\alpha, \beta$ et $R$ étant des réels donnés, on considère le cercle (C) d'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Montrer que le transformé (C') du cercle (C) par $\mathscr{T}$ est une ellipse ou un cercle ayant pour centre le transformé du centre de (C ).
On précisera, lorsque (C') est une ellipse, la direction du grand axe et celle du petit axe.

-C) *On suppose maintenant $k>0$, $k' \neq 1$ et $k'=-k$.*

1. a) Montrer que $\mathscr{T}$ peut être considérée comme le produit commutatif d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport à une droite.
   b) Soit $(\Delta)$ une droite donnée du plan ; on désigne par $\mathscr{S}$ la symétrie par rapport à $(\Delta)$. On considère la composée $\mathscr{T}\circ\mathscr{S}$ des transformations. Préciser la nature de la transformation $\mathscr{T}\circ\mathscr{S}$ en étudiant successivement le cas où $(\Delta)$ est parallèle à $x'x$ et le cas où $(\Delta)$ coupe $x'x$ en $I$ ; on posera

$$\theta=\left[x'x,\ (\Delta)\right] \qquad (\mod \pi).$$

   Montrer que, si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, le point double, $\omega$, de la transformation $\mathscr{T}\circ\mathscr{S}$ reste sur un arc de cercle, que l'on précisera, lorsque $k$ varie. Que dire de $\omega$ lorsque $\theta=\frac{\pi}{2}$ ?
2. a) Tracer la courbe (H) d'équation

$$y=\frac{x^2-2x}{x-1},$$

   puis sa transformée (H') par $\mathscr{T}$ dans le cas $k=2$ et $k'=-2$.
   Préciser les asymptotes de ces deux courbes.
   b) $X$ étant un réel vérifiant $0<X<1$,calculer l'aire $(\Sigma)$ de la surface limitée par $x'x$, le point $O$, la courbe (H) et la droite d'équation $x=X$. Calculer l'aire $(\Sigma')$ de la surface limitée par $x'x$, le point $O$, la courbe (H') et la droite d'équation

$$x=2x.$$

   On vérifiera que $(\Sigma')=4(\Sigma)$.

ℹ : On rappelle que l'aire d'une surface est un nombre positif ou nul.



Retour page 1

# VIII. Caen, série C & E

**Ex. 484.** ./1971/caence/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des nombres réels l'équation

$$\mathrm{e}^{2x-1} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x+2}} - 2\mathrm{e}^3 = 0;$$

où e est la base des logarithmes népériens et où $x$ est l'inconnue.

**Ex. 485.** ./1971/caence/exo-2/texte.tex

Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation

$$z^6 + (1-2\mathrm{i})z^3 - 2\mathrm{i} = 0,$$

où i est la racine de $-1$ d'argument $\frac{\pi}{2}$ et où $z$ est l'inconnue (on posera $\mathscr{Z} = z^3$).

## Problème 119

./1971/caence/pb/texte

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, le point $A$ de coordonnées $(+2\ ;\ 0)$ et la droite (D) d'équation

$$x - y = 0.$$

$\lambda$ étant un paramètre réel, on désigne par $(\mathscr{C}_\lambda)$ le cercle variable passant par $O$ et $A$ et dont le centre a pour ordonnée $\lambda$.
Ce cercle recoupe $y'Oy$ en $M$ et la droite (D) en $M'$.
A chaque cercle $(\mathscr{C}_\lambda)$ est associée la droite $(\Delta_\lambda)$ définie par les points $M$ et $M'$.

**1.** Former une équation générale des cercles $(\mathscr{C}_\lambda)$.
On considère l'application $s$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ (où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls) qui, à chaque valeur de $\lambda$, fait correspondre l'aire (arithmétique) $s(\lambda)$ du triangle $OMM'$ (ces trois points pouvant être distincts ou confondus).
Calculer $s(\lambda)$.
Étudier et représenter graphiquement la fonction $s$.
Pour quelles valeurs de $\lambda$ l'aire $s(\lambda)$ est-elle nulle ?
La fonction $s$ est-elle continue pour ces valeurs ?
Est-elle dérivable pour ces valeurs ?
Préciser les cercles $(\mathscr{C}_\lambda)$ correspondants et les droites $(\Delta_\lambda)$ associées.

**2.** Quelle relation $\lambda$ et $\lambda'$ doivent-ils vérifier pour que les cercles $(\mathscr{C}_\lambda)$ et $(\mathscr{C}_{\lambda'})$ soient orthogonaux? orthogonaux
Montrer que les droites associées $(\Delta_\lambda)$ et $(\Delta_{\lambda'})$ sont perpendiculaires.

**3.** Soit l'inversion de pôle $A$ et de puissance 4.
Indiquer avec précision les transformées des droites $y'Oy$ et (D) dans cette inversion.
On appelle $m$ et $m'$ les inverses de $M$ et $M'$.
Montrer que $O$, $m$ et $m'$ sont alignés. Écrire une équation de la droite $Omm'$.
Calculer, en fonction de $\lambda$, les coordonnées de $m$ et de $m'$. Montrer que le lieu du milieu, $n$, de $mm'$ est le cercle $\left(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}\right)$.

**4.** Soit la courbe (P) d'équation

$$(x+y)^2 - 12x + 4y + 4 = 0.$$

Trouver une équation de cette courbe dans le repère $(\omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$, d'axes $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$ défini de la manière suivante :

— $\omega$ est le point de coordonnées $(+1\ ;\ +1)$,
— $\vec{I} = \overrightarrow{\omega A}$



Retour page 1

— et $\vec{J}$ est le vecteur qui se déduit de $\vec{I}$ dans la rotation de centre $\omega$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Pour cela, on établira les formules de changement de repère suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 + X + Y, \\ y = 1 - X + Y. \end{cases}$$

Montrer que la courbe (P) est une parabole, dont on précisera le sommet et l'axe.
Montrer que pour tout $\lambda$ la droite $(\Delta_\lambda)$ est tangente à (P) et que, réciproquement, toute tangente à (P) est une droite $(\Delta_\lambda)$. Calculer les coordonnées, dans le nouveau repère, du point de contact de $(\Delta_\lambda)$ avec (P).

# IX. Clermont-Ferrand, série C

**Ex. 486.** *./1971/clermontc/exo-1/texte.tex*

Dans le plan complexe, soir $m$ le point d'affixe $z$ et $m'$ le point d'affixe $z'$, tels que

$$z + z' = 4.$$

Montrer que $m'$ est l'image de $m$ par la symétrie, $\mathscr{S}$, de centre $I$ d'affixe 2.
Soit $\mathscr{R}$ la rotation de centre $O$, d'affixe $0$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Montrer que $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ est une rotation, dont on précisera le centre, en en donnant l'affixe, et l'angle.

**Ex. 487.** *./1971/clermontc/exo-2/texte.tex*

On considère le mouvement rectiligne défini par

$$x(t) = \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t.$$

1. Montrer que l'on peut écrire $x(t)$ sous la forme

$$a \cos(\omega t + \varphi),$$

   où $a$, $\omega$ et $\varphi$ sont des nombres indépendants de $t$.
   Déterminer $a$, $\omega$ et $\varphi$ ; on prendra $\varphi$ tel que

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

2. Déterminer la période du mouvement. Préciser, à l'intérieur d'une période, les instants et les abscisses où la vitesse diminue, les instants et les abscisses où elle augmente.

# X. Clermont-Ferrand, série E

**Ex. 488.** *./1971/clermontE/exo-2/texte.tex*

$z$ désigne un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$, $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$.

1. Calculer $z + \overline{z}$ et $z\overline{z}$ en fonction de $\theta$.
   Calculer $(z + \overline{z})^5$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
2. Démontrer que

$$\cos^5 \theta = \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta).$$

   On donnera la valeur exacte de

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 \theta \, \mathrm{d}\theta,$$

   puis une valeur approchée avec une précision permise par la règle à calcul.

Retour page 1

# XI. Dijon, série C

**Ex. 489.** ./1971/dijonC/exo-1/texte.tex

Vérifier que
$$x^4+x^3+x+1 \equiv (x-2)^4 \qquad (\text{mod. } 3),$$
quel que soit l'entier relatif $x$.
En déduire les entiers relatifs, $x$, tels que
$$x^4+x^3+x+1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 3).$$

**Ex. 490.** ./1971/dijonC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction réelle, $f$, de la variable réelle $x$, définie par
$$y = f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$
où e est la base des logarithmes népériens.
Quel est son ensemble de définition ?
Trouver les limites de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, lorsque $x$ tend vers $-\infty$, lorsque $x$ tend vers 0.
Déterminer le sens de variation de $f$.

## Problème 120 ./1971/dijonC/pb/texte

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit $(E)$ l'ensemble des points du plan non situés sur l'axe $x'Ox$.

A) Au couple $(M_1,\ M_2)$ de deux points $M_1(x_1,\ y_1)$ et $M_2(x_2,\ y_2)$ de $(E)$, on associe le point $N(x_1+x_2,\ y_1y_2)$. Démontrer que l'on définit ainsi dans $(E)$ une loi de composition interne, que l'on notera $\star$, et que $(E,\ \star)$ est un groupe commutatif. On désigne par $I$ l'élément neutre de ce groupe.

B) Soit T la transformation ponctuelle qui, à tout point $M$ de $(E)$ fait correspondre son symétrique $M'$ pour la loi $\star$.

1° a) Démontrer, sans calcul, que T est une bijection de $(E)$ sur lui même. Est-ce une involution ?

b) Démontrer que T admet deux points doubles : le point $I$ et le point $J$, que l'on précisera.

c) Construire $M'$ lorsque $M$ est donné. Démontrer que, si la droite $MM'$ coupe les droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ d'équations respectives $y=1$ et $y=-1$ aux points $P$ et $P'$, la division $(M,\ M',\ P,\ P')$ est harmonique.

2° a) Soit (H) l'hyperbole équilatère passant par $I$ et dont une asymptote est l'axe $x'Ox$, l'autre asymptote étant la droite d'équation $x=h$, $h$ nombre réel donné.
Écrire une équation de (H).
Déterminer l'ensemble des points transformés des points de (H) par T.
Soit $(\mathrm{I}_t)$ la tangente en I à (H).
Déterminer l'image par T de l'ensemble $(\mathrm{I}_t)\cap(E)$.

b) Soit (D) une droite du plan. Déterminer l'image $(\mathrm{D}'_1)$ par T de l'ensemble $(\mathrm{D}_1)$= (D)$\cap(E)$.
Lorsque (D) coupe les axes en $A(a\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ b)$ distincts de $O$, démontrer que la tangente à $(\mathrm{D}'_1)$, au point $N$ d'intersection de $(\mathrm{D}'_1)$ avec $y'Oy$, est la polaire de $B$ par rapport aux droites $AI$ et $AJ$.

3° a) Soit (C) le cercle de centre $> O$ et de rayon 1. Former l'équation de l'image $(\mathrm{C}'_1)$ par T de
$$(\mathrm{C}_1) = (\mathrm{C})\cap(E).$$
Tracer $(\mathrm{C}'_1)$ sur le même graphique que (C).

b) Soit $M$ un point de $(\mathrm{C}_1)$, (D) la tangente en $M$ au cercle (C) et $(\mathrm{D}'_1)$ l'image par T de $(\mathrm{D}_1)$= (D)$\cap(E)$.
Démontrer que $(\mathrm{C}'_1)$ et $(\mathrm{D}'_1)$ ont la même tangente au point $M'$ transformé de $M$ par T.



Retour page 1

## XII. Dijon remplacement, série E

**Ex. 491.** ./1971/dijonErem/exo-2/texte.tex

1. Calculer les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ solution de l'équation
$$z^2+2z+2=0.$$
2. En utilisant le formule de Moivre, calculer $z_1^n$ et $z_2^n$, $n$ étant un entier positif.
Donner une expression simple de
$$S_n = z_1^n + z_2^n$$
et trouver une relation indépendante de $n$ entre $S_n$ et $S_{n+8}$.

## XIII. Grenoble, séries C & E

**Ex. 492.** ./1971/grenobleC/exo-1/texte.tex

$\mathbb{R}$ étant l'ensemble des nombres réels, on désigne par $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x<0, \\ f(x) = 0 & \text{pour } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f$ est continue pour $x=0$.
2. $f$ admet-elle une dérivée pour $x=0$ ?

**Ex. 493.** ./1971/grenobleC/exo-2/texte.tex

$n$ étant un entier naturel, on pose
$$A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}.$$
Montrer que, pour tout $n$, $A_{n+3}$ est congru à $A_n$, modulo 7.
En déduire les entiers naturels $n$ tels que $A_n$ soit divisible par 7.
les nombres qui, dans le système de numération à base deux, s'écrivent

a) 1 110,

b) 1 010 100,

c) 1 001 001 000

sont-ils divisibles par 7 ?

## XIV. Groupe I, série C

**Ex. 494.** ./1971/groupeIC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif $n$ pour lesquelles $\dfrac{n^2-9}{n^2-5n+4}$ est un entier relatif (positif, négatif ou nul).

**2.** Quelle est la plus petite valeur, $p$, positive et entière telle que, quel que soit le réel $x$ supérieur ou égal à $p$, on ait
$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+4} < 2 \ ?$$

Ex. 495. ./1971/groupeIC/exo-2/texte.tex

**1.** $n$ désignant un entier naturel, résoudre l'équation

$$u^n = (-1)^n, \tag{E}$$

dans le corps des complexes.
On distinguera deux cas, suivant la parité de $n$ et l'on déterminera le module et l'argument de chacune des racines de l'équation.

**2.** Dans le cas où $n$ est pair, on désigne par $u_K$ l'une quelconque des racines de l'équation (E).
La relation $z' = u_K z$ établit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble de ces applications, muni de l'opération de composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

## Problème 121

./1971/groupeIC/pb/texte

On se propose de chercher comment il faut choisir les nombres réels $a,\ b,\ c$ pour que l'expression

$$\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}$$

soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à 1, quelle que soit la valeur du nombre réel $x$,

$$\left|\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}\right| \leqslant 1. \tag{$\mathscr{C}$}$$

**1.** Démontrer qu'il est *nécessaire* pour que la condition ($\mathscr{C}$) soit réalisée que l'on ait

$$|a| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |c| \leqslant 1.$$

**2.** a) On suppose que l'on a $a = 1$ ; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à $b$ et à $c$ ?
Même question lorsque $a = -1$.

b) On suppose maintenant que l'on a

$$-1 < a < +1 \quad \text{(inégalités strictes) ;}$$

démontrer qu'il est *nécessaire* que l'on ait

$$b^2 + 2a^2 \leqslant 2.$$

**3.** a) En supposant que $b^2 + 2a^2 = 2$ et $-1 < a < +1$, démontrer que, par rapport à un repère cartésien orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$ et $Oz$, le point P de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ décrit un cercle $(\Gamma)$, dont on donnera l'équation du plan, les coordonnées du centre et la valeur du rayon.

b) *Application numérique :*

$$a = \cos\varphi, \qquad b = \sin\varphi, \qquad 0 < \phi < \pi.$$

Construire la courbe représentative, en repère orthonormé, de la fonction $f$, de l variable réelle $x$, définie par

$$f(x) = \frac{(x^2-1)\cos\varphi + 2x\sin\varphi}{x^2+1}.$$

Préciser les coordonnées des points de cette courbe où la tangente est parallèle à $x'x$.

**4.** On suppose enfin que l'on a

$$-1 < a < +1 \qquad \text{et} \qquad b^2 + 2a^2 < 2 \quad \text{(inégalités strictes).}$$

On appelle toujours P le point de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans un repère cartésien orthonormé et, bien sûr, on cherche à satisfaire la condition ($\mathscr{C}$).
Démontrer que le point P appartient soit à la surface soit à l'intérieur du cône $(\Sigma)$ de révolution dont le sommet $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, l'axe $AO$, le demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ et qu'il appartient aussi soit à la surface, soit à l'intérieur du cône $(\Sigma')$ symétrique de $(\Sigma)$ par rapport à $O$.

Retour page 1

# XV. Groupe I, série E

Ex. 496. ./1971/groupeIE/exo-1/texte.tex

**1.** Montrer qu'une inversion plane transforme un cercle (C) en un cercle (C') de même rayon si, et seulement si, $k = \pm p$, $k$ étant la puissance d'inversion et $p$ la puissance non nulle du pôle d'inversion par rapport à (C).

**2.** On donne en géométrie plane, deux cercles ($C_1$) et ($C_2$) non concentriques.
On appelle $\mathscr{J}$ toute inversion transformant ($C_1$) en un cercle ($C'_1$) et ($C_2$) en un cercle ($C'_2$), telle qu'il existe au moins un déplacement du plan, $\mathscr{D}$, transformant à la fois ($C_1$) en ($C'_1$) et ($C_2$) en ($C'_2$).
Étudier $\mathscr{J}$ et $\mathscr{D}$ ; trouver l'ensemble des pôles des inversions $\mathscr{J}$.

N.B. – on sera amené à distinguer si ($C_1$) et ($C_2$) sont, ou non, orthogonaux.

Ex. 497. ./1971/groupeIE/exo-2/texte.tex

On appelle tétraèdre $(T)$ tout tétraèdre ABCD tel que BC = AD, CA = BD et AB = CD.
Caractériser le parallélépipède obtenu en menant par chaque arête la plan parallèle à l'arête opposée.
Dans les données de l'épure suivante, il existe deux tétraèdres $(T_1)$ et $(T_2)$ dont une face est ABC ; montrer que les sommets A, B, C et $D_1$ de $(T_1)$ ont pour projections les sommets de deux rectangles ; en déduire le sommet $D_2$ de $(T_2)$ ; représenter $(T_2)$, solide et opaque, avec sa ponctuation.
ÉPURE. - Le repère orthonormé a pour origine $O$ le centre de la feuille ; l'axe $Ox$ est debout et orienté vers l'avant, l'axe $Oy$ porte la ligne de terre et est orienté vers la droite, l'axe $Oz$ est vertical et orienté vers le haut ; l'unité de longueur est la centimètre.
Les sommets A, B, C ont pour coordonnées A$(+7\ ;\ -4\ ;\ +4)$, B$(+1\ ;\ +5\ ;\ +4)$ et C$(+7\ ;\ +5\ ;\ 0)$.
L'épure sera faite sur du papier quadrillé au demi-centimètre.

## Problème 122

./1971/groupeIE/pb/texte

A) On cosnidère les fonctions polynômes de la variable réelle $x$, définies par

$$x \longmapsto P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a,$$

pour tout choix des réels $a$ et $b$, $a \neq 0$.
Donner l'expression du polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x) = (x+1)Q(x).$$

On suppose $a$ donné ; déterminer $b$ pour qu'il existe un réel $\alpha$ tel que

$$Q(x) = a(x-\alpha)^2\ ;$$

on trouve ainsi deux polynômes $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$,

$$Q_2(-1) \neq 0.$$

B) Étudier les variations de la fonction $f$ définie, pour $x \neq -1$, par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}.$$

Construire la courbe (C) représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(\omega)$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, l'unité de longueur étant le centimètre.
Calculer, en centimètres carrés, l'aire, $\mathscr{A}$ de la région fermée du plan limitée par $(C)$, $Ox$, $Oy$ ; on pourra à cet effet et si on le juge opportun, rapporter d'abord $(C)$ au repère $(\Omega)$ déduit de $(\omega)$ par la translation de vecteur $(-1\ ;\ 0)$.
On donnera à l'aide des tables, une valeur approchée de $\mathscr{A}$.

C) Un système, S, de numération a pour base l'entier $k \geqslant 4$. On considère les entiers $u$ ayant dans S une représentation figurée de la forme

$$u = \overline{ABBA},$$

pour tout choix des entiers $A$ et $B$, figurés chacun par un seul chiffre, $\overline{A}$ et $\overline{B}$, $A \neq 0$.



Retour page 1

Démontrer que tout $u$ est divisible par $k+1$.

On suppose $A$ donné ; déterminer $B$ afin que $u$ soit divisible par $(k+1)^2$ ; discuter. Il sera utile ici de poser $k+1=K$ ; on démontrera que $B$ est le reste de la division euclidienne de $3A$ par $K$.

Quelles sont les valeurs de $A$ et de $B$ pour lesquelles $u$ est divisible par $(k+1)^3$ ?

EXEMPLE. - la base étant dix, écrire sans justification l'ensemble des $u$ divisibles par la carré de onze, préciser le sous-ensemble des $u$ divisible par le cube de onze.

## XVI. Lille, série C & E

**Ex. 498.** ./1971/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ d'une variable réelle définie par

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

1. Étudier les variations de la fonctions $f$ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'unité de longueur étant prise égale à 2 centimètres.
2. Calculer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses la courbe et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\lambda+1$ ($\lambda>1$).

   Cette aire admet-elle une limite lorsque $\lambda\to+\infty$ ?

**Ex. 499.** ./1971/lilleC/exo-2/texte.tex

Soit un triangle $ABC$ de côtés $AB=4a$, $AC=5a$ et $BC=7a$ ($a$ : longueur donnée).

1. $M$ étant un point quelconque de l'espace, donner l'expression plus simple du vecteur

   $$\vec{V}_1=7\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$$

   en utilisant la notion de barycentre.
2. Que peut-on dire du vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ quand le point $M$ varie ? Soit $\vec{V}_2$ ce vecteur.
3. Déterminer l'ensemble des points, $M$, de l'espace tels que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ aient le même module.

### PROBLÈME 123

./1971/lilleC/pb/texte

1. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, on considère les cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ d'équations respectives

   $$x^2+y^2-2x+2y\frac{\sqrt{3}}{3}=0$$

   et

   $$x^2+y^2-2x+2y\sqrt{3}=0.$$

   Préciser leurs centres et leurs rayons.

   Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes transformant $(C_1)$ en $(C_2)$ ?
2. A tout point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, par rapport au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, est associé son affixe

   $$z=x+\mathrm{i}y.$$

   On considère la similitude directe $(S_0)$ de centre $O$, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Quel est le transformé du cercle $(C_1)$ dans cette similitude ?

   On désigne par $z'$ l'affixe de $M'$ homologue de $M$ dans cette similitude. Exprimer $z'$ en fonction de $z$.

   $A$ étant le point (autre que $O$) commun aux deux cercles $(C_1)$ et $(C_2)$, montrer que les points $M$, $M'$ et $A$ sont alignés.
3. Calculer en fonction de $z$ l'affixe $\omega$ du point $\Omega$ du plan, tel que le triangle $\Omega MM'$ soit rectangle isocèle et que $(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'})=-\dfrac{\pi}{2}$.

   Quel est l'ensemble $(\Gamma)$ des points $\Omega$ quand $M$ décrit le cercle $(C_1)$ ?

   Calculer les coordonnées de $\Omega$ en fonction de celles de $M$ et trouver l'équation de $(\Gamma)$.

**4.** $M$ étant supposé fixe sur $(C_1)$, $\Omega$ désignant le point qui lui a été associé dans la question 3, soit $(R)$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $P$ un point quelconque du plan, $P'$ son transformé par $(S_0)$ et $P''$ le transformé de $P'$ par $(R)$.
$p$, $p'$, $p''$ désignant les affixes des points $P$, $P'$ et $P''$, exprimer $p'$ en fonction de $p$, $p''$ en fonction de $p'$ et de $\omega$ et enfin $p''-z$ en fonction de $p-z$.

En déduire que la composée $(R)\circ(S_0)$ de $(S_0)$ par $(R)$ est une homothétie de centre $M$. Retrouver géométriquement ce résultat.

# XVII. Limoges, série C

**Ex. 500.** ./1971/limogesC/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère la loi de composition notée $\star$, telle que

$$\forall (a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\qquad a\star b = a+b+a\times b.$$

Les signes $+$ et $\times$ désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$.

**1.** Montrer que c'est une loi interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?

**2.** On définit $a^{(n)}$ pour $n\geqslant 1$ par

$$a^{(1)} = a \qquad \text{et} \qquad a^{(n)} = a^{(n-1)}\star a^{(1)}.$$

Exprimer $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de $a$, et en déduire l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de $a$ et de $n$.

**Ex. 501.** ./1971/limogesC/exo-2/texte.tex

On donne dans un plan orienté trois droites $(D_1)$, $(D_2)$ et $(D_3)$ passant par $O$ et telles que

$$(D_1,\ D_2) = \frac{\pi}{2}+k\pi \qquad \text{et} \qquad (D_2,\ D_3) = \frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Soit $\mathscr{S}_{(D_1)}$, $\mathscr{S}_{(D_2)}$ et $\mathscr{S}_{(D_3)}$ les symétries par rapport aux droites $(D_1)$, $(D_2)$ et $(D_3)$ (ou symétries axiales d'axes respectifs).

**1.** Construire la transformé d'un point $M$ du plan par la transformation $T$ définie par

$$T = \mathscr{S}_{(D_1)}\circ\mathscr{S}_{(D_2)}\circ\mathscr{S}_{(D_3)}.$$

Quelle est la nature de cette transformation $T$ ?

**2.** On considère la transformation $T'$ définie par $T' = \mathscr{S}_{(D_1)}\circ T$.
Quelle est la nature de cette transformation $T'$ ? Ce produit est-il commutatif ?

# XVIII. Limoges, série E

**Ex. 502.** ./1971/limogesE/exo-1/texte.tex

On considère un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Déterminer les équations des plans passant par la droite d'équations

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = z$$

et tangents à la sphère d'équation

$$x^2+y^2+z^2-z-\frac{11}{54} = 0.$$

(On pourra d'abord chercher les équations des plans passant par la droite en remarquant, par exemple, que toutes les coordonnées d'un point de cette droite s'expriment en fonction de l'une d'elles).



Retour page 1

**Ex. 503.** ./1971/limogesE/exo-2/texte.tex

1. Étudier les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.
2. Déterminer les coefficients $a$ et $b$ pour que la fonction $F$ telle que

$$F(x) = x^2\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^x$$

soit une primitive de $f$.
En déduire la mesure en centimètres carrés de l'aire de la surface limitée par la courbe $(C)$, l'axe $x'x$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

# XIX. Lyon, série C

**Ex. 504.** ./1971/lyonC/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 2(1+\cos u)z + 2(1+\cos u) = 0,$$

où $z$ désigne l'inconnue et $u$ un paramètre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
Déterminer le module et l'argument de chacune des racines trouvées.

**Ex. 505.** ./1971/lyonC/exo-2/texte.tex

$a$ étant un entier relatif quelconque et $n$ un entier naturel non nul, montrer que $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 2 et par 3.
*Application :*
$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p$ étant des nombres entiers relatifs quelconques, montrer que le nombre

$$A = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \cdots + a_p^{2n+1}$$

est divisible par 6, si, et seulement si, le nombre

$$B = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

est divisible par 6.

## Problème 124

./1971/lyonC/pb/texte

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $x'x$ et $y'y$ les droites portant l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Soit (P) le plan privé de l'union des droites $x'x$ et $y'y$.
Soit $m$ un point de (P) et $H$ sa projection sur $x'x$ ; le cercle tangent en $O$ à $x'x$ et passant par $m$ recoupe le droite $mH$ en $M$.
Soit $T$ la transformation ponctuelle qui, à tout point $m$ de (P), donne pour homologue le point $M$ construit comme il vient d'être dit.

1. Montrer que $T$ est une bijection involutive de (P) sur (P). Montrer que les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $m$ et $(X\ ;\ Y)$ de $M$ sont liées par $x = X$ et $yY = x^2$.
   Quel est l'ensemble des points doubles de $T$ ?
2. (C) étant l'intersection avec (P) d'un cercle tangent à $x'x$ en $O$, montrer que (C) est invariant par $T$. Les tangentes à (C) en $m$ et $M$ (homologue de $m$ par $T$) coupent $x'x$ respectivement en $s$ et $S$.
   Montrer que $(H,\ O,\ s,\ S)$ est une division harmonique.
3. $(\gamma)$ étant une courbe incluse dans (P), d'équation $y = f(x)$, soit $y = g(x)$ l'équation de son homologue $(\Gamma)$ par $T$.
   Soit $m$ un point de $(\gamma)$ d'abscisse $x_0$, $M$ son homologue.
   Montrer que, si la fonction $f$ est dérivable pour la valeur $x_0$, $g$ est dérivable pour $x_0$ et l'on a :

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 2x_0.$$

Calculer les coordonnées des points $s$ et $S$ où les tangentes à $(\gamma)$ en $m$ et à $(\Gamma)$ en $M$ coupent, respectivement $x'x$.

Montrer que $(H, O, s, S)$ est une division harmonique.

Étudier le cas où l'une des deux tangentes est parallèle à $x'x$.

Supposant données $m$ et la tangente à $(\gamma)$ en $m$, tracer la figure montrant la construction de $M$ et de la tangente à $(\Gamma)$ en $M$, en justifiant brièvement les constructions effectuées.

**4.** Soit $(\gamma)$ l'intersection avec (P) de la courbe d'équation $y = \log x$. ($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

Quelle est l'équation de $(\Gamma)$, homologue de $(\gamma)$ par $T$ ? Cette équation étant mise sous la forme $y = g(x)$, étudier les variations de $g$ et tracer $(\Gamma)$.

# XX. Lyon, série E

**Ex. 506.** ./1971/lyone/exo-2/texte.tex

Soit $(C)$ un cercle de diamètre $AB$ (les notations sont évidemment indépendantes de celles de l'exercice précédent) et soit $P$ un point, différent de $B$, de la tangente $(D)$ en $B$ au cercle $(C)$.
Soit $M$ le milieu du segment $BP$.
Les droites $AM$ et $AP$ recoupent le cercle $(C)$ en $N$ et en $Q$.
Soit $(\Gamma)$ le cercle orthogonal à $(C)$ passant par $N$ et $Q$.

**1.** Quelle est la nature de la courbe $(\Gamma')$ transformée de $(\Gamma)$ par l'inversion de pôle $A$ et de puissance $AB^2$ (on précisera les caractéristiques de $(\Gamma')$) ?

**2.** Le point $P$ décrivant la droite $(D)$, montrer que les cercles de diamètre $PM$ forment une famille de cercles homothétiques par rapport au point $B$. En déduire qu'ils restent tangents à deux droites fixes.

**3.** En déduire que les cercles $(\Gamma)$ restent tangents à deux cercles fixes.

# XXI. Mexico, série C

**Ex. 507.** ./1971/mexicoC/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation suivante dans le corps des nombres complexes :

$$(z-1)^5 = (z+1)^5.$$

(Pour cela on remarquera que $z = 1$ n'est pas solution de l'équation proposée, et l'on posera

$$\mathfrak{z} = \frac{z+1}{z-1}\ ;$$

on déterminera les valeurs de $\mathfrak{z}$.)

**Ex. 508.** ./1971/mexicoC/exo-2/texte.tex

Montrer que $17^{4n+1} + 3 \times 9^{2n}$ est divisible par 5 pour tout $n$ entier.

# XXII. Montpellier, série C

**Ex. 509.** ./1971/montpellierC/exo-1/texte.tex

Exprimer en fonction linéaire des sinus et cosinus de $x$ et $3x$ la fonction $f$ de la variable $x$ définie par

$$f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x.$$

En déduire l'expression de la primitive de cette fonction qui s'annule pour $x = 0$.

Ex. 510. ./1971/montpellierC/exo-2/texte.tex

Soit $z$ un nombre complexe. On considère le nombre

$$Z = \frac{z+1}{z-1}.$$

Dans le plan complexe on désigne par $M$ le point d'affixe $z$.

**1.** Déterminer l'ensemble (D) des points $M$ tels que $Z$ soit un nombre réel.

**2.** Déterminer l'ensemble (C) des points $M$ tels que $Z$ soit un imaginaire pur.

**3.** Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M$ tels que les points $O, M$ et $P$ soient alignés. Le point $P$ est le point d'affixe $Z$ et le point $O$ l'origine des axes de coordonnées.

## Problème 125

./1971/montpellierC/pb/texte

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit $a$ un réel positif et $\lambda$ un réel quelconque.

On désigne par $T_\lambda$ la transformation ponctuelle, qui à un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre un point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par

$$x' = \frac{ax}{(1-\lambda)y + a\lambda} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{ay}{(1-\lambda)y + a\lambda}.$$

1° Quelle est cette transformation pour $\lambda = 1$ ?

*Supposons $\lambda \neq 1$.*

a) Quels sont les points du plan qui n'ont pas de transformé ?

b) Déterminer les points invariants par cette transformation.

c) Montrer que la droite $MM'$ joignant un point non invariant et son transformé passe par $O$.

2° Soit $\lambda'$ un réel quelconque. Déterminer la transformation produit $T_{\lambda'} \circ T_\lambda$, la transformation $T_\lambda$ étant effectuée la première.

L'ensemble des transformations $T_\lambda$ lorsque $\lambda$ parcourt $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour la loi $\circ$ ?

Déterminer $\lambda$ pour que $T_\lambda$ soit involutive.

B) *Dans la suite on suppose $\lambda = -1$.*

1° Montrer que la transformée d'une droite (D) est une droite (D'). Cette droite peut-elle être parallèle à (D), ou confondue avec (D) ?

2° Déterminer l'ensemble des cercles $(\Gamma)$ du plan qui sont globalement invariants dans la transformation.

Quel est l'ensemble (ou lieu géométrique) des centres de ces cercles ?

Montrer que le cercle (C) de centre $C\left(0\ ;\ \frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$ est orthogonal à tous les cercles invariants $(\Gamma)$.

Quelle est la nature de la famille de ces cercles $(\Gamma)$ ?

Déterminer la courbe transformée de cercle (C) et la construire avec soin.

# XXIII. Nancy, série C

Ex. 511. ./1971/nancyC/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les entiers naturels $n$ tels que

$$5^n - 2 \equiv 0\ [7].$$



Retour page 1

**Ex. 512.** ./1971/nancyC/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les coordonnées d'un point mobile $M$ sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x = 2+4\cos t\sin t \\ y = 1+\cos 2t. \end{cases}$$

**1.** Donner une équation cartésienne de la trajectoire de $M$ et la construire.

**2.** Définir, à l'instant $t$, le vecteur vitesse de $M$ et le vecteur accélération. Construire le point $M$ le vecteur vitesse de $M$ et le vecteur accélération de $M$ pour $t = \dfrac{\pi}{6}$.

# XXIV. Nantes, série C

**Ex. 513.** ./1971/nantesC/exo-1/texte.tex

Le symbole $\log u$ désigne le logarithme népérien de $u$.

**1.** On considère la fonction $f$ qui, au nombre réel $x$, fait correspondre le nombre réel

$$y = \log\left(\frac{3}{2}.\frac{x-1}{x-2}\right).$$

Préciser le domaine de définition de $f$. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique $(C)$ dans un repère orthonormé $x'Ox,\ y'Oy$.

Démontrer que $(C)$ admet un centre de symétrie.

**2.** Étudier la fonction $g$ qui, au nombre réel $x$, fait correspondre le nombre réel

$$z = \log\left(\frac{3}{2}.\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\right).$$

Démontrer que la représentation graphique $(C')$ de $g$ admet un centre de symétrie.

**Ex. 514.** ./1971/nantesC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation, où $z$ est l'inconnue,

$$(1+\mathrm{i})z^2 - (2-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0.$$

En déduire les solutions de l'équation, où $u$ est l'inconnue,

$$(1+\mathrm{i})u^6 - (2-\mathrm{i})u^3 - \mathrm{i} = 0.$$

# XXV. Paris, série C

**Ex. 515.** ./1971/parisC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{1-\log x},$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien.

Préciser le domaine de définition de $f$, et celui des deux premières dérivées $f'$ et $f''$ de $f$.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Étudier la variation de $f$ et construire sa courbe représentative (C) (repère orthonormé).

Construire la tangente à (C) au point $A$, d'ordonnée nulle, puis la tangente à (C) au point $I$, d'abscisse $\alpha$ telle que $f''(\alpha) = 0$.

Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $g$, définie sur $[0\,;+\infty[$ ; calculer explicitement $g(x)$.



Retour page 1

**Ex. 516.** ./1971/parisC/exo-2/texte.tex

A tout réel $\lambda \in ]0\,;+1[$ on associe, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$ l'ellipse $(E_\lambda)$ d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{\lambda}.$$

**1.** Déterminer par leurs coordonnées le centre $\Omega$ et les sommets de cette l'ellipse $(E_\lambda)$. Trouver et tracer la courbe S constituant l'ensemble des sommets du grand axe quand $\lambda$ décrit l'intervalle $]0\,;+1[$. Préciser la nature de S.

**2.** Déterminer par leurs coordonnées les foyers de l'ellipse $(E_\lambda)$. Trouver et tracer la courbe $(\Phi)$ constituant l'ensemble de des foyers quand $\lambda$ décrit l'intervalle $]0\,;+1[$.

## Problème 126

./1971/parisC/pb/texte

**1.** On donne deux nombres complexes non nuls $a$ et $s$ et l'on considère la suite $\Sigma$ des nombres complexes $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n,\ \dots$

définie par $z_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = sz_n + a \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

a) Calculer $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ en fonction de $a$ et de $s$. Exprimer simplement $z_n$ en fonction de $a$, $s$ et $n$, lorsque $s \neq 1$. Que peut-on dire de $\Sigma$ lorsque $s = -1$ ? Donner la valeur de $z_n$ lorsque $s = 1$.

b) Deux éléments distincts de $\Sigma$ peuvent-ils être égaux ? Montrer qu'alors $\Sigma$ est périodique.

c) Vérifier que deux termes consécutifs de $\Sigma$ ne sont jamais égaux et montrer que

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

d) Inversement, soit donné une suite vérifiant les trois conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (2) est satisfaite, les deux premiers termes sont $0$ et $a$. Démontrer qu'une telle suite est confondue avec $\Sigma$.

**2.** Tous les points considérés dans cette question appartiennent à un même plan euclidien, muni d'un repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$ (unité : 1cm).

L'affixe d'un point de ce plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

Soit $\theta$ un angle donné tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et$r$ un réel donné strictement positif. Si $P$ désigne un point quelconque, on note $f_P$ la similitude de centre $P$, d'angle $\theta$ et de rapport $r$ ; ainsi $f_P(M)$ est l'image de $M$ par $f_P$. On considère alors la suite $\mathscr{A}$ des points $O$, $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, …, tels que, pour tout $n$,

$$A_2 = f_O(A_1),\ A_3 = f_{A_1}(A_2),\ \dots \quad \text{et} \quad A_{n+2} = f_{A_n}(A_{n+1}),$$

où $O$ désigne l'origine et $A_1$ le point d'affixe $a$ donné $(a \neq 0)$.

a) Si $z_n$ désigne l'affixe de $A_n$, trouver la valeur du rapport

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

Déduire alors du 1 que $A_{n+1}$ est le transformé de $A_n$ dans une similitude $S$, indépendante de $n$ ; calculer seulement, ici, l'affixe de son centre.

On ne demande d'étudier $S$ que dans les deux cas 2b) et 2c) suivants.

b) On pose $r = \frac{1}{\cos\theta}$ ; déterminer l'angle, le rapport et le centre, $U$, de $S$. Vérifier que tous les points $A_i$ appartiennent, selon la parité de $i$, à l'une ou l'autre de deux droites fixes.

Comment faut-il choisir $\theta$ pour que la suite $\mathscr{A}$ soit périodique ?

Construire le point $U$ et la ligne polygonale

$$OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

pour $a = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) On suppose $r = 2\cos\theta$ ; montrer que $S$ est une rotation, dont on déterminera l'angle et le centre $V$. qu'en déduit-on pour les côtés de la ligne polygonale $L$ de sommets successifs

$$O,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots ?$$

Comment faut-il choisir $\theta$ pour que la ligne $L$ soit fermée ?

Construire la point $V$ et la ligne $L$ pour $a = 5$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$.

## XXVI. Poitiers, série C

**Ex. 517.** ./1971/poitiersC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

**1.** Calculer $z^5$.

**2.** On pose $u = z + z^4$ et $v = z^2 + z^3$. Calculer $u + v$ et $uv$ et en déduire $u$ et $v$.

**3.** Exprimer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ en fonction de $u$ ; en déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

**Ex. 518.** ./1971/poitiersC/exo-2/texte.tex

Un nombre s'écrit $\overline{x32y}$ dans la base 5.
Déterminer $x$ et $y$ pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 4.

### Problème 127

./1971/poitiersC/pb/texte

Soit $(\Pi)$ l'ensemble des points du plan rapporté à un repère d'axes $Ox$ et $Oy$. Dans $(\Pi)$, on définit une loi de composition interne qui, au couple $(m,\ m')$ de points de $(\Pi)$, associe le point $M = m \star m'$ de $(\Pi)$ défini comme suit :
si $(x\ ;\ y)$ sont les coordonnées de $m$, si $\left(x'\ ;\ y'\right)$ sont celles de $m'$, alors les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $M$ sont définies par les égalités

$$X = x + x' \qquad \text{et} \qquad Y = y + y' + 2xx'.$$

1. a) Démontrer que $(\Pi)$ est un groupe commutatif pour la loi $\star$.
   b) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation $y = f(x)$ , $g$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x^2$. Si $m$ et $m'$ sont choisis sur $(\mathscr{C})$, démontrer que $M$ est sur $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, $g(x) + g(x') = g(x + x')$.
2. Á tout point $m(x\ ;\ y)$ on fait correspondre le point $m_1(x_1\ ;\ y_1)$, avec $x_1 = -x$ et $y_1 = -y + 2x^2$.
   a) Montrer que l'application, T, de $(\Pi)$ dans $(\Pi)$ ainsi définie est bijective et involutive.
   b) Quelles sont l'équation et la nature de l'image par T d'une courbe $(\Gamma)$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ ? Préciser l'image de l'axe $Ox$.
   Quelles sont les courbes $(\Gamma)$ globalement invariantes ?
   Démontrer que la courbe $(\Gamma)$ est globalement invariante si, et seulement si, la fonction $g$ est impaire.
3. Dans toute ls suite du problème, $m$ et $m'$ sont pris sur la courbe $(\Gamma_0)$ d'équation $y = x^2 + bx$.
   a) Montrer que la loi $\star$ muni $(\Gamma_0)$ d'une structure de groupe abélien. On notera $m_1$ le symétrique de $m$ pour la loi $\star$.
   b) Lorsque $m$ est différent de $m'$, montrer que $\overrightarrow{mm'}$ et OM ont même direction.
   Montrer que $\overrightarrow{mm_1}$ a une direction fixe. Par quelle transformation connue peut-on déduire $m_1$ de $m$ ?
   $A$ et $B$ sont deux points distincts de $(\Gamma_0)$, variables, distincts, différents de $O$. La parallèle à $OA$ passant par $B$ recoupe $(\Gamma_0)$ en $B'$ et La parallèle à $OB$ passant par $A$ recoupe $(\Gamma_0)$ en $A'$, les points $A'$ et $B'$ étant supposé distincts de $A$ et de $B$.
   Déterminer
   $$A \star B \star A' \star B'\ ;$$
   démontrer que $A'B'$ garde une direction fixe et que le milieu du segment $A'B'$ reste sur une droite fixe.

# XXVII. Poitiers, série E

**Ex. 519.** ./1971/poitierse/exo-1/texte.tex

Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation

$$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\ ;$$

$m$ étant un réel positif, exprimer en fonction de $m$ l'aire de la surface limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe $Ox$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = m$.
Déterminer $m$ pour que cette aire soit égale à 1.
On donnera deux valeurs décimales approchées de $m$, l'une par défaut, l'autre par excès, en partant de l'encadrement $2{,}71 < \mathrm{e} < 2{,}72$. (e désignant la base des logarithmes népériens.)

**Ex. 520.** ./1971/poitierse/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe,soit S la similitude qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = (1-\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}.$$

Déterminer le point double, l'angle et le rapport de S.
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où $x$, $y$, $x'$ et $y'$ sont réels.
Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.
Quelle est la transformée par S de la droite d'équation

$$x + 2y - 1 = 0\ ?$$

## Problème 128

./1971/poitierse/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $Ox$ et $Oy$. Soit l'ensemble $(\Gamma)$ des points dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient la relation

$$(x^2 + y^2)^3) = 4x^2y^2.$$

1. a) Montrer que les axes de coordonnées et leurs bissectrices sont des axes de symétrie pour $(\Gamma)$. En déduire l'existence d'un groupe, G, de transformations, dont chacun des huit éléments laisse globalement invariant l'ensemble $(\Gamma)$.
   b) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Pour quelles valeurs de $R$ l'intersection de $(\Gamma)$ avec $(\mathscr{C})$ est-elle non vide ?
2. a) $M$ étant un point du plan distinct de $O$, on désigne par $\rho$ le module de $OM$ et par $\theta$ une détermination de la mesure de $(\overrightarrow{Ox},\ OM)$. Montrer que

   $$M \in (\Gamma) \Longleftrightarrow \rho^2 = \sin^2 2\theta.$$

   b) Soit T la transformation qui, à tout point $M(\rho,\ \theta)$ distinct de $O$, associe le point $M'(\rho',\ \theta')$ tel que

   $$|OM| \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{Ox},\ OM) = (OM,\ OM')$$

   et qui laisse invariant le point $O$.
   Soit $(\gamma)$ la partie de $(\Gamma)$ formée des points dont les deux coordonnées cartésiennes sont positives. (Soit $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.)
   Montrer que la transformée de $(\gamma)$ par T est le cercle $(\gamma')$ de centre $\omega\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ passant par $O$.
   (On cherchera une relation liant $\rho'$ et $\theta'$, puis une relation liant les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$.)
3. : Cette question est indépendante du 2b.
   Soit $V$ la fonction vectorielle qui, à tout réel

   $$\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,$$

   associe le vecteur $\overrightarrow{V}_{(\theta)}$ de coordonnées

   $$x = \sin 2\theta \cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \sin 2\theta \sin\theta.$$



Retour page 1

a) Montrer que l'indicatrice de la fonction vectorielle $V$ est l'ensemble $(\gamma)$. (L'indicatrice de $V$ est l'ensemble des points $M$ tels que $OM = \vec{V}_{(\theta)}$.)

b) Quelle est la fonction vectorielle $V'$ dérivée de la fonction $V$ ?
En déduire que $(\gamma)$ admet une tangente en chacun de ses points.
Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente dans les cas particuliers suivants :

$$\theta = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

4. Construire $(\Gamma)$ avec le maximum de précision. Prendre comme unité de longueur 4 cm.
On indiquera brièvement comment les résultats établis dans les questions précédentes ont été exploitées pour cette construction.

# XXVIII. Pondichéry, série C

**Ex. 521.** ./1971/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Déterminer le chiffre des unités des différentes puissances de 2, écrites dans le système décimal.
Répondre à la même question pour les puissances de 7.
*Application :* Déterminer le chiffre des unités du nombre

$$(3\,548)^9 \times (2\,537)^{31}.$$

**Ex. 522.** ./1971/pondicheryC/exo-2/texte.tex

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des nombres réels strictement supérieur à 2.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}_1$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel $x$ de $\mathbb{R}_1$, associe le nombre réel $y$ défini par

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 9}{x - 2}.$$

Montrer que $f$ admet une application réciproque $f^{-1}$, que l'on définira.
Tracer dans un même plan rapporté à un repère orthonormé les représentations graphiques des applications $f$ et $f^{-1}$.

# XXIX. Reims, série C

**Ex. 523.** ./1971/reimsC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer la dérivée de la fonction $f$ qui, à $x$ supérieur à 1, fait correspondre

$$f(x) = \log(\log x),$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien.

**2.** Établir les inégalités suivantes :

$$0 < \log[\log(k+1)] - \log[\log(k)] < \frac{1}{k \log k}$$

pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, en appliquant le théorème des accroissements finis à $f$ entre $k$ et $(k+1)$.

**3.** On pose

$$S_n = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n}.$$

Utilisant la question 2, établir que $S_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.



Retour page 1

**Ex. 524.** ./1971/reimsC/exo-2/texte.tex

**1.** Établir que $(24n^2+8n)$ est divisible par 16, quel que soit l'entier $n$ positif ou nul.
En déduire que $(2n+1)^4$ est congru à 1 modulo 16.

**2.** Montrer que, si $a$ est un entier positif ou nul, $a^4$ est congru à 1 ou à 0, modulo 16.
En déduire que, si le nombre $16n+15$ ($n$ entier positif ou nul) est mis sous le forme d'une somme de $k$ puissances 4^èmes^ d'entiers, soit

$$16n+15 = x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_k^4,$$

alors, nécessairement, il faut que $k \geqslant 15$.

# XXX. Rennes, série C

**Ex. 525.** ./1971/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction qui associe, à tout nombre réel $x$, le nombre réel

$$f(x) = \left|\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}\right| - 2.$$

**1.** Étudier les variations de $f$.
La fonction $f$ est-elle continue, dérivable pour la valeur $0$ de la variable $x$ ?
Construire la représentation graphique $(\Gamma)$ de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (On prendra 2 centimètres comme unité de longueur).

**2.** $(\Gamma)$ coupe l'axe $y'Oy$ en $A$. Soit $\lambda$ un nombre réel négatif et $\mathscr{D}_\lambda$ la droite d'équation $x=\lambda$.
Exprimer, en centimètres carrés et en fonction de $\lambda$, l'aire $S_\lambda$ de l'ensemble des points dont l'abscisse est comprise entre $\lambda$ et $0$ et qui sont situés entre $(\Gamma)$ et la parallèle à $x'Ox$ menée de $A$.

**Ex. 526.** ./1971/rennesC/exo-2/texte.tex

Donner, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 7.
Un entier $A$ s'écrit $13\,321$ dans le système de numération de base $4$. Quel est le reste de la division de $A$ par 7 ?

# XXXI. Rouen, série C

**Ex. 527.** ./1971/rouenC/exo-1/texte.tex

Trouver, selon les valeurs de $n$ ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division par 11 du nombre

$$a = 10^{2n+4} - 2.10^{n+2} + 1.$$

**Ex. 528.** ./1971/rouenC/exo-2/texte.tex

$ABC$ est un triangle dans lequel l'angle $A$ est aigu. Le point $O$ est le milieu du segment $BC$ ; on désigne pae $(O)$ le cercle de diamètre $[BC]$.
$M$ et $M'$ sont deux points variables de la droite $BC$, conjugués harmoniques par rapport à $B$ et à $C$.

**1.** Montrer que, les cercles $(\Omega)$ passant par $A$, $M$ et $M'$ recoupent la droite $(OA)$ en un point fixe, $A'$.
En déduire que les centres des cercles $(\Omega)$ appartiennent à une droite fixe $(\Delta)$.

**2.** On désigne par $\mathscr{J}$ l'inversion de pôle $A$ qui laisse le cercle $(O)$ invariant.
Déterminer les transformés, par $\mathscr{J}$, de la droite $BC$, d'un cercle $(\Omega)$, et de la droite $(\Delta)$.

Retour page 1

# XXXII. Strasbourg, série C

**Ex. 529.** ./1971/strasbourgC/exo-1/texte.tex

Soit le plan rapporté à un repère orthonormé, les axes de coordonnées étant désignés par $x'Ox$ et $y'Oy$. On appelle $(\Delta)$ la droite d'équation $x=6$, $H$ la projection orthogonale du point $M$ sur la droite $(\Delta)$.

**1.** Soit l'ellipse $(E)$ de foyer $O$ de directrice $(\Delta)$, ensemble des points $M$ du plan tels que

$$2OM = MH. \tag{1}$$

Former son équation cartésienne.

**2.** Un axe $t'Ot$ du plan, repéré par son angle polaire $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{Ot}) = \theta\ (textmodulo\ 2\pi)$, coupe la droite $(\Delta)$ en $P$ et la courbe $(E)$ en deux points $M$ et $M'$ dont les abscisses sur l'axe $\overrightarrow{Ot}$ sont $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$.
On choisit $\overline{OM} > 0 > \overline{OM'}$ et l'on sait que

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OH} \quad ;$$

en utilisant une projection sur l'axe $x'Ox$ et la relation (1), calculer $\overline{OM}$ en fonction de $\theta$.
Sans nouveaux calculs, démontrer que

$$\overline{OM'} = \frac{-6}{2-\cos\theta}.$$

**3.** Démontrer que

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{2}{\overline{OP}},$$

que peut-on en conclure ?

**Ex. 530.** ./1971/strasbourgC/exo-2/texte.tex

On définit la suite de terme général $v_n$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_0 = 1, \\ v_{n+1} = \sqrt{12+v_n} \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

**1.** Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $v_n$ est un nombre réel strictement positif et strictement inférieur à 4.

**2.** On pose $4 - v_n = w_n$. Démontrer que

$$w_{n+1} < \frac{1}{4} w_n \ ;$$

en déduire la limite de $w_n$, puis celle de $v_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

N.B.– on attachera une importance particulière à la clarté de la rédaction du raisonnement par récurrence.

# XXXIII. Toulouse, série C

**Ex. 531.** ./1971/toulouseC/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels $(a \geqslant b)$ tels que $a^2 - b^2 = 1\,620$ et que le plus grand diviseur commun de $a$ et de $b$ soit 6.

**Ex. 532.** ./1971/toulouseC/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = -2\mathrm{i}$. (On donnera les formes trigonométrique et algébrique des nombres trouvés.)

**2.** Trouver les nombres complexes, racines de l'équation du second degré

$$x^2 - 2(3+2\mathrm{i})x + 5 + 14\mathrm{i} = 0.$$



Retour page 1

**3.** Soit l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + 15 + 42\mathbf{i} = 0,$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels. Les déterminer pour que cette équation admette le nombre complexe $2+3\mathrm{i}$ pour solution. (On ne demande pas les autres solutions.)

# XXXIV. Sud Vietnam, série C

Ex. 533. ./1971/sudvietnamC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes l'équation en $z$

$$z^2 + (5\mathbf{i} - 6)z - 1 - \mathbf{i} + 2 = 0.$$

Ex. 534. ./1971/sudvietnamC/exo-2/texte.tex

**1.** Montrer que, quels que soient les nombres réels $x$ et $y$, on a

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y).$$

**2.** Montrer qu'il existe un nombre réel $a$, appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, tel que, quel que soit le nombre réel strictement positif $k$ satisfaisant aux relations

$$a-k \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[ \quad \text{et} \quad a+k \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,$$

les trois nombres $\sin^2(a-k)$, $\sin^2 a$ et $\sin^2(a+k)$ soient trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.

Retour page 1

# Chapitre XIV

# 1972.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, série C

**Ex. 535.** ./1972/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Étudier, suivant la valeur de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne par 6 du nombre $5^n$. Pour quelles valeurs de $n$ le nombre $A = 5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6 ?

**Ex. 536.** ./1972/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre. Un point $M$ se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de façon que, à tout instant $t > 0$, les coordonnées de son vecteur vitesse, $\vec{V}$, soit

$$x' = \frac{3}{2}\sqrt{t} \quad \text{et} \quad y' = \frac{9}{2}.\frac{\ln t}{t}.$$

A l'instant $t = 1$, le point $M$ est en $A(1\ ;\ 0)$. Calculer les coordonnées, $x$ et $y$, de $M$, en fonction de $t$. Former l'équation cartésienne de sa trajectoire et construire cette trajectoire.

## Problème 129

./1972/aixmarseilleC/pb/texte

A chaque couple de réels $(\lambda,\ \mu)$ on associe l'application $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = (\lambda\ \cos x + \mu\ \sin x)\mathrm{e}^x.$$

On désigne ainsi par $(\mathscr{F})$ l'ensemble des fonctions numériques ainsi définies.

**1.** Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des applications continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ; on sait que $(\mathscr{C})$, muni des deux opérations, additions des fonctions et multiplications de fonctions par les réels, est un espace vectoriel su $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C})$.

b) Démontrer que $f$ est la fonction nulle si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$. Démontrer que les deux fonctions $\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_2$ de $(\mathscr{F})$ définies par $\mathrm{E}_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ et $\mathrm{E}_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ constituent une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{F})$.

**2.** On sait que toutes les fonctions de $(\mathscr{F})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ ;

a) Soit $f$ une fonction de $(\mathscr{F})$ ; démontrer que sa fonction dérivée $f'$ appartient aussi à $(\mathscr{F})$.

Soit D l'application, de $(\mathscr{F})$ dans lui-même, qui, à chaque élément, $f$, de $(\mathscr{F})$, fait correspondre sa fonction dérivée.

Démontrer que D est une application linéaire. Quelle est la matrice de D dans la base $(\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2)$ ?

b) Démontrer que D admet une application réciproque. En déduire que tout élément $f$ de $(\mathscr{F})$ a une de ses primitives qui appartient à $(\mathscr{F})$.

*Application :* Calculer

$$\int_0^{\pi} (\lambda\ \cos x + \mu\ \sin x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

**3.** Expliquer sans calcul, pourquoi, étant donné $f$, élément de $(\mathscr{F})$, sa fonction dérivée première $f'$ et sa fonction dérivée seconde $f''$, il existe des nombres réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$ non tous nuls, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

Démontrer que l'on peut choisir $\alpha, \beta$ et $\gamma$, non tous nuls et indépendants de $f$ de telle sorte que

$$\forall f \in \mathscr{F},\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0.$$

**4.** On considère un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A chaque fonction $g$ $g : x \longmapsto (a\ \cos x + b\ \sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$ on fait correspondre le point de (P) de coordonnées $(a,\ b)$. Ainsi, si $M(\lambda,\ \mu)$ est le point de (P) correspondant à la fonction $f : x \longmapsto (\lambda\ \cos x + \mu\ \sin x)\mathrm{e}^x$ de $(\mathscr{F})$, on note $M'$ le point de (P) associé à la fonction dérivée $f'$ de $f$.

Caractériser la transformation T de (P) qui, à tout point $M$, associe le point $M'$.

Retour page 1

# II. Aix Marseille, série E

Ex. 537. ./1972/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer les nombres complexes $Z = X + \mathrm{i}Y$ tels que

$$Z^2 = 3 - 4\mathrm{i}.$$

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E), où $z$ est l'inconnue,

$$4(1-\mathbf{i})z^2 + 4(1+\mathbf{i})z - 3(19-3\mathbf{i}) = 0. \tag{E}$$

Ex. 538. ./1972/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'x$, $y'y$, on considère la courbe $(C)$ d'équation cartésienne

$$4x^2 - 24x + 9y^2 = 0.$$

Montrer qu'il existe un repère orthonormé $X'X$, $Y'Y$ par rapport auquel la courbe $(C)$ admet une équation de la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1.$$

Quels sont la nature de $(C)$ et ses éléments de symétrie ?
Tracer $(C)$ en prenant 2 cm pour unité sur chaque axe.

## Problème 130

./1972/aixmarseilleE/pb/texte

$\ln x$ désigne le logarithme népérien du nombre réel strictement positif $x$, $\log_{10} x$ son logarithme décimal.
On considère la fonction $f$, de $\mathbb{R} - \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

et, pour chaque entier naturel non nul $n$, la fonction $f_n$, $\mathbb{R} - \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

1. a) Prouver que, pour tout réel $x$, distinct de $-1$,

$$f_1(x) = 1 - f(x) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x + 1 - f_1(x).$$

   b) Étudier les variations de la fonction $f_2$ et construire sa courbe représentative $(C_2)$ dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
   Préciser les asymptotes et montrer que le point $\Omega$ de coordonnées $(-1\,;\,-2)$ est entre de symétrie pour $(C_2)$.

   c) Calculer l'aire du domaine plan intérieur au contour fermé déterminé par $(C_2)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = h$ ($h > 0$) (on pourra utilisé un résultat démontré en 1a

2. Étant donné un réel $x$, on considère la somme $S_n(x)$ des $n$ premiers termes de la suite géométrique de raison $-x$ et de premier terme 1.

   a) Montrer que, pour $x \neq -1$, on a l'égalité

$$S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x).$$

   b) Montrer que, pour $|x| < 1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque $n$ tend vers l'infini. En est-il de même pour $x = 1$ ?

3. Soit $x$ un réel positif ou nul. On pose

$$\sigma_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$



Retour page 1

a) Montrer, sans calculer l'intégrale, que

$$\sigma_n(x)+(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\ln(1+x)$$

est une constante. En déduire que, pour tout $x$ réel positif ou nul,

$$\log(1+x)=\sigma_n(x)+(-1)^n\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que
si $n$ est pair, on a $\sigma_n(x)\leqslant\ln(1+x)$
et
si $n$ est impair, on a $\sigma_n(x)\geqslant\ln(1+x)$. Donner, en fonction de $n$ et de $x$, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par $\sigma_n(x)$. On pourra remarquer que $\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1$, si $x\geqslant 0$.

c) *Application numérique :* Calculer une valeur approchée à $10^{-5}$ près, par défaut, de $\ln\dfrac{11}{10}$.
Vérifier, en calculer $\ln\dfrac{11}{10}$ à partir du logarithme décimal $\log_{10}\dfrac{11}{10}$, à l'aide d'une table de logarithmes.

d) Étant donné un nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$, prouver que $\ln(1+x)$ est la limite de $\sigma_n(x)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. En déduire la limite de

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

lorsque $n$ tend vers l'infini.

## III. Aix Marseille remplacement, série C

**Ex. 539.** ./1972/aixmarseillecrem/exo-1/texte.tex

**1.** Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, on a

$$-1<\frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{2x}+1}<1.$$

Étudier la fonction numérique $f$, qui est une application, de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;+1[$, définie par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Construire sa courbe dans un repère orthonormé.

**2.** Démontrer que $f$ est une bijection ; pour $x$ donné dans $]-1\,;+1[$n calculer $f^{-1}(x)$.

**Ex. 540.** ./1972/aixmarseillecrem/exo-2/texte.tex

**1.** $u$ désigne un nombre complexe différent de $-1$, de module $1$ et d'argument $\theta$. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1-u}{1+u}$. En déduire le module et l'argument du nombre complexe $z$ tel que

$$\frac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z}=u.$$

**2.** Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$(2+\mathrm{i}z)^5=(2-\mathrm{i}z)^5.$$

## PROBLÈME 131

./1972/aixmarseillecrem/pb/texte

-Partie A-

Soit $(E)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $B=\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de $(E)$ dans laquelle seront définies les coordonnées de tous les vecteurs de $(E)$. On considère l'application $f$ de $(E)$ dans lui-même qui, à $\vec{V}\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$, fait correspondre $\vec{V}'\,(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ tel que

$$\begin{cases} x'=x\\ y'=x+y,\\ z'=y+z.\end{cases}$$

1. Démontrer que $f$est une application linéaire bijective de $(E)$ sur lui-même. Quel est l'ensemble des vecteurs de $(E)$ invariants par $f$ ?
2. Soit $\vec{U}\,(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ un vecteur quelconque de $(E)$ et $(\vec{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dans $(E)$ telle que

$$\begin{cases} \vec{V}_0=\vec{U}\\ \text{et}\\ \forall n\geqslant 1,\ \vec{V}_n=f(\vec{V}_{n-1}),\end{cases}$$

démontrer que, pour tout entier naturel $n$, les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n\ ;\ z_n)$ de $\vec{V}_n$ dans la base $B$ sont

$$\begin{cases} x_n=x_0,\\ y_n=nx_0+y_0,\\ z_0=\dfrac{n(n-1)}{2}x_0+ny_0+z_0.\end{cases}$$

-Partie B-

Soit $(\mathscr{E})$ un espace affine associé à $(E)$ et $\mathscr{R}=\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère cartésien de $(E)$. Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $M_n$ le point de $(\mathscr{E})$ dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ sont celles de $\vec{V}_n$ dans $B$. On suppose que $M_0$ est fixé.

1. a) Lorsque $x_0=y_0=0$, comment les points $M_n$ sont-ils disposés ?
   b) Même question lorsque $x_0=0$ et $y_0\neq 0$.
   c) Lorsque $x_0\neq 0$, démontrer que tous les points $M_n$ sont situés dans un même plan $(P)$ et appartiennent à une parabole $(\Gamma)$, dont on formera l'équation dans le repère cartésien $(M_0,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
2. On suppose que $x_0=2,\ y_0=0,\ z_0=0$ et que le repère$\mathscr{R}$ est orthonormé.
   a) Que devient l'équation de $(\Gamma)$ ? Construire dans le plan $(P)$ la parabole $(\Gamma)$ et marquer les points $M_1,\ M_2$ et $M_3$.
   b) Démontrer que les milieux des segments $[M_nM_{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}$, appartiennent à une même parabole, $(\Gamma')$, et que $(\Gamma')$ est tangente à ces différents segments.

# IV. Aix Marseille remplacement, série E

**Ex. 541.** ./1972/aixmarseilleErem/exo-1/texte.tex

Construire la parabole, $(\mathscr{P})$, dont l'équation par rapport à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ est

$$y=x^2+2.$$

Étudier la fonction, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f:x\longmapsto f(x)=\frac{x^4+2x^2-1}{x^2}.$$

Construire la courbe, $(\mathscr{C})$, d'équation $y=f(x)$ et la placer par rapport à la parabole $(\mathscr{P})$.
Calculer l'aire du domaine plan $(\Delta)$ délimité par $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{P})$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\lambda$, $\lambda$ étant un nombre réel supérieur à 1.



Retour page 1

**Ex. 542.** ./1972/aixmarseilleErem/exo-2/texte.tex

Soit la système de deux équations

$$\begin{cases} xy = \alpha \dfrac{x}{y} = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels positifs, $x$ et $y$ les inconnues.

1. Résoudre le système (1) dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\alpha = 2{,}151\ 4$ et $\beta = 0{,}513$.
   En utilisant les tables de logarithmes, donner les encadrements des solutions de (1) à $10^{-3}$ près.

## Problème 132

./1972/aixmarseilleErem/pb/texte

Étant donné un plan affine euclidien $(P)$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on désigne par $A$ le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.
Un point $M(X\ ;\ Y)$ du plan $(P)$ a pour affixe complexe $Z = X + \mathrm{i}Y$. Un point $m(x\ ;\ y)$ a pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Soit l'application $f$ de $(P) - \{A\}$ vers $(P)$ définie par

$$f : m \longmapsto M = f(m), \quad \text{tel que } Z = \frac{z-3}{z-1}.$$

1. a) Quels sont les points invariants par l'application $f$ ? Comment faut-il choisir $m$ pour que $Z = \mathrm{i}z$ ?
   b) Déterminer les coordonnées $X$ et $Y$ de $M = f(m)$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ de $m$.
2. a) Déterminer et construire l'ensemble $(C)$ des points $m$ d'affixe $z$ ayant pour image par $f$ un point $M$ d'affixe $Z$ imaginaire pur. Quelle est l'intersection de $(C)$ et de $y'y$ ?
   b) Déterminer et construire l'ensemble $(C')$ des points $M$ d'affixe $Z$ images par $f$ des points $m$ d'affixe $z$, tels que $z$ soit imaginaire pur. (On exprimera $y$ en fonction de $Y$ et de $X-1$ et l'on utilisera la relation entre $y$ et $Y$.)
   c) Quelle est l'application $f^3$ ($f^3 = f \circ f \circ f$). En déduire l'image de $(C')$ par $f$.
3. a) Déterminer l'ensemble des points $m$ dont l'image, $M$, appartient à la droite $(D)$ passant par l'origine et telle que l'angle des droites $x'x$ et $(D)$ ait pour mesure $\theta \pmod{\pi}$.
   b) Montrer que le résultat obtenu à la question 2a peut se déduire des résultats de la question 3a.
4. Quelles sont les racines de l'équation

$$\frac{(z-3)^n}{(z-1)^n} = 1,$$

   dans laquelle $z$ est l'inconnue et $n$ un entier positif donné ?
   Peut-on, sans résoudre l'équation, prévoir que les points $m$, dont les affixes sont les racines de cette équation, se trouvent sur une même droite ?

# V. Amiens, série C

**Ex. 543.** ./1972/amiensC/exo-1/texte.tex

Soit l'application définie dans $\mathbb{C}$ par

$$z \longmapsto z' = (\mathrm{i} - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(2\sqrt{3} + 1).$$

**1.** Caractériser géométriquement la transformation qui, à tout point $M$ du plan complexe, d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$.

**2.** Le point $M(x\ ;\ y)$ ayant pour homologue la point $M'(x'\ ;\ y')$, exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.

**3.** Déterminer le transformé de la droite passant par le point $A\left(1 - 2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{V}\left(\sqrt{3}\ ;\ 1\right)$.
Justifier le résultat obtenu.

**Ex. 544.** ./1972/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}.$$

**1.** a) Faire une étude détaillée de $f$ : l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité, et le tableau de variations.

b) Déterminer les tangentes à $(C)$ au point $A(1\ ;\ 0)$ et $B(-1\ ;\ 0)$.

c) Montrer que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ d'équations respectives $y_1=\frac{1}{2}x$ et $y_2=-\frac{1}{2}x$ sont asymptotes à $(C)$.

**2.** a) Tracer $(C)$ ; en déduire l'ensemble, $(\Gamma)$, des points $M$ dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient la relation

$$4y^2=\left|x^2-1\right|.$$

b) Montrer que $(\Gamma)$ est la réunion de deux coniques, dont on précisera la nature.

## Problème 133

./1972/amiensC/pb/texte

On considère la fonction numérique $f$ d'une variable réelle définie par

$$f(x)=x\log\frac{2x-1}{x},$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un système d'axes orthonormé (l'unité sur chaque axe est 2 cm).

**1.** a) Étudier le domaine de définition.

b) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes des intervalles du domaine de définition.
Pour étudier la limite de $f(x)$, lorsque $x$ tend vers $0$, par valeurs négatives, on pourra poser $-x=u$.

**2.** Étudier les variations de la fonction dérivée, $f'$ ; en déduire le signe de $f'(x)$.

**3.** a) Démontrer que la droite d'équation

$$y=x\log 2-\frac{1}{2}$$

est asymptote à la courbe $(C)$.

Pour le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\log\frac{2x-1}{x}-x\log 2\right)$, on pourra poser $\frac{2x-1}{2x}=1+v$.

b) On considère la fonction numérique $g$ d'une variable réelle définie par $g(x)=\log x-x+1$.
Étudier les variations de $g$ ; en déduire que

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\qquad \log x\leqslant x-1.$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$x\log\frac{2x-1}{2x}+\frac{1}{2}\leqslant 0,\qquad \text{pour } x>\frac{1}{2},$$

$$\text{et}\qquad x\log\frac{2x-1}{2x}+\frac{1}{2}\geqslant 0,\qquad \text{pour } x<0.$$

En déduire la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

**4.** Donner le tableau de variation et tracer la courbe $(C)$.

**5.** Calculer, en utilisant l'intégration par parties, une primitive de $f(x)$.

**6.** Calculer, en centimètres carrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes, la'ire de la surface comprise entre la courbe $(C)$, l'asymptote oblique et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.



Retour page 1

## VI. Amiens, série E

**Ex. 545.** ./1972/amiensE/exo-1/texte.tex

Même sujet que pour la série C : Exercice 1 série C

**Ex. 546.** ./1972/amiensE/exo-2/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère un point mobile, $M$ dont les coordonnées s'expriment, en fonction du temps $t$ par

$$x=4-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t,\qquad y=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t,$$
$$\text{et}\qquad z=4+3\sin t.$$

**1.** Montrer que le point $M$ appartient au plan $(P)$ d'équation $x+y=8$. Calculer la distance du point $M$ au point, $\Omega$, de coordonnées $(4\ ;\ 4\ ;\ 4)$. En déduire la nature de la trajectoire du point $M$.
Calculer les composantes du vecteur vitesse de $M$ au temps $t$.
Quelle est la nature du mouvement de $M$ ?

**2.** On prend $xOy$ comme plan horizontal de projection et $yOz$ comme plan frontal de projection. Dessiner l'épure du plan $(P)$ défini par ses traces, ainsi que l'épure de la trajectoire de $M$. Dessiner le vecteur vitesse au temps $t=0$.
(L'épure sera faite sur une feuille de papier millimétré et l'unité sera prise égale à 1 cm.)

### Problème 134 ./1972/amiensE/pb/texte

Même sujet que pour la série C : Problème série C

## VII. Besançon, série C

**Ex. 547.** ./1972/besanconC/exo-1/texte.tex

Donner la nature de la conique d'équation :

$$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0,$$

puis la dessiner en repère orthonormé en précisant ses axes, ses foyers et ses directrices.

**Ex. 548.** ./1972/besanconC/exo-2/texte.tex

Développer, par la formule du binôme de Newton, les polynômes suivants :

$$(x+1)^{2n},\qquad (x-1)^{2n}\qquad\text{et}\qquad (x^2-1)^{2n}.$$

En déduire que la somme suivante :

$$1-\left(\mathrm{C}_{2n}^{1}\right)^2+\left(\mathrm{C}_{2n}2\right)^2-\left(\mathrm{C}_{2n}^{3}\right)^2+\cdots+(-1)^{2n}\left(\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)^2,$$

est égale à

$$(-1)^n\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!}\right].$$

Pour cela, on étudiera le coefficient du terme en $x^{2n}$ dans le produit des deux premiers polynômes, puis dans le troisième polynôme.

### Problème 135 ./1972/besanconC/pb/texte

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$x\longmapsto f(x)=x\mathrm{e}^{-x+1}.$$

**1.** Rappeler le limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, puis étudier la fonction et la représenter en repère orthonormé. On trouvera le point d'inflexion, qui sera nommée $(\gamma)$, c'est-à-dire le point de $(\gamma)$ en lequel $f''(\gamma)=0$.

**2.** Soit le nombre réel donné $\lambda > 0$.
Trouver l'aire du domaine situé entre la courbe, l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = \lambda$.
Pour cela, on cherchera une primitive de $f$ de la forme $x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$.
Cette aire a-t-elle une limite pour $\lambda \to +\infty$ ?

**3.** On considère maintenant le mobile, $M$ , suivant :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t\mathrm{e}^{-t+1}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trouver la trajectoire du mobile, son vecteur vitesse, $\vec{V}$, et son vecteur accélération, $\Gamma$.
On rappelle que le mouvement est dit accéléré dans l'intervalle $]t' ; t''[$ de $\mathbb{R}$, si, dans cet intervalle, $\left\|\vec{V}\right\|$ est une fonction croissante du temps, c'est-à-dire si $\vec{V}.\Gamma > 0$, et retardé si c'est une fonction décroissante, c'est-à-dire$\vec{V}.\Gamma < 0$.
Préciser dans quels intervalles de $\mathbb{R}$ le mouvement est accéléré et dans quels intervalles il est retardé.
Préciser aussi le sens du mouvement.

**4.** En utilisant le calcul, déjà fait, de $f'(x)$ et de $f''(x)$, exprimer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de $f^{(n-1)}(x)$. Exprimer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de $f(x)$, $n$ et $x$.

# VIII. Besançon, série E

**Ex. 549.** ./1972/besanconE/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$, définie dans $\mathbb{R} - \{0\}$ par

$$y = f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

**2.** Calculer $f(x)+f(-x)$ et en déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de la fonction $f$.
Construire cette courbe.

**3.** Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque, $f^{-1}$. Expliciter cette fonction sous la forme $y = f^{-1}(x)$.

**Ex. 550.** ./1972/besanconE/exo-2/texte.tex

**1.** Calculer la dérivée de $x \sin 2x$ ; en déduire une primitive de $x \cos 2x$, la variable étant $x$.

**2.** Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 2x \,\mathrm{d}x \ ;$$

en donner une valeur approchée, à 0,001 près.

## Problème 136

./1972/besanconE/pb/texte

Dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des complexes, on désigne par $z$ le nombre $x + y\mathrm{i}$, par $\overline{z}$ son conjugué $x - y\mathrm{i}$ et par $z'$ le nombre $x' - y'\mathrm{i}$. Soit $a + b\mathrm{i}$ un complexe particulier, tel que $a^2 - b^2 \neq 0$.
D'autre part, dans le plan (P), rapporté à un repère formé d'un point $O$ et une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on associe aux complexes $z$ et $z'$ respectivement les points $M$, de coordonnées $(x ; y)$, et $M'$, de coordonnées $(x' ; y')$. Soit $A$ le point de coordonnées $(a ; b)$.
On suppose alors que les complexes $z$ et $z'$ vérifient la relation

$$z' = az + b\mathrm{i}\overline{z} \ ;$$

le point $M'$ est, par conséquent, l'image du point $M$ par une application du plan (P) dans lui-même.
Il est clair que cette application dépend du point $A$ et l'on note $M' = f_A(M)$.
Soit F l'ensemble des applications $f_A$, lorsque le point $A$ varie de telle sorte que $a^2 - b^2 =\neq 0$.



Retour page 1

1. Quelle est la partie de (P) que peut décrire le point $A$ ?
   Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ du point $M'$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ du point $M$ et des constantes $a$ et $b$.
   De quel point le point $A$ est-il l'image par $f_A$ ?
2. Soit $A'$ un point de coordonnées $(a' ; b')$, telles que $a'^2 - b'^2 \neq 0$ ; il lui correspond une application $f_{A'}$ de l'ensemble F.
   Soit $M''$ le point image de $M'$ par $f_{A'}$.
   Calculer les coordonnées $(x'' ; y'')$ du point $M''$ en fonction de $x$ et de $y$ et des constantes $a$, $b$, $a'$ et $b'$.
   En déduire que l'application composée $f_{A'} \circ f_A$ des applications $f_A$ et $f_{A'}$ appartient à l'ensemble F.
   Montrer, enfin, que F est un groupe commutatif pour la loi de compositions des applications.
3. a) Le point $M'(x' ; y')$ étant l'image du point $M(x ; y)$ par l'application $f_A$, calculer $x' + y'$ et $x' - y'$ en fonction de $x$ et de $y$.
   En déduire qu'il existe deux droites, $(\Delta)$ et $(\Delta')$, que l'on définira, et qui sont invariantes par $f_A$.
   b) Soit $M_1(x_1 ; y_1)$ l'image du point $M(x ; y)$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $a + b$.
   Calculer les coordonnées $(x_1 ; y_1)$ du point $M_1$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est parallèle à la seconde bissectrice des axes du repère.
   c) La droite $(M_1M')$ rencontre la première bissectrice en un point $H$ de coordonnées $(x_0 ; y_0)$. Montrer que
   $$x_0 = \frac{x' + y'}{2} = \frac{x_1 + y_1}{2} ;$$
   en déduire la valeur du rapport $\dfrac{\overrightarrow{HM'}}{\overrightarrow{HM_1}}$ en fonction de $a$ et $b$.
4. On suppose désormais que $a^2 - b^2 = 1$.
   a) Montrer que les courbes, qui vérifient l'équation
   $$x^2 - y^2 = k \quad (k \in \mathbb{R}),$$
   sont invariantes par $f_A$.
   b) Le point $M$ décrivant le cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon 1, former l'équation que vérifient les coordonnées, $x'$ et $y'$, du point $M'$. On adopte pour nouvelle base (P) les vecteurs
   $$\vec{I} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \vec{j} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}.$$
   Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ du point $M'$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction $(X' ; Y')$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.
   En déduire l'équation que vérifient $X'$ et $Y'$ lorsque $M'$ décrit le cercle $(C)$. Quelle est la nature de la courbe décrite par le point $M'$ ?

## IX. Bordeaux, série C

Ex. 551. ./1972/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Résoudre

a dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation
$$x^2 + x + 6 = 0.$$

b dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système
$$\begin{cases} \dot{2}\,x - \dot{4}\,y = \dot{2}, \\ x + \dot{5}\,y = \dot{2}\,. \end{cases}$$



Retour page 1

**Ex. 552.** ./1972/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Soit un carré (ABCD) ; déterminer un ensemble de trois réels $a$, $b$ et $c$ pour que le point $O$ milieu du côté [AD] soit barycentre de A, B et C affectés des coefficients $a$, $b$ et $c$. (On pourra choisir un système d'axes.) Déterminer l'ensemble des points, $M$, du plan du carré tels que

$$2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=0.$$

**Ex. 553.** ./1972/bordeauxC/exo-3/texte.tex

Dans tout l'énoncé le symbole e désigne la base du logarithme népérien.

A) Dans tout ce paragraphe, $x$ désigne un nombre réel et $t$ une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a

$$\int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, que

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

2. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, où $n\in\mathbb{N}^\star$. Démontrer l'égalité

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer par récurrence sur $n$ la formule

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

B) On pose

$$P_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$
$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
$$\text{et } J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $(a,\ b,\ c)\in\mathbb{Z}^3$, on considère $H = a\mathrm{e}+b+c\mathrm{e}^{-1}$.
   Dans les deux premières questions $|a|+|c|\neq 0$.
   a) Démontrer que l'on a

$$n!H = n!\left[ap_n(1)+b+cP_n(-1)\right]+aI_n+(-1)^{n+1}cJ_n.$$

   b) Démontrer que l'on a

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n+1}\qquad 0\leqslant J_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

   En déduire la limite de $h(n) = aI_n+(-1)^{n+1}cJ_n$ quand $n$ augmente indéfiniment.

Retour page 1

c) Démontrer que

$$Q_n = n!\,[aP_n(1)+b+cP_n(-1)]$$

est un entier relatif.

Démontrer que, pour tout entier $n$, avec $n > 1$, on a

$$Q_n \equiv a+(-1)^n c \pmod{n}.$$

2. Si l'on a $|a| \neq |c|$, démontrer que l'on peut trouver une entier $n_0$ tel que, pour tout entier $n$ vérifiant $n > n_0$, $Q_n$ n'est pas nul.

   En déduire qu'il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $Q_n \neq 0$.

3. a) Démontrer, en utilisant en particulier la question B(1)b , que $H$ ne peut être nul qui si $a = b = c = 0$.

   b) $\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des nombres rationnels, démontrer que e ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

# X. Bordeaux, série E

**Ex. 554.** ./1972/bordeauxE/exo-1/texte.tex

1. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien où l'on a défini une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On désigne par $f$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

   Démontrer qu'il existe une rotation, $\rho$, d'angle $\theta$, et une application linéaire, $g$, de $E$ dans $E$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où $\alpha \geqslant \beta$, telles que l'on ait

$$f = \rho^{-1} \circ g \circ \rho.$$

   Déterminer $\theta$, $\alpha$ et $\beta$.

2. On considère l'espace affine, $\mathscr{E}$, défini par le point $O$, et l'espace vectoriel $E$. On considère l'application, $h$, de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, associée à $f$ et telle que $h(O) = O$.

   Démontrer que l'image par $h$ du cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une ellipse que l'on caractérisera.

**Ex. 555.** ./1972/bordeauxE/exo-2/texte.tex

1. Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x$.

   En déduire que, quel que soit le nombre réel $x$, on a $\mathrm{e}^x > x$.

2. Démontrer, par récurrence sur $n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$, que, pour tout nombre réel $x$ positif, on a $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^n}{n!}$.

   En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

## Problème 137

./1972/bordeauxE/pb/texte

Soit $(D)$ une droite sur laquelle on a défini un repère $(O;\vec{\imath})$. On désigne par $A_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ le point d'abscisse $k$ et soit $M$ un point d'abscisse $x$.

On définit l'application, $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à l'abscisse de tout point $M \in (D)$, associe le produit des distances de $M$ aux deux points $A_k$ les plus proches.

**1.** a) Vérifier que, si $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de $x$, on a

$$f(x) = [x-\mathrm{E}(x)]\,[\mathrm{E}(x)+1-x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que $f$ est une fonction périodique.

c) La fonction $f$ est-elle continue et dérivable sur $[0\,;1]$ ?
Est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

d) Étudier les variations de $f$, pour $x$ appartenant à $[0\,;1]$. On considère une repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; tracer avec soin par rapport à ce repère l'arc de courbe correspondant à $x\in[0\,;1]$.
En déduire le tracé de la courbe d'équation $y=f(x)$, pour $x\in\mathbb{R}$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie par

$$g(x)=[\mathrm{E}(x+1)]\,[f(x)]\,.$$

a) Calculer $g(x)$ pour $x$ appartenant à $[k\,;k+1]$, $k\in\mathbb{Z}$.
la fonction $g$ est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ?
Construire la courbe $(\Gamma)$ d'équation $y=g(x)$, pour $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire, $A_k$, du domaine compris entre $(\Gamma)$, l'axe des $x$ et les droites d'équations respectives $x=k$ et $x=k+1$.

c) Calculer $S_k=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=k}A_i$.

# XI. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 556.** ./1972/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\frac{1}{2}\log|x-1|-\log|x+1|=0$$

($\log$ désigne le logarithme népérien).

**Ex. 557.** ./1972/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Les nombres $a$ et $b$ étant deux premiers fixes, on considère l'ensemble (E) des entiers naturels n'admettant pas d'autres diviseurs que $a$ et $b$.

1. Soit $n$ un élément de (E), $n=a^\alpha b^\beta$, démontrer que le nombre de diviseurs de $n$ est $(\alpha+1)(\beta+1)$.
2. $x$ et $y$ étant deux éléments de (E), tels que le nombre de diviseurs de $x$ soit 21 et celui des diviseurs de $y$ soit 10.
   a) Donner toutes les formes possibles de décomposition de $x$ et $y$ en produit de facteurs premiers.
   b) Déterminer les nombres $x$ et $y$ ainsi que $a$ et $b$ sachant que le plus grand diviseur commun de $x$ et $y$ est 18.

**PROBLÈME 138** ./1972/bordeauxCrem/pb/texte

On désigne par (E) l'ensemble des applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on munit (E) des deux lois suivantes :

(1) $f$ et $g$ étant deux éléments de (E), on définit $f+g$, élément de (E) par

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad (f+g)(t)=f(t)+g(t)\ ;$$

(2) $f$ étant un éléments de (E) et $\lambda$ un nombre réel, on définit $\lambda f$, élément de (E) par

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad (\lambda f)(t)=\lambda f(t).$$

On rappelle que (E) muni des ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère les deux éléments $f_1$ et $f_2$ de (E) définis par

$$f_1: t\longmapsto \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad f_2: t\longmapsto t\mathrm{e}^t.$$

On désigne par (F) le sous-ensemble de (E) défini par

$$(\mathrm{F})=\left\{\lambda_1 f_1+\lambda f_2,\ (\lambda_1,\ \lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Retour page 1

A) 1. a) Démontrer que (F) est un sous-espace vectoriel de (E).

b) Démontrer que $f_1$ et $f_2$ sont linéairement indépendants. En déduire la dimension de (F).

2. a) Déterminer l'élément $f$ de (F) tel que $f(1)=0$ et $f(0)=-1$. Étudier et représenter graphiquement les variations de $t \longmapsto f(t)$.

b) En utilisant la formule d'intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Démontrer que $t_1$ et $t_2$ étant deux réels distincts, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux réels quelconques, il existe un élément unique de (F) tel que

$$f(t_1)=\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad f(t_2)=\alpha_2.$$

B) Soit $\alpha$ un nombre réel donné, démontrer que $\mathscr{T}_\alpha : f \longmapsto g$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t)=f(t+\alpha)$$

est une application linéaire de (E) dans (E), (E) désignant l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathscr{T}_\alpha$ est une application bijective de (E) sur (E).
   Démontrer qu'il existe un nombre réel $\beta$ tel que $\mathscr{T}_\beta=(\mathscr{T}_\alpha)^{-1}$.
2. Démontrer que $\mathscr{T}_\alpha((F)) \subset (F)$.
   On désigne par $T_\alpha$ la restriction de $\mathscr{T}_\alpha$ à (F). Démontrer que $T_\alpha$ est un automorphisme de (F), c'est-à-dire une application linéaire bijective de (F) sur (F).
3. Quelle est la matrice de $T_\alpha$ dans la base $(f_1,\ f_2)$ ?

C) A tout $f$ de (F) on associe sa fonction dérivée $f'$.

1. Démontrer que l'on définit de cette façon une application (notée D) de (F) dans (F).
2. Démontrer que (D) est un automorphisme de (F).
3. a) Quelle est la matrice de $(\mathrm{D})^1$, de $(\mathrm{D})^2$ $\left[(\mathrm{D})^1=(\mathrm{D}),\ (\mathrm{D})^2=(\mathrm{D})\circ(\mathrm{D})\right]$ dans la base $(f_1,\ f_2)$ ?

   b) On définit $(\mathrm{D})^n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad (\mathrm{D})^{n+1}=(\mathrm{D})\circ(\mathrm{D})^n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad (\mathrm{D})^n(f)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}T_n(f).$

## XII. Bordeaux remplacement, série E

**Ex. 558.** ./1972/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Même sujet qu'en série C : Bordeaux remplacement série C exercice 1

**Ex. 559.** ./1972/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

L'unité de longueur est le centimètre.
Représenter le cône $(\Gamma)$ de révolution dont le sommet est le point $S(0\ ;\ 7\ ;\ 8)$ et dont la base est le cercle du plan horizontal de centre $\omega(0\ ;\ 7\ ;\ 0)$ et de rayon 6.
Représenter le plan $(\Pi)$, de bout, déterminé par son intersection $I(0\ ;\ 7\ ;\ 4)$ avec l'axe du cône, et son intersection $J(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$ avec le ligne de terre.

1. Quelle est la nature de l'intersection (C) de $(\Gamma)$ et de $(\Pi)$.
2. Déterminer les intersections de (C) et des plans de cote 6 et de cote 2 ; déterminer les tangentes à (C) aux points trouvés.

### Problème 139

./1972/bordeauxErem/pb/texte

Même sujet qu'en série C : Bordeaux remplacement série C problème

# XIII. Caen, série C

Ex. 560. ./1972/caenC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction, de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=\frac{x\log x}{x-1},\quad \text{pour } x\neq 1 \qquad \text{et} \qquad f(1)=1.$$

**1.** La fonction $f$ est-elle continue dans $]0\,;+\infty[$? Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 1$.

**2.** Soit $g$ la fonction de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $g(x)=x-1-\log x$.
Étudier le sens de variation de $g$ ; en déduire le signe de $g(x)$ et les variations de $f$.

Ex. 561. ./1972/caenC/exo-2/texte.tex

Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels donnés. On se propose de déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x\in\mathbb{Z},\\ x\equiv a\;[9],\;\; x\equiv b\;[11].\end{cases}$$

**1.** Démontrer que toutes les solutions sont congrues à un même nombre modulo 99. (On pourra utiliser l'identité de Bezout.)

**2.** Déterminer l'ensemble des solutions du système.

## Problème 140

./1972/caenC/pb/texte

Soit (E) un plan affine rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes Ox et Oy. Il a pour espace vectoriel associé le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Soit deux points distincts de (E), $M$ de coordonnées $(a\;;\;b)$ et $M'$ de coordonnées $\left(a'\;;\;b'\right)$.
On désigne par $P$ et $P'$ les projections respectives de $M$ et de $M'$ sur $Ox$ parallèlement à $Oy$, par $Q$ et $Q'$ les projections respectives de $M$ et $M'$ sur $Oy$ parallèlement à $Ox$.

**1.** a) On suppose d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{PQ'}$ et $\overrightarrow{P'Q}$ sont non nuls. Écrire, en fonction de $a$, $b$, $a'$et $b'$, les équations des trois droites $PQ'$, $P'Q$ et $MM'$ . Démontrer que ces trois droites sont, soit parallèles, soit concourantes.

b) Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{PQ'}$ est nul, quelle est la position relative des deux droites $P'Q$ et $MM'$? Examiner aussi le cas où le vecteur $\overrightarrow{P'Q}$est nul.

**2.** Soit un réel, $\alpha$, non nul et le vecteur $\vec{t}+\vec{\imath}=\alpha\vec{\jmath}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante (liant $a$, $b$, $a'$, $b'$ et $\alpha$) pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{P'Q}$, $\overrightarrow{MM'}$ soient colinéaires à $\vec{t}$.
Démontrer que la condition précédente définit une application $f_\alpha$ de (E) dans (E), telle que

$$\begin{cases} f_\alpha(M)=M' \quad \text{pour } M\neq O,\\ f_\alpha(O)=O.\end{cases}$$

Démontrer que $f\alpha$ est affine et involutive. Démontrer que $f_\alpha$ est une symétrie, dont on précisera les éléments.

**3.** Soit $\varphi_\alpha$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à $f_\alpha$. Écrire la matrice de $\varphi_\alpha$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit $\Phi$ l'ensemble des applications $f_\alpha$ telles que $\alpha$ appartienne à l'ensemble des réels non nuls. Soit $\beta$ et $\gamma$ deux réels non nuls, calculer les matrices de $\varphi_\beta\circ\varphi_\gamma$ et de $\varphi_\gamma\circ\varphi_\beta$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Dans quel cas ces deux matrices sont-elles égales ?
Soit $\delta$ un réel non nul. Démontrer que $\varphi_\beta\circ\varphi_\gamma\circ\varphi_\delta$ appartient à $\Phi$.
Démontrer que le composée d'un nombre impair d'éléments de $\Phi$ est un élément de $\Phi$.



Retour page 1

# XIV. Caen, série E

**Ex. 562.** ./1972/caenE/exo-1/texte.tex

Soit (E) l'espace affine euclidien de dimension trois rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.On considère les trois points

$$A \text{ de coordonnées } (-1\ ;\ 2\ ;\ 3),$$
$$B \text{ de coordonnées } (0\ ;\ 4\ ;\ 4),$$
$$C \text{ de coordonnées}(2\ ;\ 0\ ;\ 2).$$

Calculer l'aire du triangle $(ABC)$.

Calculer séparément $\left|\text{Cos}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\right|$ et $\left|\text{Sin}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\right|$.

**Ex. 563.** ./1972/caenE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = 1-x^2, \qquad \text{pour} \qquad x \in ]-\infty\,;-1[,$$
$$f(x) = \log(2-x^2) \qquad \text{pour} \qquad x \in [-1\,;+1],$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad \text{pour} \qquad x \in ]+1\,;+\infty[.$$

1. Étudier la continuité de la fonction $f$.
2. Étudier les variations de $f$. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites à droite et à gauche aux points $-1$ et $1$ de $f'(x)$. Construire la représentation graphique de $f$.

## Problème 141

./1972/caenE/pb/texte

Soit (E) le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $Ox$ et $Oy$. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des transformations du plan (E).

1. Soit $S$ la transformation de $\mathscr{S}$ qui, au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre la point $M'$ d'affixe $z'$ tel que
$$z' = \frac{(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}}.$$
Quelle est la nature de cette transformation ? Donner ses éléments. Construire l'image du point $M_0$ de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
2. Soit $f$ l'application, de $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$f(x) = \frac{-x+3}{x+1}.$$
Construire la courbe représentative $(C)$ de la variation de $f$. Quelle est sa nature ?
Soit P le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$. Donner l'équation de $(C)$ dans le repère (P, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Déterminer la transformée $(C')$ de $(C)$ par $\mathscr{S}$ et la construire. Quelle est son équation dans le repère (P, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
3. Soit $(D)$ le domaine limité par la courbe $(C)$ et les droites, dont les équations, dans le repère (P, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) d'axe P$X$ et P$Y$, sont respectivement
$$X-Y=0, \qquad Y=0 \qquad \text{et} \qquad X=2.$$
Calculer l'aire du domaine $(D)$.
4. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs
$$\vec{u} = \frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}.$$
Donner une équation de $(C')$ dans le repère (P, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Soit $(D')$ le domaine limité par $(C')$ et par les transformées des trois droites précédentes par $\mathscr{S}$.
Calculer l'aire de $(D')$.

Retour page 1

# XV. Caen, séries C & E remplacement

**Ex. 564.** ./1972/caenCErem/exo-1/texte.tex

Soit l'équation

$$\begin{cases}(x\ ;\ y)\in\mathbb{Z}^2,\\ 23x+56y=3.\end{cases}$$

1. Déterminer une solution particulière de cette équation. (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide.)
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation.

**Ex. 565.** ./1972/caenCErem/exo-2/texte.tex

Soit $f(z)=z^3+az^2+bz+c$.

1. Calculer les trois nombres complexes $a$, $b$ et $c$ sachant que l'on a

$$f(-\mathrm{i})=0,\ f(\mathrm{i})=-8(1+\mathrm{i})\qquad\text{et}\qquad f(1)=-6+2\mathrm{i}.$$

2. $a$, $b$ et $c$ ayant les valeurs trouvées dans 1, résoudre l'équation

$$\begin{cases}z\in\mathbb{C},\\ f(z)=0.\end{cases}$$

# XVI. Cambodge, Laos & Japon, série C

**Ex. 566.** ./1972/cambodgeC/exo-1/texte.tex

Trouver le PGCD des nombres 1 683 et 969.
En déduire tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs, solutions des équations suivantes :

a) $969x?1683y=51$ [on vérifiera que le couple $(7\ ;\ 4)$est une solution] ;

b) $969x?1683y=102$ ;

c) $969x?1683y=84$.

**Ex. 567.** ./1972/cambodgeC/exo-2/texte.tex

Calculer, par la méthode d'intégration par parties, l'intégrale

$$\int_0^x t^2\sin t\,\mathrm{d}t.$$

## Problème 142

./1972/cambodgeC/pb/texte

On considère un espace vectoriel, $V_2$ , de dimension 2, de base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et un espace affine associé $(E_2)$ dont $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère.

1. Soit $f_{a,c}$ l'application affine de $(E_2)$ vers $(E_2)$, qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ , telles que

$$\begin{cases}x'=x-y+c,\\ y'=ax-y+2c,\end{cases}$$

où $a$ et $c$ sont des nombres réels donnés.

a) Pour quelles valeurs de $a$ l'application $f_{a,c}$ est-elle une bijection ?

b) Déterminer, suivant les valeurs de $a$ et de $c$, l'ensemble des points invariants par $f_{a,c}$.

c) Expliciter l'application composée $f_{a,c}\circ f_{a,c}$ et reconnaître sa nature géométrique suivant les valeurs de $a$ et de $c$.



Retour page 1

2. . On étudie l'application $f = f_{0,-2}$ c'est-à-dire l'application de $(E_2)$ vers $(E_2)$ définie par

$$\begin{cases} x' = x - y - 2, \\ y' = -y - 4. \end{cases}$$

a) Démontrer que $f$est involutive et la caractériser géométriquement.

b) Quelle est la figure transformée d'une droite de $(E_2)$ ? Quelles sont les droites globalement invariantes ?

c) Trouver l'équation cartésienne de la figure $(C')$ transformée du cercle $(C)$ de centre $\omega(-2\ ;\ -4)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

3. a) Étudier les variations de la fonction, $g$, de la variable réelle $x$, telle que

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{16 - x^2}).$$

b) Tracer sa courbe représentative, $(\Gamma)$, dans $(E_2)$ rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

c) Montrer que $(\Gamma)$ est une partie de $(C')$. Par quelle transformation simple la partie complémentaire de $(\Gamma)$ dans $(C')$ se déduit-elle de $(\Gamma)$ ?

## XVII. Clermont Ferrand, série C

**Ex. 568.** ./1972/clermontC/exo-1/texte.tex

Étudier la fonction numérique, de la variable réelle $x$, définie par

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\log|2e^x - 1|.$$

On pourra écrire

$$2e^x - 1 = 2e^x\left(1 - \frac{1}{2}e^{-x}\right).$$

Construire dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant les variations de cette fonction (on tracera les asymptotes de cette courbe).

**Ex. 569.** ./1972/clermontC/exo-2/texte.tex

A chaque nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
Trouver l'équation de l'ensemble, E, des points $M(z)$ tels que les points

$$M(z), \quad M'(z^2), \quad M''(z^5)$$

soient alignés.
Étudier et dessiner l'ensemble E.

### Problème 143

./1972/clermontC/pb/texte

La plan affine, $\mathscr{P}$, est rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
Le nombre $\lambda$ étant un réel donné, on considère l'application $f_\lambda$ qui au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M$ dont les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ sont

$$X = x + (\lambda - 1)Y \qquad \text{et} \qquad Y = 2x + (\lambda - 2)y.$$

A) 1. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ est bijective.
Déterminer, quand elle existe, $f_\lambda^{-1}$, l'application réciproque de $f_\lambda$, en donnant les coordonnées de $m$ en fonction de celles de $M$.
Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda$, l'ensemble des points invariants par $f_\lambda$.

2. Quelle est la nature géométrique de $f_1$ ?



Retour page 1

3. Dans cette question on étudie $f_0$.
   Déterminer l'ensemble, $(\Delta)$, des points $M$ de $\mathscr{P}$, tels qu'il existe au moins un point $m$ tel que $f_0(m) = M \in (\Delta)$.
   Un point $M$ de $(\Delta)$ étant fixé, déterminer l'ensemble des points $m$ tels que $f_0(m) = M$.
   Montrer que $f_0$ est la composée d'une projection et d'une homothétie, que l'on déterminera.

B) On pose $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$ et, pour tout entier supérieur à 2, $f_\lambda^n = f_\lambda \circ f_\lambda^{n-1}$.

1. $k$ étant un nombre réel donné, quel est l'ensemble des transformés par $f_\lambda^k$ des points de la droite $(D_k)$ d'équation $y = x + k$ ?
2. Soit $A_0$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. On pose $A_1 = f_\lambda(A_0)$ et, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $A_n = f_\lambda^n(A_0)$.
   Montrer, par récurrence, que les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de $A_n$ sont, pour tout entier naturel non nul $n$, de la forme
   $$x_n = 2u_n(\lambda) + (-1)^n \qquad \text{et} \qquad y_n = 2u_n(\lambda),$$
   $u_n(\lambda)$ étant un polynôme en $\lambda$ de degré $(n-1)$.
   Préciser la relation qu'il existe entre $u_n(\lambda)$ et $u_{n+1}(\lambda)$.
   En déduire que, si $\lambda \neq -1$, $u_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$.
   Étudier le cas où $\lambda = -1$.

# XVIII. Dijon, série C

**Ex. 570.** ./1972/dijonC/exo-1/texte.tex

Le nombre $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué du nombre complexe $z$ non nul ; calculer en fonction du module, $\rho$, et de l'argument, $\theta$, de $z$, le module et l'argument du nombre complexe $Z$ tel que

$$Z = z - \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}.$$

**Ex. 571.** ./1972/dijonC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'ensemble $(\Gamma_\lambda)$ des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation

$$y^2 = -2x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Préciser, suivant les différentes valeurs de $\lambda$, la nature de $(\Gamma_\lambda)$ et ses éléments remarquables.

## Problème 144

./1972/dijonC/pb/texte

1. On considère l'application $f_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$
   a) Calculer la limite de $\log\left[\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right]$ quand $x$ tend tend vers $+\infty$.
   En déduire la limite de

# XIX. Dijon, série E

**Ex. 572.** ./1972/dijonC/exo-1/texte.tex

Le nombre $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué du nombre complexe $z$ non nul ; calculer en fonction du module, $\rho$, et de l'argument, $\theta$, de $z$, le module et l'argument du nombre complexe $Z$ tel que

$$Z = z - \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}.$$

Retour page 1

Ex. 573. ./1972/dijonC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'ensemble $(\Gamma_\lambda)$ des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation

$$y^2 = -2x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Préciser, suivant les différentes valeurs de $\lambda$, la nature de $(\Gamma_\lambda)$ et ses éléments remarquables.

## Problème 145

./1972/dijonC/pb/texte

1. On considère l'application $f_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$

a) Calculer la limite de $\log\left[\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right]$ quand $x$ tend tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de

# XX. Grenoble, série C

Ex. 574. ./1972/grenobleC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe, au point $m$, d'affixe $z$, on fait correspondre le point $M$, d'affixe $Z$, par la relation $T_k$ définie par

$$Z = k\mathrm{i}z + 1 + k^2,$$

$k$ étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Quelle est la nature de la transformation $T_k$ ?
   Montrer que $T_k$ possède un point invariant, et un seul, $\omega_k$, que l'on déterminera. Préciser les éléments caractéristiques de $T_k$.
2. Déterminer l'ensemble des points $\omega_k$, lorsque $k$ décrit l'ensemble des réels positifs.
3. $k_1$ et $k_2$ étant deux réels strictement positifs, on considère la transformation $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ composée de $T_{k_1}$ et $T_{k_2}$ (dans cet ordre.
   Montrer que $T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}$ si, et seulement si, $k_1 = k_2$.
   Quelle est la nature de transformation $T_k \circ T_k$ ?

Ex. 575. ./1972/grenobleC/exo-2/texte.tex

L'ensemble $\mathbb{N}^\star$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

1. $x$ et $y$ étant deux éléments de $\mathbb{N}^\star$, premiers entre eux, démontrer que $x + y$ et $xy$ sont, l'un pair, l'autre impair.
2. Déterminer, dans $\mathbb{N}^\star$, les diviseurs de 84, et les donner dans l'ordre croissant.
3. Déterminer, dans $\mathbb{N}^\star$ les entiers, $a$ et $b$, vérifiant simultanément les conditions

$$a + b = 84, \tag{1}$$

$$M = \Delta^2, \tag{2}$$

   où $M$ est le plus petit commun multiple de $a$ et de $b$,et $\Delta$ est leur plus grand commun diviseur.
   On pourra poser $a = \Delta a'$ et $b = \Delta b'$.



Retour page 1

### Problème 146

./1972/grenobleC/pb/texte

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\log x$ le logarithme népérien du nombre réel positif $x$.

A- On considère la fonction $g$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$g(t) = \frac{2t}{1+t} - \log(1+t).$$

1. Étudier les variations de cette fonction.
   Montrer qu'il existe un nombre $a$ unique tel que $a > 1$ et $g(a) = 0$.
   Montrer que 4 est une valeur approchée à $0{,}1$ près de $a$. Les calculs devront figurer sur la copie ; indiquer la table numérique utilisée.
2. Calculer la limite de $\dfrac{g(t)}{t}$
   a) quand $t$ tend vers zéro,
   b) quand $t$ tend vers $+\infty$.
   Construire la courbe $(C)$ représentative de la fonction $g$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan affine euclidien. On choisira $\left\|\vec{\imath}\right\| = 1$ et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 10$, l'unité de longueur étant le centimètre.
3. En remarquant que l'on a $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$, calculer l'aire $S$, du domaine limité par l'axe des abscisses $t'Ot$ et l'arc de la courbe $(C)$ dont les points ont une ordonnée positive ou nulle.
   Exprimer $S$ sous la forme d'une fraction rationnelle de $a$.

B- On considère la fonction $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \log\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right).$$

1. Vérifier que $f''(x)$ a le même signe que $g\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$. En déduire le sens de variation de la fonction $f$.
   Montrer que le maximum de $f$ est $\dfrac{2\sqrt{a}}{1+a}$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$
   a) quand $x$ tend vers $+\infty$ ; on pourra remarquer que $1 + \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)$ ;
   b) quand $x$ tend vers $-\infty$ ; on pourra poser $\mathrm{e}^{2x} = u$ et faire apparaître $\dfrac{\log(1+u)}{u}$.

## XXI. Grenoble, série E

Même exercice 1 que le sujet de la série C Exercice 1 C 1972

**Ex. 576.**

./1972/grenobleE/exo-2/texte.tex

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$, d'axes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ et $\overrightarrow{OZ}$, on donne le plan $(\Pi)$ d'équation cartésienne

$$6x - 4y + 3z + 4 = 0,$$

le point $\Omega\,(7~;~6~;~8)$,
le vecteur $U\,(3~;~-1~;~3)$.

1. Écrire les équations de la droite d'intersection du plan $(\Pi)$ et du plan $XOY$ ; même question pour l'intersection de $(\Pi)$ et du plan $YOZ$.
2. Soit $A$ la projection du point $\Omega$ sur le plan $(\Pi)$ parallèlement au vecteur $U$.
   Calculer les coordonnées de $A$. (Donner les valeurs exactes, puis des valeurs approchées à $0{,}1$ près par défaut.)
3. On choisit le plan $XOY$ pour plan horizontal de projection et le plan $YOZ$ pour plan frontal de projection, $\overrightarrow{OZ}$ dirigé vers le haut, $\overrightarrow{OX}$ vers la bas de la feuille et $\overrightarrow{Y'OY}$ (ligne de terre) porté par le petit axe de la feuille et orienté positivement de gauche à droite.
   L'unité de longueur est le centimètre. Prendre $O$ sur le petit axe de la feuille à 3 cm du bord gauche.

a) Représenter l'épure du point $\Omega$ (projections $\omega$ et $\omega'$à et celle du plan $(\Pi)$ (traces $\alpha P$ et $\alpha Q'$). Construire le point $A$.

b) Déterminer, *par des procédés de la géométrie descriptive*, la distance des points $\Omega$ et $A$. Le candidat indiquera la méthode choisie.

Même problème que le sujet de la série C Problème C 1972

## XXII. Groupe I, série C

**Ex. 577.** ./1972/groupe1C/exo-1/texte.tex

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^2 [1 - |x-1|]^3 \, dx.$$

**Ex. 578.** ./1972/groupe1C/exo-2/texte.tex

Démontrer que, si trois nombres entiers relatifs, $x$, $y$, $z$ sont tels que la somme $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3, alors la somme $x + y + z$ est divisible par 3.
Démontrer que si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3 alors l'un au moins des trois nombres $x$, $y$ et $z$ est divisible par 3.

### Problème 147

./1972/groupe1C/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axe $Ox$ et $Oy$ ; $a$ est un nombre réel fixe, $\varphi$ est un nombre réel qui jouera le rôle de paramètre, mais on suppose vérifiée, tout au long du problème, la condition $\sin(\varphi - a) \neq 0$.

**Partie A)**

1. Démontrer que les formules

$$(1) \begin{cases} (x - x')\sin\varphi = (y - y')\cos\varphi \\ (x + x')\sin a = (y + y')\cos a \end{cases}$$

déterminent une application, $T_\varphi$, du plan dans lui-même qui, au point $M(x\ ;\ y)$, associe le point $M'(x'\ ;\ y')$. Déterminer les expressions de $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et de $y$. Démontrer que $T_\varphi$ est involutive.

2. Démontrer que $T_\varphi$ laisse invariant une infinité de points et que leur ensemble, $(\Delta)$, de dépend pas de $\varphi$.
3. Lorsque $a$ et $\varphi$ sont fixés, quel est l'ensemble des milieux des segments $[MM']$ ?

**Partie B)**

1. Quelle est la nature géométrique de $T\varphi$ ? Interpréter géométriquement les deux nombres $a$ et $\varphi$.
2. P étant un point fixe n'appartenant pas à $(\Delta)$ ; $P_\varphi$ est son transformé par $T\varphi$ ; $a$ restant fixe et $\varphi$ prenant toutes les valeurs compatibles avec la condition $\sin(\varphi - a) \neq 0$, déterminer l'ensemble des points $P_\varphi$.

**Partie C)**

On suupose désormais que $a = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on appelle F l'ensemble des $T_\varphi$ ; on pose $\tan\varphi = \lambda$ et $T_\varphi = \theta_\lambda$.
On note $\theta_\beta \circ \theta_\alpha$ la composée de $\theta_\alpha$ par $\theta_\beta$.

a) Montrer que la composée $\theta_{\lambda_3} \circ \theta_{\lambda_2} \circ \theta_{\lambda_1}$ de trois éléments de F est un élément $\theta_\mu$ de F ; on calculera $\mu$ en fonction de $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$.

b) Montrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de F est un élément de F, que l'on précisera.

c) Démontrer que le composé d'un nombre pair d'éléments de F est, d'une infinité de manières, le composé de deux éléments de F.

d) Démontrer que les composés d'éléments de F forment un groupe ; en indiquer un sous-groupe isomorphe au groupe additif des nombres réels.

# XXIII. Groupe I, série E

**Ex. 579.** ./1972/groupeIE/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en $z$ suivante :

$$z^2-(3\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z+2=0.$$

$M_1$ et $M_2$ étant les images des racines dans le plan complexe et $P$ le milieu de $[M_1M_2]$, trouver l'ensemble décrit par $P$ quand $\theta$ décrit l'intervalle $[0\,;\pi]$.

**Ex. 580.** ./1972/groupeIE/exo-2/texte.tex

Deux cercles $(C_1)$ et $(C_2)$, de même rayon sont respectivement tangents en $A_1$ et $A_2$ (distincts) à l'intersection de leurs deux plans (distincts).

Déterminer les quatre isométries, opérant sur l'espace euclidien de dimension 3, qui transforment, en particulier $A_1$ en $A_2$ et $(C_1)$ en $(C_2)$ ; dire lesquelles sont des déplacements.

## Problème 148

./1972/groupeIE/pb/texte

**1.** On partage l'intervalle $[-1\,;+1]$ au moyen des réels distincts ordonnées

$$a_0=-1,\ a_1,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots, a_{n-1},\ a_n=+1\ ;$$

on définit, sur $[-1\,;+1]$, la fonction $f$ par

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n}|x-a_k|.$$

Sur $[a_k\,;a_{k+1}]$ $f$ est une fonction affine, $f(x)=A_kx+B_k$ ; calculer $A_k$.

En déduire le sens de variation de $f$ sur $[-1\,;+1]$ ; déterminer, selon la parité de $n$, la valeur ou les valeurs, de $x$ rendant $f$ minimale.

Il n'est demandé au 1 aucun autre calcul.

**2.** A un entier $n$ fixé, $n\geqslant 2$, on associe la partition $P_n$ de $[-1\,;+1]$ définie par les réels

$$b_0=-1,\ b_1,\ \ldots,\ b_k,\ \ldots, b_{n-1},\ b_n=+1$$

qui satisfont à

$$b_{k+1}-b_k=\frac{1}{2}(b_k-b_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Pour chaque entier $n$, $n\geqslant 2$, on définit, alors sur $[-1\,;+1]$, la fonction $f_n$, par

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n}|x-b_k|.$$

Donner l'expression de $f_2(x)$ et de $f_3(x)$, où figurent respectivement trois et quatre valeurs absolues.

**3.** On se borne ici aux partitions $P_n$, où $n$ est pair : $n=2p$. Démontrer que la valeur $c_p$ de $x$ qui rend $f_{2p}$ minimale et la valeur correspondante de $f_{2p}$ sont

$$\frac{2^p-1}{2^p+1}\quad\text{et}\quad\frac{1}{p}.\frac{2^{p+1}-1}{2^p+1}.$$

Démontrer l'égalité, vraie pour tout $p$, $f_{2p}(c_p)=g(c_p)$, avec

$$g(x)=\frac{\log 2}{2}.\frac{u(x)}{v(x)},\quad u(x)=3x+1$$

et

$$v(x)=\log\frac{1+x}{1-x}\ ;$$

le symbole $\log$ désignant le logarithme népérien.

**4.** Étudier, sur l'intervalle $]0\,;1[$ seulement, la variation de $g$.
A cet effet, on constatera d'abord que, $u'$ et $v'$ étant les dérivées de $u$ et $v$, $w = vu' - uv'$ a une dérivée strictement négative sur $]0\,;1[$ ; on en déduira le sens de variation et le signe constant de $w$ sur $]0\,;1[$.
Construire avec soin la représentation graphique $(\Gamma)$ de $g$ dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 5 cm ; préciser sur $(\Gamma)$ plusieurs points de coordonnées rationnelles.
Pour étudier $\dfrac{g(x)}{x-1}$ au voisinage de $x = 1$, on pourra poser $x = 1 - X$.

N.B. le candidat utilisera sans démonstration

a) au 2 et 3, l'égalité

$$(1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n,$$

b) au 4, l'expression de $g(x)$ telle qu'elle est donnée au 3.

# XXIV. Maroc, série C

**Ex. 581.** ./1972/marocC/exo-1/texte.tex

**1.** Montrer que, pour $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, la fonction $y \longmapsto \sin y$ admet une fonction réciproque, notée $\varphi$.
Déterminer le domaine de définition de $\varphi$.

**2.** Démontrer que $\varphi$ est dérivable pour $0 < x < 1$ et admet pour dérivée en $x$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction $\varphi$ est-elle dérivable pour $x = 0$ et pour $x = 1$ ?

**Ex. 582.** ./1972/marocC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.
Soit les matrices suivantes :

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On note $\mathfrak{M}'$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$, $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$.

**1.** Démontrer que $\mathfrak{M}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2$.

**2.** Calculer $\mathrm{J}^n$.
Si $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$, calculer $A^n$.

**3.** On considère la suite $(x_n,\ y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x_0,\ y_0) = (1,\ 1) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1.$$

a) Calculer $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

b) Démontrer que, pour $|\alpha| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

# XXV. Nice, série C

**Ex. 583.** ./1972/niceC/exo-1/texte.tex

Soit le fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = x\log x$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

**1.** Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

**2.** Déterminer les primitives de $f$ en faisant une intégration par parties et calculer la'ire du domaine plan fini limité par (C), $x'Ox$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ et $x = \mathrm{e}^2$. On donnera une valeur approchée de cette aire, avec la précision permise par les tables de logarithmes.

Retour page 1

**Ex. 584.** ./1972/niceC/exo-2/texte.tex

Soit E l'ensemble des matrices carrées, $M$, à deux lignes et deux colonnes, de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$(p \in \mathbb{R}, \qquad q \in \mathbb{R}, \qquad |p| \neq q).$$

**1.** Montrer que E est sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles. On rappelle qu'une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0.

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n$ positif, la puissance $n^{\text{ieme}}$ de $M$ s'écrit

$$M^n = \begin{pmatrix} (p+q)^n + (p-q)^n & (p+q)^n - (p-q)^n \\ (p+q)^n - (p-q)^n & (p+q)^n + (p-q)^n \end{pmatrix}.$$

## Problème 149

./1972/niceC/pb/texte

Pour tout réel $u$, soit $T_u$ l'application du plan, rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, dans lui-même, qui, à tout point $m(x,\ y)$, associe le point $M(X,\ Y)$ tel que

$$\begin{cases} X = x + 2u, \\ Y = ux + y + u^2. \end{cases}$$

**1.** a) Montrer que $T_u$ est bijective et déterminer l'application réciproque $T_u^{-1}$.

b) Montrer que l'ensemble, E, des applications $T_u$, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe additif des nombres réels.

c) Montrer que la parabole (P) d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ est globalement invariante par $T_u$.

**2.** On définit, à partir de l'origine $O$, de proche en proche, le point $M_n$ de la manière suivante :

$$M_1 = T_{\frac{1}{2}}(O), \quad M_2 = T_{\frac{1}{2^2}}(M_1), \quad M_3 = T_{\frac{1}{2^3}}(M_2),\ \ldots, \quad M_n = T_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1}).$$

a) Calculer, en fonction de $n$, les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $M_n$. Quelle est la position limite de $M_n$ quand l'entier $n$ augmente indéfiniment.

b) Exprimer, en fonction de $n$, les coordonnées $X_n$ et $Y_n$ du barycentre, $G_n$, des points $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$ affectés des coefficients égaux à 1 et en déduire la position limite des $G_n$ quand $n$ augmente indéfiniment.

c) Calculer les coordonnées $X'_n$ et $Y'_n$ du point $I_n$, intersection des tangentes à la parabole (P) aux points $M_n$ et $M_{n+1}$ et montrer que, pour tout $n$, $I_n$ appartient à une parabole (P'), dont on donnera l'équation.

**3.** L'image par $T_u$ du point $O$, c'est à dire le point $M$ de coordonnées $x = 2u$ et $y = u^2$, est animé, par rapport au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, d'un mouvement défini, en fonction du temps $t$, par

$$u = \tan t \qquad \text{et} \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

a) Déterminer la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point $M$ à l'instant $t$ et indiquer, sur la trajectoire, les arcs qui correspondent à un mouvement accéléré ou retardé.

b) Montrer que, que $t$ appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$, les vecteurs vitesse aux instants $t$ et $t+\dfrac{\pi}{2}$ sont orthogonaux.

c) On considère le point $N$ défini, à chaque instant $t$, par $\overrightarrow{ON} = \vec{v}(t)$. Montrer que l'équation cartésienne de l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points $N$ peut s'écrire sous la forme $2y^2 = x^3 - 2x^2$, $x \neq 0$. Construire $(\mathscr{H})$.

# XXVI. Nice, série E

**Ex. 585.** ./1972/niceE/exo-1/texte.tex

Dans un repère orthonormé d'axes $(x'Ox,\ y'Oy,\ z'Oz)$, l'unité de longueur est le centimètre.
On donne le point, $A$, de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et la droite, $(D)$, d'équations

$$\begin{cases} y+2z-5=0 \\ x-y-4=0. \end{cases}$$

1. Écrire une représentation paramétrique de la droite $(D)$, puis écrire l'équation du plan $(P)$ contenant $A$ et perpendiculaire à $(D)$.
2. Les plans $x'Ox$ et $y'Oy$ sont respectivement choisis comme plan horizontal et plan frontal de projection.
   a) Construire l'épure $(d',\ d')$ de la droite $(D)$, en utilisant les points $I$ et $J$ de cotes respectives 0 et 2.
   b) Déterminer l'épure du point $H$, projection orthogonale du point $A$ sur la droite $(D)$.
   c) En déduire, à l'aide de l'épure, les coordonnées du point $H$, puis la distance du point $A$ à la droite $(D)$.

**Ex. 586.** ./1972/niceE/exo-2/texte.tex

Résoudre , dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante, où l'inconnue est $x$ :

$$2\mathrm{e}^{2x+1}+\mathrm{e}^{x+1}=\mathrm{e}^{1+\ln 2},$$

la notation $\ln 2$ désignant le logarithme népérien de 2.
On calculera une valeur approchée de $x$ à l'aide d'une table de logarithmes décimaux, à cinq décimales, avec la plus grande précision possible.

# XXVII. Maroc, série E

**Ex. 587.** ./1972/marocE/exo-1/texte.tex

Même sujet que pour la série C. 581

**Ex. 588.** ./1972/marocE/exo-2/texte.tex

On considère la suite de fonctions définies, sur $[-1\,;+1]$, par

$$\begin{cases} t_{n+1}(x)+t_{n-1}(x)=2xt_n(x),\ \text{pour } n\geqslant 1 \\ t_0(x)=1, \\ t_1(x)=x. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $t_n(x)$ est un polynôme de degré $n$, dont on déterminera coefficient du terme de plus haut degré.
**2.** Montrer que, pour $p\in\mathbb{N}$, $t_{2p}$ est une fonction paire et $t_{2p+1}$ une fonction impaire.
**3.** Pour $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, on pose

$$x=\varphi(\theta),\qquad \text{avec}\qquad \varphi(\theta)=\cos\theta.$$

Montrer que $[t_n\circ\varphi](\theta)=\cos n\theta$.

# XXVIII. Orléans-Tours remplacement, série C

**Ex. 589.** ./1972/orleansCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer l'ensemble des couples de nombres entiers naturels, solutions de l'équation

$$(4x-3y-5)(4x+2y-1)=0. \tag{1}$$

**2.** Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$, solutions de l'équation (1), et tels que le P.G.C.D. des nombres $x$ et $y$ soit égal à 5.

**Ex. 590.** ./1972/orleansCrem/exo-2/texte.tex

En intégrant par parties, calculer

$$A=\int_0^{\pi}\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur approchée de $A$ avec deux décimales exactes.

## Problème 150

./1972/orleansCrem/pb/texte

**1.** Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère l'application de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M?$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que,

$$\begin{cases} x' = ax+by+c,\\ y? == bx-ay+d\end{cases}$$

$a,\ b,\ c$ et $d$ étant des nombres réels. Dans tout le problème on supposera $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$.

a) Déterminer $c$ et $d$, en fonction de $a$ et de $b$, pour que le point $\omega(1\ ;\ 0)$ soit invariant.
On notera $T_{a,\ b}$ la transformation ponctuelle de $\mathscr{P}$ ainsi définie.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $T_{0,\ 1}$ et démontrer que $T_{0,\ 1}$ est une isométrie, que l'on précisera.

c) Montrer que toute transformation $T_{0,\ b}$ est la composée de $T_{0,\ 1}$ et d'une transformation simple, que l'on précisera.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $T_{0,\ b}$.

**2.** Soit $(P)$ le plan vectoriel euclidien associé au plan affine $\mathscr{P}$. Le bipoint $(M,\ N)$ étant un bipoint quelconque dans le plan $\mathscr{P}$ , $M?$ et $N?$ les transformés par $T_{a,\ b}$ des points $M$ et $N$, on considère l'application $\varphi$, de $(P)$ dans lui-même qui, à tout vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$, fait correspondre le vecteur $\varphi(\overrightarrow{MN})=\overrightarrow{M'N'}$.

1. a) Montrer que $\varphi$ est une application linéaire bijective, dont on précisera la matrice relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

   b) Montrer que
$$\forall\vec{u}\in(P),\qquad \|\varphi(\vec{u})\|=\lambda\|\vec{u}\|$$
   $\lambda$ étant un nombre réel, que l'on déterminera, en fonction de $a$ et de $b$.

2. Soit $h$ l'homothétie vectorielle de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ ; montrer que l'application composée $\varphi\circ h$ est une isométrie vectorielle (ou transformation orthogonale).
   En déduire que l'application $\varphi$ est la composée dans un ordre quelconque d'une isométrie vectorielle et d'une homothétie vectorielle de rapport positif.

3. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles orthogonales $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$, globalement invariantes par $\varphi$. Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs non nuls appartenant respectivement à $(\Delta_1)$ et à $(\Delta_2)$, écrire la matrice de $\varphi$ relativement à la base $(\vec{v_1},\ \vec{v_2})$.

4. Utiliser l'étude précédente pour définir, avec précision, la transformation $T_{a,\ b}$.

**3.** Dans toute cette partie, on suppose $a=1$ et $b=1$. On note $T$ la transformation ponctuelle de $\mathscr{P}$ correspondante

$$\begin{cases} x_1 = x+,\\ y_1 = x-y-1.\end{cases}$$

a) Étudier et représenter graphiquement, dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les fonctions numériques $f$ et $g$ définies par

$$f(x)=x+1?2\sqrt{2x-1},\qquad g(x)=x+1+2\sqrt{2x-1}.$$

b) On désigne par $(C)$ la réunion des courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$.
Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $(C_1)$ transformée de $(C)$ par $T$.
En déduire la nature de $(C_1)$ ; préciser ses éléments caractéristiques.



Retour page 1

# XXIX. Orléans-Tours remplacement, série E

Ex. 591. ./1972/orleansErem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$x \longmapsto f(x) = x\mathrm{e}^{|x+1|}.$$

1. Étudier $f$ et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.
2. Calculer l'aire du domaine, ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

Ex. 592. ./1972/orleansErem/exo-2/texte.tex

Résoudre sur $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes)

$$z^2 - \overline{z} + 2 = 0.$$

(On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.)

**Problème 151** ./1972/orleansErem/pb/texte

Même question que pour la série C Problème série C avec toutefois les modifications suivantes
La question B, 1., a) n'était pas à traiter par les candidats de la série E.
Dans la partie C, il y avait à traiter la question 3. suivante :
**3.** On considère les transformations

$$T^2 = T \circ T,\ T^3 = T \circ T^2,\ \ldots, T^n = T \circ T^{n-1}.$$

$M$ étant un point quelconque de $\mathscr{P}$, soit $M_1 = T(M)$, $M_2 = T^2(M)$, $M_3 = T^3(M)$, $\ldots\ M_n = T^n(M)$.

a) Montrer que $T^2$ est une homothétie, dont on précisera le centre et le rapport.
En déduire que les points $M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_n$ appartiennent à l'une ou à l'autre de deux droites.

b) Préciser ces droites dans le cas où le point $M$ est le point $A\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
Calculer, en fonction de $n$, les coordonnées de $A_n$.

# XXX. Paris série C

Ex. 593. ./1972/parisC/exo-1/texte.tex

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$$

(sous la forme $\log\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ le symbole $\log$ désignant le logarithme népérien.)

Écrire la formule d'intégration par parties pour l'intégrale

$$\int_0^1 v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

et en déduire, en prenant $u'(x) = 1$, l'intégrale

$$I = \int_0^1 \log\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\,\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur décimale approchée de $I$, à $4.10^{-4}$ près, sachant que $0{,}693\,1$ est une valeur décimale approchée, à $5.10^{-5}$ près, de $\log 2$ et que $1{,}098\,6$ est une valeur approchée, à $5.10^{-5}$ près, de $\log 3$.



Retour page 1

**Ex. 594.** ./1972/parisC/exo-2/texte.tex

On considère la corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, et l'équation

$$x^2+px+q=0, \tag{E}$$

où les coefficients $p$ et $q$ appartiennent à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et où l'inconnue $x$ est à chercher dans ce corps.
Déterminer successivement tous les couples $(p,\ q)$ tels que (E)admette :

**1.** la solution $\dot{0}$ ;

**2.** la solution $\dot{1}$ ;

**3.** la solution $\dot{2}$ ;

**4.** aucune solution.

## Problème 152

./1972/parisC/pb/texte

-Partie A-

Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, noté $\mathscr{R}$, d'axes $Ox$, $Oy$. Á? l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$z\longmapsto Z=\mathrm{i}z+(1-\mathrm{i})\overline{z},$$

(où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$) correspond alors la transformation $T$, du plan $(P)$ qui, à $m$ d'affixe [1] $z$, associe $M$ d'affixe $Z$.

1. Vérifier que le milieu du segment $[mM]$ appartient à l'axe $Ox$ et que, si $m$ est distinct de $M$, la droite $(mM)$ a une direction fixe.

   On pourra, par exemple, exprimer d'abord les coordonnées $X$ et $Y$ du point $M$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $m$ (dans le repère $\mathscr{R}$).

   En déduire que la transformation $T$ est une symétrie oblique d'axe $Ox$, dont on précisera la direction.

2. a) Soit $\mathscr{R}'$ le nouveau repère orthonormé $(O,\ \vec{u}',\ \vec{v}')$ défini dans le plan $(P)$ par $(\vec{u},\ \vec{u}')=\alpha$ (où $\alpha$ est un nombre réel donné) et par $(\vec{u}',\ \vec{v}')=\dfrac{\pi}{2}$.

   Montrer que les affixes $z$ et $z'$ d'un même point $m$ dans les repères respectifs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont liées par la relation $z=z'(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$. Exprimer, en fonction de $z'$ et $\overline{z}'$, l'affixe $Z'$ (dans le repère $\mathscr{R}'$) de l'image $M$ de $m$ par la transformation $T$.

   b) On prend $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$. Montrer que $Z'=\mathrm{i}z'-\mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z}'$.

   Calculer alors les coordonnées $X'$ et $Y'$ du point $M$ en fonction des coordonnées $x'$ et $y'$ du point $m$ (dans le repère $\mathscr{R}'$).

   En déduire une équation, dans $\mathscr{R}'$ de l'image $(\Gamma)=T(\gamma)$ par $T$ du cercle $(\gamma)$ de centre O et de rayon 1.

   Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ? Dessiner $(\gamma)$ et $(\Gamma)$ sur une même figure ; préciser quels sont leurs points communs, en s'appuyant sur la nature géométrique, trouvée au 1, de la transformation $T$ .

-Partie B-

On associe à tout couple $(a\ ;\ b)$ de nombres complexes l'application, $f_{a,\ b}$, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$f?a,\ b(z)=az+b\overline{z}.$$

1. Mettre $(f_{a,\ b}\circ f_{a,\ b})(z)-z$, c'est-a?-dire $f_{a,\ b}\left[f_{a,\ b}(z)\right]-z$, sous la forme $Az+B\overline{z}$, $A$ et $B$ étant deux constantes complexes.

   Démontrer que $Az+B\overline{z}$ est nul pour tout $z$ si, et seulement si, $A=B=0$. (On pourra pour cela donner à $z$ les valeurs 1 et i.)

   Traduire alors par un système, $S$, de deux relations entre $a$, $b$, $\overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,\ b}$ soit involutive.

   Que deviennent ces relations pour $b=0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,\ b}$ involutives) et pour $b\neq 0$ ?

   Vérifier que les valeurs $a=\mathrm{i}$ et $b=1-\mathrm{i}$, utilisées dans la partie A, conviennent dans ce dernier cas.

1. L'affixe d'un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est le nombre complexe $x+icy$



Retour page 1

2. Dans cette question, $f_{a,\,b}$ est supposée quelconque, involutive ou non. On considère maintenant $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   a) Démontrer que l'application $f_{a,\,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est linéaire. On prend $\mathscr{B} = (1,\ \mathrm{i})$ comme base de $\mathbb{C}$ ; calculer $f_{a,\,b}(1)$ et $f_{a,\,b}(\mathrm{i})$.

   b) Soit $\varphi$ une application linéaire quelconque de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par sa matrice $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ relativement à $\mathscr{B}$, $p$, $q$, $r$ et $s$ étant quatre réels. Démontrer qu'il existe une application $f_{a,\,b}$ qui coïncide avec $\varphi$ ; à cet effet, on calculera $\varphi(1)$ et $\varphi(\mathrm{i})$ et l'on exprimera $a$ et $b$ au moyen de $p$, $q$, $r$ et $s$.

   c) Déduire alors du système $S$ de relations trouvées, précédemment, un système de relations entre $p$, $q$, $r$ et $s$ traduisant la condition pour que $\varphi$ soit involutive. Trouver directement ces relations, en calculant $\mathfrak{M}^2$, c'est-à-dire $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

# XXXI. Paris, série E

**Ex. 595.** ./1972/parisE/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer, à $2.10^{-4}$ près l'expression numérique, $I$, que prend l'expression

$$\log(p+q) + \frac{1}{2}\log(p^2+q^2) + \frac{1}{3}\log(p^3+q^3) - 3\log q,$$

lorsque $p = 3$ et $q = 4$ (le symbole $\log$ désignant le logarithme népérien).

**2.** Calculer en fonction des entiers naturels $p$ et $q$, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1}\right) \mathrm{d}x$$

et déduire du 1 une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1}\right) \mathrm{d}x.$$

**Ex. 596.** ./1972/parisE/exo-2/texte.tex

Une voiture, $M$, part d'un point $A$ à l'instant $t = 0$ et atteint un point $B$ deux heures plus tard, à l'instant $t = 2$, après avoir parcouru 160 kilomètres.
On désigne par $f$ la fonction qui associe à $t \in [0\,;2]$ la distance $x$, exprimée en kilomètres, parcourue par $M$, sur la route, entre les instants $0$ et $t$.
Ainsi $f(0) = 0$ et $f(2) = 160$.
Le mouvement de $M$ n'est pas nécessairement uniforme ; on suppose seulement que $f$ est continue sur $[0\,;2]$.

**1.** Démontrer qu'il existe, sur la route suivie par $M$, au moins un couple $(C,\ D)$ de points distants de 80 kilomètres ($C$ pouvant éventuellement être en $A$, ou $D$ éventuellement en $B$) et tels que la voiture mette exactement une heure pour aller de $C$ à $D$.
On considérera pour cela la fonction, $\varphi$, définie sur $[0\,;1]$ par

$$\varphi(t) = f(t+1) - f(t)$$

et on appliquera à la fonction $\varphi$ le théorème des « valeurs intermédiaires », en posant $f(1) = a$ et en distinguant les cas suivants :

$$a = 80, \qquad a < 80 \qquad \text{et} \qquad a > 80.$$

**2.** Montrer que, si le mouvement est uniforme, la fonction $\varphi$ a une propriété remarquable et qu'il existe alors une infinité de couples $(C,\ D)$.
Plus généralement, on pose $f(t) = 80t + p(t)$ ; caractériser les fonctions $p$ telles que la fonction $\varphi$ correspondante possède la propriété remarquable précédente.



Retour page 1

## PROBLÈME 153

./1972/parisE/pb/texte

Le plan euclidien $(P)$ est rapporté à un repère orthonormé directe $\Omega$ d'axes $Ox$ et $Oy$.
Á l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \longmapsto az+b$ (où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes, $a \neq 0$) correspond la similitude $S$ de $(P)$ qui à un point $M$ d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ nombres réels) associe $S(M)$ d'affixe $az+b$. On appellera rapport de la similitude $S$ le module de $a$ et angle de la similitude $S$ le nombre réel, compris entre 0 et $2\pi$, argument du nombre complexe $a$ ; si $S$ est distincte de l'application identique et admet un point fixe, ce point fixe sera appelé centre de $S$.

**1.** a) Quelle particularité présente $S$ dans les cas suivants :

$\alpha$) le nombre $a$ est réel,

$\alpha$) $|a| = 1$ et en particulier $a = 1$ ?

b) On donne un nombre réel $\alpha$ tel que $0 < \alpha < 2\pi$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $S$ soit la rotation, $R$, de centre $O$ et d'angle $\alpha$.

Déterminer aussi $a$ et $b$ pour que $S$ soit la similitude, $\Sigma$, dont le centre est le point $U$ d'affixe 2, dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$ et dont l'angle est $2\pi - \alpha$.

**2.** a) On désigne par $H$ la transformation composée $\Sigma \circ R$.

Vérifier que le transformé par $H$ d'un point d'affixe $z$ est le point d'affixe $\dfrac{1}{2}z + 2 - \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$.

Déduire de ce résultat ( même si on ne l'a pas démontré) que $H$ est une homothétie, dont on indiquera le rapport et le centre $C$ ( on calculera l'affixe $c$ de $C$).

Calculer aussi l'affixe, $c'$, du point $C' = R(C)$, transformé de $C$ par la rotation $R$.

b) En supposant $\alpha \neq \pi$, trouver une équation cartésienne du cercle $(\Gamma)$ passant par les points $O$, $U$ et $C$.

Vérifier que le point $C'$ appartient au cercle $(\Gamma)$.

c) On suppose maintenant que $\alpha$ varie dans l'intervalle $]0\,;2\pi[$.

Montrer que les coordonnées $x$ et $y$ du point $C$ sont liés par une relation indépendante de $\alpha$.

En déduire une équation de la courbe $\mathscr{C}$ décrite par $C$ ; construire $(\mathscr{C})$, en prenant le centimètre comme unité de longueur.

**3.** On considère à nouveau les transformations $R$ et $\Sigma$, de centres $O$ et $U$, ainsi que l'homothétie $H = \Sigma \circ R$.
On se propose de retrouver certains des résultats précédents, sans utiliser les affixes des points considérés.

a) Soit $V = R^{-1}(U)$ le point dont le transformé par $R$ est le point $U$.

Déterminer $H(V)$ et en déduire la position remarquable du centre, $C$, de $H$ par rapport aux points $U$ et $V$.

Retrouver ainsi la courbe $(\mathscr{C})$, à partir de la courbe décrite par le point $V$ quand $\alpha$ varie.

b) Soit encore $C' = R(C)$ ; démontrer que $\Sigma(C') = C$.

En déduire que $(\overrightarrow{UC}, \overrightarrow{UC'}) = \alpha$ et démontrer que si $\alpha \neq \pi$, les quatre points $O$, $U$, $C$ et $C'$ sont sur une même cercle [le cercle $(\Gamma)$ du 2b].

# XXXII. Paris remplacement, série C

Ex. 597.

./1972/parisCrem/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x.$$



Retour page 1

# XXXIII. Poitiers série C

**Ex. 598.** ./1972/poitiersC/exo-1/texte.tex

Soit $N$ un entier naturel, tel que, en numération décimale, $N$ s'écrive $\overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

1. a) Montrer que, si $a = 0$ ou $a = 7$, alors $N$ est divisible par 7.
   b) Montrer que $10N - 3a$ est multiple de 7. En déduire que si si $N$ est divisible par 7, alors $a = 0$ ou $a = 7$.
2. On suppose $a = 7$, $b = d$ et $c = 0$. Déterminer $N$ pour qu'il soit divisible par 3.

**Ex. 599.** ./1972/poitiersC/exo-2/texte.tex

Soit $(P)$ un plan affine euclidien et soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de $(P)$.

— $A$ est le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

— $B$ est le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.

— $k_1$ et $k_2$ sont deux réels non nuls.

Soit $M$ un point quelconque de $(P)$, $M_1$ le transformé de $M$ dans l'homothétie de centre $A$ et de rapport $k_1$ et $M_2$ le transformé de $M$ dans l'homothétie de centre $B$ et de rapport $k_2$.
Soit $M'$ le transformé de $0$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.
$f$ est l'application de $(P)$ vers $(P)$ qui à $M$ associe le point $M'$.

1. Chercher si $f$ admet des points invariants.
2. Si $k_1 \neq k_2$, montrer que $f$ est, soit un translation, soit une homothétie que l'on précisera.
   Étudier la cas particulier $k_1 = k_2$.

## Problème 154

./1972/poitiersC/pb/texte

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prend pour unité1 cm.

1. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$x \longmapsto y = f(x) = -\frac{x^2 + 4x - 3}{|x+6|}.$$
   Étudier les variations de $f$ , puis tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le repère $\mathscr{R}$.
2. Discuter suivant les valeurs de $k$, le nombre de points d'intersections de $(\Gamma)$ avec la droite d'équation $y = k$.
   Dans le cas où il n'y a que deux points d'intersection $A_k$ et $B_k$ soit $G_k$ le centre de gravité de $O$, $A_k$ et $B_k$ (c'est-à-dire le barycentre des trois points $O$, $A_k$ et $B_k$ affectés de coefficients égaux).
   Quel est l'ensemble $(D)$ des points $G_k$ lorsque $k$ varie ?
3. Calculer l'aire comprise entre $(D)$, $(\Gamma)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+6}.$$
4. On pose $Z = -\dfrac{z^2 + 4z - 3}{|z+6|}$, où $z \in \mathbb{C}$.
   Soit $P$ le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, d'affixe $z$.
   a) Quel est l'ensemble des points $P$ tels que $Z$ soit re?el ? Calculer $Z$ dans chacun des cas. Que remarque-t-on ?
   b) Montrer que l'ensemble des points $P$ tels que $Z$ soit imaginaire pur est une conique, dont on précisera la nature et, s'il y a lieu, le centre, les axes de symétrie, les sommets et les éléments caractéristiques.

.



Retour page 1

# XXXIV. Poitiers, série E

**Ex. 600.** ./1972/poitiersE/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\mathrm{e}^{4x+2} - \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{4x+2}} = \mathrm{e}^2 - 1.$$

# XXXV. Poitiers remplacement, séries C & E

**Ex. 601.** ./1972/poitiersCErem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble $GZ$, des entiers relatifs l'équation

$$x^2 - 4y^2 = 36.$$

**Ex. 602.** ./1972/poitiersCErem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A$, de coordonnées $\left(0 \; ; \; \sqrt{3}\right)$, et $B$, de coordonnées $(1 \; ; \; 0)$.

On désigne par $R_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et par $R_2$ la rotation de centre $B$, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Montrer que la composée $R_2 \circ R_1$ de $R_1$, puis de $R_2$ est une rotation, dont on précisera l'angle et le centre, $\omega$.

Démontrer que l'image $(A'B')$ du couple de points $(AB)$ par le rotation $R_2 \circ R_1$ est telle que la droite $(A'B')$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

# XXXVI. Pondichéry, série C

**Ex. 603.** ./1972/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathrm{E}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle $x$ de degré inférieur où égal à $n$, $(n > 2)$.

L'ensemble $\mathrm{E}_2$, des de la variable réelle $x$, de degré inférieur ou égal à 2, est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}_n$.

On considère l'application $f$ de $\mathrm{E}_2$ dans $\mathrm{E}_2$ qui, à un polynôme $P(x)$ de $\mathrm{E}_2$, fait correspondre le polynôme $Q(x) = f[P(x)]$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = x(x-1)P'(x) - (2x+1)P(x),$$

$P'(x)$ étant le polynôme dérivé du polynôme $P$.

1. $f(\mathrm{E}_2)$ désignant l'ensemble des polynômes $Q(x)$, images par $f$ des polynômes $P(x)$ de $\mathrm{E}_2$, montrer que $f(\mathrm{E}_2) = \mathrm{E}_2$.
2. Montrer que $f$ est une application linéaire et injective.

**Ex. 604.** ./1972/pondicheryC/exo-2/texte.tex

Á l'espace vectoriel $\mathscr{V}$, on associe l'espace affine E, dans lequel on choisit un point $O$.

Le vecteur $\vec{u}$ étant donné, non nul de $\mathscr{V}$, on appelle $I$ le point de E tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$. D'autre part, $k$ et $k'$ sont deux nombres réels non nuls et non inverses $(k \times k' \neq 1)$.

On considère alors dans E les transformations suivantes :

— le translation $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$,

— l'homothétie $\mathrm{H}_{(O,\ k)}$ de centre $O$ et de rapport $k$,

— l'homothétie $\mathrm{H}_{\left(I,\ \frac{1}{k}\right)}$ et $\mathrm{H}_{(I,\ k')}$ de centre $I$ et rapports respectifs $\frac{1}{k}$ et $k'$.

Le symbole $\circ$ désignant la composition des applications, quelle est la nature des applications suivantes :

$$A_1 = \mathrm{H}_{\left(I,\ \frac{1}{k}\right)} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{H}_{(O,\ k)}$$

et



Retour page 1

$$A_2 = \mathrm{H}_{(I,\ k')} \circ \mathrm{T}_{\vec{u}} \circ \mathrm{H}_{(O,\ k)} ?$$

Préciser les éléments servant à les définir.

## XXXVII. Reims, série E

**Ex. 605.** ./1972/reimsE/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien, étudier le produit $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ de la rotation $\mathscr{R}_1$ de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de la rotation $\mathscr{R}_2$ de centre $O'$ ($O' \neq O$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (Il n'est pas demandé de déterminer le point invariant de $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$.)
A-t-on $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$ ?
Faire une figure en prenant $OO' = 10$ cm.

**Ex. 606.** ./1972/reimsE/exo-2/texte.tex

1. On considère le nombre complexe $Z$ de module 1 et d'argument $\alpha$ (modulo $(2\pi)$).
   Élever $Z$ à la puissance $n$-ième et en déduire que
   $$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha.$$
2. On considère les nombres complexes suivants :
   $$Z_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,$$
   $$Z_2 = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha,$$
   $$Z_3 = \cos 3\alpha + \mathrm{i}\sin 3\alpha,$$
   $$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
   $$Z_n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha.$$
   Montrer que $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \dots,\ Z_n$ peuvent être considérés comme les termes consécutifs d'une suite géométrique, dont on déterminera la raison.
   En déduire l'expression de
   $$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

### Problème 155

./1972/reimsE/pb/texte

A) Soit la fonction numérique $f$ suivante, définie sur $\mathbb{R}$ :

$$x \longmapsto f(x) = x + 1 - \frac{x}{x^2+1},$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est appelée $(\mathscr{C})$.

1. a) Étudier les variations de $f$.
   b) Montrer que $f$ est bijective.
2. a) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet le centre de symétrie $I(1\ ;\ 0)$ et une asymptote.
   b) Représenter $(\mathscr{C})$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ où l'unité de longueur est le centimètre.
   (On ne cherchera par à calculer l'abscisse du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe $x'Ox$.)
3. a) Montrer que $f$ admet pour primitive, $F$, définie par
   $$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$
   où $\ln X$ désigne le logarithme népérien de $X$.

b) Calculer, à $10^{-2}$ près par excès, la'ire de la portion du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, son asymptote et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\sqrt{3}$, sachant que

$$0{,}693 < \ln 2 < 0{,}694.$$

4. Soit le point $M(t)$ dont les coordonnées $x$ et $y$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont données en fonction du temps $t$ par

$$\begin{cases} x=\tan t, \\ y=1+\dfrac{\sin^3 t}{\cos t} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad t\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right[.$$

Montrer que $(\mathscr{C})$ est le support de la trajectoire du point $M$. La courbe $(\mathscr{C})$ est-elle entièrement décrite par $M$ ?

B) On pose $Z=z+1-\dfrac{z}{z^2+1}$, où $z$ est un nombre complexe de module 1.
Le nombre complexe conjugué de $z$ sera noté $\overline{z}$.
On pose $x=z+\overline{z}$.

1. Montrer que $Z=z+1-\dfrac{1}{z+\overline{z}}$. En déduire la partie réelle $X$ de $Z$ en fonction de $x$.
2. Représenter la fonction, $\varphi$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$x\longmapsto \varphi(x)=\frac{x}{2}+1-\frac{1}{x},$$

par une courbe $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
Montrer que $(\Gamma)$ admet un centre de symétrie, qui sera noté $\omega$.
3. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire, d'abscisse positive, appartenant à la droite vectorielle engendrée par $2\vec{u}+\vec{v}$.
Écrire une équation de $(\Gamma)$ dans le repère $(\omega,\ \vec{n},\ \vec{v})$. Reconnaître la nature de $(\Gamma)$.
4. Montrer que la courbe représentant $X$, fonction de $x$ obtenue au B1, est une partie de $(\Gamma)$, que l'on définira.

# XXXVIII. Rouen, série C

**Ex. 607.** ./1972/rouenC/exo-1/texte.tex

Soit la suite de $n$ nombres complexes $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_p,\ \dots,\ u_n$ définie par

$$u_1=1-\mathrm{i} \quad \text{et, } \forall p\in[\![2,n]\!],\ u_p=u_{p-1}j,$$

avec $j=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

a) Vérifier que $u_1+u_2+u_3=0$.

b) Montrer que, pour tout entier $p$ tel que $4\leqslant p\leqslant n$, on a $u_p=u_{p-3}$.
Construire les images des nombres $u_p$.

c) En déduire, suivant la forme de $n$, la valeur de

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

puis calculer les expressions

$$\sigma_n=\sum_{p=0}^{p=n-1}\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2p\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$\sigma'_n=\sum_{p=0}^{p=n-1}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2p\frac{\pi}{3}\right)$$

Retour page 1

**Ex. 608.** ./1972/rouenC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par les formules

$$\begin{cases} f(x) = x\ln|x|\,, \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. La fonction $f$ est-elle continue pour la valeur $O$ de la variable ? Est-elle dérivable en ce point ? Justifier les réponses.
2. Déterminer la fonction dérivée $f'$. Étudier la variation de $f$ ; en donner une représentation graphique cartésienne, dans une repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.
3. Au moyen d'une intégration par parties trouver les primitives de de la fonction $f$. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de $f$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

**Ex. 609.** ./1972/rouenC/exo-3/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, (P), rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A, B, C, D et E tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = -\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{1}{2}\vec{\jmath}$.

1. Dresser le tableau de variation, de la fonction numérique $f$, de la variable réelle, $x$, telle que

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}.$$

   Soit $(\Phi)$ la courbe représentative de $f$ dans (P). Tracer cette courbe en précisant, en particulier, ses asymptotes et son centre de symétrie.
2. Soit $s$ la symétrie par rapport à la droite (ED) et de direction $\overrightarrow{EC}$.
   On pose $s(M) = M'$. Calculer le couple $\left(x'\ ;\ y'\right)$ des coordonnées du point $M$, en fonction de celui, $(x\ ;\ y)$, des coordonnées de $M$.
   Quelle est l'équation de la courbe, $(\Phi_1)$, transformée de $(\Phi)$ par s ? Tracer cette courbe $(\Phi_1)$ sur la même figure de $(\phi)$.
3. Soit $g$ l'application affine telle que

$$g(O) = E, \qquad g(A) = C \quad \text{et} \quad g(B) = D.$$

   Quelle est dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, la matrice de l'application linéaire, $\gamma$, associée à $g$ ? Démontrer que $g$ est bijective.
4. Étant donné le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on pose $M'' = g(M)$. Calculer en fonction de $x$ et de $y$ le couple $\left(x''\ ;\ y''\right)$ des coordonnées du point $M''$.
5. Quelles sont les équations cartésiennes des courbes $(\psi)$ et $(\psi_1)$, transformées de $(\Phi)$ et $(\Phi_1)$ par l'application $g^{-1}$, réciproque de $g$ ?
6. Donner une interprétation géométrique simple de l'application composée $g^{-1} \circ sg$.

## XXXIX. Sud Cameroun, série C

**Ex. 610.** ./1972/sudcamerounC/exo-1/texte.tex

Étudier les deux fonctions réelles $f$ et $g$ suivantes, de la variable réelle $x$ :

$$f : x \longmapsto \log|\mathrm{e}^x - 1| \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \log(\mathrm{e}^x + 1).$$

Tracer les courbes représentatives $(F)$ et $(G)$ dans un repère orthonormé. Montrer que la première bissectrice est axe de symétrie de l'ensemble $(F) \cup (G)$.

# XL. Strasbourg, série C

**Ex. 611.** ./1972/strasbourgC/exo-2/texte.tex

On note $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$ et $\dot{5}$ les éléments de l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{2}x = \dot{0}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le système

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{2}y = \dot{4}, \\ \dot{5}x + \dot{3}y = \dot{3}. \end{cases}$$

# XLI. Sud Cameroun, série E

**Ex. 612.** ./1972/sudcamerounE/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel sur un corps, $K$, commutatif.
On notera l'él'ment neutre de la loi de composition interne dans $\mathscr{V}$ par $\vec{e}$.
On appelle $f$ un endomorphisme de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{N}$ le noyau de $f$.

1. Comment peut-on traduire, à l'aide du noyau de $f$, la relation binaire de $\mathscr{R}$ définie dans $\mathscr{V}$ par

$$\vec{u}\mathscr{R}\vec{v} \longmapsto f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{e}.$$

($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de $\mathscr{V}$) ?

2. Montrer que la relation est une relation d'équivalence dans $\mathscr{V}$. En déduire la classe d'équivalence de l'élément $\vec{e}$.

**Ex. 613.** ./1972/sudcamerounE/exo-2/texte.tex

On considère dans un repère orthonormé dont l'unité sera 2 cm, le cercle $(C)$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

1. Déterminer le centre et le rayon de ce cercle. Le construire.
2. On transforme $(C)$ par une affinité orthogonale d'axe $Ox$ et de rapport $\frac{1}{3}$.
   a) Donner l'équation de la figure homologue $(C')$ obtenue.
   b) Interpréter le résultat obtenu et construire $(C')$.
   c) Calculer l'aire de $(C')$ en centimètres carrés.

**Ex. 614.** ./1972/sudcamerounE/exo-3/texte.tex

On considère la fonction $f_{a,b}$, réelle de variable réelle, définie par

$$f_{a,b}(x) = a\sin x + b\cos x.$$

**1.** Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$.
**2.** En déduire l'expression générale des primitives de la fonction de départ $f_{a,b}$.
**3.** Quelle est, parmi les fonctions données, celle dont la courbe $(C)$ passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ et a une tangente au point d'abscisse zéro parallèle à la première bissectrice ? On l'appellera $f$.
**4.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité de longueur est 2 centimètres.
**5.** Calculer l'aire comprise entre la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les parallèles à $Oy$ passant par les points d'abscisses $0$ et $\frac{\pi}{2}$, respectivement, et donner les résultats en centimètres carrés.

Retour page 1

# XLII. Togo, série C et E

**Ex. 615.** ./1972/togoCE/exo-1/texte.tex

Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, le nombre $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

**Ex. 616.** ./1972/togoCE/exo-2/texte.tex

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Quelle relation doit relier $a$ et $b$ pour que les nombres complexes $az$ et $\overline{\overline{z}b}$ aient, pour tout nombre complexe $z$,

1. même module ;
2. des arguments opposés ?

Lorsque ses deux conditions sont remplies simultanément que peut-on dire des nombres $az$ et $\dfrac{\overline{z}}{b}$ ?

*Application* : Soit $a = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer $b$ pour que ces deux conditions ci-dessus soient vérifiées.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

# XLIII. Toulouse, série C

**Ex. 617.** ./1972/toulouseC/exo-1/texte.tex

Le plan (E) est un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{\imath}, \ \vec{\jmath})$. On considère la famille, $\mathscr{F}$, les endomorphismes $f_m$ de (E) (c'est à dire des applications linéaires de (E) dans (E)) qui ont une matrice de la forme $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $m$ étant un nombre réel.

**1.** Déterminer l'ensemble des valeurs de $m$ pour lesquelles $f_m$ est un automorphisme de $(E)$.
Déterminer le noyau et l'image de chacun des endomorphismes qui ne sont pas des automorphismes.

**2.** Déterminer et reconnaître tout endomorphisme involutif appartenant à la famille $\mathscr{F}$.

**Ex. 618.** ./1972/toulouseC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes l'équation

$$z^4 - (5 - \mathrm{i})z^2 + 4 - 4\mathrm{i} = 0.$$

Donner les solutions sous leur forme trigonométrique.

## Problème 156

./1972/toulouseC/pb/texte

On désigne par $(\Delta)$ l'ensemble des nombres réels différents de $-1$ de $+1$ : $(\Delta) = \mathbb{R} - \{-1, \ +1\}$.

**1.** Étudier les variations de l'application $f$, de $(\Delta)$ dans $\mathbb{R}$, définie par la relation $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2-1)}$, et construire la courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'application $f$ est-elle une bijection de $(\Delta)$ sur $\mathbb{R}$ ?

**2.** Les restrictions de $f$ à $]-\infty\,; -1[$, à $]-1\,; 1[$ et à $]1\,; +\infty[$ sont-elles des bijections ? Pourquoi ?

**3.** Soit $a$ un élément donné de $(\Delta)$. Démontrer que $a$, $\dfrac{a-3}{a+1}$ et $-\dfrac{a+3}{a-1}$ sont les trois solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.
Soit les applications de $(\Delta)$ dans $\mathbb{R}$ définies par $i(a) = a$, $u(a) = \dfrac{a-3}{a+1}$ et $v(a) = -\dfrac{a+3}{a-1}$. Établir que $f \circ i = f \circ u = f \circ v = f$ ($\circ$ est la symbole de la loi de composition des applications).
Comparer $v(a)$ et $-u(-a)$, et $u(a)$ et $-v(-a)$.

**4.** Utiliser une propriété de $f$ pour déduire de la question précédente les solutions de l'équation $f(x) + f(a) = 0$, $a$ étant un élément donné de $(\Delta)$.

**5.** Donner l'ensemble de définition et la représentation graphique, en repère orthonormé, de la fonction $k$ qui, au nombre réel $x$, fait correspondre :

$$k(x) = \frac{\left|x^2 - 9\right|}{x^2 - 9}.$$



Retour page 1

**6.** On considère la fonction $g$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = k(x).f(x), & \text{pour } x \in (\Delta) - \{-3,\ 3\} \\ g(-3) = g(3) = 0. \end{cases}$$

a) $g$ est-elle continue au point d'abscisse $3$ ?

b) $g$ est-elle dérivable au point d'abscisse $-3$ ?

c) Donner la tableau de variation de $g$ et construire par rapport au même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sa représentation graphique.

d) Soit $m$ un nombre réel strictement plus grand que $3$. Calculer l'aire, $\mathscr{A}_m$ de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ qui ont, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une abscisse $x$ et une ordonnée $y$ vérifiant les inégalités :

$$\sqrt{5} \leqslant x \leqslant m \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}.$$

Déterminer le nombre réel $m$ ($m > 3$) pour que $\mathscr{A}_m$ soit égale à 6.

Retour page 1

# Chapitre XV

# 1973.

## Sommaire

Retour page 1

# I. Aix Marseille, série C & E

**Ex. 619.** *4 points.* *./1973/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

1. Linéariser $\cos^7\theta$.
2. Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta \,\mathrm{d}\theta$.

**Ex. 620.** *4 Points.* *./1973/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Construire relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan affine l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$16x|x| + 36y|y| = 576.$$

## PROBLÈME 157 *12 points.* *./1973/aixmarseilleC/pb/texte*

On étudie la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \frac{(mx-1)(2-x)}{x^2-x},$$

où $m$ est un paramètre réel.

A chaque valeur du paramètre $m$ correspond une fonction et une courbe représentative $(C_m)$ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axe $x'Ox$ et $y'Oy$.

**1.** Montrer que, quel que soit $m$, les courbes $(C_m)$ passent par un point fixe que l'on déterminera. Vérifier que pour la valeur $(-1)$ de $m$ la courbe $(C_{-1})$ présente une axe de symétrie parallèle à $y'Oy$ d'équation $x = \frac{1}{2}$.

**2.** Trouver l'équation $Y = g(X)$ de le courbe $C_{-1}$ dans un repère orthonormé $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ $w$ étant le point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$ ; les nouveaux axes seront notés $X'\omega X$, $Y'\omega Y$.

Construire $(C_{-1})$.

Calculer les nombres réels $A$ et $B$ tels que :

$$\frac{1}{4X^2-1} = \frac{A}{2X-1} + \frac{B}{2X+1}.$$

En déduire, d'une part une primitive de $X \longmapsto \frac{1}{4X^2-1}$ et d'autre part, l'aire de l'ensemble $E$ des points $M(X\ ;\ Y)$ du plan tels que :

$$\frac{3}{2} \leqslant X \leqslant X_0, \quad \left(X_0 \geqslant \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(X) \leqslant Y \leqslant 1.$$

Cette aire admet-elle une limite quand $X$ tend vers $+\infty$ ?

**3.** On considère la suite $u$ définie par la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 1 \ (n \in \mathbb{N})$$

et par son premier terme $U_0$.

Exprimer $U_n$ en fonction de $U_0$. (On pourra raisonner par récurrence.) Trouver la limite de la suite $n \longmapsto U_n$ losrque $n \Rightarrow +\infty$.

**4.** a) Construire, par rapport au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, la courbe $(C_1)$. (On vérifiera que $(C_1)$ est portée par une hyperbole équilatère.)

b) L'hyperbole équilatère précédente passe par le point $A$ de coordonnées $x = 1$, $y = 1$.

Écrire une équation de la droite $AM_0$, $M_0$ étant le point de l'hyperbole d'abscisse $x_0$ $(x_0 > 1)$. Calculer l'abscisse $x$, du point où cette droite rencontre l'axe $x'Ox$. Soit $M_1$ le point d'abscisse $x_1$ et appartenant à l'hyperbole. Calculer l'abscisse $x_2$ du point d'intersection de $AM_1$ avec l'axe $x'Ox$.

Cette opération étant répétée $n$ fois donner une interprétation géométrique de la suite étudiée au 3. (On distinguera les cas où $x_0 \leqslant 2$ et $x_0 > 2$.)



Retour page 1

c) On considère la parabole d'équation $y = x^2 - 3$. En s'inspirant de la méthode précédente, déterminer un encadrement de $\sqrt{3}$ à $10^{-4}$ près. On prendra le point $A$ de la parabole de coordonnées $(x = 2,\ y = 1)$ et pour $M_0$ on choisira $x_0 = \dfrac{3}{2}$, puis $x_0 = \dfrac{5}{2}$.

## II. Aix Marseille remplacement, série C & E

**Ex. 621.** ./1973/aixmarseilleCErem/exo-1/texte.tex

1. Après avoir rappelé quelle est la limite de $\dfrac{\log x}{x}$ lorsque le réel $x$ tend vers $+\infty$, trouver, si elle existe, celle de $-x^2 + x + 6\log x$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Étudier, l'ensemble de définition, la continuité, le sens de variation et la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction numérique $f$ d'une variable réelle $x$ définie par la relation
$$f(x) = -x^2 + x + \log x.$$
Préciser la nature des branches infinies.(Calculer en particulier $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Prendre $\log 2 \approx 0{,}69$ ; $\log 3 \approx 1{,}1$.)

**Ex. 622.** ./1973/aixmarseilleCErem/exo-2/texte.tex

Existe-t-il un nombre entier naturel $N$ qui s'écrit

$\overline{abcca}$ dans le système de base 5 ;

$\overline{bbab}$ dans le système de base 8 ?

### Problème 158

./1973/aixmarseilleCErem/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, l'application $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, qui au point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = x' + \mathrm{i}y'$ définie par
$$z' = 2a - a^2\overline{z}$$
($a$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.)

1. Montrer que les équations de $f$ s'écrivent
$$x' = -x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha + 2\cos\alpha,$$
$$y' = -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha + 2\sin\alpha.$$
2. a) Soit $\varphi$ l'application linéaire du plan vectoriel P dans P, $\varphi$ et P étant associés respectivement à $f$ et $\mathscr{P}$, montrer que $\varphi$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle $(D)$ dont on montrera qu'un vecteur est
$$\vec{u} = -\vec{\imath}\,.\sin\alpha + \vec{\jmath}\,.\cos\alpha.$$
que peut-on en déduire quant à la nature de $f$ ?

   b) Soit $O' = f(O)$, montrer que $I$, milieu du bipoint $(O,\ O')$ est invariant par $f$.
   En définitive, comment désigne-t-on l'application affine $f$ et comment la caractériser ?

   c) Écrire directement les équations de l'application réciproque $f^{-1}$ de $f$ er la relation qui exprime l'affixe $z$ de $M$ en fonction de l'affixe $z'$ de $M'$.
3. Dans la suite du problème $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Soit $H$ l'homothétie du plan affine $\mathscr{P}$, de centre $A$ de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et $S$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y'y$.

   a) Préciser l'intersection de $\mathscr{D}$ et de $y'y$, $\mathscr{D}$ désignant la droite affine contenant $I$ et dirigée par le vecteur directeur
$$\vec{u} = -\vec{\imath}\,.\sin\alpha + \vec{\jmath}\,.\cos\alpha.$$
   b) Soit $\Sigma = H \circ f \circ S$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, déterminer l'affixe $z_2$ du point $M_2$ image par $\Sigma$ du point $M_1$ d'affixe $z_1$.
   En déduire la nature de $\Sigma$ et ses éléments caractéristiques.
   Retrouver ces résultats sans l'aide des nombres complexes.

# III. Amiens, série C

**Ex. 623.** ./1973/amiensC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4+(3-6\mathrm{i})^2+2(16-63\mathrm{i})=0.$$

**Ex. 624.** ./1973/amiensC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=-x^3+x^3\log x$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

**1.** Étudier le domaine de définition de $f$.

Étudier $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ aux bornes du domaine de définition ; ces quantités ont-elles des limites finies et, dans ce cas, quelles sont ces limites ?

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$.

Construire avec précision la courbe (C) représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 2 cm.

**3.** Soit $\alpha\in\,]0\,;\mathrm{e}[$. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre $x'Ox$, (C) et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=\mathrm{e}$.

Quelle est la limite de cet aire lorsque $\alpha$ tend zéro ?

## Problème 159

./1973/amiensC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réel, est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ , et que ce même ensemble, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau non commutatif.

A) On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices $M=aA+bB$, avec $(a,\ b)\in\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de base $(A,\ B)$.

2° Montrer que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}$ inversibles, et montrer que leurs inverses sont des éléments de $\mathscr{M}$.

On pose $M^1=M$ et, pour tout $n$ entier supérieur ou égal à 1,

$$M^n=M^{n-1}\times M.$$

Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$, on a

$$M^n=2^{n-1}a^nA+2^{n-1}b^nB.$$

B) On considère l'endomorphisme $F_{a,\ b}$ d'un plan vectoriel E ayant pour matrice $M=aA+bB$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de E.

1° Déterminer le noyau et l'image de $F_{a,\ b}$ suivant les valeurs de $a$ et $b$.

2° On considère les vecteurs

$$\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\qquad\text{et}\qquad\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}.$$

Déterminer les matrices de l'application $F_{0,\ b}$ et $F_{a,\ 0}$ par rapport à la base orthonormée $(\vec{u},\ \vec{v})$.

Montrer que chacune de ces applications est, lorsque $a$ et $b$ ne sont pas nuls, la composée d'une projection et d'une homothétie qu'on précisera.



Retour page 1

3° Déterminer la matrice de $F_{a,\,b}$ par rapport à la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
Dans quels cas $F_{a,\,b}$ est-elle une rotation, une symétrie, une homothétie ?
Donner, avec précision, les éléments définissant ces applications.

C) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E. L'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On appelle $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$, transformant $O$ en $\omega\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et dont l'endomorphisme associé est $F_{\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}}$.

1° Montrer que les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $f(m)$ s'expriment à l'aide des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point $m$ par

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{2} \\ y' = 3y + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2° Soit (C) le cercle de centre $\omega$, et passant par $O$.
Trouver une équation de la courbe (C') transformée de (C) par l'application $f$.
Montrer que (C') est une conique à centre. Soit $\omega'$ son centre. Écrire une équation de (C') par rapport au repère $(\omega',\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Calculer les coordonnées des sommets de cette conique dans le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

## IV. Amiens, série E

L'exercice 1 est le même que celui de la série C : 623.

**Ex. 625.** ./1973/amiensE/exo-2/texte.tex

En utilisant des intégration par parties successives, calculer

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

En donner une valeur approchée avec la précision permise par les tables numériques.

Le problème est le même que celui de la série C : 159.

## V. Amiens remplacement, série C

**Ex. 626.** ./1973/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $I = [0\,;\pi]$ par

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$

1. Montrer que $f$ est une bijection de l'intervalle $I$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$ par rapport à un repère orthonormé. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie.
3. Calculer l'aire de la portion du plan comprise entre $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

Pour évaluer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ on pourra effectuer une intégration par parties et en déduire une relation entre $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x$.

**Ex. 627.** ./1973/amiensCrem/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine associé au plan vectoriel V et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère cartésien de P.
On considère l'application $f$ de P dans P qui, à tout point $M$ de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de P dont les coordonnées $(x'\ ;\ y')$, sont déterminées par

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3, \\ y' = -4x + 10y - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une application affine. On définira par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de v l'endomorphisme $\varphi$ de V associé à $f$.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de P par $f$.
3. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme $\varphi$ sont deux-sous espaces vectoriels supplémentaires de V que l'on déterminera chacun par une base.

## Problème 160

./1973/amiensCrem/pb/texte

A- 1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 1$.
Indiquer le forme trigonométrique des solutions.
Soit $j$ celle des solutions qui a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2. On considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(1,\ \mathrm{i})$. Montrer qui $(1,\ j)$ est aussi une base de $\mathbb{C}$.
3. Soit $z = a + bj$ le nombre complexe de coordonnées $a$ et $b$ dans la base $(1,\ j)$.
En utilisant l'expression de $j$ en fonction de i, écrire $z$ sous la forme $x+y\mathrm{i}$ ; en déduire les coordonnées $x$ et $y$ de $z$ dans la base $(1,\ \mathrm{i})$ en fonction de $a$ et $b$, puis calculer $a$ et $b$ en fonction de $x$ et $y$.
4. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par

$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\mathrm{i}) = j.$$

Démontrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$.
Déterminer le nombre complexe $z$ tel que $f(z) = \mathrm{i}$.
Soit $f^{-1}$ l'application réciproque de $f$. Écrire la matrice de $f^{-1}$ relativement à la base $(1,\ \mathrm{i})$.

B- Soit $a$ et $b$ les coordonnées d'un nombre complexe $z$, $a'$ et $b'$ celles d'un nombre complexe $z'$ dans l base $(1,\ j)$.
1. Calculer en fonction de $a$ et $b$ le carré du module de $z$.
2. Déterminer dans la base $(1,\ j)$ les coordonnées
a) du conjugué $\overline{z}$ de $z$,
b) de l'inverse $\dfrac{1}{z}$ de $z$ supposé non nul,
c) des produits $j.z$ et $j^2.z$,
d) du produit $z.z'$.

C- 1. Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$, où $a$ et $b$ sont des réels.
Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{M}_2$ sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2. Déterminer une base de E.
2. Soit $g$ l'application de $\mathbb{C}$ dans E qui, à tout nombre complexe $z = a + bj$, associe la matrice

$$g(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbb{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ainsi que E, démontrer que l'application $g$ est linéaire.
Réalise-t-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{C}$ et E ?



Retour page 1

b) Montrer que, pour tout couple $(z,\ z')$ de $\mathbb{C}^2$,

$$g(z.z') = g(z) \times g(z').$$

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que le déterminant de la matrice $g(z)$ soit nul.

d) Calculer la matrice $g(1)$ et déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ vérifiant l'égalité

$$[g(z)]^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## VI. Amiens remplacement, série E

Ex. 628. ./1973/amiensErem/exo-1/texte.tex

**1.** Vérifier que, pour tout entier naturel $m$ non nul, $\dfrac{1}{m}\sin mx$ est une primitive de $\cos mx$.

**2.** On considère les intégrales

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 4x \, \mathrm{d}x$$

et

$$B = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 4x \, \mathrm{d}x.$$

Calculer $A+B$ et $A-B$. En déduire $A$ et $B$.

**3.** On considère maintenant

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, \mathrm{d}x$$

et

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, \mathrm{d}x,$$

où $p$ et $q$ sont des entiers naturels non nuls. Calculer $C$ et $D$.

L'exercice 2 est le même que celui de la série C : 627.
Le problème est identique à celui de la série C : 160.

## VII. Besançon, série C

Ex. 629. ./1973/besanconC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la restriction à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;+\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \tan x - x$.
Définir la fonction dérivée de $f$, en déduire le sens de variation de $f$ et montrer que $f$ est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;+\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $F$ la fonction réciproque de $f$. Construire, dans un repère orthonormé, les représentation graphiques de $f$ et $F$.

Ex. 630. ./1973/besanconC/exo-2/texte.tex

Soit S l'ensemble de tous les entiers relatifs vérifiant simultanément les deux congruences

$$x \equiv 1\,[3] \qquad \text{et} \qquad x \equiv 2\,[5].$$

Trouver un entier relatif plus petit que 10 appartenant à S.
Montrer, en précisant les théorèmes utilisés, que $\forall (a,\ b) \in \mathrm{S} \times S,\ a \equiv ab\,[15]$.
En déduire l'expression générale des éléments de l'ensemble S.

### PROBLÈME 161

./1973/besanconC/pb/texte

A) Soit E le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ et T l'application linéaire de E dans E définie par $\mathrm{T}(\vec{e}_1)=\vec{e}_2$ et $\mathrm{T}(\vec{e}_2)=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e}_2$ ($\lambda$ et $\mu$ sont deux réels).

1° Donner la matrice de T dans la base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Déterminer les couples $(\lambda,\ \mu)$ de réels pour lesquels T est bijective.

Trouver tous les couples $(\lambda,\ mu)$ tels que T soit une isométrie vectorielle de E ; préciser alors si T est une rotation ou une symétrie vectorielle par rapport à un droite vectorielle (dont on précisera une base).

2° $\lambda$ et $\mu$ qui interviennent dans la définition de T étant quelconques, on considère la suite

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3=\mathrm{T}(\vec{e}_2,\ \dots,\vec{e}_n=\mathrm{T}(\vec{e}_{n-1}),\ \dots$$

$\vec{e}_n$ étant le transformé de $\vec{e}_{n-1}$ par $T$.

On pose

$$\vec{e}_n=x_n\vec{e}_1+y_n\vec{e}_2.$$

Donner $(x_1,\ y_1)$, ainsi que $(x_2,\ y_2)$ et montrer que $\forall n\geqslant 2,\ x_n=\lambda y_{n-1}$ et $\forall n>2,\ y_n=\mu y_{n-1}+\lambda y_{n-2}$.

3° $\alpha$ et $\beta$ désignent les racines distinctes, réelles ou complexes, de l'équation : $x^2-\mu x-\lambda=0$, avec

$$\mu^2+4\lambda\neq 0\quad \text{et}\lambda\neq 0.$$

Exprimer $k$ et $k'$, tels que $y_1=k+k'$ et $y_2=k\alpha+k'\beta$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

Montrer alors par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$y_n=k\alpha^{n-1}+k'\beta n-1.$$

Vérifier que si $\alpha$ et $\beta$ sont complexes, $k$ et $k'$ sont complexes conjugués et que $k\alpha^{n-1}+k'\beta n-1$ est réel pour tout entier naturel non nul.

Calculer alors $y_n$ et $x_n$ en fonction de $\alpha,\ \beta,\ n$ ($n$ entier naturel non nul), puis établir que $x_n+\alpha y_n=\alpha^{n-1}$.

B) $\mathscr{E}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. $M_n$ désigne le point unique de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{e}_n$.

1° a) On suppose que $\alpha=1$. Montrer que les points $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n,\ \dots$ sont tous situés sur une droite dont on donnera l'équation.

b) On suppose que $\alpha=-1$. Montrer que les points $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n,\ \dots$ sont tous situés sur la réunion de deux droites dont on donnera les équations.

2° On prend maintenant $\lambda=-1$ et $\mu=2\cos\dfrac{2\pi}{p}$, $p$ entier naturel supérieur à 2.

Calculer $\alpha$ et $\beta$, ainsi que $x_n$ et $y_n$. Montrer que la suite de points $n\longmapsto M_n$ est périodique et que $p$ est l'une de ses périodes

## VIII. Besançon, série E

Ex. 631.

./1973/besanconE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\qquad \text{pour } x<0,$$

$$f(x)=-\frac{3}{2}x+1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\qquad \text{pour } x\geqslant 0.$$

**1.** Cette fonction est-elle continue pour $x=0$ ? Est-elle dérivable pour $x=0$ ?

**2.** Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**3.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On ne demande pas de valeur numérique approchée.)

Retour page 1

**Ex. 632.** ./1973/besanconE/exo-2/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$z^6 + z^3(2\mathrm{i} - 1) - 1 - \mathrm{i} = 0.$$

## Problème 162

./1973/besanconE/pb/texte

A) Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices

$$M_{(a,\ b)} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels, $b \neq 0$.

Montrer que $\mathscr{M}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif.

B) Soit P un plan vectoriel sur le corps des réels, muni d'une base $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $F_{(a,\ b)}$ l'application de P dans P, dont la matrice associée, dans la base $B$ est $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par $F_{(a,\ b)}$ ?
   Soit $x$ et $y$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $B$, calculer dans cette base les coordonnées de $F_{(a,\ b)}(\vec{u})$.
2. Trouver les valeurs du réel $k$, pour lesquelles il existe des vecteurs $\vec{u}$ de P, différents de $\vec{0}$, tels que$F_{(a,\ b)}(\vec{u}) = k\vec{u}$.
   Montrer que l'ensemble $U$ de ces vecteurs est soit une droite vectorielle, soit deux droites vectorielles, soit P.
   Quelles sont les droites vectorielles invariantes par $F_{(a,\ b)}$ ?
   Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par $F_{(a,\ b)}$ ?

C) Soit $\mathscr{P}$ un pan affine associé au plan vectoriel P ;

On munit $\mathscr{P}$ du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie de la manière suivante : l'image du point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y = 2y - 1. \end{cases}$$

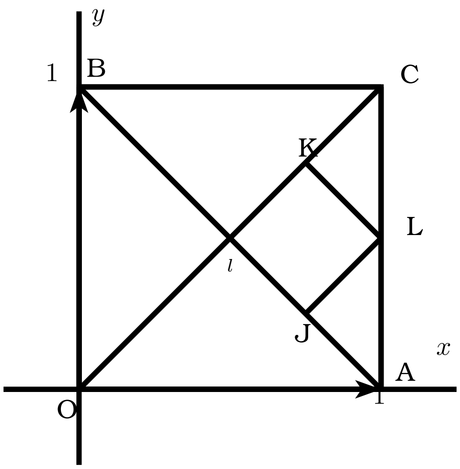
1. Montrer que $f$ est une application affine qui admet $F_{(0,\ 2)}$ comme application linéaire associée.
   En déduire que $f$ est bijective et définir l'application réciproque $f^{-1}$.
2. Quelles sont les droites parallèles à leur image par l'application $f$ ?
   Quelles sont les droites globalement invariantes par $f$ ?
3. On suppose désormais que le plan affine $\mathscr{P}$ est euclidien et que le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé.
   Soit $(C)$ la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 - 4y = 0$ par rapport au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Reconnaître cette courbe et ses éléments de symétrie.
   Quelle est la courbe transformée de $(C)$ par l'application $f$ ?

# IX. Besançon, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg remplacement, série C

**Ex. 633.** ./1973/besanconCrem/exo-1/texte.tex



Retour page 1




Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
Soit A le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et B le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
I est le centre du carré OBCA, K est le milieu du segment IC et J est le milieu du segment IA.
Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui transforme le carré OBCA en le carré IKLJ (les points O, B, C et A ayant respectivement pour image I, K, L et J). On admettra l'existence et l'unicité de cette similitude.

**Ex. 634.** ./1973/besanconCrem/exo-2/texte.tex

On note $L_1(x) = \log x$ ($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$) et pour tout entier $n$ supérieur à 1,

$$L_n(x) = \log\left[L_{n-1}(x)\right].$$

Ainsi, $L_2(x) = \log(\log x)$.

1. Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$L_1,\ L_2,\ L_3 \qquad \text{et} \qquad L_4.$$

2. Déterminer la fonction dérivée de $L_n$.

## Problème 163

./1973/besanconCrem/pb/texte

Dans ce problème, e désigne la base des logarithmes népériens.

A- Soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel $V$. Soit $f$ l'application linéaire de $V$ dans lui-même qui donne pour image du vecteur $\vec{\imath} + \mathrm{e}\vec{\jmath}$ le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et qui laisse invariant le vecteur $\vec{\imath}$.

1. Déterminer l'image de $\vec{\jmath}$ et la matrice de $f$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
2. Quelles sont les droites vectorielles invariantes par $f$ ?

B- Soit P le plan affine associé à $V$ et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de P. Soit $\varphi$ l'application de P dans P déterminée par « quel que soit le point $M$ de P, $M' = \varphi(M)$ est défini par $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$ ».

1. Vérifier que les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'$ s'exprime en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ par

$$x' = x \qquad \text{et} \qquad y' = \mathrm{e}^{-1}y.$$

$A$ et $B$ étant deux points distincts quelconques du plan P, montrer que la droite passant par $A$ et $B$ et la droite passant par $A'$ et $B'$ sont parallèles ou bien se coupent sur $x'x$ ($A'$ et $B'$ sont les transformés respectifs de $A$ et $B$ par $\varphi$).

2. Soit (C) la courbe représentative dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction $g$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x+1}$.
Déterminer l'équation de la courbe (C'), image de (C), par $\varphi$.
Montrer que (C') est aussi l'image de (C) par la translation $t$ de vecteur $\vec{\imath}$. En déduire le tracé de (C).
On tracera (C) et (C') sur un même graphique.
3. Quel est l'ensemble décrit par l'intersection de la tangente à (C) en $M$ avec la tangente à (C') en $\varphi(M)$, lorsque $M$ décrit (C) ?

C- On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(x)+1}$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de $x$, c'est-à-dire l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à $x$.



Retour page 1

1. Représenter graphiquement $h$ sur le même graphique que (C) et (C').

   Calculer $I_n = \int\limits_{n}^{n+1} h(x)\,\mathrm{d}x$ ($n$ entier relatif).

   Calculer, $n$ étant entier positif,
$$S_n = I_{-1} + I_{-2} + \cdots I_{-n}$$
   et la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

2. Déterminer l'aire $A_n$ du domaine plan fini compris entre (C) et (C'), les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$ ($n$ entier naturel).

   Quelle est la probabilité pour que, choisissant $n$ au hasard dans l'intervalle $[1\,;10]$ on ait
$$A_n < 25 \text{ ?}$$

# X. Besançon, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 635.** ./1973/besanvonErem/exo-1/texte.tex

Soit E le plan affine et $T$ l'application affine qui à tout point $M \in$ E, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\mathscr{R} =: oij$, fait correspondre le point $M' \in$E de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ dans le repère $\mathscr{R}$, telles que
$$x' = y - x - 1 \qquad \text{et} \qquad y' = x - 2y.$$

1. Montrer que $T$ est une application affine.
2. Montrer que $T$ est bijective ; déterminer l'application réciproque de $T$.
3. Trouver l'ensemble des points invariants par $T$.
4. Déterminer les images par $T$ des droites affines $(O,\ \vec{i})$ et $(O,\ \vec{j})$.
5. Trouver l'équation de l'image $(\mathscr{C}')$ de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

**Ex. 636.** ./1973/besanvonErem/exo-2/texte.tex

1. Trouver le module et un argument du nombre complexe $1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.
2. Soit P un plan affine orienté et dans un repère $R(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de sens direct ; on considère l'application $S$ qui à tout point $M \in$P fait correspondre la point $M' \in$P tel que, si $z$ désigne l'affixe du point $M$ et $z'$ l'affixe du point $M'$, on ait
$$z' = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i}).$$
   Montrer que $S$ est l'écriture d'une similitude dont on déterminera le centre, le rapport et une mesure de l'angle.

## Problème 164

./1973/besanvonErem/pb/texte

A- On associe au nombre réel $\lambda$ la fonction
$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_\lambda(x) = (x+\lambda)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Soit $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe représentative d $f_\lambda$ dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (on ne demande pas de représenter $f_\lambda$ dans le cas général).

1. Quelles sont les limites de $f_\lambda$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et quand $x$ tend vers $-\infty$ ? (Pour la seconde limite on pourra poser $x = -t$.)

   Quelle est la limite de $\dfrac{f_\lambda(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?
2. Étudier les variations de la fonction $f_\lambda$.



Retour page 1

3. La courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$ possède un seul point $S_\lambda$ où sa tangente est parallèle à l'axe $x'Ox$. Déterminer les coordonnées de $S_\lambda$ en fonction de $\lambda$.
   Trouver l'équation indépendante de $\lambda$ que vérifient les coordonnées de $S_\lambda$ quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.
   En déduire l'ensemble $\mathscr{S}$ des points $S_\lambda$ quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.
4. Montrer que par un point donné $M_0$ du plan, de coordonnées $(a\ ;\ b)$, il passe une seule courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$. Déterminer $\lambda$ en fonction de $a$ et $b$.
5. Soit $M_lambda$, le point de $(\mathscr{C}_\lambda)$ d'abscisse $x_0$ fixée, et soit $(\Delta_\lambda)$ la tangente à $(\mathscr{C}_\lambda)$ au point $M_\lambda$. Écrire l'équation de la tangente $(\Delta_\lambda)$.
   Lorsque $\lambda$ varie, $x_0$ restant fixe, montrer que $(\Delta_\lambda)$ passe par un point fixe $T$ dont on déterminera les coordonnées en fonction de $x_0$.
   En déduire une construction très simple du point $T$ faisant intervenir la courbe (S).

B- a) On prendra une unité graphique représentée par 3cm. En tenant compte des résultats précédents, tracer soigneusement sur papier millimétré les courbes (S), $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_{-1})$, $(\mathscr{C}_{-2})$. Construire les tangentes à ces courbes aux points d'abscisse $x_0 = \dfrac{1}{2}$.
   On donne les valeurs approchées suivantes :

| $x$ | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^x$..... | 1,65 | 2,72 | 4,48 | 7,39 |
| $\mathrm{e}^{-x}$.... | 0,61 | 0,37 | 0,22 | 0,13 |

b) Calculer l'aire du domaine plan

$$D = \left\{ (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ (x-1)\mathrm{e}^x \leqslant y \leqslant 0 \end{array} \right\}.$$

C- On donne trois réels distincts deux à deux : $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. On désigne par $M_\alpha,\ M_\beta,\ M_\gamma$ les points des courbes $(\mathscr{C}_\alpha),\ (\mathscr{C}_\beta),\ (\mathscr{C}_\gamma)$ de même abscisse $x$.

1. Montrer qu'il existe un réel $k$ indépendant de $x$, tel que
$$\overrightarrow{M_\beta M_\alpha} = k\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}.$$
2. Réciproquement, montrer que, quel que soit le réel $k$ différent de 1, l'ensemble $E_k$ des points $N$ du plan tels que $vecteur M_\beta N = k\overrightarrow{M_\gamma N}$ est la courbe $(\mathscr{C}_\alpha)$. (On calculera $\alpha$ en fonction de $k$.)
   Déterminer $E_{-1}$ pour $\beta = 0$ et $\gamma = -2$.

## XI. Bordeaux, série C

**Ex. 637.** ./1973/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (intégrer par parties).

**Ex. 638.** *II bordeaux C 73* ./1973/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Deux personnes, A et B, écrivent chacune, au hasard, un nombre entier de deux chiffres (en numération décimale).
Soit $x$ le nombre écrit par A, $y$ le nombre écrit par B. Tous les couples d'entiers $(m,\ n)$ ($10 \leqslant m \leqslant 99,\ 10 \leqslant n \leqslant 99$) sont supposés équiprobables.
En d'autres termes, on considère l'espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ p)$, où $\Omega$ est l'ensemble des couples $(m,\ n)$ tels que $10 \leqslant m \leqslant 99$ et $10 \leqslant n \leqslant 99$, et $p$ la probabilité pour laquelle toutes les parties à un élément ait la même probabilité.

a) Quelle est la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre ? En d'autres termes, calculer la probabilité de l'ensemble $\Delta$ des couples $(m,\ n)$ tels que $m = n$.



Retour page 1

b) Soit E l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ et $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{E})$.

c) Soit F l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $10 \leqslant m < 50$ ou $10 \leqslant n < 50$. Calculer $p(\mathrm{F})$.

d) Soit G l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $m < n$. Soit G' l'ensemble des couples $(m,\ n) \in \Omega$ tels que $m > n$. Calculer $p(\mathrm{G})$ et $p(\mathrm{G'})$.

## Problème 165

./1973/bordeauxC/pb/texte

Soit $E$ le plan vectoriel, et $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de $E$. On désigne par $\mathscr{E}$ le plan affine associé à $E$, et on considère un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathscr{E}$. On appellera $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice, relativement à $B$, est :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ , dont l'application linéaire associée est $\varphi$, et qui, au point $O$, de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ par rapport à $\mathscr{R}$, associe le point $A$, de coordonnées $(3\ ;\ 4)$, par rapport à $\mathscr{R}$. Si $M$ est un point de $\mathscr{E}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on notera $M_1 = f(M)$, $M_2 = f(M_1)$, et $M_3 = f(M_2)$, et on désignera par $(x_1\ ;\ y_1)$, $(x_2\ ;\ y_2)$, $(x_3\ ;\ y_3)$, respectivement, les coordonnées des points $M_1$, $M_2$, $M_3$ .

1. Montrer que $f$ est bijective, et que :

$$x_1 = 4x - 3y + 3 \qquad \text{et} \qquad y_1 = 7x - 5y + 4.$$

2. Montrer que l'image de toute droite vectorielle $(\Delta)$ de $E$, par l'application linéaire $\varphi$, est une droite vectorielle $(\Delta')$ de $E$.
   Si $\Delta$ a pour équation dans la base $B\ :\ ux + vy = 0\ [(u\ ;\ v) \neq (0\ ;\ 0)]$, quelle est l'équation de $(\Delta')$.? (Désigner par $(x'\ ;\ y')$ les coordonnées, dans $B$, de l'image par $\varphi$ du vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $B$. Peut-on avoir $(\Delta) = (\Delta')$? En déduire que si $(D)$ est une droite affine du plan, $(D_1) = f(D)$ est une droite affine, non parallèle à $D$.
3. Calculer les coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ du barycentre $G$ des points $M$, $M_1$, $M_2$ affectés du même coefficient 1. Vérifier que $G$ est indépendant de $M$, et montrer que $G$ est invariant par $f$ .
   En déduire que $f^3$ est l'identité sur $\mathscr{E}$. ($f^3 = f \circ f \circ f$).
4. a) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{E}$, distinct de $G$, les points $M$, $M_1$, $M_2$ ne sont pas alignés.
   b) Soit $P$ un point de $\mathscr{E}$, distinct de $G$. On pose $\vec{I} = \overrightarrow{PP_1}$ et $\vec{J} = \overrightarrow{PP_2}$ (où $P_1 = f(P)$ et $P_2 = f(P_1)$).
   Montrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base de $E$. Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$?
   Soient $(a\ ;\ b)$ et $(a_1\ ;\ b_1)$respectivement les coordonnées de $M$ et de $M_1$ dans le repère $(P,\ \vec{I},\ \vec{J})$ de $\mathscr{E}$. Calculer $(a_1\ ;\ b_1)$ en fonction de $(a\ ;\ b)$.

b.

# XII. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 639.** ./1973/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

Le nombre naturel $N$, qui s'écrit 341 dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}$ en base $a$.

**1.** Trouver un encadrement de $a^3$.

**2.** Déterminer $a$. Vérifier.

**Ex. 640.** *II bordeaux C 73* ./1973/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n$ la somme

$$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

**1.** Posons $z = \cos\frac{\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}$. Donner une expression simple de la somme $1 + z + \cdots + z^{n-1}$.
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$

**2.** Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.



Retour page 1

## PROBLÈME 166

./1973/bordeauxCrem/pb/texte

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3. On désigne par $I$ l'identité sur $E$.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$, vérifiant

$$f^3 - 7f + 6I = 0 \qquad (\text{où } f^3 = f \circ f \circ f).$$

**1.** Pour tout réel $\lambda$, soit $E_\lambda$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
Montrer que $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
Montrer que si $E_\lambda$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, le nombre $\lambda$ est une racine de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$. Calculer les racines de cette équation.

**2.** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs donnés de $E$ . Déterminer un triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, des vecteurs de $E$, tels que

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{u}, \qquad \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{a} + 4\vec{b} + 9\vec{c} = \vec{w}.$$

Montrer que le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est unique.
Soit $\vec{u} \in E$ et soit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ un triplet de vecteurs de $E$ tel que

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{u}, \qquad \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = f(\vec{u}) \qquad \text{et} \qquad \vec{a} + 4\vec{b} + 9\vec{c} = f^2(\vec{u}) \quad (f^2 = f \circ f).$$

Comparer les vecteurs $f(\vec{a})$, $f(\vec{b})$, $f(\vec{c})$ aux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. En conclure que tout vecteur de $E$ peut s'écrire, de façon unique, comme somme de trois vecteurs appartenant respectivement à $E_1$, $E_2$ et $E_{-3}$.

**3.** Supposons que chacun des trois sous-espaces $E_1$, $E_2$, $E_{-3}$, soit non réduit à $\{\vec{0}\}$, et soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ des vecteurs, tous non nuls, appartenant respectivement à $E_1$, $E_2$, $E_{-3}$. Montrer que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $E$. Quel est dans ce cas la dimension de $E_1$, $E_2$, $E_{-3}$ ?
Soit $\vec{u} \in E$ et soit $(x\,;\,y\,;\,z)$ les coordonnées de $\vec{u}$, par rapport à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Donner l'expression des coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ du vecteur $f(\vec{u})$ par rapport à cette base, en fonction de $x$, $y$, $z$.

**4.** L'un ou plusieurs, des sous-espaces vectoriels $E_1$, $E_2$, $E_{-3}$ peuvent-ils être réduit à $\{\vec{0}\}$ ? Soit $(\vec{l}, \vec{m}, \vec{n})$ une base de $E$, et soit $f$ l'endomorphisme de $E$, faisant correspondre à un vecteur de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans cette base, le vecteur de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ :

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -4x - 3z.$$

Posons $\vec{l} - \vec{n} = \vec{h}$. Montrer que $(\vec{h}, \vec{m}, \vec{n})$est une base de $E$.
Calculer $f(\vec{h})$, $f(\vec{m})$, $f(\vec{n})$ et exprimer les coordonnées $(\alpha', \beta', \gamma')$ du vecteur $f(\vec{u})$ dans la base $(\vec{h}, \vec{m}, \vec{n})$ en fonction des coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $\vec{u}$ dans cette base. En déduire que

$$f^3 - 7f + 6\mathrm{I} = 0$$

et déterminer les sous-espaces $E_1$, $E_2$, $E_{-3}$.
i : La question 4 est indépendante des questions 2 et 3.

# XIII. Bordeaux, série E

**Ex. 641.** ./1973/bordeauxE/exo-1/texte.tex

Question identique à II bordeaux C 73

**Ex. 642.** ./1973/bordeauxE/exo-2/texte.tex

Le plan affine $E_2$ étant rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $f$ l'application du plan $E_2$ vers lui-même définie analytiquement par $f(x, y) = (x', y')$ :

$$\begin{cases} x' = -x\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+2}{6}, \\ y' = \dfrac{x}{2} + y\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

**1.** a) Montrer que $f$ est une application affine et déterminer la matrice de son endomorphisme associé $\varphi$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Retour page 1

b) Déterminer l'ensemble des points invariants de $E_2$ par $f$.

**2.** Montrer que $\varphi$ est involutif. En déduire que $f$ est involutive.

**3.** Soit $O'$ le point de coordonnées $(4\,;\,-1)$ et soit $\varphi'$ l'endomorphisme du plan vectoriel associé à $E_2$, dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est $M_{\varphi'} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\varphi'$ est involutif.

b) L'application affine $f'$ transformant $O$ en $O'$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi'$ est-elle involutive ?

## Problème 167

./1973/bordeauxE/pb/texte

A) On considère la fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par

$$\varphi(t) = \frac{2t}{1+t} - \log(1+t)$$

(où $\log$ désigne le logarithme népérien.)

1. Étudier cette fonction : sens de variation ; sens de variation, limites, tangentes aux points remarquables, branche infinie et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'axes $t'Ot$, $z'Oz$ (unité choisie : 2 cm).
2. L'étude précédente montre qu'il exsite un réel $a$ supérieur à 1,et un seul, tel que $\varphi(a) = 0$. Á l'aide d'une table numérique, placer les points d'abscisse $2,\ 3,\ 4$, et déterminer les veleurs approchées par défaut et par excès de $a$, au dixième près.
3. Écrire la fraction rationnelle $\dfrac{3t}{1+t}$ sous la forme $b + \dfrac{c}{1+t}$, $b$ et $c$ étant deux constantes réelles.

   Au moyen d'une intégration par parties, ramener le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \log(1+t)\,\mathrm{d}t$ au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que l'aire $\mathscr{S}$ de la partie du plan,ensemble des points dont les coordonnées $(t\,;\,z)$ vérifient les inégalités

   $$0 \leqslant t \leqslant a \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant z \leqslant \varphi(t),$$

   est donnée par $\mathscr{S} = \dfrac{a(a-3)}{a+1}$.

   Donner un encadrement de $\mathscr{S}$ à partir des valeurs approchées obtenues pour $a$.

B) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\log\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right).$$

1. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$. En déduire le sens de variation de la fonction $f$.
2. Exprimer $f(x)$ e fonction de $u = \mathrm{e}^{2x}$ seul. En déduire la limite de la fonction $f$ losrque $x$ tend vers $-\infty$.
3. En utilisant l'égalité $1+\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)$ trouver la limite de la fonction $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (unité : 2 cm).

   Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle $f$ présente un maximum, ainsi que la valeur de ce maximum ; en donner un encadrement en utilisant les velurs approchées de $a$.

# XIV. Bordeaux remplacement, série E

**Ex. 643.** ./1973/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Deux variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ prennent les valeurs $0,\ 1$ et $2$. Comment doit-on choisir le nombre réel $p$ pour que le tableau ci-dessous donne une loi conjointe de $(X_1,\ X_2)$ ?

| $X_2$ \ $X_1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{1}{4}p$ |
| 1 | $2p$ | $p$ | $\frac{1}{2}p$ |
| 2 | $4p$ | $2p$ | $p$ |

Quelles sont les lois marginales ?
Les variables $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?
Soit $Y = X_1.X_2$ ; calculer l'espérance mathématique de $Y$.

**Ex. 644.** ./1973/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

Même sujet que celui de la série C : exercice 2 série C.

**Problème 168** ./1973/bordeauxErem/pb/texte

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $k = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ et le plan vectoriel associé est rapporté à la base $\beta = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On désigne par $A$ le point défini par $\overrightarrow{OA} = -\frac{5}{6}\vec{\jmath}$ et l'on considère l'application affine $f$ associée à l'endomorphisme telle que

$$f(O) = A\ ; \qquad \varphi(\vec{\imath}\,) = \frac{6}{5}\vec{\imath} + \frac{2}{5}\vec{\jmath}\ ; \qquad \varphi(\vec{\jmath}\,) = \frac{2}{5}\vec{\imath} + \frac{29}{30}\vec{\jmath}.$$

1. a) Quelle est la matrice de $\varphi$ dans $\beta$ ?
   b) Calculer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M' = f(M)$ en fonction de celles, $x$ et $y$, de $M$ dans le repère $k$.
   Montrer que $f$ est une transformation du plan affine et déterminer $f^{-1}$.
   Montrer que $f$ admet un point invariant $O'$, et un seul, calculer ses coordonnées.
2. a) Montrer que l'ensemble des vecteurs
   $$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$
   tels que $\vec{v}$ et $\varphi(\vec{v})$ sont indépendants, est constitué de deux droites vectorielles qui, dans $\beta$, ont pour équations respectives :
   $$(D_1) : 3x - 4y = 0 \qquad \text{et} \qquad (D_2) : 4x + 3y = 0.$$
   Vérifier que pour tout vecteur $\vec{v}_1$ de $(D_1)$ on a $\varphi(\vec{v_1}) = \frac{3}{2}\vec{v_1}$ et pour tout vecteur $\vec{v}_2$ de $(D_2)$ on a $\varphi(\vec{v_2}) = \frac{2}{3}\vec{v_2}$.
   b) Quelles sont les droites affines parallèles à leur transformée par $f$ ?
   Y a-t-il des droites affines globalement invariantes par $f$ ?
3. a) Soit $\vec{I} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$ et $\vec{J} = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$. Vérifier que $\vec{I} \in (D_1)$ et $\vec{J} \in (D_2)$ et que $\beta' = (\vec{I},\ \vec{J})$ est une base orthonormée du plan vectoriel euclidien.
   Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $\beta'$.
   b) Soit $k' = (O',\ \vec{I},\ \vec{J})$. calculer les coordonnées $X'$ et $Y'$ de $M' = f(M)$ dans $k'$, en fonction des coordonnées $X$ et $Y$, de $M$ dans ce repère.
   Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $O'$ et de rayon $R$. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}')$ transformée de $(\mathscr{C})$ par $f$ est une conique de centre $O'$. Préciser ses sommets.
   Construire $(\mathscr{C}')$ lorsque $R = 3$.

# XV. Caen, série C

**Ex. 645.** ./1973/caenC/exo-1/texte.tex

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point $M$ se déplace dans ce plan. Á la date $t = 0$ où commence le mouvement, le point $M$ est en $O$ et son vecteur vitesse est nul.
Á toute date $t$ positive, le vecteur accélération du point a pour coordonnées $(6t\ ;\ 2)$.

**1.** Déterminer en fonction de $t$, les expressions des coordonnées de $M$ à la date $t$.

**2.** Tracer la trajectoire de $M$ et discuter l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

**Ex. 646.** ./1973/caenC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ $n$ variables aléatoires réelles définissant un même espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{B},\ P)$. On les suppose indépendantes et de même loi donnée explicitement par

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ :\quad P(\{X_i = 1\}) = p, \qquad P(\{X_i = 0\}) = 1 - p.$$

On définit alors une variable aléatoire $S$ telle que

$$\begin{cases} S = 0 \text{ si toute variable } X_i \text{ est nulle,} \\ S = 1 \text{ si l'une au moins des } n \text{ variables aléatoires } X_i \text{ est non nulle.} \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de $n$ telles que

$$P(\{S = 0\}) \leqslant 10^{-3}.$$

**2.** Un texte comporte une erreur. On relit ce texte $n$ fois ; à chaque lecture, la probabilité de remarquer cette erreur est $\dfrac{1}{2}$.

Déterminer $n$ de telle sorte qu'on ait une probabilité inférieure à $\dfrac{1}{1\ 000}$ de ne pas voir remarqué cette erreur après $n$ relectures.

## Problème 169

./1973/caenC/pb/texte

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que $1$ et i forment une base de cet espace vectoriel.
Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres complexes, on désigne par $F_{\alpha,\ \beta}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}(z) = \alpha z + \beta \overline{z},$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$.

**1.** a) Montrer que $F_{\alpha,\ \beta}$ est une application linéaire. Soit $x$ et $y$ deux nombres réels, calculer $F_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(x + \mathrm{i}y)$ et $F_{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}(x + \mathrm{i}y)$.

b) Soit $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$. On désigne par $\Phi$ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ définie par

$$(\alpha,\ \beta) \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}.$$

Démontrer que $\Phi$ est injective.

c) On se propose de montrer que $\Phi$ est aussi surjective. $\varphi$ étant un endomorphisme de $\mathbb{C}$ dont la matrice dans la base $(1,\ \mathrm{i})$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer, en calculant $2\varphi(z)$ en fonction de $z$ et $\overline{z}$, qu'il existe un unique couple de nombres complexes $(\alpha,\ \beta)$ tel que $\varphi = F_{\alpha,\ \beta}$.
Calculer les nombres réels $a,\ b,\ c$ et $d$ en fonction des parties réelles et imaginaires de $\alpha + \beta$ et de $\alpha - \beta$.

**2.** On définit une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(z_1,\ z_2) \longmapsto \langle z_1,\ z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

où l'on a posé

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2.$$

a) Montrer que pour tout nombre complexe $z$, on a

$$\langle z,\ z\rangle = z\overline{z} = |z|^2,$$

où $|z|$ désigne le module de $z$.
Montrer que pour tout couple $(z_1,\ z_2)$ de nombres complexes, on a

$$\langle z_1,\ z_2\rangle = \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right).$$

b) Montrer que $\langle .,\ .\rangle$ est un produit scalaire.
Quelle interprétation peut-on donner de la norme associée à ce produit scalaire ?
Montrer que $\mathbb{C}$ muni de ce produit scalaire est un plan vectoriel euclidien dont $1$ et $\mathrm{i}$ forment une base orthonormée.

c) On désigne par $m$ et $n$ les images respectives de $1$ et $\mathrm{i}$ par $F_{\alpha,\ \beta}$.
Montrer que $m$ et $n$ sont orthogonaux si, et seulement si, on a

$$\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = 0.$$

Montrer que $m$ et $n$ sont tous les deux unitaires si, et seulement si, on a

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 0.$$

En déduire que $F_{\alpha,\ \beta}$ est une isométrie vectorielle si, et seulement si, on a

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad |\beta| = 1.$$

Écrire, dans chacun des cas, les matrices associées à $F_{\alpha,\ \beta}$ dans la base $(1,\ \mathrm{i})$ ; (on rappelle qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

où $\theta$ est un nombre réel).
Définir géométriquement les isométries obtenues en précisant leurs éléments.
Étudier en particulier $F_{\mathrm{i},\ 0}$ et $F_{0,\ -1}$.

**3.** Soit P un espace affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien précédent. P est rapporté au repère d'origine $O$, de base $(1,\ \mathrm{i})$.
Soit $M$ un point de P, on appelle affixe de $M$ le vecteur $z$, élément de $\mathbb{C}$, définit par $z = \overrightarrow{OM}$.

a) Soit $f$ l'application affine de P dans P telle que le point $I$, d'affixe $z_0$, soit invariant par $f$ et telle que l'endomorphisme associé $F_{\alpha,\ \beta}$ soit tel que

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0.$$

$z'$ étant l'affixe de $M' = f(M)$, montrer que l'on a

$$z' = \alpha z + (1-\alpha)z_0.$$

Vérifier que $I$ est le seul point invariant de $f$, excepté pour une valeur de $\alpha$.
Préciser alors l'application $f$ correspondante.

b) $f_1$ étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_1,\ 0}$ avec $|\alpha_1| = 1$, et de point invariant $I_1$, $f_2$ étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_2,\ 0}$ avec $|\alpha_2| = 1$, et de point invariant $I_2$, à quel endomorphisme $F_{\alpha,\ \beta}$ est associé $f_2 \circ f_1$ ?
Déterminer les points invariants de $f_2 \circ f_1$.

# XVI. Caen, série E

Ex. 647. ./1973/caenE/exo-1/texte.tex

Soit P un plan vectoriel de base orthonormée $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan affine associé de repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ a pour image ponctuelle le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et pour image vectorielle le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

**1.** Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs non nuls, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, images vectorielles respectives de $z_1$ et $z_2$, soient orthogonaux est qu'il existe un réel non nul $k$ tel que $z_2 = \mathrm{i}kz_1$.

**2.** Soit $M-1$ un point de $\mathscr{P}$, si $z$ est le nombre complexe d'image ponctuelle $M_1$, on désigne par $M_2$ l'image ponctuelle de $z^2$ et par $M_3$ l'image ponctuelle de $z^3$.

Déterminer l'ensemble des points $M_1$ tels que les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ soient les sommets distincts d'un triangle rectangle en $M_1$.

Ex. 648. ./1973/caenE/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $(\Omega,\ \mathscr{B},\ p)$ un espace probabilisé, $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre événements.

Démontrer que

$$\begin{aligned} p(A\cup B\ \cup C\cup D) &= p(A)+p(B)+p(C)+p(D)\\ &-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(A\cap D)\\ &-p(B\cap C)-p(B\cap D)-p(C\cap D)\\ &+p(A\cap B\cap C)+p(A\cap B\cap D)\\ &+p(A\cap C\cap D)+p(B\cap C\cap D)\\ &-p(A\cap B\cap C\cap D). \end{aligned}$$

**2.** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On extrait « au hasard » sans remise quatre boules. Soit $X$ le produit des nombres inscrits sur les boules extraites.

Est-ce que $X$ est une variable aléatoire ? Quelle est la probabilité pour que $X$ soit pair ?

(On pourra désigner par $A$ l'événement : la première boule extraite porte un numéro pair, par $B$ l'événement : la deuxième boule extraite porte un numéro pair, etc. )

## Problème 170 ./1973/caenE/pb/texte

**1.** Á tout nombre réel positif ou nul $\lambda$, on associe la fonction $f_\lambda$ définie par

$$f_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-t+\lambda\log t}.$$

Montrer que si $\lambda$ est rationnel strictement positif, on a alors

$$f_\lambda(t) = t^\lambda \mathrm{e}^{-t}.$$

On appelle $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe, représentation graphique de $f_\lambda$ dans un repère orthonormé. Étudier le tableau de variation des fonctions $\lambda$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et donner l'allure des courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$.

Démontrer qu'elles passent toutes par un même point.

Comparer les positions relatives de deux courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ et $(\mathscr{C}_{\lambda'})$, lorsque $0 \leqslant \lambda < \lambda'$ (on pourra poser $\lambda' = \lambda + k$).

Construire les représentations graphiques $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ dans un repère orthogonal tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 2$ cm et $\left\|\vec{j}\right\| = 10$ cm.

On pourra utiliser les valeurs numériques approchées suivantes :

| $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^{-t}$ | 1 | 0,61 | 0,37 | 0,22 | 0,14 | 0,02 |



Retour page 1

**2.** Soit $a$ un réel supérieur à 1. On appelle $A_\lambda$ l'aire comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$, l'axe $Ox$, les droites $x=0$ et $x=a$.
Calculer $A_0$, $A_1$, puis $A_n$ en fonction de $A_{n-1}$, pour tout entier naturel $n$.
Montrer que $A_0$ et $A_1$ admettent des limites $J_0$ et $J_1$ quand $a$ tend vers $+\infty$.
On admettra que pour tout entier naturel $n$, supérieur ou égal à 2, $A_n$ admet une limite $J_n$ quand $a$ tend vers $+\infty$.
Déterminer $J_0$, $J_1$, puis une relation entre $J_n$ et $J_{n-1}$. En déduire la valeur de $J_n$.

**3.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, à coefficients réels.
On rappelle que les polynômes $P_0$ et $P_1$ définis par $\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \end{cases}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, constituent une base de $\mathscr{E}$.
Soit $P(x)=\alpha x+\beta$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, calculer l'intégrale

$$F_a(x)=\int_0^a (x+t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de $A_0$, $A_1$ et $A_2$.
Exprimer la limite $G(x)$ de $F_a(x)$, lorsque $a$ tend vers $+\infty$ en fonction de $J_0$, $J_1$ et $J_2$.
Démontrer que $G(x)$ est un élément de $\mathscr{E}$.
On considère l'application $\varphi$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par $\varphi(P)=G$.
Démontrer qu'elle est linéaire. Quelle est sa matrice dans la base $(P_0,\ P_1)$ ? Est-elle bijective ?

## XVII. Caen remplacement, série C

**Ex. 649.** ./1973/caencrem/exo-1/texte.tex

**1.** On considère dans $\mathbb{N}$ les entiers $\overline{20}$, $\overline{33}$, $\overline{1100}$ écrit en base $a$.
Quelle est cette base sachant que $\overline{20}\times\overline{33}=\overline{1100}$ ?

**2.** On considère l'entier naturel $A=\overline{5x23}$ écrit dans la base 6.

a) Déterminer $x$ pour que $A$ soit divisible par 7.

b) Déterminer pour qu'il soit divisible par 5.

c) Peut-il être divisible par 35 ?

(7, 5 et 35 sont écrits en base 10.)

**Ex. 650.** ./1973/caencrem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie par

$$x\longmapsto f(x)=\left|\frac{\log x}{x^2}\right|.$$

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Valeurs numériques approchées $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\simeq 1{,}65$, $\mathrm{e}^{-1}\simeq 0{,}36$.)

**2.** Soit $\alpha\in[1\,;+\infty[$. Calculer $\mathscr{A}(\alpha)=\displaystyle\int_1^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.
Quelle est la signification géométrique de $\mathscr{A}(\alpha)$ ?
Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\mathscr{A}(\alpha)$.

### Problème 171

./1973/caencrem/pb/texte

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel associé.
On considère une famille d'applications $\Phi$ affines $f_{k,a}$ de P, où $(k,\ a)$ est un couple de réels tels que $a$ soit différent de zéro.
On désigne par $F_{k,a}$ l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ associé à $f_{k,a}$. On suppose que la point $O$ est invariant par $f_{k,a}$ et que

$$\begin{cases} F_{k,a}(\vec{\imath}) = \dfrac{k+1}{a}\vec{\imath} + \dfrac{k-1}{a}\vec{\jmath}, \\ F_{k,a}(\vec{\jmath}) = \dfrac{k-1}{a}\vec{\imath} + \dfrac{k+1}{a}\vec{\jmath}. \end{cases}$$

1. $M$ étant un point quelconque de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$, déterminer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'$ image de $M$ par l'application $f_{k,a}$.
2. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{k,a}$ soit bijective. Quelle est la nature de l'application $f_{0,a}$ ?

   b) Soit (D) la droite passant par $A$ de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$. Déterminer l'image (D') de (D) par $f_{k,a}$. Que remarque-t-on ?

   c) Démontrer que $f_{k,a}$ est une isométrie si, et seulement si, $(k,\ a)$ est élément d'un ensemble E formé de quatre couples que l'on déterminera. On précisera la nature des quatre isométries obtenues.
3. On se propose dans cette question d'étudier les applications $f_{k,2}$.
   On désigne par $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\Phi$ ayant pour éléments les applications $f_{k,2}$ telles que $k \neq 0$ et $a = 2$.

   a) Démontrer que la composition des applications, notée $\circ$, est une loi interne dans $\mathcal{A}$.
   Démontrer que $\mathcal{A}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

   b) Déterminer l'ensemble $(\Delta)$ des points invariants par l'application $f_{k,2}$ pour $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

   c) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul tel que pour tout point $M$ de P et toute application $f_{k,2}$ de $\mathcal{A}$, $M'$ désignant l'image de $M$ par $f_{k,2}$, $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{v}$ soient linéairement indépendants.

   d) Soit $\mathscr{D}$ le droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$, $m$ la projection de $M$ sur $(\Delta)$ selon la direction $\mathscr{D}$, $(\alpha,\ \beta)$ les coordonnées de $m$.
   Calculer $\alpha$ et $\beta$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point $M$.
   Démontrer que pour tout point $M$, on a

$$\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}.$$

4. Soit $F$ un endomorphisme quelconque de l'espace vectoriel $\mathscr{V}$.
   On note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   Soit $\varphi$ l'application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(\vec{u},\ \vec{v}) \longmapsto \varphi(\vec{u},\ \vec{v}) = \vec{u}.F(\vec{v}) + \vec{v}.F(\vec{u}).$$

   a) Démontrer que $\varphi$ est une forme symétrique et bilinéaire.

   b) On suppose que $F = F_{1,a}$. Existe-t-il des valeurs de $a$ pour lesquelles $\varphi$ soit un produit scalaire ?

   c) On suppose que $F = F_{-1,a}$. Existe-t-il des valeurs de $a$ pour lesquelles $\varphi$ soit un produit scalaire ?

## XVIII. Cambodge, série C

Ex. 651.

./1973/cambodgeC/exo-1/texte.tex

Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
On considère le nombre complexe

$$z = -\sin 2\theta + 2\mathrm{i}\cos^2\theta.$$

1. Déterminer le module et l'argument de $z$ en fonction de $\theta$.
2. Déterminer $\theta$ pour que $z$ et $1 - z$ aient même module.

Retour page 1

**Ex. 652.** ./1973/cambodgeC/exo-2/texte.tex

Soit $n$ un entier relatif. On considère les deux nombres

$$A = 5n - 9 \qquad \text{et} \qquad B = 2n - 6.$$

**1.** Montrer que tout diviseur commun de $A$ et $B$ est diviseur d'un nombre $C$ indépendant de $n$ et que tout diviseur commun de $A$ et $C$ divise $B$.

**2.** *Application :* Calculer, suivant les valeurs de $n$ le plus grand commun diviseur de $A$ et $B$.

### Problème 172

./1973/cambodgeC/pb/texte

A- dans un repère orthonormé du plan affine euclidien, on appelle « produit » d'un point de coordonnées $(x\,;\,y)$ par le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ le point $N = M \star M'$ dont les coordonnées $(X\,;\,Y)$ sont telles que

$$X = xx' + yy' \qquad \text{et} \qquad Y = xy' + x'y.$$

1. Montrer que ce produit est commutatif et associatif, qu'il existe dans le plan un point $I$, élément neutre, et que pour tout point $M$ non situé sur la réunion des bissectrices des axes possède un symétrique pour l'opération considérée.

   Soit E l'ensemble des points du plan n'appartenant pas à la réunion des deux bissectrices. Que peut-on dire du produit de deux points de E ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2. Montrer que tout point $A$ de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$ de E peut être considéré comme le produit d'un point $A_1$ de l'axe des $x$ et d'un point $A_2$ de la droite d'équation $y + x - 1 = 0$. On déterminera les coordonnées des deux points $A_1$ et $A_2$ en fonction de $x_0$ et $y_0$.

B- Soit $A$ un point fixe de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$, à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ du plan on fait correspondre le point $N$ de coordonnées $(X\,;\,Y)$ tel que $N = A \star M$.

1. Exprimer les coordonnées de $N$ en fonction de celles de $M$. Montrer que cette application n'est bijective que si $A$ est un point de E, *ce que l'on suppose par la suite.*

   La transformation ponctuelle correspondante est notée $T_A$. Montrer que $T_A$ est involutive, si et seulement si, le point $A$ occupe l'une des 4 positions $I$, $I_1$, $I_2$, $I_3$ que l'on déterminera.

   Préciser la nature des transformations correspondantes.

2. Étudier les points invariants de la transformation $T_A$ suivant la position du point $A$ supposé distinct de $I(1\,;\,0)$.

   Montrer que si $A$ n'est pas situé sur la réunion des deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ que l'on précisera, $T_A$ possède un point invariant et un seul.

   Montrer que si $A$ est un point de $(D_1)$ ou de $(D_2)$, la transformation correspondante possède une droite de points invariants.

3. On désigne par $T'_A$ toute transformation $T_A$ admettant une droite de points invariants $(\Delta)$.

   Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est perpendiculaire à $(\Delta)$ en un point $H$ tel que $\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HM}$ ; $k$ étant une constante que l'on calculera en fonction de $(x_0,\ y_0)$.

## XIX. Cameroun du Sud, série C

**Ex. 653.** ./1973/camerounsudC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction réelle de la variable réelle définie par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

**1.** Étudier cette fonction.

**2.** Tracer la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendre comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur la'xe des ordonnées.
On prendra $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$.

## PROBLÈME 173



Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 et $E$ l'espace affine associé à $\mathscr{E}$. L'objet du problème est d'étudier les applications linéaires $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ (resp. affines $g$ de $E$ dans $E$) telle que

$$f^3 = f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}} \quad \text{(application identique de } \mathscr{E}\text{)}$$

(resp. $g^3 = g \circ g \circ g = \mathrm{id}_E \quad$ (application identique de $E$)).

A) Soit $f$ un endomorphisme de $\mathscr{E}$, tel que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

1° Calculer le déterminant de $f$. En déduire que $f$ est un automorphisme de $\mathscr{E}$.

2° Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{E}$, tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

a) Étant donné un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit une base de $\mathscr{E}$, on pose $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.
Écrire $f^2(\vec{v})$ sur la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

b) Montrer que s'il existe un vecteur $\vec{u}$, non nul, tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

3° On suppose $f \neq \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

a) Montrer que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, alors $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ sont linéairement indépendants.

b) En déduire que si $\vec{i}$ est non nul, $(\vec{i},\ f(\vec{i}))$ est une base de $\mathscr{E}$.

c) Montrer que dans cette base de $\mathscr{E}$, la matrice de $f$ est de la forme

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

et montrer que l'on a nécessairement $a = b = -1$.

4° *Application.*- Soit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de $f$ dans une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de $\mathscr{E}$.

a) Vérifier que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

b) Écrire la matrice de $f$ dans la base $(\vec{i},\ f(\vec{i}))$ et vérifier le résultat du A(3)c.

B) Soit $g$ une application affine de $E$ dans $E$ et $f$ l'application linéaire associée à $g$. On supposera que

$$g^3 = \mathrm{id}_E.$$

1° Montrer que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

2° Montrer que $g$ ne peut être une translation de vecteur non nul.

3° On suppose $g \neq \mathrm{id}_E$.

a) Montrer que $f \neq \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

b) $M$ étant un point de $E$ tel que $g(M) \neq M$, montrer que $(M,\ g(M),\ g^2(M))$ est un repère affine de $E$.

c) Soit $O$ le barycentre des points $M,\ g(M),\ g^2(M)$, chacun affecté du coefficient 1. Montrer que $O$ est le seul point invariant par $g$.

C) On suppose que $\mathscr{E}$ et $E$ sont euclidiens. Soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{E}$ et soit $f$ un endomorphisme orthogonal de $\mathscr{E}$, tel que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

1° Montrer que $f$ est une rotation.

2° Soit $t$, $0 \leqslant t < 2\pi$, le réel mesurant l'angle associé à la rotation $f$.

a) Écrire la matrice de $f$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

b) Quelles valeurs $t$ peut-il prendre ?

# XX. Cameroun du Sud, série E

**Ex. 654.** ./1973/camerounsudE/exo-1/texte.tex

On considère le nombre $N=\overline{abcd}$ écrit dans la base 13, dont les chiffres sont notés : $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$.

1. A quelle condition $N$ est-il divisible par 13 ?
2. A quelle condition $N$ est-il divisible par $13^2$ ?

**Ex. 655.** ./1973/camerounsudE/exo-2/texte.tex

Dans $\mathbb{R}$, on donne l'équation différentielle

$$xy'-y=x^2-3x+1.$$

Donner la solution générale de cette équation.

## Problème 174

./1973/camerounsudE/pb/texte

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}_2=\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, on considère le repère orthonormé direct

$$\mathscr{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}).$$

1. A tout point $M$ variable du plan, on associe par une transformation ponctuelle le point $M'$ tel que, si $M(x\ ;\ y)$ alors $M'(x'\ ;\ y')$ avec
$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{1}{2},\\ y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$
Définir le plus simplement possible cette transformation.
2. $M$ décrit alors la droite $(D)$ d'équation
$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+y=0.$$
Quel est l'ensemble des points $M'$ ?
(On notera cet ensemble $(D')$ et l'on donnera l'équation de $(D')$ dans $\mathscr{R}$.)
3. On transforme le point $M'$ en le point $M''$ par la transformation ponctuelle telle que, si $M'(x'\ ;\ y')$ et $M''(x''\ ;\ y'')$ on ait
$$x''=\frac{x'}{2}+1 \qquad \text{et} \qquad y''=\frac{y'}{2}+\frac{1}{2}.$$
   a) Définir le plus précisément possible cette seconde transformation.
   b) Quel est alors l'ensemble $(D'')$ des points $M''$ quand $M$ décrit $(D)$ ?
4. a) Définir géométriquement l'enveloppe de la perpendiculaire en $M''$ à $M'M''$.
   b) Donner l'équation cartésienne de cette enveloppe dans le repère $\mathscr{R}$.
   c) Définir le point d'intersection de cette enveloppe avec l'axe des abscisses.

# XXI. Cameroun du nord série C

**Ex. 656.** ./1973/camerondunord/exo-1/texte.tex

Cinq nombres entiers positifs, $a,\ b,\ c,\ d,\ e$, dans cet ordre $(a\leqslant 100)$ forment une progression géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec $a$.
Déterminer ces cinq nombres de façon que

$$6a^2=e-b.$$



Retour page 1

**Ex. 657.** ./1973/camerondunord/exo-2/texte.tex

Dans l'espace vectoriel euclidien $E_2$ de dimension 2 muni de la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on considère l'application linéaire $f$ de $E_2$ dans $E_2$ définie par la matrice $M$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1. a) Quelle est l'image $\overrightarrow{u'}\left(x'\ ;\ y'\right)$ du vecteur $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ par $f$ ?

   b) Quelle est la nature de $f$ ?

2. Dans l'espace affine $\mathscr{E}_2$ associe à $E_2$ muni du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application $\Phi$ qui au point $M\,(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{E}_2$ fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $\mathscr{E}_2$, définie par

$$M'=\Phi(M)\Longleftrightarrow\overrightarrow{OM'}=f(\overrightarrow{OM}).$$

   a) Écrire les relations existants entre les coordonnées du point $M$ et celles du point $M'$.

   b) Quelles sont les images par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $y=x$, du cercle $(C)$ d'équation $x^2+y^2=4$ ?

3. L'espace $\mathscr{E}_2$ est maintenant assimilé au plan complexe. On désigne par $z$ et $z'$ les affixes respectives des points $M$ et $M'$ de $\mathscr{E}_2$.

   a) Écrire la relation existant entre $z$ et $z'$ lorsque $M'=\Phi(M)$.

   b) En déduire la nature de l'application $\Phi$. Justifier alors les résultats du 2b.

## Problème 175

./1973/camerondunord/pb/texte

A- 1. On considère les fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$t\longmapsto f(t)=-2\mathrm{e}^{-t}\qquad\text{et}\qquad t\longmapsto g(t)=2\mathrm{e}^{-2t}.$$

   a) Déterminer la primitive de $f$ qui prend la valeur $\frac{2}{\mathrm{e}}$ pour $t=1$.

   b) Déterminer la primitive de $g$ qui prend la valeur $1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ pour $t=1$.

   On considère les fonctions $h$ et $k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$t\longmapsto h(t)=2\mathrm{e}^{-t}\qquad\text{et}\qquad t\longmapsto k(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}+1.$$

2. a) Déterminer la primitive de $h$ qui prend la valeur $-2$ pour $t=0$.

   b) Déterminer la primitive de $k$ qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour $t=0$.

B- Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$, l'unité étant le centimètre, un point $M$ dont le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ en fonction de $t$ est

$$\vec{\Gamma}=-2\mathrm{e}^{-t}\vec{i}+2\mathrm{e}^{-2t}\vec{j}.$$

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ du point $M$ en fonction de $t$, sachant qu'à l'instant $t=1$ on a $\vec{V}(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}\vec{i}+\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\vec{j}$.

2. Calculer en fonction de $t$ les coordonnées du point $M$ sachant qu'à l'instant $t=0$ le point $M$ a pour coordonnées $x_0=-2$ et $y_0=\frac{1}{2}$.

   Déterminer alors les coordonnées du point $M$ à l'instant $t=1$ et à l'instant $t=-1$.

   Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du point $M$. Construire cette trajectoire. A quel instant $t$ le point $M$ a t-il un abscisse égale à $-1$ ? Calculer la valeur correspondante de son ordonnée.

3. Déterminer et construire l'hodographe du mouvement.
   ℹLa lettre e désigne la base des logarithmes népériens ; l'unité de temps est la seconde ; on donne

$$\mathrm{e} \approx 2{,}72 \ ; \ \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37 \ ; \ \mathrm{e}^{2} \approx 7{,}39 \ ; \ \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}13.$$

4. Calculer la norme du vecteur vitesse à l'instant $t$, notée $\left\|\vec{V}(t)\right\|$.
   On rappelle que la longueur de la trajectoire décrite par le point $M$ entre les instants $t=0$ et $t=t_0$ ($t_0>0$) est

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}\left\|\vec{V}(t)\right\|\,\mathrm{d}t.$$

   Calculer $s(t_0)$. Calculer $s(1)$.

## XXII. Clermont-Ferrand, série C

**Ex. 658.** ./1973/clermontC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}+\ln\frac{x+1}{x-1}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que $f$ est impaire et la représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Calculer la dérivée de l'expression

$$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$$

   et l'aire du domaine compris entre les droites d'équations respectives

$$x=2 \qquad \text{et} \qquad x=a\ (a>2),$$

   l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y=f(x)$.
   Cette aire a-t-elle une limite lorsque $a$ tend vers l'infini ?

**Ex. 659.** ./1973/clermontC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. L'équation suivante est écrite dans $\mathbb{C}$ :

$$z^2-(1+m)(1+\mathbf{i})z+\mathbf{i}(m^2+1)=0. \tag{1}$$

1. En faisant le changement d'inconnue $z=(1+\mathrm{i})u$, dans l'équation(**??**) former une équation (2) dont $u$ soit racine. La résoudre dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $u_1$ et $u_2$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de (2) et soit $M_1$ et $M_2$ les images ponctuelles de $u_1$ et $u_2$.
   Montrer que $M_2$ se déduit de $M_1$ par une transformation ponctuelle simple dont on donnera les éléments géométriques.

### Problème 176

./1973/clermontC/pb/texte

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère l'application affine $T_k$ transformant le point $M$de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en le point $M'$de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases}5x'=(4+k)x+2(1-k)y\\5y'=2(1-k)x+(1+4k)y\end{cases},$$

où $k$ est un réel quelconque.

A- 1. Écrire la matrice $A_k$ de l'application linéaire associée à $T_k$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Montrer qu'on peut trouver deux matrices, $P$ et $Q$, à deux lignes et deux colonnes, à éléments réels telles que :

$$A_k = P + kQ.$$

2. $T_k$ est-elle bijective pour tout $k \in \mathbb{R}$ ?
Soit $\mathscr{T}_k = \{T_k;\ k \in \mathbb{R}\}$. Le symbole $\circ$ désignant la composition habituelle des applications, $(\mathscr{T},\ \circ)$ est-il un groupe ?
Définir analytiquement, lorsqu'elle existe, $T_k^{-1}$.

3. $T_k$ est-elle involutive en général ? Existe-t-il des valeurs de $k$ pour lesquelles $T_k$ est involutive ?

B- 1. On choisit $k = 0$.

a) Quelle est l'image du plan par $T_0$ ?

b) Quelle est la nature géométrique de $T_0$ ?

2. On choisit $k = -1$. Caractériser géométriquement $T_{-1}$.

C- 1. Soient $f_1$ et $f_2$ les fonctions réelles de la variable réelle $x$ définie par : $f_1(x) = 3x + \frac{5}{2}\sqrt{x^2+1}$, $f_2(x) = 3x - \frac{5}{2}\sqrt{x^2+1}$.

a) Comparer $f_1(x)$ et $f_2(-x)$. Étudier les variations de $f_1$ et de $f_2$ et tracer les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) On note $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$. Montrer que le point$M\,(x\ ;\ y)$ appartient a ? $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$4y^2 + 11x^2 - 24xy - 25 = 0.$$

2. a) Déterminer les transformées par $T_{-1}$ des droites :

$$2x - 11y = 0 \qquad \text{et} \qquad x - 2y = 0.$$

b) Quelle est la transformée de $\mathscr{C}$ par $T_{-1}$ ?

c) Quelle est la nature géométrique de $\mathscr{C}$ ?

## XXIII. Clermont-Ferrand, série E

Ex. 660. ./1973/clermontE/exo-1/texte.tex

1. Soit $n$ un entier naturel non nul ; trouver la limite de $\dfrac{e^u}{u^n}$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$. (On pourra se ramener à une limite connue en posant $u = nt$.)
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier les variations de la fonction $f$.
Tracer la courbe représentative de dans un repère orthonormé.
En préciser la forme au voisinage de l'origine.

3. Calculer l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe des $x$, la courbe représentative et les parallèles à l'axe des $y$ d'abscisses 1 et $x$, le nombre $x$ étant strictement positif.
Déterminer les limites de cette aire quand $x$ tend vers 0 et quand $x$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

**Ex. 661.** ./1973/clermontE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$, d'axes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$.
L'unité de longueur est 4 cm.
On choisit le plan $XOY$ pour plan horizontal de projection et le plan $YOZ$ pour plan frontal de projection. $\overrightarrow{OZ}$ est dirigé vers le haut de la feuille. $\overrightarrow{OX}$ est dirigé vers le bas de la feuille. $\overrightarrow{Y'OY}$ (ligne de terre) portée par la petit axe de la feuille est orienté positivement vers de gauche à droite.
$O$ est à 6 cm du bord gauche de la feuille.
$t$ étant une variable réelle, les coordonnes d'un point mobile $M$ sont

$$X = 1+\cos t, \qquad Y = \sin t, \qquad Z = \frac{1}{2}t.$$

1. Déterminer la trajectoire $(\Gamma)$ du point $M$.
   Représenter l'épure de cette trajectoire pour $t \in [0\,;2\pi]$.
   On précisera les projections des points qui correspondent aux valeurs suivantes de $t$ : $0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\pi$ et $2\pi$.
2. Soit $B$ la position de $M$ pour $t = \frac{\pi}{3}$. Déterminer les équations de la tangente $(\Delta)$ en $B$ à $(\Gamma)$.
   Soit $H$ la trace horizontale de $(\Delta)$. Déterminer les projections $(h,\ h')$ de $H$.
3. Construire en vraie grandeur la distance $BH$ et l'angle aigu de $(\Gamma)$ et $OZ$.

## Problème 177

./1973/clermontE/pb/texte

A- Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Le plan affine euclidien P associé à $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $R = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Étant donné un nombre réel $\alpha$, on désigne par $f_\alpha$ l'application affine laissant $O$ invariant et dont l'application linéaire associée, $\varphi_\alpha$, a pour matrice, dans la base $\mathscr{B}$,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'application linéaire $\varphi_\alpha$ est-elle bijective ? Dans ce cas, déterminer l'application réciproque.
2. Trouver les droites affines $(D)$ passant par $O$ et telles qu'il existe un nombre réel $\lambda$ vérifiant
   $$\varphi_\alpha(\overrightarrow{Om}) = \lambda\overrightarrow{Om},$$
   pour tout point $m$ de $(D)$.
   (On posera $\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j}$.)
   On trouvera deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ avec $\lambda_1 > \lambda_2$, et deux droites $(D_1)[O,\ \vec{v}_1]$, $(D_2)[O,\ \vec{v}_2]$ avec
   $$\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}, \qquad a_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{v}_1\| = 1,$$
   $$\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}, \qquad a_2 < 0 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{v}_2\| = 1.$$
   On vérifiera que le repère $R_1 = (O,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2)$ est orthonormé.
3. Déterminer, dans la base $\mathscr{B}_1 = (\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)$, la matrice $M'_\alpha$ de l'endomorphisme $\varphi_\alpha$.
4. On suppose dans cette question que $\varphi_\alpha$ est bijective. Soit $(\gamma)$ le cercle de centre $O$ et rayon 1.
   L'application $f_\alpha$ transforme $(\gamma)$ en une courbe $(\Gamma)$ dont on demande l'équation cartésienne dans le repère $R_1$.
   Quelle est la nature géométrique de $(\Gamma)$ ? $(\Gamma)$ peut-il être un cercle ?
   Construire $(\Gamma)$ dans le cas $\alpha = \frac{1}{4}$.
5. On associe au point $m(x\ ;\ y)$ de P le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$. Soit $\overline{z}$ le conjugué de $z$ et $Z$ l'affixe du point $M = f_\alpha(m)$.
   Établir une relation liant $Z$, $z$ et $\overline{z}$. En déduire une construction géométrique de $M$ connaissant $z$.



Retour page 1

B- Soit $\mathscr{E}_3$ l'espace vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien de base $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On donne dans $\mathscr{P}$ un vecteur unitaire $\vec{p}$. Étant donné un nombre réel $\alpha$, on considère l'application $\psi_\alpha$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{E}_3$ définie par

$$\psi_\alpha(\vec{u}) = \alpha\vec{u} + \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u})$$

le symbole $\wedge$ notant le produit vectoriel.

1. Démontrer que $\psi_\alpha$ est une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.
2. On donne $\vec{p} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et l'on pose $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
   a) Vérifier que $\vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u}) = (\vec{p}.\vec{u})\vec{p} - \vec{u}$.
   b) Déterminer la matrice de $\psi_\alpha$ dans la base $\mathscr{B}$.
   c) Trouver le noyau et l'image de $\psi_\alpha$ dans les deux cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

## XXIV. Clermont-Ferrand & Grenoble remplacement, série C

**Ex. 662.** ./1973/clermontCrem/exo-1/texte.tex

soit $a$ un nombre réel donné. Soit $(U_n)$ la suite de nombres réels définie par ses deux premiers termes : $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$, et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 1, \quad U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}.$$

Soit $(V_n)$ la suite définie par

$$V_n = U_{n+1} - U_n \qquad (n \geqslant 0).$$

1. Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique ; calculer $V_n$ pour tout $n$, positif ou nul, en fonction de $a$ et de $n$.
2. En déduire $U_n$ en fonction de $a$ et de $n$ (on pourra considérer les $n$ relations $V_p = U_{p+1} - U_p$ pour $p$ compris entre $0$ et $n-1$.)

   Comment choisir $a$ pour que la suite $(U_n)$ soit convergente et quelle est alors cette limite ?

**Ex. 663.** ./1973/clermontCrem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction réelle de la variable réelle définie sur : $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\log x}.$$

1. Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de $f$ sur $]1\,;+\infty[$.
2. Soit $a$ et $b$ deux réels supérieurs à 1.

   Calculer
   $$\int_a^b \frac{(\log x - 1)}{(\log x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Déduire des variations de $f$ l'existence de couples $(a,\ b)$ vérifiant (pour $1 < a < b$)
   $$\int_a^b \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{1}{\log x}\right)\mathrm{d}x.$$

### 🏛PROBLÈME 178

./1973/clermontCrem/pb/texte

Soit E un plan affine euclidien ; $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct de E. Soit $A$ le point défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{\jmath}$. On note $Ox$ la droite contenant $O$ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

Á tout nombre réel $\alpha$ on associe la droite $(D_\alpha)$ passant par $A$ et telle que $(\widehat{Ox,\ D_\alpha})$ (c'est-à-dire $\alpha$ est une mesure de l'angle de droites $(\widehat{Ox,\ D_\alpha})$).

Les parties A et B sont indépendantes.

A- 1. Montrer que $(D_\alpha)$ a pour équation

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha + \cos\alpha = 0.$$

2. Soit $P_\alpha$ le symétrique du point $O$ par rapport à la droite $(D_\alpha)$. On peut considérer le point $P_\alpha$ comme un point mobile en fonction de la variable temps $\alpha$.

   Déterminer la trajectoire $(C)$ et calculer le vecteur vitesse du mouvement de $P_\alpha$.

   Étudier la nature du mouvement de $P_\alpha$.

   Montrer que $\vec{u}(\alpha) = \vec{\imath}\cos 2\alpha + \vec{\jmath}\sin 2\alpha$ est un vecteur unitaire de la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ au point $P_\alpha$ au point $P_\alpha$ associé à l'instant $\alpha$.

3. La droite $(T)$ précédente varie avec $\alpha$. On considère sur $(T)$ le point $M$ dont la position à l'instant $\alpha$ est définie par $\overrightarrow{P_\alpha M} = f(\alpha)\vec{u}(\alpha)$, où $f$ est une fonction réelle de la variable $\alpha$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Déterminer en fonction de $f$ pour qu'à chaque instant $\alpha$ le vecteur vitesse du point $M$ soit orthogonal au vecteur $\vec{u}(\alpha)$ et qu'à l'instant $\alpha = 0$ le point $M$ soit en $A'$ de coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

B- Pour tout réel $\alpha$, on désigne par $s_\alpha$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(D_\alpha)$.

1. Montrer que pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ de $\mathbb{R}^2$, $s_\beta \circ''\ _\alpha$ est une rotation dont on indiquera le centre et une mesure de l'angle.

   Trouver une relation entre les quatre nombres réels, $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'$, nécessaire et suffisante, pour que l'on ait

$$s_\beta \circ s_\alpha = s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}.$$

2. On considère l'ensemble des droites $(D_{n\frac{\pi}{3}})$, $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que cet ensemble de droites contient exactement trois éléments.

   En donnant à $\alpha$ les valeurs $0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$ et en considérant les trois produits

$$s_{\frac{\pi}{3}} \circ s_0,\ s_{\frac{2\pi}{3}} \circ s_{\frac{\pi}{3}},\ s_0 \circ s_{\frac{2\pi}{3}}$$

   sont une même rotation $r$.

3. $\mathscr{A}$ désignant l'ensemble $\left\{e,\ r,\ r^{-1},\ s_0,\ s_{\frac{\pi}{3}},\ s_{\frac{2\pi}{3}}\right\}$, où $e$ est l'application identique de E et $r^{-1}$ la rotation réciproque de $r$, montrer que $(\mathscr{A},\ \circ)$ est un groupe dont on dressera la table.

## XXV. Clermont-Ferrand & Grenoble remplacement, série E

**Ex. 664.** ./1973/clermonterem/exo-1/texte.tex

On considère les deux intégrales

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Établir les relations

$$A + B + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad B - A = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Trouver $A$ et $B$ et en déterminer des valeurs approchées au moyen des tables numériques.



Retour page 1

Ex. 665. ./1973/clermonterem/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^6+z^3+1=0.$$

(On donnera les solutions sous forme trigonométrique.)

**2.** En utilisant la formule du binôme de Newton valable dans le corps $\mathbb{C}$, calculer, en formant $S+\mathrm{i}S'$ les deux expressions

$$S=1+\mathrm{C}_n^1\cos\theta+\mathrm{C}_n^2\cos 2\theta+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cos n\theta$$

et

$$S'=\quad \mathrm{C}_n^1\sin\theta+\mathrm{C}_n^2\sin\theta+\cdots+\mathrm{C}_n^n\sin n\theta.$$

En déduire que la somme

$$\Sigma'=\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^5-\mathrm{C}_n^7+\cdots$$

est égale à

$$\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

## Problème 179

./1973/clermonterem/pb/texte

A- Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel et $B=(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de $\mathscr{P}$. Si $\lambda$ est un nombre réel , on note $h_\lambda$ l'homothétie vectorielle dans $\mathscr{P}$ de rapport $\lambda$.
Soit $f$ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $x$ et $y$ dans la base $B$, associe le vecteur $\vec{v'}$ de coordonnées $x'$ et $y'$ dans $B$ telle que

$$x'=x+(2\sqrt{3}-3)y,\qquad y'=(2\sqrt{3}+3)x-y.$$

1. Écrire la matrice $A$ de $f$ dans la base $B$.
   Quelle est la nature de $f\circ f$ ?
2. Soit $g=h_{\frac{1}{2}}\circ f$. Montrer que $g$ est une application linéaire involutive de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.
   Déterminer les ensembles $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ définis par

$$\mathscr{E}_1=\{\vec{v}\in\mathscr{P}\ :\ g(\vec{v})=\vec{v}\},$$

$$\mathscr{E}_2=\{\vec{v}\in\mathscr{P}\ :\ g(\vec{v})=-\vec{v}\}.$$

   Donner une définition géométrique de $g$.
3. En déduire une définition géométrique de $f$.

B- Soit P un plan affine associé au plan vectoriel de $\mathscr{P}$ et $O$ un point de P. Soit $F$ l'application de P dans P qui, au point $M$ de coordonnées de $x$ et $y$ dans le repère cartésien $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, associe le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ définies, dans le même repère, par

$$x'=x+(2\sqrt{3}-3)y-3,$$

$$y'=(2\sqrt{3}+3)x+y+2\sqrt{3}+3.$$

1. Montrer que $F$ est une application affine. Préciser l'application linéaire associée.
2. Montrer que le point $\Omega$ de coordonnées $x=1$ et $y=2\sqrt{3}+3$ est le seul point de P invariant par $F$.
   Dans le repère $(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on désigne par $X$ et $Y$ les coordonnées de $M$, et par $X'$ et $Y'$ celles de $M'$.
   Exprimer $X'$ et $Y'$ en fonction de $X$ et $Y$ ; en déduire $X$ et $Y$ en fonction de $X'$ et $Y'$.
3. Donner une définition géométrique de $F$.

C- On suppose maintenant que les plans $\mathscr{P}$ et P sont euclidiens.
Soit $(C)$ la courbe de P d'équation

$$(7+4\sqrt{3})(x^2-2x)+(y-2\sqrt{3}-3)^2=0$$

dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(C)$ admet le point $\Omega$ pour centre de symétrie. Quelle est la nature géométrique de $(C)$ ? Déterminer les axes de $(C)$ en position et grandeur.
2. Déterminer, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de la courbe $(C)$ transformée de la courbe $(C)$ par $F$.

   Montrer que $(C')$ est également la transformée de $(C)$ par l'homothétie $H_2$ de centre $\Omega$ et de rapport 2 dans P.
3. Soit $H_{\frac{1}{2}}$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

   Quelle est la nature géométrique de la transformation $G = H_{\frac{1}{2}} \circ F$ ?
4. Quelle est la transformée de $(C)$ par $G$ ?

   En déduire l'ensemble des milieux des cordes de $(C)$ ayant pour direction la droite vectorielle $\mathscr{E}_2$ trouvée à la question A2.

## XXVI. Centre d'Outre-Mer, série C

**Ex. 666.** ./1973/centreoutremerC/exo-1/texte.tex

On lance un dé non pipé (dont les faces sont numérotées de 1 à 6) trois fois de suite et l'on désigne par $a$, $b$ et $c$ les résultats respectifs du premier, second et troisième jet.
On considère l'équation sur $\mathbb{R}$ :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Quelle est la probabilité pour que cette équation ait une racine double ?

**Ex. 667.** ./1973/centreoutremerC/exo-2/texte.tex

1. Donner la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\mathrm{e}^{-x})$.
2. Former le tableau de variation de la fonction $f$ :

$$x \longmapsto x \log x.$$

   Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Former alors la tableau de variation de la fonction $g$ :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \log x.$$

   Calculer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

### Problème 180

./1973/centreoutremerC/pb/texte

Dans ce qui suit, $E$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on appelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base.

A) $f$ étant une application de $E$ dans $E$ telle que

$$\forall \vec{X} \in E, \qquad (f \circ f)(\vec{X}) = -\vec{X}. \tag{1}$$

Montrer que $f$ est une bijection.

B) $f$ étant une application linéaire de $E$ dans $E$ vérifiant(1), montrer que, sauf si $\vec{X}$ est égal à l'élément neutre $\vec{0}_E$ de l'addition dans $E$, $\vec{X}$ et $f(\vec{X})$ sont nécessairement indépendants.

C) 1° Soit l'application $f_1$ de $E$ dans $E$ définie de la manière suivante, dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

calculer la matrice de $f_1 \circ f_1$ et en déduire que $f_1$ satisfait à la condition (1).

2° $\overrightarrow{X}_0$ étant donné dans $E$ par ses composantes $a$ et $b$ telles que

$$\overrightarrow{X_0} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2,$$

montrer qu'on peut en général lui faire correspondre une application linéaire $f$ de $E$ dans $E$ satisfaisant à (1) et pour laquelle on ait

$$f(\vec{e}_1) = \overrightarrow{X}_0.$$

Pour cela on cherchera la matrice de $f$ dans le base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

Discuter suivant les données $a$ et $b$.

Peut-on, sur la matrice trouvée, vérifier que $f$ est une application bijective ?

D) $E$ étant, de plus, supposé euclidien, et $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ étant une base orthonormée, chercher les isométries satisfaisant à (1).

## XXVII. Départements d'Outre-Mer, série C

**Ex. 668.** ./1973/depoutremerC/exo-1/texte.tex

Un nombre entier naturel $N$ s'écrit $\overline{abc0}$ en base 5, et $\overline{abc}$ en base 12, $o$ùa, b$e$t$c$ sont des entiers naturels tels que $0 < a < 5$, $0 \leqslant b < 5$ et $0 \leqslant c < 5$.

Déterminer les entiers $a$, $b$, $c$ et $N$. (On pourra utiliser la congruence modulo 4.)

**Ex. 669.** ./1973/depoutremerC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(-4-2\mathrm{i})z^2 + (7-\mathrm{i})z + 1 + 3\mathrm{i} = 0.$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque racine.

### Problème 181

./1973/depoutremerC/pb/texte

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle $]-2\,;+2[$. On rappelle que E, muni de l'addition et de la multiplication externe par les réels, ainsi définies :

$$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x) \qquad \text{pour tout } \ (f,g) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E},$$

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x) \qquad \text{pour tout } \ (\lambda, g) \in \mathbb{R}\times\mathrm{E},$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux fonctions $f_1$ et $f_2$, ainsi définies :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \text{pour tout } \quad x \in\, ]-2\,;+2[.$$

Montrer que $(f_1,\ f_2)$ est une base de F.

2. Soit P le plan euclidien orienté et soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée directe de P. On désigne par T l'ensemble des transformations orthogonales de P, dont la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, vérifie $(a-b)^2 = 1$.

Déterminer tous les éléments de T (préciser les angles de rotation et les axes de symétrie).

3. Soit $\varphi$ un endomorphisme de F, dont la matrice par rapport à la base $(f_1,\ f_2)$ est la matrice $A$, représentant la rotation vectorielle d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ dans P, par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Déterminer l'image par $\varphi$ de la fonction $2f_1 + f_2$.

Étudier la fonction numérique $x \longmapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. En déduire le tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $x(y^2+1) + 2(y^2-1) = 0$.

Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x-2}$ lorsque $x$ tend vers 2.

La courbe $(\mathscr{C})$ possède-t-elle uen tangente au point $(2\ ;\ 0)$ ?



Retour page 1

4. Écrire l'équation de la tangente $(D)$ à la courbe $(\mathscr{C})$, aui point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y > 0$.
   Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la droite $(D)$.
   Préciser la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(D)$.

## XXVIII. Départements d'Outre-Mer, série E

**Ex. 670.** ./1973/depoutremerE/exo-1/texte.tex

On considère la suite des nombre complexes définie par

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_1 = \mathrm{i}, \\ z_n - z_{n-1} = \mathrm{i}(z_{n-1} - z_{n-2}) \qquad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

**1.** Exprimer $z_n - z_{n-1}$ en fonction de i et de $n$.

**2.** Établir $z_n = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}(\mathrm{i}^n - 1)$.

**3.** Démontrer que cette suite est périodique.

**4.** Représenter, dans le plan complexe, les images $M_{100}$, $M_{101}$, $M_{102}$, $M_{103}$ des nombres complexes $z_{100}$, $z_{101}$, $z_{102}$, $z_{103}$.

**Ex. 671.** ./1973/depoutremerE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $M$ le plan de coordonnées (à tout instant $t$ de $\mathbb{R}$)

$$x = 5 - 8\sin^2 t \qquad \text{et} \qquad y = 1 + 2\sin 2t.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire $(\mathscr{C})$ de $M$ et construire $(\mathscr{C})$.
2. Exprimer $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, vecteurs vitesse et accélération de $M$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{V(t)}.\overrightarrow{\Gamma(t)}$ et décrire le mouvement de $M$ pour $t \in [0\,;\pi]$.

### Problème 182

./1973/depoutremerE/pb/texte

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x},$$

le symbole $\log$ désignant le logarithme népérien, et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- 1. Étudier cette fonction.
   2. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie $\omega$.
   3. Tracer $(\mathscr{C})$. (On construira, en particulier, les points d'abscisses $\dfrac{3}{2}$ et 3, ainsi que les tangentes en ces points.)

B- 1. Á l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction $u$ :

$$u : x \longmapsto \log(x+a) \qquad (a\ :\ \text{réel donné}).$$

   On remarquera que $u(x) = 1.\log(x+a)$.
   2. Utiliser le résultat précédent pour calculer

$$S(\lambda) = \int_\lambda^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1 < \lambda < 2).$$

   3. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 1^+} S(\lambda)$. Interprétation graphique.



Retour page 1

C- Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ et tracer sur le graphique précédent la courbe $(\Gamma)$ représentative de la fonction $x \longmapsto g^{-1}$.
2. Soit $(\mathscr{C}_1)$ l'ensemble des points des $(\mathscr{C})$ d'abscisses négatives.
   Montrer que $(\Gamma)$ est la transformée de $(\mathscr{C}_1)$ par un antidéplacement $t$ composé d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation.

## XXIX. Dijon, série C

**Ex. 672.** *./1973/dijonC/exo-1/texte.tex*

On considère $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$ où $\alpha$ désigne un nombre réel strictement positif. (Le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien).

**1.** Calculer $I(\alpha)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

**2.** Donner une valeur approchée de $I(\mathrm{e}^\pi)$ avec la précision permise par les tables de logarithmes.

**Ex. 673.** *./1973/dijonC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $E$ rapporté à un repère orthonormé, on associe à un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ; on dit que $z$ est l'affixe de $M$.
Soit $(T)$ l'application de $E$ dans $E$ qui, au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est telle que $z' = f(z)$ avec

$$f(z) = \mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$).

**1.** La transformation $(T)$ admet-elle un point invariant ?

**2.** Caractériser géométriquement la transformation $(T)$.

**Problème 183** *./1973/dijonC/pb/texte*

Soit $E$ un plan affine rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) A tout réel non nul, $\lambda$, on associe la courbe $(C_\lambda)$ qui représente dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les variations de la fonction $g_\lambda$, déterminée par

$$g_\lambda(x) = x \log \frac{x}{\lambda}$$

(le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien).

a) Étudier pour $\lambda$ strictement positif, les variations de la fonction $h_\lambda$ déterminée par

$$\begin{cases} h_\lambda(x) = g_\lambda(x) & \text{si } x > 0 \\ h_\lambda(0) = 0. \end{cases}$$

On montrera que $h_\lambda$ est continue sur $[0\,;+\infty]$.
Est-elle dérivable au point $x = 0$ ?

b) Démontrer que toute courbe $(C_\lambda)$ est transformée de $(C_1)$ par une homothétie de centre $O$ dont on précisera le rapport.

c) Construire sur une même figure les courbes $(C_1)$, $(C_{-1})$, $(C_\mathrm{e})$, (on désigne par $\mathrm{e}$ la base des logarithmes népériens).

d) Soit $M_\lambda$ le point de $(C_\lambda)$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Quel est l'ensemble des points $M_\lambda$ lorsque $\lambda$ décrit l'ensemble des réels non nuls ?

B) Soit $a$ un nombre réel strictement positif donné. A tout nombre réel $t$, on associe l'application de $E$ dans $E$, notée $f_t$, qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définies par

$$\begin{cases} x' = a^t x, \\ y' = t a^t x + a^t y. \end{cases}$$

a) Montrer, que pour $t$ donné, $f_t$ est une application affine bijective.

b) On munit l'ensemble $\mathscr{F}_a$ des applications $f_t$, lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$, de la loi de composition des applications, notée $\circ$.
Montrer que $(\mathscr{F}_a, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

c) Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie dans $E$ par $M \mathscr{R} M'$ si, et seulement si, il existe une application $f_t$ appartenant à $\mathscr{F}_a$ telle que $f_t(M) = M'$.
Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
La classe d'équivalence d'un point donné, $M$, sera appelée *orbite* de $M$. On remarquera que l'orbite de $M$ est l'ensemble des transformés de $M$ par tous les éléments du groupe $\mathscr{F}_a$.

d) Dans le cas particulier où $a = 1$, qu'elle est l'orbite du point $M_0$ de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ ? Discuter suivant la position de $M_0$ ;

C) Dans toute la suite du problème, on se restreint au cas où $a = \mathrm{e}$.

a) Soit $A$ le point de coordonnées $(0\ ;\ \mu)$. Quelle est l'orbite de $A$ ?

b) Soit $B$ le point de coordonnées $(\lambda\ ;\ 0)$, où $\lambda$ est un réel non nul. Comparer l'orbite de $B$ et la courbe $(C_\lambda)$ ?

c) Démontrer que toute courbe $(C_\lambda)$ est globalement invariante par tout élément du groupe $\mathscr{F}_\mathrm{e}$.

d) Démontrer que par tout point d'abscisse non nulle passe une courbe $(C_\lambda)$, et une seule. Comment est réalisé la partition de $E$ en classes d'équivalence, relativement à la relation $\mathscr{R}$ introduite à la question Bc) ?

## XXX. Dijon, série E

**Ex. 674.** ./1973/dijonE/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$x \longmapsto \log(\cos x + \sin x)$$

et sa dérivée. (Le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien.)

**2.** On considère les deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer $I + J$ et $I - J$.
En déduire les valeurs de $I$ et de $J$.

**3.** Donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près de $I$ et de $J$.

**Ex. 675.** ./1973/dijonE/exo-2/texte.tex

**1.** Soit l'application $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.

**2.** Démontrer que $f$ admet une application réciproque $g$.
Déterminer $g(x)$ et tracer la courbe $(\Gamma)$ d'équation $y = g(x)$.

Retour page 1

## PROBLÈME 184

./1973/dijonE/pb/texte

Un plan affine euclidien $(P)$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $Ox$ et $Oy$.
Ce plan affine $(P)$ est associé à un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère une application affine $f$ de $(P)$ dans $(P)$ et on note $\varphi$ l'application linéaire associée de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice associée à l'application linéaire $\varphi$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Dans tout le problème, l'application $f$ vérifie les propriétés suivantes :

a) $f(O) = O$ $O$ étant l'origine du repère ;

b) dans la matrice $A$, $ad - bc = 1$ et $a + d = -1$.

**1.** a) Montrer que $A^2 = -A - I$, où $I$ est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire que $A^3 = I$.

b) Quel est l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par $\varphi$ ?

c) Si $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$, montrer que le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$ est un vecteur invariant par $\varphi$.
En déduire que, quel que soit le point $M$ de $(P)$, l'origine est toujours isobarycentre des trois points $M$, $M'$ et $M''$.

**2.** Déterminer toutes les matrices $A$ telles que $\varphi$ soit une isométrie. Reconnaître alors la nature de $f$.

**3.** On revient au cas général. Soit $t$ un nombre réel fixé ; soit les points $B(0\,;\,1)$ et $B'\left(3\mathrm{e}^t\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Déterminer la matrice $A$ de façon que $B' = f(B)$. Calculer alors les coordonnées de $B'' = f(B')$.

b) $t$ étant fixé, on note $(\Gamma_t)$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ de $(P)$ tels que $M$, $M' = f(M)$ et $B''$ soient alignés. Démontrer que $(\Gamma_t)$ est la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{12\mathrm{e}^{2t}} + (y+1)^2 = 1,$$

et démontrer que $B'$ et $B''$ appartiennent à $(\Gamma_t)$.

c) Quelle est la nature de $(\Gamma_t)$ ?
Démontrer que toutes les courbes $(\Gamma_t)$ passant par deux points fixes.
Pour quelle valeur de $t$, $(\Gamma_t)$ est-elle un cercle ?
Tracer sur un même dessin, les trois courbes obtenues en posant $t = 0$, $t = -\dfrac{1}{2}\log 3$ et $t = -\dfrac{1}{2}\log 12$.

d) $M$ étant un point quelconque de $(\Gamma_t)$, si $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$, démontrer que la droite $M'M''$ passe par le point fixe $B$, et que la droite $M''M$ passe par le point fixe $B'$.
Faire apparaître ces propriétés d'alignement sur une nouvelle figure où l'on prendre $t = -\dfrac{1}{2}\log 3$ et $M(2\,;\,-1)$.
Démontrer enfin que les droites $BB'$ et $BB''$ sont toujours tangentes à $(\Gamma_t)$, quel que soit le nombre réel $t$.

# XXXI. Dijon remplacement, série C

Ex. 676.

./1973/dijonCrem/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé, on associe au point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ; on dit que $z$ est l'affixe de $M$ et que $M$ est l'image de $z$.

**1.** Démontrer que les trois points $P$, $Q$, $R$ deux à deux distincts de E, d'affixes respectives $p$, $q$, $r$ forment un triangle rectangle en $P$ si, et seulement si, $\dfrac{r-p}{q-p}$ est imaginaire pur.

**2.** $z$ étant un nombre complexe, on appelle $M_1$, $M_2$, $M_3$ les images respectives de $z$, $z^2$, $z^3$.
Déterminer et construire l'ensemble $(L)$ des points $M_1$ tels que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ déterminent un triangle rectangle.
On notera que le triangle peut être rectangle en $M_1$, $M_2$ ou $M_3$ et l'on désignera par $L_1$, $L_2$, $L3$, les sous-ensembles de $(L)$ qui correspondent à ces 3 éventualités.



Retour page 1

Ex. 677. ./1973/dijonCrem/exo-2/texte.tex

**1.** Le nombre $2^{11}-1$ est-il premier ?

**2.** $p$ et $q$ étant deux entiers naturels non nuls, quel est le reste de la division par $2^p-1$ du nombre $2^{pq}=(2^p)^q$ ?
En déduire que $2^{pq}-1$ est divisible par $(2^p-1)$ et $(2^q-1)$.

**3.** Démontrer que, si $2^n-1$ est premier, alors $n$ est premier.
La réciproque est-elle vraie ?

## Problème 185

./1973/dijonCrem/pb/texte

**1.** Soit E un plan vectoriel rapporté à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. A tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels, on associe l'endomorphisme, noté $\varphi_{a,\ b}$ de E, dont la matrice, relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{a-b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{a+b}{2} \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\Phi$ leur ensemble.

a) Quels sont les automorphismes de $\Phi$ ? On notera $\Phi_1$ leur ensemble.
Démontrer que, pour la loi de composition des applications, $\Phi_1$ est un groupe commutatif.

b) Déterminer les endomorphismes involutifs de $\Phi$. Préciser leur nature géométrique.

**2.** Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E, rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $a$ et $b$ étant deux nombres réels donnés, soit $f_{a,\ b}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a+b}{2}x + \dfrac{a-b}{2}y, \\ y' = \dfrac{a-b}{2}x + \dfrac{a+b}{2}y. \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ b}$ lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

a) Démontrer que tout élément de $\mathscr{F}$ est une application affine.

b) Quels sont les points invariants par l'application $f_{a,\ b}$ ? Discuter suivant les valeurs de $a$ et $b$.

c) On désigne par $\mathscr{G}$ le sous-ensemble des applications $f_{a,\ b}$ telles que $ab=1$ : les éléments de $\mathscr{G}$ sont les applications $g_a = f_{a,\ \frac{1}{a}}$. Démontrer que $\mathscr{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

**3.** Dans la suite du problème, l'espace vectoriel E est supposé euclidien et la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ orthonormée.
$\lambda$ étant un nombre réel non nul, on considère la courbe $(C_\lambda)$ d'équation

$$x^2-y^2-\lambda=0.$$

a) Préciser la nature de $(C_\lambda)$. Construire $(C_1)$, $(C_{-1})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $Ox$ et $Oy$.

b) Démontrer que $(C_\lambda)$ est globalement invariante par $f_{a,\ b}$ si, et seulement si, $ab=1$.

c) Soit $\mathscr{S}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $Ox$. Déterminer les coordonnées du transformé d'un point $M(x\ ;\ y)$ par l'application $h_a=\mathscr{S}\circ g_a$. Démontrer que $h_a$ est une involution affine laissant invariante $(C_\lambda)$.

**4.** Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications $h_a$ ($a$ réel non nul).

a) Démontrer que $h_a = g_{\frac{1}{a}}\circ\mathscr{S}$.

b) En déduire que $\mathscr{G}\cup\ \mathscr{H}$ est un groupe pour la compositions des applications.



Retour page 1

# XXXII. Dijon remplacement, série E

**Ex. 678.** ./1973/dijonErem/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 3x \,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 3x \,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 679.** ./1973/dijonErem/exo-2/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$u^4=-16.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z-2\mathrm{i})^4=-16.$$

## Problème 186

./1973/dijonErem/pb/texte

A- Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $Ox$ et $Oy$; $m$ étant un nombre réel fixé, on considère l'application affine $T_m$ qui, au point $m$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'=T_m(M)$, de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases} x'=x\\ y=(1-m)x+my.\end{cases}$$

1. Quel est l'ensemble des points de (P) invariants par $T_m$ ?
2. Pour quelle valeur de $m$, $T_m$ n'est-elle pas bijective ? Reconnaître alors $T_m$.
3. Pour quelles valeurs de $m$, $T_m$ est-elle involutive ? Reconnaître alors $T_m$.

B- On considère l'application $f_m$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f_m(x)=x+m\mathrm{e}^x.$$

Soit $(\mathscr{C}_m)$ le courbe représentative de $f_m$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de $f_m$ ; discuter suivant les valeurs du réel $m$.
2. Construire les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_{-1})$ qui représentent, dans le repère considéré en A, les variations des fonctions $f_1$, $f_0$ et $f_{-1}$.
3. a) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_{-1})$ et par les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (on discutera deux cas, selon que le nombre $\lambda$ soit positif ou négatif).
   b) Quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $-\infty$ ?
   c) Déterminer $\lambda$ pour que $\mathscr{A}(\lambda)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Donner une valeur approchée de $\lambda$ à $10^{-2}$ près.
4. Déterminer $T_m(\mathscr{C}_1)$ image de $(\mathscr{C}_1)$ par l'application $T_m$.

C- On considère le mouvement, par rapport au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'un point $M$ dont les coordonnées en fonction du temps $t$, sont

$$\begin{cases} x=\log t\\ y=-t+\log t,\end{cases}$$

où le symbole $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Quelle est la trajectoire de $M$ si $1\leqslant t\leqslant \mathrm{e}$ ?
2. Déterminer le vecteur vitesse de $M$ et la norme de ce vecteur vitesse.
   Pour quelle valeur de $t$ cette norme est-elle minimale ?



Retour page 1

# XXXIII. Djibouti, série C

**Ex. 680.** ./1973/djiboutiC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des nombres complexes, l'équation

$$\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^3+\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2+\frac{z^2+1}{z}+1=0.$$

**Ex. 681.** ./1973/djiboutiC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x(1-x)+|x(1-x)| \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

1. La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ? En quels points est-elle dérivable ?
2. Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé. Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont telles que $-1\leqslant x\leqslant 2$ et $f(x)\leqslant y\leqslant 1$.

## Problème 187

./1973/djiboutiC/pb/texte

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit E un espace affine associé à V. Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère de E, le couple $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ étant une base de V.
Si $h$ est une application d'un ensemble dans lui-même, on rappelle que la notation $h^n$ est définie, pour $n\in\mathbb{N}$ par $h^0=$I (identité), et $h^n=h^{n-1}\circ h$, pour tout $n>0$.
Pour tout nombre réel non nul $\lambda$, soit $T_\lambda$ l'application affine de E dans E, faisant correspondre à un point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le point $M'$, de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ dans ce même repère :

$$x'=x+\lambda y+1-\lambda \qquad \text{et} \qquad y'=-\frac{x}{\lambda}-y+2.$$

Soit $f_\lambda$ l'application linéaire de l'espace vectoriel V dans lui-même, associé à l'application affine $T_\lambda$.

1. Quelle est la matrice de $f_\lambda$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de V ?
   Déterminer le noyau et l'image de $f_\lambda$.
   L'application $f_\lambda$ est-elle bijective ?
   Quelles sont les images des applications $f_\lambda^2,\ \dots,\ f_\lambda^n,\ (n\geqslant 2)$ ?
2. L'application $T_\lambda$ est-elle bijective ?
   Quels sont les ensembles images de $T_\lambda$, et image réciproque par $T_\lambda$ du point $T_\lambda(O)$ ?
   Écrire les équations de ces ensembles dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   Montrer que $T_\lambda$ a un seul point double $A_\lambda$, que l'on déterminera.
   Quel est l'ensemble des points $A_\lambda$ lorsque $\lambda$ décrit l'ensemble $\mathbb{R}^\star$ des entiers naturels non nuls ?
3. Montrer que les applications linéaires $f$, de V dans V, telles que $f^2=0$, sont les applications linéaires représentées dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, par une matrice de l'une des formes suivantes :

   $$\begin{pmatrix}0&\mu\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0\\\mu&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\mu&\mu\lambda\\-\dfrac{\mu}{\lambda}&-\mu\end{pmatrix},$$

   avec $\mu\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}^\star$.
4. a) Démontrer que pour toute application linéaire $f$, de V dans V, il existe des coefficients réels, $\alpha_2$ et $\beta_2$, tels que

   $$f_2=\alpha_2\mathrm{I}+\beta_2 f,$$

   I étant l'identité sur E. (Trouver $\alpha_2$ et $\beta_2$ en fonction des coefficients $a,\ b,\ c,\ d$ de la matrice $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ représentant $f$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.)

Retour page 1

b) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des coefficients réels $\alpha_n$ et $\beta_n$, tels que

$$f^n = \alpha_n \mathrm{I} + \beta_n f,$$

et trouver, pour $n > 2$, $\alpha_n$ et $\beta_n$ en fonction de $\alpha_{n-1}$ et $\beta_{n-1}$.
Montrer que si $f$ n'est pas une homothétie vectorielle, la relation $\alpha\mathrm{I} + \beta f = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$), est équivalentre à $\alpha = \beta = 0$.

c) Conclure que si $f$ est une application linéaire de V dans V, pour laquelle il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n = 0$, alors $f^2 = 0$. (Montrer d'abord que si une application $f \neq 0$ est telle que $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, on a alors $f^n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.)

# XXXIV. Groupe I, série C

**Ex. 682.** ./1973/groupeIC/exo-1/texte.tex

On considère les entiers naturels $n$ vérifiant la condition :
$n$ est la produit de trois entiers naturels premiers $a$, $b$, $c$ ($a < b < c$), dont l'un est la somme des deux autres ; par exemple 286 est un nombre tel que $286 = 2 \times 11 \times 13$.

**1.** Déterminer $a$ ; encadrer $b$ de sorte que

$$N_1 \leqslant n < N_2,$$

$N_1$ et $N_2$ étant deux entiers naturels donnés.

**2.** En déduire les entiers naturels $n$ pour lesquels

$$N_1 = 6.10^4 \qquad \text{et} \qquad N_2 = 8.10^4.$$

**Ex. 683.** ./1973/groupeIC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x) = x - 2 + (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

et soit $(C)$ sa courbe représentative (repère orthonormé, unité 1 cm).

**1.** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ ; noter dans un même tableau le signe de $f''$, puis le sens de variation de $f'$ et son signe, enfin le sens de variation de $f$ et ses valeurs aux limites.

**2.** Tracer $(C)$, donner sans calcul son asymptote $(\Delta)$.
Soit $\lambda$ un réel positif ; $(\Delta)$, $(C)$ et la droite d'équation $x = \lambda$ limitent une région fermée du plan, dont on calculera l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ ; trouver la limite de $\mathscr{A}_\lambda$ pour $\lambda$ infini.

## Problème 188

./1973/groupeIC/pb/texte

Un espace vectoriel euclidien orienté $E$ est rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
$R_1$, $R_2$, $R_3$ sont des rotations vectorielles, dont les axes respectifs ont pour vecteurs unitaires $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ et dont l'angle commun a pour mesure donnée $\alpha$ (radians).
On pose $R = R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

1. Soit $\vec{V}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un vecteur de $E$ ; calculer les coordonnées de

$$R_1(\vec{V}),\ R_2(\vec{V}),\ R_3(\vec{V}),\ R_1^{-1}(\vec{V})\ ;$$

le calcul des coordonnées de $R(\vec{V})$ est exclu.
Calculer les coordonnées de $\vec{A} = R_1^{-1}(\vec{J})$ et de $\vec{A'} = R(\vec{A})$.
En déduire les cas où $R$ est l'identité de $E$ ; ces cas dorénavant écartés, $R$ est une rotation vectorielle déterminée.

2. On pose $u = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ ; soit $\vec{\Omega}(\cos u,\ \sin u,\ \cos u)$, vérifier que

$$R(\vec{\Omega}) = \vec{\Omega}.$$

L'axe de $R$ porte $\vec{\Omega}$, on l'oriente dans le sens de $\vec{\Omega}$ ; l'angle de $R$ ayant alors pour mesure $\varphi$, ce qui suit vise à calculer $\varphi$ en utilisant $\vec{A}$ et $\vec{A'}$.
Reconnaître d'abord $\vec{\Omega}$ et $\varphi$ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, puis pour $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Calculer en fonction de $u$ les coordonnées de $\vec{A}$ et $\vec{A'}$, puis celles des produits vectoriels $\vec{B} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$ et $\vec{B} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A'}$.
   Vérifier que $\vec{B}$ et $\vec{B'}$ sont unitaires.
   $(\vec{\Omega},\ \vec{A},\ \vec{B})$ est une base de $E$, étudier sans calculs sa transformée par $R$, conclure à l'égalité $\vec{B'} = R(\vec{B})$.
   Établir les formules
$$\vec{B}.\vec{B'} = \cos^2 u(3 - 4\cos^4 u),$$
$$\vec{B} \wedge \vec{B'} = \vec{\Omega} \sin u(1 - 4\cos^4 u).$$
4. Déduire des formules précédentes $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.
   On définit $\nu$ par $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \nu \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\nu = \cos^2 u,\ \sin u.\sin v \geqslant 0$ ; démontrer la relation $\varphi = 3\nu + \pi$ (mod. $2\pi$).
   On change $\alpha$ en $\alpha + 2\pi$ ; en quoi $\vec{\Omega}$ et $\varphi$ sont-ils changés ?
   Trouver l'ensemble des valeurs de $\alpha$ qui donnent $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (mod. $2\pi$), puis sans nouveau calcul $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ (mod. $2\pi$) ; on posera
$$\sqrt{3} - 1 = \sin\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (\theta \approx 0{,}821\ 33).$$

# XXXV. Groupe I remplacement, série C

**Ex. 684.** ./1973/groupeICrem/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la transformation ponctuelle $T_\alpha$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M''\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par
$$\begin{cases} x' = 4\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha \\ y' = 4\sin\alpha - x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha \qquad \alpha \in ]-\pi\ ;\ \pi] \end{cases}$$
Montrer que $T_\alpha$ est une symétrie axiale dont l'axe $d_\alpha$ reste tangent au cercle de centre $O$ et de rayon 2, quand on fait varier le paramètre $\alpha$.

**Ex. 685.** ./1973/groupeICrem/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ ; à tout point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ est associé son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Le nombre réel $k$ étant donné, résoudre par rapport à $z$ l'équation
$$z\frac{3z - 4}{3 + 4z} = k.$$
   On trouvera dans le cas général, deux solutions $z_1$ et $z_2$, affixes de deux points $M_1$ et $M_2$.
   Montrer que les coordonnées des points $M_1$ et $M_2$ vérifient :
   — soit la relation $y = 0$,
   — soit une relation $f(x,\ y) = 0$, indépendante de $k$, que l'on précisera.
2. En déduire l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ donne à $z\dfrac{3z-4}{3+4z}$ une valeur nulle.

## Problème 189

./1973/groupeICrem/pb/texte

A) Les trois inconnues $x,\ y,\ z$ étant à valeurs réelles positives ou nulles, on considère la système d'équation
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2m \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = m^2 \qquad m > 0. \end{cases} \tag{I}$$



Retour page 1

1. Démontrer que toute solution $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ satisfait nécessairement aux conditions

$$x_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}}, \qquad y_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}}, \qquad z_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}}.$$

Pour obtenir ces conditions, on pourra par exemple donner à $z$ une valeur arbitraire $z_0$ et résoudre le système par rapport à $x$ et $y$ en discutant l'existence des solutions suivant la valeur $z_0$.

Calculer $x$ et $y$, lorsqu'on donne à $z$ la valeur $2\sqrt{\frac{m}{3}}$.

2. Démontrer que l'égalité suivante est vraie quels que soient les nombres $a,\ b,\ c$ :

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c).$$

En déduire des relations du premier degré indépendantes de $m$ telles que, pour toute solution $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ du système (I), les trois nombres $x_0,\ y_0,\ z_0$ satisfont nécessairement l'une d'entre elles.

B) On désigne par $f,\ h,\ g$ trois fonctions numériques, qui à tout réel $x$ associent respectivement

$$f(x)=\sqrt{2(1-\cos x)},$$

$$g(x)=\sqrt{2+\cos x-\sqrt{3}\sin x},$$

$$h(x)=\sqrt{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}.$$

a) Comparer $g\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $h\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ à $f(x)$.

Étudier les variations de $f,\ g,\ h$ et construire dans le même système d'axes les courbes représentatives lorsque $x$ varie de 0 à $2\pi$.

b) Démontrer que $f(x),\ g(x),\ h(x)$ satisfont, quel que soit $x$, aux égalités

$$\begin{cases} f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)=6,\\ f^2(x)g^2(x)+g^2(x)h^2(x)+h^2(x)f^2(x)=9.\end{cases}$$

c) Soit $ABC$ un triangle équilatéral déterminé dans un repère orthonormé du plan affine euclidien par les points

$$A(R\ ;\ 0), \qquad B\left(-\frac{R}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}R\right), \qquad C\left(-\frac{R}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R\right), \quad R>0.$$

Déduire de l'étude précédente que, si $M$ est un point du cercle circonscrit à $ABC$, il existe entre les distances $MA=\alpha,\ MB=\beta,\ MC=\gamma$ de $M$ aux trois sommets une relation de la forme

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0,$$

où $p,\ q,\ r$ sont des entiers relatifs que l'on précisera suivant la position de $M$.

## XXXVI. Groupe I, série E

Ex. 686. ./1973/groupeIE/exo-1/texte.tex

Soit $\lambda$ et $\theta$ deux constantes réelles ; $\lambda$ est supposée non nulle.

1. Montrer que l'ensemble des nombres complexes $z$ qui vérifient

$$z^2-2(\lambda\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z+\lambda^2-1=0$$

est constitué de deux éléments.

2. Préciser, suivant la valeur attribué au réel $\lambda$, le module, et, éventuellement, l'argument de chacun d'eux.

**Ex. 687.** ./1973/groupeIE/exo-2/texte.tex

La fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ admet, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, l'encadrement suivant (qu'on admettra) :

$$1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2}.$$

En déduire un encadrement de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x+x^2}}$$

sur l'intervalle $[0\,;1]$.

En déduire alors deux nombres décimaux encadrant l'intégrale, $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x+x^2}}$ (sans chercher à calculer celle-ci).

## Problème 190

./1973/groupeIE/pb/texte

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension trois rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on désigne par $Ox$, $Oy$, $Oz$ les trois axes qui ont pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$.

1. On considère la transformation affine $R$ de $\mathscr{E}$ qui laisse fixe le point $O$ et telle que l'application linéaire associée transforme $\overrightarrow{\imath}$ en $-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\jmath}$ en $-\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{k}$ en $\overrightarrow{\imath}$.

   On considère aussi la transformation affine $T$ de $\mathscr{E}$ qui laisse fixe le point $O$ et telle que l'application linéaire associée transforme $\overrightarrow{\imath}$ en $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\jmath}$ en $-\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{k}$ en $\overrightarrow{\jmath}$.

   Montrer que ce sont des isométries.

   Donner les formules qui fournissent les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du point $M'=R(M)$, et les coordonnées $\left(x''\ ;\ y''\ ;\ z''\right)$ du point $M''=T(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du point $M$.

   Quels sont les points de $\mathscr{E}$ fixes dans $T$ ?

   Quels sont les points de $\mathscr{E}$ fixes dans $R$ ?

   Reconnaître les transformations $R\circ R\circ R$ et $T\circ T\circ T$.

2. On considère le point $A$ défini par $\overrightarrow{OA}=a(\overrightarrow{k}+\overrightarrow{\jmath})$ où le nombre $a$ est une constante strictement positive ; on désigne par (D) la demi-droite $Oz$ qui a pour origine $O$ et pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{k}$ ; on désigne par (D') la droite qui a pour origine $A$, et pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{\jmath}$.

   Soit $P$ et $P'$ deux points variables définis par $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AP'}=\lambda\overrightarrow{\jmath}$ ; montrer qu'il existe un point $S$ du plan $xOy$, et un seul, tel que l'on ait, pour tout réel $\lambda$, $SP=SP'$.

   Montrer qu'il existe une rotation transformant la demi-droite (D) en la demi-droite (D'), son axe passe par $S$ ; en déduire la manière dont, dans l'application linéaire associée, seraient transformés les vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{SO}$, puis le triplet $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

   En déduire l'existence d'une telle rotation ; on la désigne par $R_1$.

3. Trouver les formules qui donnent les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ du transformé $M_1=R_1(M)$ du point $M$.

   Démontrer que la transformation $R\circ R_1\circ R$ est une translation.

   Soit $\overrightarrow{K}$ un vecteur unitaire de l'axe de la rotation $R_1$ ; soit $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ deux vecteurs tels que $(S,\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{K})$ soit un repère orthonormé.

   Dire pourquoi les formules qui donneraient les coordonnées $(X_1\ ;\ Y_1\ ;\ Z_1)$ de $M_1$ dans ce repère en fonction des coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ de $M$ seraient de la forme

$$\left|\begin{array}{l} X_1=aX-bY\\ Y_1=bX+aY\\ Z_1=Z.\end{array}\right.$$

   Calculer $a$ et $|b|$ ; peut-on donner $b$ ?

# XXXVII. Groupe I remplacement, série E

**Ex. 688.** ./1973/groupeIErem/exo-1/texte.tex

1. Dans le plan complexe, on désigne
   - par $A$ le point de coordonnées $(x=1\ ;\ y=-2)$ ;
   - par $\vec{V}$ le vecteur de composantes $(x=2\ ;\ y=3)$ ;
   - par $T$ la translation ponctuelle de vecteur $\vec{V}$ et par $S$ la similitude directe de centre $A$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   Au point $m$, d'affixe $z$, la translation $T$ fait correspondre le point $m'$, d'affixe $z'$, soit $m'=T(m)$.
   Au point $m'$, la similitude $S$ fait correspondre la point $M$, d'affixe $Z$, soit $M=S(m')$.
   trouver les éléments de la similitude $\Sigma$ qui transforme $m$ en $M$.
2. Soit $\Sigma_k$ la transformation du plan complexe qui, au point $m$, d'affixe $z$, fait correspondre le point $M$ d'affixe $Z$ tel que
$$Z=kz+(k-1)(3\mathrm{i}+4), \qquad k\in\mathbb{C}^{\star}.$$
   (On rappelle que i est le nombre complexe de module 1, d'argument $\frac{\pi}{2}$ et que $\mathbb{C}^{\star}$ est l'ensemble des nombres complexes privé de zéro.)
   Démontrer que la transformation $\Sigma$ de la première question est une transformation $\Sigma_k$ particulière.
   Démontrer que, lorsque $k$ décrit $\mathbb{C}^{\star}$, l'ensemble des transformations $\Sigma_k$, muni de la loi de compositions des transformations, est un groupe commutatif.

**Ex. 689.** ./1973/groupeIErem/exo-2/texte.tex

Dans un espace vectoriel euclidien $\mathscr{E}_3$, rapporté à la base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ , $\vec{B}(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ et l'application $f$ qui au vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ fait correspondre le vecteur $\vec{U}(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ tel que
$$\vec{U}=\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{u}).$$
(On rappelle que la notation $\vec{B}\wedge\vec{u}$ représente le produit vectoriel du vecteur $\vec{B}$ par le vecteur $\vec{u}$.)

1. Montrer que $f$ est une application linéaire et exprimer $X$, $Y$, $Z$ en fonction de $x$, $y$, $z$.
2. Déterminer le noyau de $f$. Montrer que ce noyau est un espace vectoriel de dimension 1.

## Problème 191

./1973/groupeIErem/pb/texte

Dans tout le problème, e est la base du système de logarithmes népériens.

1. Soit les intégrales
$$I_0=\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\ ; \qquad I_1=\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\ ; \qquad I_2=\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
   a) Calculer $I_0$.
   b) Déterminer $a$ et $b$ pour que $(at+b)\mathrm{e}^t$ soit une primitive de $t\mathrm{e}^t$. En déduire $I_1$.
   c) Déterminer $a$, $b$ et $c$ pour que $(at^2+bt+c)\mathrm{e}^t$ soit une primitive de $t^2\mathrm{e}^t$. En déduire $I_2$.
2. On considère, pour tout entier naturel $n$ strictement positif, l'intégrale
$$I_n=\int_0^1 t^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
   Démontrer que l'expression de $I_n+nI_{n-1}$ est indépendante de $n$ ; donner la valeur numérique de cette expression. (On pourra utiliser une intégration par parties.)
   En considérant $I_0$ préalablement calculée, retrouver la valeur de $I_1$ et la valeur de $I_2$. Calculer $I_3$ et $I_4$.

Retour page 1

3. Soit $f$ la fonction numérique définie par $f(t) = \mathrm{e}^t(t^2 - 4t + 4)$. Étudier les variations et construire la courbe $(C)$ représentant le graphe de $f$ dans un repère orthonormé.

   On désigne par $A$ et $B$ les points de $(C)$ d'abscisses respectives $t = 0$ et $t = 1$. Calculer l'aire comprise entre l'arc $AB$ de $(C)$ et la corde $AB$.

4. Dans le plan euclidien, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le mouvement d'un point $M(x\ ;\ y)$ défini par
$$x = (t^2 - 4t + 4)\mathrm{e}^t\ ; \qquad y = (t^2 - 4t + 4)\mathrm{e}^{t+1} + 1\ ; \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$
   Préciser la trajectoire de $M$. Á l'aide des variations de l'abscisse de $M$, décrire la mouvement de ce point sur sa trajectoire. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de $M$. Préciser, suivant la valeur de $t$, la nature du mouvement (accéléré ou retardé).

5. Soit E l'ensemble des fonctions numériques $p$ telles que
$$x \longmapsto p(x) = ax^2 + bx + c.$$
   Á tout triplet $(a,\ b,\ c)$ élément de $\mathbb{R}^3$ correspond un élément de E. On désigne par$p_0,\ p_1,\ p_2$, les éléments de E correspondant respectivement aux triplets $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, soit
$$p_0(x) = 1\ ; \qquad p_1(x) = x\ ; \qquad p_2(x) = x^2.$$
   On admettra que E muni des lois habituelles : addition des fonctions numériques, multiplication d'une fonction numérique par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Á tout élément $p$ de E, on associe $q = \varphi(p)$ tel que pour tout $x$
$$q(x) = \int_0^1 p(x+t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,$$
   $p(x+t)$ désignant l'image de $x+t$ par $p$, soit
$$q(x) = \int_0^1 \left[a(x+t)^2 + b(x+t) + c\right]\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
   a) Démontrer que E est de dimension 3 et engendré par $\{p_0,\ p_1,\ p_2\}$.

   b) Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire de E dans E.

   c) Déterminer $q_0,\ q_1,\ q_2$ images respectives par $\varphi$ de $p_0,\ p_1,\ p_2$.

   d) Soit $p$ un élément de E et $q$ son transformé par $\varphi$ tels que
$$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{et} \qquad q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$
   Prouver que $A,\ B,\ C$ sont liés à $a,\ b,\ c$ par les relations
$$\begin{cases} A = \alpha a + \beta b + \gamma c\ ; \\ B = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c\ ; \\ C = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c. \end{cases}$$
   On déterminera les coefficients $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$.

   e) Démontrer que la fonction numérique $q$ telle que $q(x) = x^2 + 1$ est l'image par $\varphi$ d'un élément $p$ de E. Déterminer cette fonction $p$.

Retour page 1

# XXXVIII. Laos & Japon, série C

**Ex. 690.** ./1973/laosjaponC/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

**2.** La lettre $a$ désigne un réel positif. Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ du plan P dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient la proposition suivante :

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad x+1 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $S(a)$ de l'ensemble $E$ et la limite de $S(a)$ quand $a$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 691.** ./1973/laosjaponC/exo-2/texte.tex

Soit $ABC$ un triangle rectangle d'hypoténuse $BC = 2a$, $I$ milieu de $(B, C)$.

**1.** Démontrer que le point $G$, défini par

$$4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

est le symétrique du point $I$ par rapport au point $A$.

**2.** Quel est l'ensemble $\mathscr{F}$ des points $M$ du plan $(A, B, C)$ tels que

$$4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = -4a^2 \qquad \text{(noter que } a \in F\text{)}.$$

## Problème 192

./1973/laosjaponC/pb/texte

Dans tout le problème, $a$ et $b$ désignent deux réels tels que $a^2 - b^2 = 1$, $M_+$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $M_-$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $M = M_+ \cup M_-$.

**1.** a) Montrer que toute matrice de $M$ est inversible et déterminer les inverses des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que $M$ est stable pour la muktiplication des matrices. En est-il de même pour $M_+$ ; pour $M_-$ ?

c) Montrer que $(M;\ \times)$ est un groupe dont $(M_+;\ \times)$ est un sous-groupe commutatif.

d) Démontrer que tout élément de $M_+$ peut être considéré d'une infinité de façons comme le produit de deux éléments de $M_-$.

**2.** $E$ est un plan vectoriel muni de la base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $\mathscr{E}$ est un plan affine associé à $E$, muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Á toute matrice $m$ de $M$, on fait correspondre l'application affine $f$ de $\mathscr{E}$ telle que :

l'application linéaire $\vec{f}$ admet $m$ pour matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

$f(O) = O$ : le point $O$ est invariant par $f$.

On définit ainsiu trois ensembles d'applications affines $F$, $F_+$, $F_-$ respectivement associées à $M$, $M_+$, $M_-$.

a) Soit $f$ l'application de $F$. Calculer les coordonnées, $x'$ et $y'$ du point $f(P)$ en fonction des coordonnées, $x$ et $y$, du point $F$ en supposant d'abord que $m = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, ensuite que $m = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

b) $k$ désignant un réle quelconque, quelle est la nature de l'ensemble $H_k$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = k$ ?

Construire $H_0$, $H_1$, $H_{-1}$.

Démontrer que, pour tout réel $k$, l'ensemble $H_k$ est globalemenr invariannt par toute application $f$ de $F$.



Retour page 1

c) Démontrer que tout élément de $F_-$ est une symétrie par rapport à une droite $(D)$ parallèlement à une direction $(\Delta)$.

Soit $f$ l'application associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Déterminer l'équation cartésienne de $(D)$ et de la droite $(D')$ contenant $O$ et de direction $(\Delta)$. Montrer que $(D)$ et $(D')$ sont homologues dans une symétrie orthogonale dont l'axe est une asymptote de $H_k$.

d) Démontrer que tout élément de $F$ est une symétrie par rapport à une droite ou la composée de deux symétries par rapport à des droites.

# XXXIX. Lille, série C

Ex. 692. ./1973/lilleC/exo-1/texte.tex

**1.** $\vec{U}$ et $\vec{W}$ désignent deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel euclidien $E_3$ de dimension 3, on demande de vérifier la relation

$$\left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) \wedge \vec{W} = (\vec{U}.\vec{W})\vec{W} - \left\|\vec{W}\right\|^2 \vec{U} \;; \qquad (1)$$

on pourra pour cela supposer qu'une base orthonormé directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de $E_3$ est choisie de façon que, dans cette base, $\vec{U}$ ait pour coordonnées $(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\vec{W}$ $(b\ ;\ c\ ;\ 0)$.

**2.** On suppose que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs donnés et orthogonaux de $E_3$.

a) Démontrer en utilisant la relation (1) qu'il existe un seul vecteur, $\vec{U}_0$, orthogonal à $\vec{W}$, tel que

$$\vec{U}_0 \wedge \vec{W} = \vec{V}.$$

b) En déduire que l'ensemble des vecteurs $\vec{U}$ tels que $\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{V}$, est défini par $\vec{U} = \vec{U}_0 + \lambda\vec{W}$, $\lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

Ex. 693. ./1973/lilleC/exo-2/texte.tex

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel $a$, l'existence de solutions pour le système

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x.\mathrm{e}^{2y} = a, \\ 2xy = 1, \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Résoudre complètement dans la cas où $a = \sqrt{\mathrm{e}^5}$.

## Problème 193

./1973/lilleC/pb/texte

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté au repère cartésien $\mathscr{B}(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\alpha$ et $\beta$ deux paramètres réels et $f$ toute application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ donne pour image le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ déterminé par

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = -2\beta x + (\alpha + 2\beta) y. \end{cases}$$

La matrice de l'application linéaire associée à $f$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

On appelle $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $A$, lorsque $\alpha$ et $\beta$ décrivent $\mathbb{R}$.

A) Étude de l'application $f_1$ correspondant à $\alpha = -1$ et $\beta = +1$.

1° Écrire les équations de $f_1$ et sa matrice $A_1$. Démontrer que $f_1$ est bijective et que $O$ est le seul point invariant. Écrire les équations définissant dans $\mathscr{B}$ l'application réciproque.

Quelle est l'image par $f_1$ des droites ayant pour équations $x - y = 0$ et $x = 0$ ?

Retour page 1

2° Reconnaître l'application $f_1^2 = f_1 \circ f_1$ et écrire sa matrice.
Que peut-on dire des applications

$$f_1^3 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \qquad \text{et} \qquad f_1^4 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1 \ ?$$

Le point $M$ ayant respectivement pour images $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans $f_1$, $f_1^2$, $f_1^3$ et $f_1^4$, quelle particularité l'ensemble de ces points présente-t-il ? (On ne cherchera pas la relation géométrique entre $M$ et $M_1$.)

3° $a$, $b$, $c$ étant trois réels donnés quelconques, on appelle E l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ défini dans le repère $\mathscr{B}$ par l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

a) Écrire l'équation de l'ensemble $f_1(E)$, image de E par l'application $f_1$.

b) Montrer que, si $a$, $b$, $c$ peuvent être choisis tels que l'image $f_1(E)$ ait pour équation

$$\lambda(ax^2 + bxy + cy^2) = 1,$$

$\lambda$ est nécessairement égal à l'une ou l'autre de deux valeurs que l'on déterminera.

c) A $\lambda = 1$ correspond une famille de courbes $(E)$ dont l'équation dépend d'un seul paramètre.
On appelle $(E')$ celle de ces deux courbes pour laquelle $a$ est égal à 2.
Montrer qu'elle est la réunion de deux courbes $(E'_1)$ et $(E'_2)$ admettant respectivement pour équations, relativement à $\mathscr{B}$,

$$y = g_1(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour } E'_1,$$
$$y = g_2(x) = x - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour } E'_2.$$

Étudier les variations des fonctions $g_1$ et $g_2$ et construire $E'$. Quelle est l'image $f_1(E')$ ? Si $M$ un point quelconque de $E'$, que peut-on dire de ses images successives $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ ?

d) A $\lambda = -1$ correspond une famille de courbes $(E)$ dont l'équation dépend de deux paramètres. On appelle $(E'')$ celle de ces courbes qui est associée aux valeurs $b = 1$ et $c = 0$.
Montrer que $(E'')$ admet pour équation, relativement à $\mathscr{B}$, $y = x + \dfrac{1}{2x}$ ; construire $(E'')$ et son image $f_1(E'')$.
Si $M$ un point quelconque de $(E'')$, que peut-on dire de ses images successives $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ ?

B) 1° $A$ et $A'$ désignant deux matrices quelconques de $\mathscr{A}$, et correspondant aux couples $(\alpha,\ \beta)$ et $(\alpha',\ \beta')$ démontrer que la matrice somme, $A + A'$ et la matrice produit, $A \times A'$ sont des éléments de $\mathscr{A}$.

2° On appelle $\varphi$ l'application de $\mathscr{A}$ dans le corps $\mathscr{C}$ des complexes définie par

$$\varphi(A) = (\alpha + \beta) + \mathrm{i}\beta.$$

a) Démontrer que $\varphi$ est un isomorphisme de l'ensemble $\mathscr{A}$ muni des lois $+$, $\times$ sur le corps $\mathbb{C}$.

b) En utilisant l'isomorphisme précédent, déterminer les matrices $A$ solutions de $A^4$ =I, I désignant la matrice de $\mathscr{A}$ correspondant à $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

## XL. Lille, série C remplacement

**Ex. 694.** ./1973/lilleCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}.$$

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Trouver la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ quand $x$ tend vers 0. En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque tend vers 0 par valeurs négatives.
3. Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$. Quelle est la tangente à la courbe $(C)$ au point $O$ origine des axes ?

Retour page 1

Ex. 695. ./1973/lilleCrem/exo-2/texte.tex

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ \text{pour tout } n > 0 \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 4. \end{cases}$$

1. Démontrer, par récurrence, que la différence $u_n - u_{n-1}$ de deux termes consécutifs garde un signe constant ; en déduire le sens de variation de cette suite.
2. Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = u_n + 6.$$

   Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et trouver sa limite quand $n$ augmente indéfiniment.
3. Déterminer le plus petit entier naturel $n_0 \in GN$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < -5{,}99.$$

## Problème 194

./1973/lilleCrem/pb/texte

Soit P le plan affine euclidien réel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

A- Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Soit $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les racines ($\alpha_1$ étant celle dont le point image a des coordonnées positives).

On appelle $s_1$ et $s_2$ les applications ponctuelles qui, au point $M$ d'affixe $z$, associent respectivement $m_1$ d'affixe $\alpha_1 z$ et $m_2$ d'affixe $\alpha_2 z$.
Reconnaître $s_1$ et $s_2$ ; en préciser les éléments caractéristiques.

2. Soit $T$ l'application de P dans P qui, au point $M$, associe $M' = T(M)$, $M'$ étant la barycentre du point $m_1 = s_1(M)$ affecté du coefficient $-1$ et du point $m_2 = s_2(M)$ affecté du coefficient $2$.

   a) Prouver que $T$ est une similitude. Préciser la position relative des points $M$, $m_1$, $m_2$, $M'$.

   b) Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $AB$ : $A(2\ ;\ 0)$ ; $B(0\ ;\ 6)$.
   Quelle est l'image de $(\Gamma)$ par l'application $T$ ?

B- On considère l'équation, où $m$ est un paramètre réel,

$$z \in \mathbb{C}\ ;\ z^2 + 2(m-1)z - 5m^3 + 3m + 2 = 0.$$

1. Discuter, selon les valeur de $m$, si les racines $\beta_1$ et $\beta_2$ de cette équation sont réelles ou non, et préciser leurs expressions dans chaque cas.
2. Soit $S_1$ et $S_2$ les applications de P dans P qui, au point $M$ d'affixe $z$, associent respectivement $M_1$ d'affixe $\beta_1 z$ et $M_2$ d'affixe $\beta_2 z$.
   Reconnaître ces applications. Pour quelles valeurs de $m$ sont-elles des homothéties ?

C- On considère l'application $F$ de P dans P :

$$M(x\ ;\ y) \longmapsto F(M) \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{10}x - \dfrac{\sqrt{2}}{4}y, \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{10}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y. \end{cases}$$

1. Prouver que $F$ est la composée d'une application affine bijective $G$ et d'une rotation $R$ de centre $O$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ : $F = G \circ R$.
   Écrire les équation définissant $G$ et prouver que $G$ laisse globalement invariantes les deux droites d'équations $x = 0$, $y = 0$.
   Quelles sont les restrictions de $G$ à chacune de ces droites ?
2. On prend le cercle $(\Gamma)$ de diamètre $AB$ et la transformation $T$ de la première partie.

   a) Tracer la courbe $(\Gamma_2)$, transformée de $(\Gamma)$ par $G \circ T$.

   b) Tracer la courbe $(\Gamma_3)$, transformée de $(\Gamma)$ par $F \circ T$.

Retour page 1

# XLI. Lille, série E

**Ex. 696.** ./1973/lilleE/exo-1/texte.tex

L'espace vectoriel $E_3$ est muni d'une base $\mathscr{B}(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$. On considère l'application linéaire $\varphi$ de $E_3$ dans lui-même qui, à tout vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{B}$ associe le vecteur $\vec{V}'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \\ z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z. \end{cases}$$

1. Quel est le noyau de cette application linéaire ? Quelle conclusion en tirer ?
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi$.
3. $\vec{V}'$ étant l'image d'un vecteur $\vec{V}$ quelconque de $E_3$, déterminer $\varphi(\vec{V}')$.
   En déduire la nature de l'application $\varphi$ et ses éléments caractéristiques.
   Que peut-on dire de l'application $\varphi$ lorsque $\mathscr{B}$ est orthonormée ?

**Ex. 697.** ./1973/lilleE/exo-2/texte.tex

La lettre $t$ désignant le temps, soit la fonction vectorielle définie da,s le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, avec

$$x = 2 + 2\cos^2 t, \qquad y = 4\sin t\cos t.$$

1. Trouver une équation cartésienne de la trajectoire de $M$ et les caractéristiques simples qui permettent de construire cette trajectoire.
2. Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ de $M$.
3. Calculer les composantes du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ de $M$.
4. Pour quelles valeurs de $t$ les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont-ils orthogonaux ?
5. On suppose $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Pour quelles valeurs de $t$ le produit scalaire $\vec{V}.\vec{\Gamma}$ est-il positif ? Que dire alors du mouvement ?
   Quelle propriété de la fonction $(\vec{V})^2$ en déduit-on ?

## Problème 195

./1973/lilleE/pb/texte

Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(1\ ;\ 0)$ et $B(-1\ ;\ 0)$.
Á tout point $M$ du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, affixe de $M$.

1. Soit $T$ l'application de $(P)$ dans $(P)$ qui à tout point $M$ associe le point $M_1$ d'affixe $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ telle que

$$z_1 = \mathrm{i}z - (\mathrm{i} + 1).$$

   a) Montrer que l'on a

$$\text{mes}\ (\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BM_1}) = \frac{\pi}{2} + k\ 2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{BM_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|.$$

   b) Préciser la nature de $T$ et ses éléments principaux.

   c) Calculer les coordonnées des points $M_1$ en fonction de celles de $M$.

   d) Quel est l'ensemble des points $M_1$ lorsque $M$ décrit le cercle de diamètre $AB$ ?

2. Le nombre réel $\lambda$ étant fixé mais quelconque, on considère l'application $T_\lambda$ de $(P)$ dans $(P)$ qui à tout point $M$ associe le point $M'$ barycentre de $M$ affecté du coefficient $\lambda$, de $M_1$ affecté de $-\lambda$ et de $A$ affecté de 1.
   On note $z' = x' + \mathrm{i}y'$ l'affixe du point $M'$.

   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\lambda$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$. En déduire, entre $\lambda$ $z$ et $z'$, la relation

$$z' = \lambda(1 - \mathrm{i})z + \lambda(1 + \mathrm{i}) + 1.$$



Retour page 1

b) Démontrer que, suivant la valeur de $\lambda$ appartenant à $\mathbb{R}^\star$, $T_\lambda$ est une similitude directe ou une rotation.
Dans le cas d'un similitude, donner l'affixe du centre, le rapport et l'angle.
Préciser pour quelles valeurs de $\lambda$ l'application $T_\lambda$ est une rotation et donner dans ce cas son angle et l'affixe du centre.

c) Exprimer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ en fonction de $\lambda$ et des coordonnées $x$ et $y$ de $M$.
Le nombre $\lambda$ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-\log\lambda\,;\,\log\lambda)$ et le point $P' = T_\lambda(P)$ défini précédemment ($\log$ désigne le logarithme népérien).
Exprimer les coordonnées de $P'$ en fonction de $\lambda$.
Démontrer que, lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$, l'ensemble des points $P'$ est la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation

$$y = (2x-1)\log(x-1) + (x-1).$$

3. Soit $f$ la fonction définie par

$$\begin{cases} x \longmapsto f(x) = 2x\log x + x & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

a) Étudier les variations de $f$ et calculer la valeur $x_0 \neq 0$ telle que $f(x_0) = 0$.

b) Quelle est la limite de $f$ quand $x$ tend vers zéro par valeurs positives ?

c) Représenter graphiquement $f$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (l'unité de longueur étant le segment dont la mesure en centimètres est 10).
Par quelle application affine simple, l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points $P'$ de la question 2c, est-il l'image de la courbe représentative $(\Gamma)$ obtenue ?

d) Calculer $I(a) = \displaystyle\int_a^{x_0} (2x\log x + x)\,\mathrm{d}x$, où $x_0$ est la valeur trouvée au 3a et $a$ un nombre de l'intervalle $]0\,;x_0[$.
Quelle est la limite de $I(a)$ quand $a$ tend vers zéro ?
En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\Gamma)$ et l'axe $Ox$. On exprimera $\mathscr{A}$ en centimètres carrés, à $10^{-2}$ près.

## XLII. Lille, série E remplacement

**Ex. 698.** ./1973/lilleErem/exo-1/texte.tex

On considère la suite $(U_n)$ de nombres réels, définies par les relations

$$U_0 = 1,$$
$$U_n = \frac{U_{n-1}-3}{2} \qquad \text{pour tout} \qquad n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} - \{0\}.$$

On pose $V_n = U_n + 3$.

**1.** Montrer que le suite $(V_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

**2.** Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.

**3.** Étudier $\lim\limits_{+\infty}(V_n)$ et en déduire $\lim\limits_{+\infty}(U_n)$.

**Ex. 699.** ./1973/lilleErem/exo-2/texte.tex

Soit la fonction numérique $f$ d'une variable réelle définie de la façon suivante :

$$\text{pour } |x| < 1, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$\text{pour } |x| \geqslant 1, \qquad f(x) = 0$$

1. Montrer que $f$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Retour page 1

2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour cela on montrera que $f$ est dérivable en tout point $x$ vérifiant $|x| \neq 1$, puis on montrera que $f$ est dérivable aux points $(-1)$ et $(+1)$ en revenant à la définition d'une fonction dérivable en un point.
3. Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

## Problème 196

./1973/lilleErem/pb/texte

Soit $\mathscr{E}$ le plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et E la plan vectoriel associé.
On notera $x'x$ la droite $(O; \vec{\imath})$ et $y'y$ la droite $(O; \vec{\jmath})$.
On considère l'application affine $f_\alpha$ ed $\mathscr{E}$ dans lui-même qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe la point $M'$ dont coordonnées $(x'\ ;\ y')$ sont déterminées par

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+\alpha)y \\ y' = \alpha y \end{cases}$$

$\alpha$ étant un nombre réel.
On écrira $M' = f_\alpha(M)$.

1. a) Donner la matrice $A_\alpha$ relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de l'application linéaire $F_\alpha$ associée à $f_\alpha$.
   b) Quels sont les points de $\mathscr{E}$ invariants par $f_\alpha$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une droite vectorielle de E, qui est indépendante de $M$ et dont on déterminera une base.
      L'application $f_\alpha$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer analytiquement l'application réciproque $f_\alpha^{-1}$.
   d) Dans le cas $\alpha = 0$, quel est l'ensemble des points $M' = f_0(M)$ quand $M$ décrit le plan $\mathscr{E}$ ?
      Reconnaître $f_0$.
   e) Déterminer $\alpha$ pour que $f_\alpha$ soit involutive et reconnaître l'application correspondante.
2. On considère désormais, dans toute la suite du problème, l'application notée $f$ correspondant à $\alpha = 1$.
   a) Quelles propriétés, étudiées au 1, $f$ possède-t-elle ?
   b) Quelle est l'image $(D')$ par $f$ de la droite $(D)$ d'équation

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a,\ b) \neq (0,\ 0)\ ?$$

      Existe-t-il des droites $(D)$ parallèles à leurs images $(D')$ ?
      Que peut-on dire des images de deux droites parallèles ?
      De deux droites sécantes ?
      Quelle est l'image de la droite $(y'y)$ ?
      De quelle droite $(y'y)$ est-elle l'image ?
   c) Existe-t-il des droites $(D)$ orthogonales à leurs images $(D')$ ?
      Existe-t-il des droites $(D)$ telles que $(D)$ et son image $(D')$ soient symétriques par rapport à la droite $x'x$ ?
      Si oui, préciser la direction de ces droites.
   d) Existe-t-il des couples $(M,\ N)$ de $\mathscr{E}^2$ tels qu'on ait

$$\|MN\| = \|M'N'\|\ ?$$

      Si oui, préciser la direction de la droite $(MN)$.
3. Soit $I$ le point d'intersection de la droite $x'x$ et de la médiatrice du segment $[M, M']$. Calculer les coordonnées de $I$.
   Calculer $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2$, $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MI},\ \overrightarrow{MM'})$.
   En déduire une construction de $M'$ connaissant $M$.
4. On considère le cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de l'image $(C')$ du cercle $(C)$ par $f$.



Retour page 1

b) On considère la rotation de centre $O$, dont l'angle a pour mesure $-\dfrac{\pi}{6}$.
Définir analytiquement cette rotation et trouver une équation cartésienne de l'image $(C'')$ de $(C')$ par $r$.
Reconnaître $(C'')$ puis $(C')$.

# XLIII. Limoges, série C

**Ex. 700.** ./1973/limogesC/exo-1/texte.tex

Déterminer le reste de la division par 5 de $8^{1974}$.

**Ex. 701.** ./1973/limogesC/exo-2/texte.tex

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

le symbole $\log$ désignant le logarithme népérien.
Étudier ses variations, tracer sa courbe représentative.
Résoudre l'équation $f(x) = a$, où $a$ est un réel donné.

## Problème 197

./1973/limogesC/pb/texte

Soit P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; $m$ et $M$ sont deux points de ce plan de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(X\ ;\ Y)$ ; $f$ est une application du plan dans lui-même qui au point $m$ associe le point $M$ ; l'application est définie par

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{2} + ay, \\ Y = bx + \dfrac{y}{2} \end{cases} ;\ a \text{ et } b \text{ ténat deux nombres reéls donnés.}$$

1. $\Pi$ étant le plan vectoriel associé à P, donner matrice $A$ de l'application linéaire qui au vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le vecteur de coordonnées $(X\ ;\ Y)$.
Déterminer suivant les valeurs de $a$ et $b$ le noyau et l'image de cette application linéaire. Á quelle condition portant sur $a$ et $b$ est-elle bijective ?
Quels sont les points invariants de l'application $f$ ? Si $f$ est bijective déterminer la bijection réciproque.
2. a) Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ l'application $f$ est-elle une isométrie ? Préciser la nature des isométries trouvées.
   b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   Déterminer $A \times A = A^2$, puis $A^3$ ; en déduire $A^4$, $A^5$, $A^6$, puis $A^n$ ($n$ entier naturel).
   c) L'application $f$ est déterminée par $X = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ et $Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y$ ; si le point $m$ décrit la droite $(d)$ d'équation $3x + 2y - 6 = 0$, construire la courbe décrite par $M$ (une figure précise est demandée).
3. On prend maintenant $a = -b = \lambda$.
   a) Montrer que $f$ est une similitude. Quel est son centre ? Calculer en fonction de $\lambda$ le rapport $k$ de cette similitude. Construire la courbe représentant les variations de $k$ lorsque $\lambda$ décrit l'ensemble des réels.
   b) $(d)$ est une droite passant par le point fixe $A(0\ ;\ 1)$ ; montrer que sa transformée $(D)$ par la similitude correspondant à $\lambda = 1$ passe par un point fixe $A'$ que l'on déterminera. Á quelle courbe appartient le point d'intersection $I$ de $(d)$ et $(D)$ lorsque $(d)$ varie en passant par $A$ ?
4. Dans cette question on choisit $a = 1$ et $b = 2$ ; $m$ décrit la courbe d'équation $2x^2 - y^2 = 1$.
Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer la courbe décrite par le point $M$ transformé de $m$ par $f$.

Les questions 2, 3, 4 sont indépendantes les unes des autres.

Retour page 1

# XLIV. Limoges, série E

**Ex. 702.** ./1973/limogesE/exo-1/texte.tex

Dans un espace affine E, on désigne deux points $A$ et $B$. Soit $f$ l'application de E dans E qui, à tout point $M$, associe le point $M'$, barycentre du système pondéré $(A,\ 1)$, $(B,\ 2)$, $(M,\ 3)$.
Montrer que $f$ est une application bijective, et que, par $f$, il existe un point invariant unique. En déduire que $f$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

**Ex. 703.** ./1973/limogesE/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations et construire, dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), la courbe représentative de la fonction $f$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ : \qquad f(x) = 1-(2x+1)\mathrm{e}^{-2x}.$$

**2.** a) Calculer avec la précision permise par les tables de logarithmes décimaux, l'aire A du domaine du plan limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

b) Calculer l'aire $S(\lambda)$ du domaine plan compris entre le courbe et les droites d'équations $y=1$, $x=0$ et $x=\lambda$ ($\lambda>0$).
Étudier la limite de $S(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

## Problème 198

./1973/limogese/pb/texte

On raisonne dans le plan affin euclidien muni d'un repère orthonormé.

A- 1. a) On donne la droite $(D)$ d'équation

$$y=-\sqrt{3}x+2.$$

Exprimer, en fonction des coordonnées de $M$, les coordonnées de $s_D(M)$, où $s_d$ désigne la symétrie orthogonale d'axe $(D)$. (On pourra écrire que le milieu de $(M,\ s_D(M))$ appartient à $(D)$ et que $\overrightarrow{Ms_D(M)}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $(D)$.)

b) On appelle $S$ la similitude de centre $A(0\ ;\ 2)$ d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$ ; déterminer les coordonnées de $S(M)$ en fonction de celles de $M$.

c) Soit $T$ l'application affine définie par $T=S\circ s_D$, montrer que les coordonnées de $T(M)$ dont données en fonction de celles de $M$ par

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y+3,\\ y' = -\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{3}+2. \end{cases} \tag{1}$$

A-t-on $S\circ s_D = s_D\circ S$ ?

2. Montrer que $T=s_{D'}\circ h_{(A,\sqrt{3})} = h_{(A,\sqrt{3})}\circ s_{D'}$, où $s_{D'}$ est la symétrie orthogonale d'axe $(D')$ à déterminer et $h_{(A,\sqrt{3})}$ est l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\sqrt{3}$.
On donnera une démonstration analytique ou une démonstration géométrique.

3. L'application $T$ est-elle bijective ? Déterminer $T^{-1}$ en donnant les coordonnées de $T^{-1}(M)$ en fonction de celles de $M$ et vérifier géométriquement le résultat obtenu.

B- 1. On considère la famille $\mathscr{D}$ de droites d'équation

$$(m+1)x+(m-1)y+2m=0,$$

où $m$ est un paramètre réel.
Existe-t-il une droite de la famille $\mathscr{D}$ passant par $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ ? En déduire que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des droites passant par un point $B$, à déterminer, privé d'une droite que l'on appellera $(\Delta)$.

2. Déterminer $T(\mathscr{D})$ et vérifier que c'est l'ensemble des droites passant par $T(B)$ privé de $T(\Delta)$.

C- 1. Si $M$ et $T(M)$ on respectivement pour coordonnées $x$ et $y$, $x'$ et $y'$, on pose

$$z=x+\mathrm{i}y \qquad \text{et} \qquad z'=x'+\mathrm{i}y'.$$

Exprimer $z'$ en fonction de $z$, en utilisant le système (1). Retrouver , par une autre méthode que celle du A2 la décomposition canonique de $T$.



Retour page 1

2. On suppose que $T(M)$ décrit le cercle de centre $P$ et de rayon $R$; montrer, en utilisant la forme de $T$ trouvée au C1, que $M$ décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Expliquer géométriquement ce résultat.

## XLV. Limoges remplacement, série C

Ex. 704. ./1973/limogesCrem/exo-1/texte.tex

Dans le plan euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère une transformation ponctuelle qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre la point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ où

$$x' = x+\sqrt{3}y-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad y' = -\sqrt{3}x+y.$$

1. Soit $z = x+\mathrm{i}y$ et $z' = x'+\mathrm{i}y'$ les nombres complexes associées à $M$ et à $M'$. Exprimer $z'$ en fonction de $z$.
2. Montrer qu'il existe un point $M_0$, et un seul, d'affixe $z_0$ qui soit invariant par cette transformation ponctuelle.
3. Donner le nom de cette transformation ponctuelle et déterminer ses éléments caractéristiques.

Ex. 705. ./1973/limogesCrem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $y = f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1. Étudier les variations de cette fonction et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant égale à deux centimètres.
   Pour étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on pourra poser $x = \log X$ (logarithme népérien de $X$).
2. On considère la surface plane limitée par les axes $Ox$, $Oy$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y = m$, $m$ étant un réel strictement positif.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de cette surface.
   Étudier la valeur limite de cette aire lorsque $m$ tend vers $+\infty$.

**Problème 199** ./1973/limogesCrem/pb/texte

Soit E un espace affine associé à l'espace vectoriel réel $\mathscr{E}$ de dimension deux. Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathscr{E}$ ; $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le repère affine associé de E.

Questions préliminaires.- On considère trois points $A$, $B$, $C$ de E : $A(0\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ -2)$, $C(0\ ;\ 1)$.

1. Montrer que le triplet $(A, B, C)$ est un repère affine de E.
2. On considère l'application affine $f$ de E dans E, qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ et défini par les relations $f(A) = B$, $f(C) = C$, $f(B) = B'$, avec $B'$ de coordonnées $(-3\ ;\ 4)$.
   Montrer que dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la traduction analytique de $f$ est

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}, \\[2ex] y' = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

   Montrer que $f$ est une bijection.

A- 1. Montrer que l'ensemble des points doubles de $f$ est une droite (D) dont on déterminera l'équation.
   2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à un vecteur fixe $\vec{V}$ dont on déterminera les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
   3. Soit $I$ la projection de $M$ sur (D) parallèlement à $\vec{V}$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$. Donner une construction géométrique de $M'$ connaissant $M$.

B- Soit $\varphi$ l'application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ associée à l'application affine $f$.
   1. Déterminer deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de $\mathscr{E}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ et $\varphi(\vec{v}) = \mu\vec{v}$. ($\lambda$ et $\mu$ sont deux réels distincts qu'on déterminera, ainsi qu'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non nuls associés.)

2. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u},\ \vec{v})$ est une base de $\mathscr{E}$. Donner la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}'$.
3. E, remarquant que $C$ est un point double de $f$, donner la traduction analytique de $f$ dans le repère $(C,\ \vec{u},\ \vec{v})$ de E.

# XLVI. Lyon, série C

**Ex. 706.** ./1973/lyonC/exo-1/texte.tex

On considère le polynôme à variable complexe

$$f(z) = z^4 - 4(1+\mathrm{i})z^3 + 12\mathrm{i}z^2 - 8\mathrm{i}(1+\mathrm{i})z - 5.$$

**1.** Calculer $f(z)$ pour les valeurs $z = 1$ et $z = \mathrm{i}$, puis factoriser $f(z)$.

**2.** Résoudre l'équation $f(z) = 0$ ; on notera $z_1,\ z_2,\ z_3$ et $z_4$ les solutions de cette équation et l'on construira les images $m_1,\ m_2,\ m_3$ et $m_4$ de ces complexes dans la plan affine muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Ex. 707.** ./1973/lyonC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5, \\ xy = \mathrm{e}, \end{cases}$$

dont l'inconnue est le couple de réel $(x,\ y)$.

## Problème 200

./1973/lyonC/pb/texte

$a$ et $b$ désignent deux nombres réels. $V$ est un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit $\mathscr{E}$ un espace affine admettant $V$ pour espace vectoriel associé. $O$ est un point de $\mathscr{E}$.
On munit $\mathscr{E}$ du repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- Pour chaque valeur du couple $(a\ ;\ b)$, on considère l'endomorphisme de $V$ noté $\varphi_{(a,b)}$ dont la matrice dans la base B est :

$$\begin{pmatrix} a-1 & -2a \\ 2ab & b(a-1) \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont tous les endomorphismes $\varphi_{(a,b)}$ bijectifs ? Déterminer le noyau de $\varphi_{(a,b)}$. On discutera suivant les valeurs du couple $(a\ ;\ b)$.
   Préciser en particulier le noyau de $\varphi_{(1,0)}$ et donner une base de ce sous-espace.
2. $b$ est supposé non nul dans cette question. Quel est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $V$ pour lesquels il existe un réel $\lambda$ tel que $\varphi_{(0,b)}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ ?
3. On suppose dans cette question $V$ euclidien et la base $B$ orthonormée. Déterminer tous les endomorphismes $\varphi_{(a,b)}$ qui sont des isométries vectorielles et en préciser la nature.

B- On se place maintenant dans l'espace affine $\mathscr{E}$ et on considère toutes les applications affines notées $f_{(a,b)}$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{(a,b)}$ et admettant $O$ pour point invariant.

1. $a$ est un réel donné. Déterminer toutes les droites de $\mathscr{E}$ dont l'mage par $f_{(a,0)}$ n ?est pas une droite.
2. $b$ est un réel non nul. Déterminer toutes les droites de $b$ transformées par $f_{(0,b)}$ en droites parallèles à elles-mêmes.
3. a) Soit l'application $f_{\left(1,-\frac{1}{4}\right)}$. Montrer qu'elle est involutive.

   Soit les points $A$, de coordonnées 2 et $-1$, $B$, de coordonnées $-2$ et 1, $C$ de coordonnées 2 et 1. Déterminer les images de ces trois points par $f_{\left(1,-\frac{1}{4}\right)}$. Préciser alors la nature de $f_{\left(1,-\frac{1}{4}\right)}$.

   b) Soit $H$ l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$. On pose :

   $$g = H \circ f_{\left(1,-\frac{1}{4}\right)}.$$

   On note $C_1$ l'image de $C$ par $g$ , et pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on note $C_n$ l'mage de $C_{n-1}$ par $g$ :

$$C_1 = g(C),\ C_2 = g(C_1),\ C_3 = g(C_2),\ \ldots,\ C_n = g(C_{n-1}).$$

Soit $\alpha_n$ et $\beta_n$ les coordonnées de $C_n$. Calculer $\alpha_n$ et $\beta_n$ en fonction de $n$.

Soit $M$ l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle $ABC$. $M_1$ est l'image de $M$ par $g$ et pour tout $n \geqslant 2$ : $M_n$ est l'image de $M_{n-1}$ par $g$.

Calculer en fonction de $n$ les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $M_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Une figure est vivement conseillée.

C- On suppose maintenant $V$ euclidien et la base $B$ orthonormée. $\mathscr{E}$ est alors un espace métrique orienté par $B$.

1. Déterminer toutes les applications $f_{(a,b)}$ qui sont des isométries affines.
2. Montrer que toutes les applications $f_{(a,b)}$ avec $b^2 = 1$ sont des similitudes, éventuellement réduites à des isométries. Déterminer le centre, le rapport et l'angle de similitude $f_{(-1,1)}$.

# XLVII. Lyon, série E

**Ex. 708.** ——— *./1973/lyonE/exo-1/texte.tex*

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$, avec $z = x + \mathrm{i}y$.

**1.** Déterminer l'ensemble des points $M$, images de $z$, tels que $Z$ soit réel.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$, images de $z$, tels que $Z$ soit imaginaire pur.

**3.** Déterminer l'ensemble des points $M$, images de $z$, tels que l'argument de $Z$ soit égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

**Ex. 709.** ——— *./1973/lyonE/exo-2/texte.tex*

En appliquant deux intégrations par parties, déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x^2+3)\sin 2x.$$

## Problème 201

*./1973/lyonE/pb/texte*

Soit $\mathscr{E}$ le plan vectoriel euclidien où l'on défini une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
On désigne par $\varphi_\alpha$ l'application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\alpha}{2} & \dfrac{1-\cos\alpha}{2} \\ \dfrac{1-\cos\alpha}{2} & \dfrac{1+\cos\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad \alpha \in [0\,;\pi].$$

A- 1. Calculer le déterminant $\Delta_\alpha$ de $M_\alpha$ en fonction de $\alpha$.
Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'application ainsi définie est-elle injective ? Dans le cas contraire, déterminer son noyau.

2. Déterminer la matrice de l'application réciproque lorsqu'elle existe.
3. Déterminer $\alpha$ pour que l'application $\varphi_\alpha\alpha$ soit involutive.

B- Dans le plan affine $P$ associé à $\mathscr{E}$, de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, on note $f$ l'application affine associée à $\varphi_{\frac{\pi}{3}}$, telle que $f(O) = O'$ de coordonnées $(+1\ ;\ -1)$..

1. Déterminer les coordonnées de $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ en fonction de celles de $M(x\ ;\ y)$ lorsque $M' = f(M)$.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
3. Soit $(D)$ un droite d'équation $ax+by+c=0$. Déterminer l'image, notée $(D')$, de $(D)$ par $f$. Préciser son équation.
$(D)$ peut-elle être globalement invariante par $f$ ?
$(D)$ peut-elle être parallèle à $(D')$ ?
4. $M$ étant un points quelconque de $P$, non invariant par $f$, et $M'$ son image par $f$, démontrer que la droite définie par $M$ et $M'$ a un direction fixe.

C- On prend maintenant $\alpha = \pi$. Dans le plan affine $P$ associé à $\mathscr{E}$, de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère alors l'application affine associe à $\varphi_\pi$, notée $g$, telle que $g(O) = O'$ de coordonnées $(+1\ ;\ -1)$.

1. Reconnaître l'application $g$.
2. Trouver l'équation de la transformée $(\mathscr{C}')$ par $g$ de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation
$$y = x + \frac{4}{x-2}.$$
3. Construire les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans le même repère.
4. *Calcul numérique :* Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les conditions
$$4 \leqslant x \leqslant 10 \qquad \text{et} \qquad 3 \leqslant y.$$

## XLVIII. Lyon remplacement, série C

**Ex. 710.** ./1973/lyonCrem/exo-1/texte.tex

Soit le nombre complexe $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $z \neq 1$.

1. Calculer $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.
2. Déterminer $z$ pour que $z^3 + \dfrac{1}{z^3} = 1$.
   En déduire les valeurs correspondantes de $Z$.

**Ex. 711.** ./1973/lyonCrem/exo-2/texte.tex

Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}$, on considère la fonction numérique $f$ définie par
$$f : x \longmapsto x \log\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x$$
(dans laquelle le symbole $\log$ représente le logarithme népérien).

1. Étudier les variations et construire la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé.
2. Déterminer une primitive de $f$.
3. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(u)$ du domaine $(\Delta)$, ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, tels que
$$u \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$
   où $\mathrm{e}$ désigne la base des logarithmes népériens et $u$ un réel tel que
$$0 < u < \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$
   Cette aire $\mathscr{A}(u)$ admet-elle une limite lorsque l'on fait tendre $u$ vers $0^+$ ?

### Problème 202

./1973/lyonCrem/pb/texte

Soit V un plan affine euclidien rapporté à la base orthonormé $b = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère deux endomorphismes $\varphi$ et $\psi$ de V dont les matrices respectives $A$ et $B$ dans la base $b$ sont
$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
$E$ représente un plan affine associé à V.

1. a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme involutif et déterminer la droite vectorielle $\vec{D}$ des vecteurs invariants par $\varphi$.

b) Montrer que la droite vectorielle $\vec{D}$ est globalement invariante par l'endomorphisme $\psi\circ\varphi$.

c) Démontrer que la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ orthogonale à $\vec{D}$ est elle aussi invariante par $\psi\circ\varphi$.

d) Déterminer dans le base $b$ la matrice de $\psi\circ\varphi$. $\psi\circ\varphi$ est-il un automorphisme de V ?

2. Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère cartésien du plan affine $E$ et $h$ l'application affine de $E$ dans $E$ définie par l'endomorphisme $\psi\circ\varphi$ et le couple de points $(O,\ O')$ $O' = h(O)$ étant le point de coordonnées $(-5\ ;\ 14)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   a) Par $h$, un point $M(x\ ;\ y)$ de $E$ a pour image $M' = h(M)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ ; démontrer que

$$x' = 3x + 4y - 5, \qquad y' = 4x - 3y + 14.$$

   Montrer que $h$ est une transformation affine et donner l'expression analytique dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la transformation réciproque $h^{-1}$.

   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $h$.

3. On considère dans le plan complexe la transformation $T$ dans laquelle le point $M$ d'affixe $z$ a pour image $M' = T(M)$ dont l'affixe $z'$ est telle que

$$z' = (3+4\mathrm{i})\overline{z} - 5 + 14\mathrm{i}.$$

   ($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.)
   Reconnaître la nature géométrique de la transformation $T$.
   Déterminer le point invariant de $T$ et les droites invariantes par $T$.
   Montrer que $T$ est la composée, dans un ordre arbitraire, de deux transformations affines simples que l'on peut associer aux endomorphismes $\varphi$ et $\psi$ de la question 1.

4. Soit $M$ un point n'appartenant pas à l'ensemble des droites invariantes par $T$. On note

$$M_1 = T(M)\ ; \quad M_2 = T(M_1) = T\circ T(M)\ ; \dots\ ; M_n = \underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{(n \text{ fois})}(M).$$

   Démontrer que pour tout point $M$ de $E$ vérifiant la condition imposée au début de cette question, les points $M_n$ appartiennent, quel que soit le naturel $n$, à la réunion de deux droites. Déterminer ces droites par leurs équations pour le point $M_0(2\ ;\ 1)$.

# XLIX. Lyon remplacement, série E

Ex. 712. ./1973/lyonErem/exo-1/texte.tex

Étudier le mouvement plan du point $M$ défini dans un repère orthonormé par ses coordonnées en fonction de la date $t$ :

$$\begin{cases} x = a(\cos t - \sin t + 2), \\ y = b(\cos t + \sin t - 1), \end{cases}$$

où $a$ et $b$ sont des constantes positives telles que $a > b$.

**1.** Déterminer la trajectoire du point $M$.

**2.** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$, le vecteur accélération $\Gamma$, et la période du mouvement.

**3.** Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré.

Ex. 713. ./1973/lyonErem/exo-2/texte.tex

On considère les matrices $(2,\ 2)$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** Calculer pour tout réel $\lambda$, le déterminant $A - \lambda I$ : on obtient un polynôme en $\lambda$ de la forme $a\lambda^2 + b\lambda$ ($a$ et $b$ réels à déterminer).

**2.** Calculer la matrice $aA^2 + bA$. En déduire, pour tout entier naturel $n$, les expressions $A^n$ et $(I+A)^n$ en fonction de $A$ et $I$.



Retour page 1

### Problème 203

./1973/lyonErem/pb/texte

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = -2\log|x-2| + x - 2. \end{aligned}$$

A- 1. a) Après avoir précisé l'ensemble de définition de la fonction $f$, calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Étudier le sens de variation de $f$.

c) Montrer que $f(x)$ s'annule pour trois valeurs, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, dont on ne demande pas la valeur exacte, telles que $-1<\alpha<0,\ 0<\beta<1,\ 5<\gamma<6$.

d) Tracer la courbe C représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$.

2. Calculer en fonction de $\beta$ et $\gamma$ l'aire du domaine limité à la courbe représentative de $f$, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x=\beta$ et $x=\gamma$.

B- Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application ponctuelle $S$ qui à tout point $M$ du plan, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, associe le point $M' = S(M)$ d'affixe

$$z' = (1+\mathrm{i})z - 1 - \mathrm{i}.$$

1. Reconnaître cette application ; en préciser le centre, le rapport et l'angle.
2. Donner une construction géométrique simple du point $M'$ à partir du point $M$.
3. On suppose dans cette question que le point $M$ est situé sur la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$$y = -2\log x + x - 2.$$

a) Donner en fonction de l'abscisse $x$ du point $M$ la partie réelle et la partie imaginaire de $z$, puis celles de $z'$.
Vérifier qu'entre les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'$ on a la relation

$$y' = 2\mathrm{e}^{\frac{x'-1}{2}} - x' - 2. \tag{1}$$

b) Soit $(\Gamma')$ l'ensemble décrit par $M'$ lorsque $M$ décrit la courbe $(\Gamma)$.
Construire $(\Gamma')$. Pour cela on utilisera la relation (1) et l'on contrôlera le résultat en utilisant l'application $S$.

*Données numériques :*

$$\mathrm{e} \approx 2{,}718\ ; \quad \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}367\ ; \quad \log 2 \approx 0{,}693\ ; \quad \log 5 \approx 1{,}609\ ; \quad \log 6 \approx 1{,}791\ ;$$

($\log$ : logarithme népérien).

## L. Madagascar, série C

**Ex. 714.**

./1973/madagascarC/exo-1/texte.tex

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathscr{E}_3$ rapporté à la base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère l'endomorphisme $f$, qui à tout vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe $\vec{v}\,'$ tel que

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{6}}{4}y + \dfrac{\sqrt{6}}{4}z \\ y' = \dfrac{\sqrt{6}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{3}{4}z \\ z' = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}x + \dfrac{1}{4}z. \end{cases}$$

**1.** Établir que $f$ est une isométrie.

**2.** Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ est une droite vectorielle $(\Delta)$.

**3.** Déterminer une base orthonormée $(\vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1,\ \vec{k}_1)$ de $\mathscr{E}_3$ telle que $\vec{\jmath}_1 \in (\Delta)$. En déduire la matrice de la restriction de $f$ au plan vectoriel $\Pi$ engendré par $\vec{k}_1$ et $\vec{\imath}_1$, matrice rapportée à la base $(\vec{k}_1,\ \vec{\imath}_1)$, base directe de $\Pi$.
Quel est l'angle de $f$ ?



Retour page 1

**Ex. 715.** ./1973/madagascarC/exo-2/texte.tex

Soit $n$ en nombre entier naturel premier, strictement supérieur à 2. Soit $\dot{a}$ la classe de congruence modulo $n$ de l'entier $a$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes modulo $n$.

**1.** On considère l'équation
$$x^2 = \dot{a}. \tag{E}$$
Montrer que si $\dot{a} = \dot{0}$, l'équation admet une solution, et une seule, et que si $a$ est un carré parfait de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'équation admet deux solutions.

**2.** On suppose que $\dot{a} \neq \dot{0}$. Montrer que $\dot{a}$ possède un inverse $\dot{a}'$ pour la multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On considère l'équation
$$\dot{a}x^2 + \dot{b}x + \dot{c} = \dot{0}. \tag{E'}$$
a) Montrer l'égalité $\dot{2}\dot{p} = \dot{p}\dot{a}'$ définit une classe unique $\dot{p}$.

b) Montrer que (E') admet au moins une solution si, et seulement si,
$$\dot{p}^2 - \dot{a}'\dot{c} \quad \text{est un carré parfait.}$$

**3.** On suppose que $n = 7$ et l'on considère l'équation
$$\dot{5}x^2 + \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0} \tag{E''}$$
a) Quels sont les carrés de $\mathbb{Z}/7GZ$ ?

b) Calculer $\dot{a}'$ et $\dot{p}$, puis $\dot{p}^2 - \dot{a}'\dot{c}$.

c) En déduire les solutions de (E'').

**Ex. 716.** ./1973/madagascarC/exo-3/texte.tex

On se propose de résoudre sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en $z$ :
$$z^4 - 4(\cos a \cos b)z^3 + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b)z + 1 = 0 \tag{1}$$
e

**1.** Montrer que, en posant $z + \dfrac{1}{z} = u$, on peut ramener la résolution de l'équation (1) à celle de deux équations du second degré.

**2.** Résoudre l'équation (1) en donnant, en fonction de $a$ et $b$, la forme trigonométrique de ses racines dans le plan complexe.

**Ex. 717.** ./1973/madagascarC/exo-4/texte.tex

Soit $\mathscr{A} = (\mathscr{E}_3, \mathscr{V}_3)$ un espace affine de dimension 3. Soit $r = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère cartésien de $\mathscr{A}$.
On donne $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{K} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

1. Montrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de $\mathscr{V}_3$.
2. Soit $M$ un point de $\mathscr{E}_3$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans le repère $r$ et de coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ dans le repère $R = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
   L'application $f$ de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{E}_3$ associe à $M$ le point $M'$ dont les coordonnées cartésiennes sont $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ relativement à $r$ et $\left(X'\ ;\ Y'\ ;\ Z'\right)$ relativement à $R$, telles que
   $$x' = \frac{x - 2y - 2z}{3}\ ;\ y' = \frac{-2x + y - 2z}{3},\ ;\ z' = \frac{-2x - 2y + z}{3}.$$
   Calculer $x$, $y$ et $z$ en fonction de $X$, $Y$, $Z$.
3. Calculer $X'$, $Y'$, $Z'$ en fonction de $x'$, $y'$, $z'$.
4. Calculer $X'$, $Y'$, $Z'$ en fonction de $X$, $Y$, $Z$. En déduire la nature de $f$.

Retour page 1

**Ex. 718.** ./1973/madagascarC/exo-5/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1. Discuter suivant les valeurs de $\lambda$ la nature des courbes $(\Gamma)$ d'équation :

$$\lambda x^2 = 2\lambda y - (1+\lambda^2)y^2.$$

2. Quel est l'ensemble des sommets de $(\Gamma)$ lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ ?

**Ex. 719.** ./1973/madagascarC/exo-6/texte.tex

On considère les deux intégrales

$$A = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos 2t \,\mathrm{d}t, \qquad B = \int_0^x \mathrm{e}^t \sin 2t \,\mathrm{d}t.$$

**1.** Á l'aide d'une intégration par parties appliquée à $A$ et à $B$, établir deux relations entre $A$ et $B$. En déduire les expressions de $A$ et de $B$.

**2.** On pose

$$I = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos^2 t \,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^x \mathrm{e}^t \sin^2 t \,\mathrm{d}t.$$

Calculer $(I+J)$ et $(I-J)$. En déduire les expressions de $I$ et de $J$.

**Ex. 720.** ./1973/madagascarC/exo-7/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \log|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

En déduire le signe de $\dfrac{g(x)}{x}$. (On ne demande pas la représentation graphique de $g$.)

2. Étudier les variations de al fonction $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

En déduire que l'équation $x \in \mathbb{R}$ ; $f(x) = m$ admet quel que soit le réel $m$, deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$.

**Ex. 721.** ./1973/madagascarC/exo-8/texte.tex

On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à éléments réels, par $O$ la matrice nulle et $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}$.

Soit $A$ une matrice déterminée de $\mathscr{M}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, telle que $\begin{cases} a+d = -1, \\ ad - bc = -2. \end{cases}$

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires réelles de $I$ et de $A$ :

$$\mathscr{E} = \{\lambda A + \mu I,\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

**1.** D'après le cours, on sait que $\mathscr{M}$ muni de l'addition des matrices et du produit externe d'une matrice par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace de $\mathscr{M}$.

Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$.

**2.** Montrer que $A^2 = -A + 2I$. En déduire que $A^{-1}$ appartient à $\mathscr{E}$.

**3.** Démontrer que le produit de deux matrices de $\mathscr{E}$ est dans $\mathscr{E}$, et que $\mathscr{E}$ est un sous-anneau de $(\mathscr{M}, +, \times)$, où $+$ désigne l'addition des matrices et $\times$ la multiplication des matrices.

# LI. Madagascar, série E

Ex. 722. ./1973/madagascarE/exo-1/texte.tex

1. Intégrer l'équation différentielle (E) suivante

$$y'' + 4y = 0. \tag{E}$$

2. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}$.

Ex. 723. ./1973/madagascarE/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x).$$

Calculer, à $10^{-3}$ près, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, les axes de coordonnées et la droites d'équation $x = x_0 = \dfrac{31\pi}{300}$.

– Si la solution n'apparaît pas de manière évidente, on pourra utilement calculer les quatre premières dérivées de $f$.
La construction de $(\mathscr{C})$ n'est pas demandée.

## Problème 204

./1973/madagascarE/pb/texte

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, soit $m$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
Par l'application $\varphi$, on fait correspondre à $m$ le point $M = \varphi(m)$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ telles que

$$X = \frac{4x}{x^2 + (y+2)^2} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{-4(y+2)}{x^2 + (y+2)^2} - 2.$$

1. a) Pour quel point $I$ du plan, $\varphi$ n'est-elle pas définie ?
   b) Montrer que l'image par $\varphi$ d'un point de $y'Oy$ est un point de $y'Oy$.
2. Montrer que le transformé par $\varphi$ d'une droite passant par $I$ est une droite passant par $I$.
   Préciser les positions relatives de ces deux droites.
3. Vérifier que le transformé par $\varphi$ de l'axe $x'Ox$ est le cercle de centre $\omega$ de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et de rayon 1.

B) Le point $m$ est animé d'un mouvement défini par

$$x(t) = vt, \qquad y(t) = 0,$$

$v$ : constante positive, $t \geqslant 0$.

1. Préciser la trajectoire et la nature du mouvement de $m$.
2. Déterminer la trajectoire de son transformé $M = \varphi(m)$.
3. Calculer à tout instant les composantes de la vitesse de $M$.
4. Calculer le module de cette vitesse et étudier sa limite lorsque $m$ s'éloigne indéfiniment.

# LII. Maroc, série C

Ex. 724. ./1973/marocC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + 2(\mathrm{i} - 1)z^2 - 3\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 1 = 0.$$

(Donner les racines sous la forme $a + \mathrm{i}b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Remarquer une racine évidente.)
Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, montrer que les points ayant pour affixes les racines de cette équation, sont les sommets d'un triangle rectangle.



Retour page 1

Ex. 725. ./1973/marocC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \log x \qquad \text{si } x \geqslant \mathrm{e}^2,$$
$$f(x) = ax + b \qquad \text{si } x < \mathrm{e}^2,$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

1. Déterminer $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose maintenant que $a = \mathrm{e}^{-2}$ et $b = 1$. Étudier la variations de la fonction $f$ et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.
3. Montrer que $f$ admet une bijection réciproque $f^{-1}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout nombre réel $y$, expliciter l'expression de $x = f^{-1}(y)$, en fonction de $y$ (distinguer selon les valuers de $y$).
   Montrer que $f^{-1}$ est dérivable, et donner l'expression de sa dérivée au point $y$, en fonction de $y$.

## Problème 205

./1973/marocC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition :

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x) \qquad \text{pour tout } \ (f,\ g) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$$

et de la multiplication externe par les nombres réels :

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x) \qquad \text{pour tout } (\lambda,\ f) \in \mathbb{R} \times \mathscr{F}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soient $A,\ B,\ C$ les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$A(x) = x\mathrm{e}^x,\ B(x) = \mathrm{e}^x,\ C(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par $A,\ B,\ C$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctions $f$, de la forme $f = aA + bB + cC$, où $a,\ b,\ c$ sont des nombres réels quelconques.

1. Montrer que toute fonction $f$ appartenant à E est dérivable, et que sa dérivée appartient à E.
   Soient $\alpha,\ \beta, \gamma$ des nombres réels. Déterminer les fonctions $f \in$E telles que $f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta,\ f''(0) = \gamma$.
   En déduire que les fonctions $A,\ B,\ C$, sont linéairement indépendantes. Quelle est la dimension de E ?
2. Pour tout nombre réel $\lambda$, soit $f_\lambda$ la fonction :

$$f_\lambda(x) = x\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{-x}.$$

   Étudier,selon les valeurs de $\lambda$, les limites à l'infini de la fonction $f_\lambda$ ainsi que de la fonction

$$x?? \frac{f_\lambda(x)}{x}. \quad \text{(Distinguer } \lambda < 0,\ \lambda = 0, \lambda > 0.)$$

   Étudier les variations de la fonction $f_0$ et tracer sa courbe représentative. Quelles sont les variations de la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}^2}(f_0(2(x+1)))\ ?$$

   En s'aidant de la fonction $g$, étudier les variations de la fonction $f_\lambda$ selon les valeur de $\lambda$. Tracer la courbe représentative de la fonction$f_\lambda$ pour $\lambda = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}^3}$ et pour $\lambda = 1$.
3. Montrer que l'application D de E dans E, définie par D($f$) =$f'$, pour toute $f \in$E, est une application linéaire bijective. Déterminer les coefficients réels $a,\ b,\ c$ de façon que la fonction $f = aA + bB + cC$ ait pour dérivée une fonction donnée $h = rA + sB + tC$, appartenant à E.
4. Montrer que si $ac \neq 0$, la fonction $f = aA + bB + cC$,et les fonctions $f'$ et $f''$, sont linéairement indépendantes. Exprimer dans ce cas $f'''$ comme combinaison linéaire de $f,\ f',\ f''$, et vérifier que la relation ainsi obtenue entre $f,\ f',\ f''$ et $f'''$, reste valable pour toute $f \in$E.



Retour page 1

# LIII. Maroc, série E

**Ex. 726.** ./1973/marocE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall(z,\ z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\qquad \varphi(z,\ z')=z.\overline{z'}+\overline{z}.z',$$

$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de nombre complexe $z$.

1. Montrer que $\varphi(z,\ z')\in\mathbb{R}$, $\forall(z,\ z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
3. On dit que $z$ est orthogonal à $z'$ si $\varphi(z,\ z')=0$ ; $z$ étant imaginaire pur, quel est l'ensemble des $z'$ orthogonaux à $z$ ?

**Ex. 727.** ./1973/marocE/exo-2/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne le plan $\Pi$ défini par les points $A,\ B,\ C$ de coordonnées respectives $(0\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $(3\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\Pi$.
2. Les plans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ étant choisis comme plan horizontal et plan frontal de projection, déterminer l'épure de $\Pi$ par ses traces horizontales et frontales, $(\alpha P,\ \alpha P')$ et $(\alpha Q,\ \alpha Q')$, ainsi que la distance du point $D$ de coordonnées $(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$ au plan $\Pi$.

   L'origine $O$ est au centre de la feuille, la ligne de terre $y'Oy$ est parallèle au petit axe de la feuille ; l'axe $x'Ox$ est perpendiculaire à $y'Oy$ et orienté vers le dessinateur, l'axe $z'Oz$ a le même support que $x'Ox$ et est orienté en s'éloignant du dessinateur. $Ox,\ Oy,\ Oz$ on,t respectivement pour direction $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, l'unité choisie est 2cm.

## Problème 206

./1973/marocE/pb/texte

1. On considère la fonction $f$ définie par

$$x\in\mathbb{R},\qquad x\longmapsto f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}.$$

   a) Déterminer les constantes $a$ et $b$ pour que la courbe représentative de la fonction $f$ contienne les points $A(0\ ;\ 4)$ et $B(1\ ;\ 3\mathrm{e})$.

   b) Étudier les variations de la fonction $f_0$ obtenue ; construire sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (unité 1 cm).

2. On considère à présent la fonction $g$ définie par

$$x\in\mathbb{R},\qquad x\longmapsto g(x)=(x^2+\alpha x+\beta)\mathrm{e}^{x}.$$

   a) Déterminer $\alpha$ et $\beta$ pour que la courbe représentative de $g$ contienne le point $D\left(2\ ;\ \mathrm{e}^2\right)$ et admette en ce point une tangente de direction $\vec{i}$.

   b) Étudier les variations de la fonction $g_0$ ainsi obtenue ; construire sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le repère utilisé au 1. Étudier avec soin les limites ; déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $(C)$ et $(\Gamma)$.

   c) Calculer $g_0'(x)$ et $g_0''(x)$. Montrer que l'on a la relation

$$g_0(x)=2\mathrm{e}^{x}-g_0''(x)+2g_0(x).$$

   En déduire une primitive de $g_0(x)$.

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par $(\Gamma)$, l'axe $(Ox)$, les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$, où $\lambda$ est un réel strictement positif.

   Soit $S(\lambda)$ l'aire de ce domaine. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)$.

4. Déterminer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$. En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f_0$.



Retour page 1

# LIV. Mexico, série C

**Ex. 728.** ./1973/Mexicoc/exo-1/texte.tex

1. Calculer $\int_0^x t^2 e^t \, dt$, où $x$ est un nombre réel et $t$ une variable réelle. (On pourra utiliser deux fois la formule d'intégration par parties .)
2. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^x$. Quelle est la limite de $f$ quand $x$ tend vers $-\infty$. (On pourra poser $x = -2x'$.)
3. Étudier les variations de la fonction $f$.

   Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal où les vecteurs unitaires mesurent 1 cm.

   Calculer l'aire, en centimètres carrés, du domaine plan $\Delta$, défini par

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

**Ex. 729.** ./1973/Mexicoc/exo-2/texte.tex

Démontrer que tout entier naturel $n$ est tel que son carré $n^2$ est congru soit à $0$, soit à 1, soit à 4 modulo 8.

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(5x+3)^2 - 1 \equiv 0$ (modulo 8).

## Problème 207

./1973/Mexicoc/pb/texte

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B} = \{\vec{e_1},\ \vec{e_2}\}$.

A- Soit $f$ une application de E dans E définie par les relations

$$f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \qquad f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + \vec{e_2}.$$

1. Montrer que $f$ est un automorphisme de E (voir la note à la fin de l'énoncé).
2. Existe-t-il des valeurs $\lambda$ telle que le noyau $E_\lambda$ de l'endomorphisme (voir note) $f - \lambda \mathrm{I}$ (i désigne l'application identique de E) ne soit pas réduit à $\left\{\vec{0}\right\}$ ?

   Donner, pour chacune de ces valeurs $\lambda$, une base de $E_\lambda$.
3. Déterminer la matrice de $f^{-1}$.

B- On suppose que E est l'ensemble des fonctions polynômes $t$, de degré inférieur ou égal à 2, définies sur $\mathbb{R}$, et de la forme

$$t(x) = ax^2 + (2a+b)x + b,$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

1. Montrer que l'addition des fonctions et la multiplication par un nombre réel munissent E d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une base particulière étant constituée par les fonctions

$$e_1 : x \longmapsto x^2 + 2x \qquad \text{et} \qquad e_2 : x \longmapsto x + 1.$$

   Déterminer le transformé par $f$ du trinôme $t_0$ défini par $t_0(x) = 2x^2 + 5x + 1$.
2. On considère le sous-espace vectoriel $(\Delta)$ de E défini par $b = 3a$.

   Montrer que $(\Delta)$ est une droite vectorielle de E dont on donnera un vecteur directeur.

   Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

C- E désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B} = \{\vec{e_1},\ \vec{e_2}\}$, on considère un plan affine P associé à E, un point $O$ de P et le repère $(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$.

On définit la transformation affine $T$ de P :

$$M(x\ ;\ y) \overset{T}{\longmapsto} T(M) = M'\left(x'\ ;\ y'\right)$$

par

$$x' = 2x - y + 1 \qquad \text{et} \qquad y' = -3x + y - 2.$$



Retour page 1

a) Déterminer les points invariants de P par $T$.

b) Montrer que l'image $T(D)$ d'une droite $(D)$ est une droite. Existe-t-il des droites $(D)$ parallèles à leurs images $T(D)$ ? Quelles sont-elles ?

c) Déterminer les équations de la transformation $T^{-1}$.

d) On considère la courbe (H), d'équation

$$6x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (H')=$T$(H). Préciser le centre, les asymptotes, les sommets de (H) et de (H'). Construire (H) et (H').

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéaire de cet espace dans lui-même. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

## LV. Mexico, série E

Ex. 730. ./1973/Mexicoe/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 + (1 + 4\mathrm{i})z - (5 + 8\mathrm{i}) = 0.$$

Les solutions seront données sous la forme $a + b\mathrm{i}$ où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

Ex. 731. ./1973/Mexicoe/exo-2/texte.tex

1. Soit $I_1$ une fonction de $x$ d'expression

$$I_1(x) = \int_1^x t \log t \,\mathrm{d}t,$$

où $\log t$ désigne le logarithme népérien de $t$.
Déterminer le domaine de définition de la fonction $I_1$.
Calculer la dérivée de la fonction $f$ telle que

$$f(t) = \frac{t^2}{2}\left(\log t - \frac{1}{2}\right).$$

En déduire l'expression de $I_1(x)$.
Résoudre l'équation

$$I_1(x) = \frac{1}{4}.$$

On exprimera le résultat en fonction de e, base des logarithmes népériens.

2. Soit $n$ un entier positif ou nul, calculer, par une intégration par parties l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x t^n \log t \,\mathrm{d}t.$$

Retrouver ainsi le résultat du 1

### Problème 208 ./1973/Mexicoe/pb/texte

Dans tout le problème, $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien et P le plan vectoriel associé, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée de P, et $\mathscr{P}$ est rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{6x}.$$



Retour page 1

Construire dans $\mathscr{P}$ la courbe (C) d'équation

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{6x}.$$

On précisera les asymptotes de (C).

**2.** Dans P, soit $(D_1)$ la droite vectorielle ayant pour base $\vec{u}$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et la droite vectorielle $(D_2)$ ayant pour base $\vec{\jmath}$.

On appelle $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites affines contenant le point $\omega$ de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et de directions respectives $(D_1)$ et $(D_2)$

Un point $M$ de $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.

On désigne par $m_1$ la projection de $M$ sur $\mathscr{D}_1$ a parallèlement à $\mathscr{D}_2$ et par $m_2$ la projection de $M$ sur $\mathscr{D}_2$ a parallèlement à $\mathscr{D}_1$.

Déterminer en fonction de $x$ et $y$ les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $m_1$ et les coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$ de $m_2$.

Démontrer que l'on a

$$\overrightarrow{\omega m_1}.\overrightarrow{\omega m_2} = \frac{1}{6} \iff M \in \text{(C)}.$$

En déduire une équation de (C) dans le repère $(\omega,\ \vec{u},\ \vec{\jmath})$.

**3.** Soit $\varphi$ l'endomorphisme de P dont la matrice relativement à $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ associée à $\varphi$ et telle que l'image du point $\omega$ soit le point $O$.

Déterminer, en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $M$, les coordonnées $x'$ et $y'$, de $M' = f(M)$, puis $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$.

Montrer que l'image de (C') de (C) pat $f$ a pour équation

$$x^2 - y^2 = 1.$$

**4.** Un point $M$ mobile de P a pour coordonnées, à l'instant $t \geqslant 0$,

$$x = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

où $\mathrm{e}$ désigne la base des logarithmes népériens.

Montrer que $M$ appartient à la courbe (C'). Préciser la partie de (C') qui constitue la trajectoire de $M$.

# LVI. Montpellier & Grenoble, série C

**Ex. 732.** ./1973/montpellierC/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation $x^3 = x$.

**1.** Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

**2.** Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

**Ex. 733.** ./1973/montpellierC/exo-2/texte.tex

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la suite de terme général $z_n$, définie par son premier terme $z_0 = 1$, et la relation de récurrence

$$2z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}.$$

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, non nul, le module $r_n$ de $z_n$ est inférieur à 1.

**2.** On pose $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ (où $x_n$ et $y_n$ sont des nombres réels et $u_n = z_n - \mathrm{i}$.
Trouver uen relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
En déduire que la suite de terme général $x_n$ est une suite géométrique qui converge vers 0 et que les suites de termes généraux $y_n$ et $r_n$ convergent vers 1.

**3.** Calculer le plus petit entier $n_0$ tel que, pour tout $n$ supérieur où égal à $n_0$, on ait $|z_n - \mathrm{i}| < 10^{-6}$.

## Problème 209

./1973/montpellierC/pb/texte

Soit un plan affine euclidien P, rapporté à un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) On considère l'application $T$, de P dans P, qui au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M$ dont les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ sont définies par

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -2x + y. \end{cases}$$

1. Démontrer que $T$ est une application affine bijective et déterminer par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ l'application linéaire (ou endomorphisme) associée.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T$.
3. Quelle est la transformée d'une droite quelconque de P ? Existe-t-il des droites invariantes ? Existe-t-il des droites orthogonales à leur transformées ?
4. Soit $(\gamma)$ le courbe de P d'équation $y = \mathrm{e}^x$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Donner une équation cartésienne de $(\Gamma)$ transformée de $(\gamma)$ par $T$, équation que l'on mettra sous la forme $Y = g(X)$.
   b) Étudier la fonction $g$, représenter $(\gamma)$ et $(\Gamma)$ sur un même graphique.
   c) Soit $m$ un point de $(\gamma)$, $M$ son image pat $T$, calculer l'aire $S$ du domaine compris entre les courbes $(\gamma)$, $(\Gamma)$ et la droite $mM$.
   d) Les tangentes à $(\gamma)$ en $m$ et à $(\Gamma)$ en $M$ se coupent en $J$.
   Calculer l'abscisse de $J$. Comparer $S$ à l'aire du triangle $JmM$.
5. Soit $h$ la courbe de P d'équation $4x^2 - y^2 = 4$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Déterminer la nature de $(h)$ et ses éléments remarquables.
   b) Montrer que $(H)$, transformée de $(h)$ par $T$, a une équation cartésienne qui peut s'écrire $X = u(Y)$.
   Étudier la fonction $u$. Construire $(H)$ et $(h)$ sur un même graphique.

B) A tout réel $k$, on associe l'application $T_k$ de P dans P qui a $m(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M(X\ ;\ Y)$ tel que :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = kx + y. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des transformations $T_k$ quand $k$ décrit $\mathbb{R}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe commutatif.
2. Déterminer l'ensemble A des applications affines $f$ de P vers P telles que, pour tout $k$, on ait
$$f \circ T_k = T_k \circ f.$$
   Soit A' le sous-ensemble de A formé des applications $f$ bijectives, qui laissent $O$ invariant.
   Démontrer que tout élément de A' est le produit d'une application $T_k$ et d'une transformation simple que l'on déterminera, et que $(\mathrm{A}',\ \circ)$ est un groupe commutatif.
3. On donne d'une part une transformation $T_k$, d'autre part, trois réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ de somme non nulle.
   Soit $\varphi$ l'application de P dans P qui associe au point $m$ le barycentre $G$ du système $\{(O,\ \alpha),\ (m\ \beta),\ (T_k(m),\ \gamma)\}$.
   Montrer que $\varphi$ est un élément de A ; est-ce un élément de A' ?

# LVII. Montpellier & Grenoble, série E

**Ex. 734.** ./1973/montpellierE/exo-1/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

1. Calculer $f'$, dérivée de $f$.
2. Montrer que les racines de cette dérivée sont en progression arithmétique et que leurs images sont en progression géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-\pi}$.
3. Calculer, avec la précision permise par le tables de logarithmes à 5 décimales, la raison de cette progression géométrique.

**Ex. 735.** ./1973/montpellierE/exo-2/texte.tex

L'origine $O$ du trièdre orthonormé direct est le centre de la feuille ; $Oy$ est le petit axe de la feuille ; $xOy$ est la plan horizontal de projection ; l'unité de longueur est le centimètre.
Soit $A$ le point de coordonnées $(x=6,\ y=2,\ z=2)$. Soit $\Pi$ le plan qui admet

— pour trace horizontale la droite $(D)$ d'équations : $z=0,\ x=3$,

— pour trace frontale la droite $(\Delta)$ d'équations : $x=0,\ z=4$.

Faire apparaître sur l'épure, en vraie grandeur, la distance $\ell$ du point $A$ au plan $\Pi$.
Dans une brève notice, on expliquera les constructions effectuées et l'on indiquera la mesure en centimètres, de la distance $\ell$, lue sur l'épure.

## Problème 210

./1973/montpellierE/pb/texte

La plan affine euclidien orient, $E_2$, est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne un réel $m$, et les points $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$, $O'(-1\ ;\ 0)$, $A'(1\ ;\ 2)$ et $B'(m\ ;\ 3)$.

**1.** Soit $M$ un point de $E_2$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$. Déterminer, en fonction de $x$ et de $y$, les trois réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$ et tels que le point $M$ soit le barycentre du système de points pondérés $O(\alpha),\ A(\beta),\ B(\gamma)$.
Au point $M$, on associe le point $M'$, barycentre du système formé par les points $O',\ A',\ B'$ affectés des coefficients respectifs $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ calculés précédemment.
Calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$ en fonction de $m$, et des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$.
On trouvera
$$x' = 2x+(m+1)y-1 \qquad \text{et} \qquad y' = x+2y+1.$$
Soit $f_m$ l'application qui, à tout point $M$ du plan, associe le point $M'$ ainsi défini. Montrer que $f_m$ est une application affine et déterminer sont application linéaire associée $F_m$ par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

**2.** Déterminer $m$ pour que $f_m$ ne soit pas bijective ; $m'$ étant le réel ainsi trouvé, montrer que l'ensemble des transformés par $f_{m'}$ de tous les points du plan $E_2$ est une droite $(D)$.
Démontrer que l'ensemble des points $M$ tels que $f_{m'}(M)=O$ est une droite $(\Delta)$.
$M$ se projette sur $(D)$ parallèlement à $(\Delta)$, en $M_1$.
Montrer que $M'$ est l'homologue de $M_1$ dans une homothétie de centre $\omega\left(-\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ dont on déterminera le rapport.
En déduire que $f_{m'}$ peut s'écrire comme application composée de deux applications simples. Ces deux applications commutent-elles ?

**3.** On suppose dans cette question que $m=2$. Montrer qu'il existe un seul point, $\Omega$, invariant par $f_2$.
Construire dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe $(\Gamma)$ d'équation $(x+2)^2-3(y-1)^2-4=0$ et prouver que $(\Gamma)$ est invariante par $f_2$.

**4.** Déterminer $m$ pour que $f_m$ soit une similitude. Le plan $E_2$ étant identifié au plan complexe, on définira cette similitude par une relation de la forme $z'=az+b$, où $z$ et $z'$ sont les affixes respectives d'un point $M$ et de son image $M'$ par $f_m$.
Déterminer le centre, le rapport et une mesure approchée de l'angle de cette similitude.

Retour page 1

# LVIII. Montpellier remplacement, série C

**Ex. 736.** ./1973/montpelliercrem/exo-1/texte.tex

Déterminer, dans le système décimal, le nombre $n$ de trois chiffres, qui s'écrit $\overline{xyz}$ en base sept et $\overline{zyx}$ en base neuf.

**Ex. 737.** ./1973/montpelliercrem/exo-2/texte.tex

Étudier les variations de la fonction $f$ de la variable réelle $x$ telle que

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x^3}$$

et construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère dont l'unité de longueur sera prise égale à 2 cm ($\log x$ représente le logarithme népérien du nombre $x$).
On donne $\mathrm{e} \simeq 2{,}178\ 3$ ; $\log 2 \simeq 0{,}693\ 1$ ; $\log 3 \simeq 1{,}098\ 6$ ; $\log 5 \simeq 1{,}609\ 4$.

## Problème 211

./1973/montpelliercrem/pb/texte

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
P désigne l'ensemble des points de ce plan d'abscisses non nulles.
On considère l'application $f$ de P dans P définie ainsi

$$m_{xy} \longmapsto f(m) = M_{(X\ ;\ Y)}, \qquad \text{avec} \begin{cases} X = \dfrac{1}{x} \\ Y = y, \end{cases}$$

où $(x\ ;\ y)$ sont les coordonnées du point $m$ dans le repère $oij$ et $(X\ ;\ Y)$ sont les coordonnées du point $M$ dans le même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- 1. Montrer que $f$ est une involution de P.

2. Quels sont les points invariants

B- On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$$

et (E) désigne l'ensemble des points de cette ellipse, à l'exception du point $O$, origine du repère.

1. Quelle est l'équation cartésienne de la courbe (C), transformée de (E) par $f$ ?
2. Étudier la fonction

$$X \longmapsto Y = \sqrt{\frac{1}{X} - \frac{1}{4X^2}}$$

et construire sa courbe représentative $(\Gamma_1)$.

3. $(\Gamma_2)$ désignant la courbe symétrique de $(\Gamma_1)$ par rapport à $x'Ox$, montrer que (C)=$(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\Gamma_1)$ et de (E).
On désignera par $K$ celui des ces points qui a pour abscisse +1.

C- $m$ est maintenant un point mobile dont les coordonnées en fonction du temps sont

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 2, & -\pi < t < \pi \\ y = \sin t, \end{cases}$$

$M$ désigne toujours l'image de $m$ par l'application $f$.

1. Quelle est la trajectoire de $m$ quand $t$ décrit $]-\pi\,;\pi[$ ?
2. Les points $m$ et $M$ se rencontrent-ils à une date $t_0$ avec $0 < t_0 < \pi$ ?
Quelle est leur position à cette date ?
Quels sont les vecteurs vitesses de $m$ et $M$ à cette date et quelle particularité ces vecteurs présentent-ils ?



Retour page 1

# LIX. Montpellier remplacement, série E

**Ex. 738.** ./1973/montpellierErem/exo-1/texte.tex

Soit $(\mathscr{C})$ la conique ayant pour équation, dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan :

$$4x^2-9y^2+16x+18y-29=0.$$

**1.** Montrer que $(\mathscr{C})$ est une hyperbole. Déterminer son centre $\Omega$, ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement $(\mathscr{C})$ en prenant comme unité de longueur le centimètre.

**2.** Soit les vecteurs $\vec{I}=3\vec{\imath}+2_vecteur j$ et $\vec{J}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$. Donner l'équation de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$.

**Ex. 739.** ./1973/montpellierErem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ d'une variable réelle

$$x\longmapsto f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\cos x}}.$$

**1.** Montrer que des considérations de parité et de périodicité permettent de se limiter à l'étude de la restriction $F$ de $f$ à l'intervalle $[0\,;\pi]$. Étudier les variations de $F$.

Trouver la limite, quand $h$ tend vers $0$ par valeurs positives, de $m=\frac{1}{h}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ; pour cela il sera utile de calculer $\log m$.

**2.** Construire la courbe $(\Gamma)$ représentative de $F$ dans un repère orthonormé. Admet-elle une tangente au point $A\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ ?

## Problème 212

./1973/montpellierErem/pb/texte

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- 1° Montrer que la symétrie orthogonale $s$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x-2y+1=0$ fait correspondre au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point $M_1$ de coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{5}(3x+4y-2)\\[2ex] y_1=\dfrac{1}{5}(4x-3y+4).\end{cases}$$

2° Soit $h$ l'homothétie ayant pour centre le point $I$ de coordonnées $(-1\ ;\ 2)$ et pour rapport $-5$. On désigne par $f$ l'application $h\circ s$.

Exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'=f(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$.

En déduire que les nombres complexes $z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$ vérifient la relation

$$z'=(-3-4\mathrm{i})\overline{z}-4+8\mathrm{i}$$

($\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$.)

3° Indiquer la nature géométrique de l'application $f$. Déterminer son point invariant $I_0$.

B- Déterminer

a) l'ensemble des points $M$ pour lesquels le nombre complexe $z'$ a pour module 1 ;

b) l'ensemble des points $M$ pour lesquels l'argument de $z'$ admet pour détermination $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$.



Retour page 1

# LX. Montréal & New York, série C

**Ex. 740.** ./1973/montrealnewyorkc/exo-1/texte.tex

Le repoère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2$ cm.
Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$x \longmapsto \frac{x^4+5x^2-6}{x^2}.$$

Calculer, en centimètres carrés, l'aire de la partie du plan constitué des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que

$$x \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \geqslant y \geqslant f(x),$$

ou

$$x \leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

**Ex. 741.** ./1973/montrealnewyorkc/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $X_1$ une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ p)$.
La loi de probabilité de $X_1$ est donnée explicitement par

$$p(\{X_1=1\}) = p\ ;\ p(\{X_1=-1\}) = q\ ;\ p(\{X_1=0\}) = 1-p-q.$$

Soit deux variables aléatoires $X_2$ et $X_3$ réelles, définies sur le même espace probabilisé que $X_1$, de même loi de probabilité que $X_1$.
On suppose que les trois variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes.
On désigne par $S$ la variable aléatoire

$$S = X_1+X_2+X_3.$$

a) Quelle est l'espérance mathématique de $S$ ; la variance de $S$ ?
Démontrer que $S$ prend les valeurs $\{-3,\ -2,\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.
Quelle est la loi de probabilité de $S$ ?

b) Calculer $p(\{S>0\})$ ; $p(\{S=0\})$ et $p(\{S<0\})$.

**2.** Deux joueurs A et B jouent trois parties successives d'un même jeu ; à chaque partie le joueur A a une probabilité 0,5 de gagner. Le joueur B a une probabilité 0,4 de gagner ; il y a une probabilité 0,1 pour qu'il y ait match nul. Le vainqueur est celui qui a gagné le plus de parties.
Calculer le sprobabilités des événements suivants : A est vainqueur ; B est vainqueur ; il n'y a pas de vainqueur.

## Problème 213

./1973/montrealnewyorkc/pb/texte

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Étant donné deux nombres réels $a$ et $b$, on désigne par $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}.$$

A- 1. a) Démontrer que $\varphi$ est bijectif si, et seulement si,

$$(a-2b)(a+3b) \neq 0.$$

b) Discuter, suivant les valeurs de $a$ et $b$, la nature du noyau de $\varphi$ et de l'image de $\varphi$.
Donner dans chaque cas une base du noyau de $\varphi$ et de l'image de $\varphi$.

c) Dans quels cas $\varphi$ est-il une homothétie vectorielle de $\mathscr{V}$ ?

2. Étant donné un nombre réel $k$, démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des vecteurs $\vec{u}$ distincts du vecteur nul tels que

$$\varphi(\vec{u}) = k\vec{u} \tag{1}$$

est que $k$ soit solution de l'équation du second degré en $k$

$$k^2 - (2a+b)k + a^2 + ab - 6b^2 = 0. \tag{2}$$

Préciser pour chaque solution de (2) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ solution de (1).
Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ telle que

$$\vec{I} = 2\vec{i} + \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = -\vec{i} + \vec{j}\ ?$$

3. Pour quels couples de réels $(a, b)$ $\varphi$ est-il une projection orthogonale ? Préciser dans chaque cas les éléments de cette projection orthogonale.
Éxiste-t-il des couples $(a, b)$ tels que $\varphi$ soit une rotation vectorielle ?
4. Déterminer les deux couples de réels $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ pour lesquels $\varphi$ est une symétrie orthogonale. On désignera par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les deux symétries orthogonales obtenues. Quelles sont les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ invariantes par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ respectivement ?
Déterminer $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

B- Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et associé à $\mathscr{V}$.
On désigne par $f$ l'application de E dans E qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$x' = 2x - 2y + 2 \qquad \text{et} \qquad y' = -2x + 5y + 1.$$

1. Démontrer que $f$ est une application affine bijective. Déterminer $a$ et $b$ pour que $\varphi$ soit l'endomorphisme associé à $f$. Définir $f^{-1}$ analytiquement.
2. Démontrer que $f$ n'a pas de points invariants. Démontrer qu'il existe une seule droite affine globalement invariante par $f$. Quelles sont les droites affines parallèles à leurs images par $f$ ?
3. Soit $A$ le point de E de coordonnées $(-3\ ;\ +1)$, $B$ le point de E de coordonnées $(-2\ ;\ -1)$.
Déterminer l'équation de cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $AB$. Soit $(\Gamma)$ l'image de $\mathscr{C}$ par $f$. Démontrer que $(\Gamma)$ est l'ensemble des points de E de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que

$$29x^2 + 8y^2 + 28xy + 6x - 12 = 0.$$

# LXI. Montréal & New York remplacement, série C

**Ex. 742.** ./1973/montrealnewyorkCrem/exo-1/texte.tex

1. Soit $n$ un nombre entier naturel. Déterminer suivant $n$, le reste de la division par 7 de $3^n$.
2. Quel est le chiffre $x$ des unités du nombre $\overline{651x}$ pour que le nombre $(506\ 390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7 ?

**Ex. 743.** ./1973/montrealnewyorkCrem/exo-2/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1, on considère la fonction numérique $f_n$ de la variable réelle $x$ définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x.$$

1. Démontrer la limite de $f_1(x)$ quand $x$ tend vers $-\infty$ est nulle.
On admettra que la limite de $f_n(x)$ qaudn $x$ tend vers $-\infty$ est nulle pour tout autre valeur de $n$.
Étudier le sens de variation de la fonction $f_n$ suivant les valeurs de l'entier naturel $n$.
2. Le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant orthonormé, tracer les courbes représentatives $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de $f_1$ et $f_2$.
3. Calculer $I(X) = \displaystyle\int_0^X f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
$I(X)$ a-t-il une limite quand $X$ tend vers $-\infty$.



Retour page 1

### PROBLÈME 214

./1973/montrealnewyorkCrem/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel rapporté à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Étant donné un réel $a$, on désigne par $\varphi_a$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a-2a & \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer $a$ tel que $\varphi_a$ ne soit pas bijectif. Quel est dans ce cas l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels qu'il existe un nombre réel $k$ tel que

$$\varphi_a(\vec{u}) = k\vec{u}\ ?$$

On trouvera que cet ensemble est la réunion de deux droites vectorielles $(D_1)$ et $(D_2)$, $(D_1)$ désignant celle qui est engendrée par la vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

b) On désigne par $p$ la projection vectorielle de $\mathscr{P}$ sur $(D_1)$ de direction $(D_2)$.
Définir $p$ et $\varphi_4$ analytiquement, en déduire l'existence d'une homothétie $h$ telle que

$$\varphi_4 = h \circ p.$$

Existe-t-il d'autres endomorphismes $g$ tels que $\varphi_4 = g \circ p$?

2. Soit P le plan affine associé à $\mathscr{P}$ et rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; soit $f_a$ l'application affine d'endomorphisme $\varphi_a$ et tel que l'image du point $O$ soit le point $O'$ de coordonnées $(1\ ;\ 3)$.

a) Définir analytiquement $f_a$.

b) Dans le cas où $\varphi_a$ n'est pas bijective, démontrer que l'image de P est une droite $(\Delta_1)$ et que l'ensemble des points $M$ de P tel que $f_a(M) = O'$ est une droite $(\Delta_2)$ que l'on précisera.

c) Soit $M'$ l'image d'un point $M$ par l'application $f_4$. Soit $M_1$ la projection de $M$ sur $(\Delta_1)$ parallèlement à $(\Delta_2)$.
Démontrer que $M'$ est l'image de $M_1$ par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

dans cette question on suppose de plus que $\mathscr{P}$ est un plan vectoriel euclidien et que la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est orthonormée.

3. a) Déterminer $a$ pour que l'endomorphisme $\varphi_a$ soit une similitude vectorielle directe.
Donner le rapport et l'angle de cette similitude.

b) Soit $f_a$ la similitude affine associée à cet endomorphisme. Donner la définition analytique de $f_a$. Quel est le centre $\omega$ de $f_a$ ? Quelles sont les images par $f_a$ des droites $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ définies au 2b ?

## LXII. Nancy-Metz, série C

**Ex. 744.**

./1973/nancyC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $]-1\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -x + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

**1.** Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\,;+1[$ par

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + (1+x)\log(1+x) - (1-x)\log(1-x).$$

Calculer $g'(x)$ pour $x$ appartenant à $]-1\,;+1[$.

**3.** Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$



Retour page 1

**Ex. 745.** ./1973/nancyC/exo-2/texte.tex

Calculer le nombre complexe $(3-2\mathrm{i})^4$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à l'inconnue $z$

$$z^4 = 4(119+120\mathbf{i})$$

et représenter les images solutions.

## Problème 215

./1973/nancyC/pb/texte

L'espace vectoriel $\mathscr{V}_3$, euclidien, orienté, de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, est muni de la base orthonormé directe $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
L'espace affine euclidien $E_3$ est muni du repère $R = (O,\ \mathscr{B})$ et orienté par $\mathscr{B}$.
On donne les vecteurs

$$\vec{I} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}),\quad \vec{J} = \frac{1}{3}(-i+2\vec{\jmath}+2\vec{k}),\quad \vec{K} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}).$$

A) 1° Vérifier que $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$ est une base orthonormée.

2° Quelles sont, dans la base $\mathscr{B}$, les formules analytiques de l'endomorphisme $\rho$ qui transforme $\mathscr{B}$ en $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$?

3° Montrer que $\rho$ est une rotation dont l'axe est engendré par la vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$. Soit $P$ le plan orthogonal au vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$ ; calculer la mesure de la restriction de $\rho$ à $P$. (on pourra calculer $\rho(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$.)

B) On donne l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathscr{V}_3$ défini dans la base $\mathscr{B}$ par les formules suivantes :

$$x' = 6y+3z,\quad y' = x-2y-2z,\quad z' = 2x+8y+2z.$$

On appelle $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{U}_1$ les noyau et image de $\varphi$, $\mathscr{N}_2$ et $\mathscr{U}_2$ les noyau et image de $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi$.

1° Trouver en fonction de $\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K}$,

a) une base de $\mathscr{N}_1$,

b) une base de $\mathscr{U}_1$, après avoir calculer les composantes des vecteurs $\varphi(\vec{I}),\ \varphi(\vec{J}),\ \varphi(\vec{K})$ dans la base orthonormée $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$. Vérifier que $\mathscr{N}_1$ est contenu dans $\mathscr{U}_1$.

2° Déterminer $\mathscr{N}_2$ et $\mathscr{U}_2$ et les comparer à $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{U}_1$.
En déduire que $\varphi^3 = \omega$, où $\omega$ est l'endomorphisme nul.

C) Soit $f$ une application affine de $E_3$ qui admet $O$ comme point invariant, et $\varphi$ comme endomorphisme associé.
Soit $R$ le plan affine passant par $O$ et de direction le plan vectoriel engendré par $\vec{I}$ et $\vec{J}$. Soit $Q$ le plan affine passant par $O$ et de direction le plan vectoriel $\mathscr{U}_1$.

1° Montrer que la restriction $h$ de $f$ à $R$ est une bijection de $R$ sur $Q$. Soit $M$ un point de $R$, trouver les coordonnées dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$ du point $h(M)$, en fonction de celles de $M$.

2° On donne dans le plan $(R)$ la parabole $(\Gamma)$ de sommet $O$ et de foyer $F$ tel que $\overrightarrow{OF} = \vec{J}$.
Montrer que la transformée de $(\Gamma)$ par $h$ est une parabole $(\Gamma')$ du plan $(Q)$ dont on déterminera le sommet, le foyer et le paramètre.

3° Soit $(\gamma)$ la parabole représentée dans le repère $(O,\ \mathscr{B})$ par les équations

$$x^2 = 4y \qquad \text{et} \qquad z = 0.$$

Soit $r$ la rotation de $E_3$ laissant $O$ invariant et dont l'endomorphisme associé est $\rho$. Quelle est l'image de $(\gamma)$ par l'application affine $f\circ r$?



Retour page 1

# LXIII. Nancy-Metz, série E

**Ex. 746.** ./1973/nancyE/exo-1/texte.tex

Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on associe à tout point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, son affixe $z=x+\mathrm{i}y$.
On considère l'application $f$ de E dans lui-même qui au point $M$ associe le point $M'=f(M)$ ayant pour affixe

$$z'=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})z22\sqrt{3}, \qquad \text{avec } \mathrm{i}^2=-1.$$

Déterminer la nature de l'application $f$ et préciser ses éléments caractéristiques. Construire l'image par $f$ du cercle de centre $O$ et de rayon 1.

**Ex. 747.** ./1973/nancyE/exo-2/texte.tex

1. Étudier la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=x+1+\log\frac{x+2}{x+1},$$

le symbole $\log$ désignant la logarithme népérien.
Tracer le graphe de $g$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. Soit $a$ un nombre réel strictement positif fixé, déterminer les constantes $A$ et $B$ telles que pour tout $x$ différent de $-a$, on ait

$$\frac{x}{x+a}=A+\frac{B}{x+a},$$

puis, par une intégration par partie, calculer

$$I=\int_0^2 \log(x+a)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire S fu domaine déterminé par l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant les inégalités

$$0\leqslant x\leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad 0\leqslant y\leqslant g(x).$$

Donner une valuer approchée de S au millimètre carré près, par défaut.

## Problème 216

./1973/nancyE/pb/texte

1. Soit E l'ensemble des matrices $2\times 2$ à termes réels, de la forme $B=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ avec

$$ad-bc=1 \qquad \text{et} \qquad a+d=-1.$$

Soit $I$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Montrer que toute matrice $B$ de E vérifie

$$B^2=-B-I.$$

En déduire que $B^3=I$.

2. Soit $\mathscr{P}$ la plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit P le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$. On considère l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ avec

$$x'=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}y \qquad \text{et} \qquad y'=-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}.$$

a) Déterminer la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de l'application linéaire $\varphi$ associée à $f$ ; vérifier que cette matrice appartient à E.
Qu'en déduit-on pour $\varphi\circ\varphi\circ\varphi$?

b) Soit $M'=f(M)$ et $M''=f(M')$ ; montrer que $f(M'')=M$.



Retour page 1

c) Déterminer l'ensemble des vecteur invariants de P par $\varphi$.
Évaluer $\varphi(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM''})$. En déduire que $O$ est le barycentre de $M$, $M'$, $M''$, affectés du même coefficient non nul.

d) Soit $A(-3\ ;\ 1)$, $A' = f(A)$ et $A'' = f(A')$ ; déterminer l'ensemble $(C)$ des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que $A$, $M$, $M'$ soient alignés. Identifier cette courbe.

3. Soit $g$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ avec

$$x_1 = -x \qquad \text{et} \qquad y_1 = y.$$

a) Déterminer l'application $h = g \circ f$, composée des applications $f$ et $g$.

b) Soit $\psi$ l'application linéaire associée à $h$. Vérifier que $\psi$ est involutive.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_1$ des vecteurs de P invariants par $\psi$.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des vecteurs $\overrightarrow{V}$ de P tels que $\psi(\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V})$.
Démontrer que $\mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$ =P , c'est-à-dire que la somme directe de $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2$ est P.

c) Le plan vectoriel P est maintenant rapporté à la base $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ ;

$$\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}.$$

Le plan affine $\mathscr{P}$ est rapporté au repère $(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
Déterminer la matrice de l'application linéaire $\psi$ dans la base $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$. Identifier l'application $h$.

d) En déduire que $f$ est la composée de deux applications simples.
Construire le transformé $M'$ d'un point $M$ par $f$.

# LXIV. Nantes, série C

**Ex. 748.** ./1973/nantesC/exo-1/texte.tex

Au nombre complexe $z$, on associe le nombre

$$Z = z^2 - (9-2\mathrm{i})z + 26.$$

**1.** Déterminer un nombre complexe $u$ vérifiant $u = 3+4\mathrm{i}$ (on pourra poser $u = a+\mathrm{i}b$, où $a$ et $b$ sont réels).

**2.** Résoudre l'équation

$$z^2 - (9-2\mathrm{i})z + 26 = 0.$$

**3.** $M$ désigne l'image de $z$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Quelle est l'équation $(\gamma_1)$ des points $M$ tels que $Z$ soit réel ? (On posera $z = x+\mathrm{i}y$.)

**4.** Quelle est l'équation $(\gamma_2)$ des points $M$ tels que $Z$ soit nul ou imaginaire pur ?

**5.** Reconnaître ces deux ensembles et préciser les coordonnées des points d'intersection.
Dessiner les ensembles $(\gamma_1)$ et $(\gamma_2)$.

**Ex. 749.** ./1973/nantesC/exo-2/texte.tex

On considère une fonction numérique $f$ continue sur $[0\,;1]$ et satisfaisant, pour tout $x$ de $[0\,;1]$, à

$$f(x) \in [0\,;1].$$

Soit alors $\varphi$ la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

**1.** En appliquant à $\varphi$ le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'il existe $a$ de $[0\,;1]$ tel que

$$f(a) = a.$$

**2.** On suppose de plus que $f$ est dérivable sur $]0\,;1[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout $x$ de $]0\,;1[$, la condition

$$f'(x) < 1.$$

Démontrer alors que $a$ est unique.
Construire un exemple et un contre-exemple simples.

Retour page 1

## 🏛 Problème 217

./1973/nantesC/pb/texte

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de E et $(\Delta)$ la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$.

Soit $(\Pi)$ le plan vectoriel orthogonal à $(\Delta)$.

**1.** On appelle $p$ et $q$ les endomorphismes de E qui, à tout vecteur $\vec{w}$ de E, associent respectivement sa projection orthogonale sur $(\Delta)$ et sa projection orthogonale sur $(\Pi)$.

Démontrer que l'on a

$$p(\vec{w}) = (\vec{w}.\vec{u})\vec{u}.$$

On particularise $\vec{u}$ en choisissant

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})\ ;$$

s'assurer que $\vec{u}_0$ est unitaire ; indiquer, dans la base $\mathscr{B}$, les coordonnées de $\vec{u}_0$, puis les coordonnées de $p(\vec{w})$ en fonction des coordonnées de $\vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ; en déduire dans la même base, les coordonnées de $q(\vec{w})$.

**2.** Soit $s$ l'application de E dans E qui, à tout vecteur $\vec{w}$ de E, associe le produit vectoriel

$$s(\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

Démontrer que $s$ est un endomorphisme de E.

Dans le cas où $\vec{u}$ est $\vec{u}_0$, indiquer dans la base $\mathscr{B}$, les coordonnées de $s(\vec{w})$ en fonction de celles de $\vec{w}$.

**3.** Démontrer que $(s \circ q)(\vec{w}) = s(\vec{w})$.

Comparer les normes de $s(\vec{w})$ et de $q(\vec{w})$.

Démontrer que $s(\vec{w})$ appartient à $(\Pi)$ et indiquer les angles des vecteurs $q(\vec{w})$ et $s(\vec{w})$.

Démontrer que $(s \circ s)(\vec{w}) = -q(\vec{w})$.

**4.** Soit $r$ la rotation vectorielle d'axe $(\Delta)$ dont une mesure de l'angle relative à $\vec{u}$ est $\alpha$ ; démontrer, pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, que l'on a

$$\begin{cases} r(\vec{w}) = p(\vec{w}) + (r \circ q)(\vec{w}), \\ (r \circ q)(\vec{w}) = \cos\alpha q(\vec{w}) + \sin\alpha s(\vec{w}). \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $\vec{u}$ est $\vec{u}_0$, indiquer les coordonnées de $r(\vec{w})$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de $\alpha$ et des coordonnées de $\vec{w}$.

On particularise $r$ en choisissant $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ : quelle est, avec $\vec{u} = \vec{u}_0$, la transformée de $\mathscr{B}$ par $r$ ?

**5.** Déterminer une base orthonormée directe,

$$\mathscr{B}' = (\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{u}_0),$$

telle que $\vec{v}_1$ appartienne au plan vectoriel dont une base est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et que $\vec{\imath}.\vec{v}_1$ soit positif ; on indiquera les coordonnées de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans la base $\mathscr{B}$.

**6.** Quelle est la nature de l'endomorphisme $t$ de E transformant $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$ ? (On ne demande pas de préciser les éléments de $t$.)

Soit $t^{-1}$ l'endomorphisme réciproque de $t$ ; calculer

$$(t^{-1} \circ r \circ t)(\vec{k}) \qquad \text{et} \qquad (t^{-1} \circ r \circ t)(\vec{\imath}).$$

Quelle est la nature de $t^{-1} \circ r \circ t$ ?



Retour page 1

# LXV. Nantes remplacement, série C

**Ex. 750.** ./1973/nantesCrem/exo-1/texte.tex

On considère l'ensemble E des couples $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant la relation

$$13x - 7y = 1.$$

1. Trouver un élément $(a\ ;\ b)$ de E tel que $a$ soit compris entre 0 et 7.
2. Décrire l'ensemble
$$\mathrm{E}' = \{(x-a\ ;\ y-b)\,|\,(x\ ;\ y) \in \mathrm{E}\}.$$
3. Décrire E.
4. Décrire l'ensemble
$$\mathrm{F} = \left\{(x\ ;\ y)\,|\,(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \text{et} \qquad 13x - 7y = 2\right\}.$$

**Ex. 751.** ./1973/nantesCrem/exo-2/texte.tex

On considère l'application $f$ de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout $x$ de $[0\,;\pi]$ associe

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x.$$

1. Étudier les variations de $f$ et construire la courbe représentative de son graphe dans un plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$, $x = \pi$.

**PROBLÈME 218** ./1973/nantesCrem/pb/texte

$\mathscr{P}$ est un plane euclidien sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
$(a,\ b)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$. A ce couple de réels, on associe l'application linéaire $F$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, par

$$\begin{cases} F(\vec{i}) = \left(b + \dfrac{a}{2}\right)\vec{i} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\vec{j}, \\ F(\vec{j}) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\vec{i}\left(b - \dfrac{a}{2}\right)\vec{j}. \end{cases}$$

Au besoin, on précisera $F$ en notant $F_{(a,\ b)}$.

A- 1. On choisit $(a,\ b) = (-1,\ 2)$ et l'application $F_{(-1,\ 2)}$ sera notée simplement $G$.
démontrer que $G$ est bijective.
Rechercher l'ensemble $(\Delta)$ des vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par $G$.
Quel est le transformé par $G$ de la droite $(\Delta')$ contenant le vecteur $\vec{i} - \vec{j}\sqrt{3}$ ?
Quel est l'ensemble transformé de la droite vectorielle $(\Delta')$ ?
Définir géométriquement $G$.

2. Quel doit être le couple $(a,\ b)$ pour que $F_{(a,\ b)}$ ne soit pas bijective ? Dans ce cas $F_{(a,\ b)}$ est notée simplement $H$.
Déterminer le noyau de $H$, noté $\ker H$.
Déterminer l'image de $H$, notée Im$H$.
$\ker H$ et Im$H$ sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{P}$ ? orthogonaux de $\mathscr{P}$ ?
Dans le cas particulier où $a$ et $b$ sont égaux à $\dfrac{1}{2}$, $H$ est noté $H_0$ : démontrer que $H_0$ est la projection de $\mathscr{P}$ sur Im$H_0$ suivant $\ker H_0$.

3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $F_{(a,\ b)}$ soit bijective (automorphisme de $\mathscr{P}$) ?
Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_{(a,\ b)}$ soit un automorphisme involutif de $\mathscr{P}$ ; dans ces cas, $F_{(a,\ b)}$ est noté simplement $J$.
Déterminer, dans chacun de ces cas, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{P}$ pour lesquels on obtient
$$J(\vec{u}) = \vec{u} \qquad \text{et} \qquad J(\vec{v}) = -\vec{v}.$$

4. Déterminer les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $F_{(a,\ b)}$ est une isométrie.
   Préciser les différentes transformations $F$ ainsi obtenues.

B- P est un plan affine euclidien associé à $\mathscr{P}$ et rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle $I$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 2)$ dans ce repère.
   Une droite $d$ de P est définie par l'un de ses points, $A$, et un de ses vecteurs directeurs, $\vec{u}$ :

$$\overrightarrow{OA} = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath}, \qquad \vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} \qquad (\text{avec } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

   On note $f$, au besoin $f_{(a,\ b)}$, l'application affine de P vers P associée à l'application linéaire $F_{(a,\ b)}$ de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ et vérifiant $f(I) = I$.

1. On choisit $(a,\ b) = (-1,\ 2)$ et l'application $f_{(-1;\ 2)}$ est notée simplement $g$.
   Démontrer que $g(d)$ est une droite de P; déterminer le coefficient directeur de cette droite, ainsi que son équation cartésienne dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Déterminer l'ensemble $\delta$ des points de P invariants par $g$.
   Rechercher l'ensemble des droites $d$ de P invariantes par $g$.
   Démontrer que pour tout point $M$ de P (dont la projection orthogonale sur $\delta$ sera notée $Q$), est vérifiée la relation
$$G(\overrightarrow{QM}) = 3\overrightarrow{QM}.$$
2. a) Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la transformée d'une droite quelconque de P est une droite de P.
   b) Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la transformée d'une droite quelconque de P est réduite à un point unique.
   c) Dans les cas différents des deux précédents, rechercher celles des droites de P qui se transforment en une droite de P.
   d) Déterminer, dans les cas où c'est possible, les droites de P telles que $d$ et $f(d)$ soient deux droites parallèles.

## LXVI. Nantes remplacement, série E

**Ex. 752.** ./1973/nantesErem/exo-1/texte.tex

L'espace affine de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les coordonnées $x,\ y,\ z$ d'un mobile $M$ sont données en fonction du temps $t$ par

$$x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad y = \mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^t + 4, \qquad z = \mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^t + 5.$$

Le mouvement est étudié à partir du temps $t = 0$ donc ($t \geqslant 0$).

1. Déterminer les équations cartésiennes des projections de la trajectoire sur $xOy$ et $yOz$.
   Faire l'épure de cette trajectoire : on prendra $xOy$ comme plan horizontal, $yOz$ comme plan frontal; l'unité sera représenté par 1 cm.
   Démontrer que cette trajectoire est situé dans un plan de bout.
2. A quelle date $t_1$ le vecteur vitesse est-il orthogonal au plan $yOz$ ? Quels sont à cette date la position $A$ de $M$ et son vecteur vitesse ?
3. A la date $t_2 = 2\log 2$, $M$ occupe une position notée $B$. Quelles sont les coordonnées de $B$ ? Placer $A$ et $B$ sur l'épure. Effectuer une rotation du plan de la trajectoire pour obtenir la distance $AB$ en vraie grandeur. Mesurer $AB$ et comparer avec le résultat obtenu par le calcul.

**Ex. 753.** ./1973/nantesErem/exo-2/texte.tex

1. Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que $z^3$ soit un nombre réel de l'intervalle $[-1\,;8]$.
2. Représenter dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points $M$ images des complexes obtenus à la question précédente.

Retour page 1

### 🏛Problème 219
./1973/nantesErem/pb/texte

Dans le plan affine P, associé au plan vectoriel $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application affine $S$, qui à tout point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'\ (x'\ ;\ y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1, \\ y' = 2x + 2y + 2. \end{cases}$$

1. Quelle est dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$, la matrice $A$ de l'application linéaire $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, associée à $S$ ?
   Démontrer qu'il existe un réel positif $k$ et la matrice $B$ d'une isométrie positive vérifiant
   $$A = kB.$$
   En déduire la nature de $S$.
2. Dans cette question, on définira les éléments géométriques caractérisant $S$. Pour cela
   a) démontrer qu'il existe un seul point invariant par $S$ (on appellera $\omega$ ce point) ;
   b) démontrer que $\left\|\overrightarrow{\omega M'}\right\| = k\overrightarrow{\omega M}$ ;
   c) déterminer la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M'}}\right)$.
3. Soit $(D)$ la droite affine issue de $A(0\ ;\ 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.
   Déterminer une équation de $(D')$, image de $(D)$ par $S$.
4. Á chaque point $M$ de P, on associe de façon bijective le nombre complexe $z$ qui a pour affixe
   $$z = x + \mathrm{i}y.$$
   Si $z'$ est l'affixe de $M'$, image de $M$ par $S$, démontrer qu'il existe deux nombres complexes $a$ et $b$ vérifiant
   $$z' = az + b.$$
   Retrouver alors les résultats du 2.
5. On considère la symétrie orthogonale, $T$, par rapport à la droite d'équation $y = 2$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   Calculer les coordonnées du point $M_1 = T(M)$ en fonction des coordonnées du point $M$.
6. Soit la transformation ponctuelle $S \circ T$.
   a) Calculer les coordonnées du point $M_2$ transformé du point $M$ par $S \circ T$, en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point $M$.
   b) Quelle est la nature de $S \circ T$ ?
   Préciser ses éléments géométriques (on pourra utiliser la bijection entre P et la corps des complexes, comme à la question 4).

## LXVII. Nice, série C

**Ex. 754.** ./1973/niceC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x \log \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** $f$ est-elle continue au point $x = 0$ ?

**2.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
Donner une équation de la tangente au point $A$ d'abscisse 1.

**3.** A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $f$. En déduire l'aire du domaine défini par

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

**Ex. 755.** ./1973/niceC/exo-2/texte.tex

Une urne contient sept boules rouges et trois boules blanches.

**1.** Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ; une boule rouge ?

**2.** Une épreuve consiste à tirer successivement quatre boules avec remise dans l'urne après chaque tirage.
On considère la variable aléatoire (ou aléa-numérique) $X$ qui associe à toute épreuve le nombre de boules blanches tirées. Quel est l'ensemble des valeurs prises par $X$ ?
Étudier la fonction de répartition de $X$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de $X$.

N.B.– On suppose que la probabilité de tirer une boule est la même pour chaque boule.

### Problème 220

./1973/niceC/pb/texte

A- Dans le plan affine $\mathscr{E}_2$ rapporté a? un repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points $A(2\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$, $O'(1\ ;\ -2)$, $A'(1\ ;\ a)$, $B'(-1\ ;\ -2)$ où $a$ désigne un nombre réel.

1. Soit $M$ un point de coordonnées $x$ et $y$ dans le repère $\mathscr{R}$ . Calculer les coordonnées $\alpha$ et $\beta$ de $M$ dans le repère $(O,\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB})$ en fonction de $x$ et $y$.
   Au point $M$ de $\mathscr{E}_2$ on associe le point $M'$ de $\mathscr{E}_2$ tel que :
   $$\overrightarrow{O'M'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + \beta\overrightarrow{O'B'}.$$
   Calculer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ dans le repère $\mathscr{R}$ en fonction de $x$ et $y$.
   Montrer que l'application $F$ de $\mathscr{E}_2$ dans $\mathscr{E}_2$ définie par $M' = F(M)$ est une application affine. Quelle est, dans la base $(\vec{\jmath},\ \vec{k})$ la matrice de l'application linéaire associé à $F$ ? Comment choisir $a$ pour que $F$ soit bijective ? Quelle est l'image de $\mathscr{E}_2$ par $F$ dans le cas où $F$ n'est pas bijective ?
2. On suppose $\mathscr{E}_2$ euclidien orienté et le repère $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé direct. On appelle affixe d'un point $M$ de $\mathscr{E}_2$ de coordonnées $x$ et $y$ le nombre complexe$z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer $a$ pour que $F$soit une similitude directe.
   Calculer dans ce cas l'affixe de $F(M)$ en fonction de celle de $M$. Déterminer le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

B- Soit le plan euclidien orienté $\mathscr{E}_2$ muni du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère l'application $g$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $z' = g(z) = 2\mathrm{i}z + 1 - 2\mathrm{i}$.
On note $T$ l'application de $\mathscr{E}_2$ dans $\mathscr{E}_2$ qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = g(z)$.

1. Calculer les coordonnées de $T(M)$ en fonction des coordonnées de $M$ dans le repère $\mathscr{R}$.
   Montrer que $T$ est bijective et exprimer les coordonnées de $M$ en fonction de celles de $T(M)$.
   Montrer que $T$ admet un seul point fixe $H$ . Quel est le transformé $O'$ de $O$ par $T$ ?
2. Donner, dans le repère $\mathscr{R}$, une équation de l'ellipse $(\mathscr{E})$ de centre $O$, d?excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et telle que $H$ soit un sommet de son axe focal.
   Montrer que l'image $(\mathscr{E}')$ de $(\mathscr{E})$ par $T$ est une ellipse dont on précisera les foyers et l?excentricité.
3. On considère la symétrie orthogonale $S$ par rapport à la droite $OO'$. Calculer les coordonnées de $S(M)$ en fonction de celles de $M$ dans le repère $\mathscr{R}$. Calculer l'affixe de $S(M)$ en fonction du conjugué de l'affixe de $M$.
   On pose $T' = S \circ T$. Calculer l'affixe de $T'(M)$ en fonction du conjugué de l'affixe de $M$. Montrer que $T'$ est une similitude indirecte dont on déterminera le centre et le rapport.

Les parties A et B du problème sont indépendantes.

## LXVIII. Nice, série E

**Ex. 756.** ./1973/niceE/exo-1/texte.tex

On considère une plan vectoriel $\mathscr{P}$ dont $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base.
Spot $f$ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ (ou endomorphisme de $\mathscr{P}$) ayant pour matrice, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ est une droite vectorielle $\mathscr{D}$ dont on donnera une base $\vec{u}$.
Montrer que l'ensemble des vecteurs transformés par $f$ en leurs opposés est une droite vectorielle $\mathscr{D}'$ dont on donnera une base $\vec{v}$.
Vérifier que $(\vec{u},\ \vec{v})$ est une base de $\mathscr{P}$ et déterminer la matrice $M'$ de $f$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
En déduire que $f$ est une symétrie vectorielle que l'on précisera.

**Ex. 757.** ./1973/niceE/exo-2/texte.tex

Même exercice 2 que dans le sujet de la série C : Exercice 2, série C Nice 1973

## Problème 221

./1973/niceE/pb/texte

A- Questions préliminaires.

1. $a$ et $b$ étant deux réels $(a \neq 0)$, on considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ par
$$\varphi(x) = \log|ax+b|,$$
où le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien. Exprimer la fonction dérivée de la fonction $\varphi$
2. e désigne la base des logarithmes népériens. Étudier la fonction numérique
$$x \longmapsto \log_{\sqrt{\mathrm{e}}}|3x-2|,$$
où $\log_{\sqrt{\mathrm{e}}}$ désigne le logarithme de base $\sqrt{\mathrm{e}}$.

B- $\lambda$ désignant un nombre réel non nul, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par
$$f(x) = 3x+5+\frac{\lambda}{3x-2}\ ;$$
et soit $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe représentative de $f_\lambda$.

1. Montrer que les différentes courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ admettent en commun deux asymptotes et un centre de symétrie que l'on déterminera.
2. Calculer la fonction dérivée de la fonction $f_\lambda$ et étudier, suivant les valeurs de $\lambda$, le signe de cette dérivée.
Tracer avec soin $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_{-1})$ dans une repère orthonormé $(Ox,\ Oy)$, où l'unité de longueur est trois centimètres.

C- 1. Soit $F_\lambda$ celle des primitives de $f_\lambda$ sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\ ;+\infty\right[$ qui prend la valeur $0$ en $x=1$.
2. Tracer la courbe $(\Gamma)$ représentative de $F_{18}$ après avoir étudier ses variations.
3. Calculer la dérivée sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\ ;+\infty\right[$ de la fonction
$$x \longmapsto (3x-2)\log|3x-2|-3x.$$
En déduire l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en centimètres carrés, comprise entre $(\Gamma)$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Retour page 1

# LXIX. Nice remplacement, série C

Ex. 758. ./1973/niceCrem/exo-1/texte.tex

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de nombres réels définie par

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ \forall n \ \in \mathbb{N}^\star - \{1\}, \qquad u_n = \dfrac{1}{4}u_{n-1} + 1. \end{cases}$$

**1.** Déterminer le nombre réel $\alpha$ tel que la suite $(v_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

**2.** En déduire en fonction de $n$ la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?

Ex. 759. ./1973/niceCrem/exo-2/texte.tex

Soit $V$ un espace vectoriel euclidien orienté, $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base orthonormée de $V$, de sens direct.
On considère l'application $f$ de $V$ dans $V$ qui au vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur

$$\vec{u'} = f(\vec{u}) = y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}.$$

Montrer que $f$ est une transformation orthogonale de $V$.
Trouver l'ensemble $(D)$ des vecteurs de $V$ invariants par $f$.
Soit $(P)$ le plan orthogonal à $(D)$. On oriente $(P)$ par le vecteur unitaire $\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ de $(D)$.
Montrer que la restriction de $f$ à $(P)$ est une rotation vectorielle dont on déterminera un angle $\theta$.

## Problème 222

./1973/niceCrem/pb/texte

A- Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $u$ une application linéaire de $E$ dans $E$.
On désigne par $N$ le noyau de $u$.
Soit $a \in E$ et $b \in E$ tels que $u(a) = b$.

1. Montrer que, quel que soit $y$ appartenant à $N$,

$$u(a+y) = b.$$

2. Soit $a' \in E$ tel que $u(a') = b$. Montrer que $a - a' \in N$.
3. Soit l'équation $u(x) = b$ et $S$ l'ensemble des ses solutions.
Montrer que $S = \{x \in E | x = a + y,\ y \in N\}$.

B- Soit $I = ]0\,;+\infty[$ et $E$ l'ensemble des applications de $I$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables.

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectorielle de l'espace vectoriel $F$ sur $\mathbb{R}$ des applications de $I$ dans $\mathbb{R}$.
2. Si $f$ est un élément de $E$, on définit l'application $\hat{f}$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(x) = (x+1)f(x) + xf'(x).$$

Montrer que $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable.

3. Trouver la primitive $g$ de la fonction

$$x \longmapsto -\frac{x+1}{x} qquad (x \in I)$$

qui prend la valeur $-1$ pour $x = 1$.
En déduire que, pour que l'application $\hat{f}$ soit l'application nulle sur $I$, il faut et il suffit que la dérivée de l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{g(x)}}$ soit nulle sur $I$.



Retour page 1

C- On considère l'application $u$ de $E$ dans $E$ qui à l'élément $f$ associe $\hat{f}$.

1. Montrer que $u$ est linéaire. En utilisant B3, montrer que son noyau $N$ est de dimension 1.
2. Soit $b$ l'élément de $E$ défini par $b(x) = x^2 + 2x$.
   Trouver dans $E$ un polynôme $P$ vérifiant $u(P) = b$. (On cherchera d'abord le degré de $P$.)
3. Quelles sont les solutions dans $E$ de l'équation $u(f) = b$, où $f$ est l'inconnue ?

D- Étudier les variations de la fonction $f$

$$x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + x \qquad (x \in I)$$

et la représenter graphiquement.

# LXX. Nice remplacement, série E

**Ex. 760.** ./1973/niceErem/exo-1/texte.tex

On joue avec un dé « pipé ». La loi de probabilité de sortie des faces est donnée par la tableau suivant :

| Valeurs $x_i$ de $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| probabilité de $x_i$ soit $p(x_i)$ | 0,1 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,15 | 0,1 |

**1.** Calculer $E(X)$ (espérance mathématique de $X$).
**2.** Calculer $V(X)$ (variance de $X$).
**3.** Calculer $\sigma(X)$ (écart type) à $10^{-1}$ près.

**Ex. 761.** ./1973/niceErem/exo-2/texte.tex

On considère un plan rapporté à un repère orthonormé $Oxy$ et dans ce plan deux transformations $T_1$ et $T_2$ qui associent respectivement au point $m$ d'affixe $z$ le point $M_1$ d'affixe $z_1 = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z$ et le point $M_2$ d'affixe $z_2 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z$.

1. Quelle est la nature de ces deux transformations ? Donner leurs éléments respectifs.
2. Exprimer en fonction de $z$ l'image de $m$ par la transformation $T_2 \circ T_1$ et donner les éléments de cette transformation.

## Problème 223

./1973/niceErem/pb/texte

A- Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle définie par

$$y = f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x.$$

1. Montrer que $f'(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,?] + \pi$.
2. Soit $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ les courbes représentatives dans un même repère orthonormé des trois fonctions $f,\ f_1,\ f_2$ définies sur $[-\pi\,;\,+\pi]$ :

$$(\mathscr{C})\ :\ y = f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x,$$
$$(\mathscr{C}_1)\ :\ y = f_1(x) = \mathrm{e}^{-x},$$
$$(\mathscr{C}_2)\ :\ y = f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer les abscisses des points communs à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ et montrer qu'en ces points $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont la même tangente. Déterminer les abscisses des points communs à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_2)$ et montrer qu'en ces points $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont la même tangente.
   Tracer les trois courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C})$. (On rappelle que $f_1,\ f_2$ et $f$ sont définies sur $[-\pi\,;\,+\pi]$.)
3. En effectuant successivement deux intégrations par parties, déterminer les primitives de $f$. En déduire l'aire du domaine plan compris entre l'axe $x'x$ et la courbe $(\mathscr{C})$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

B- $t$ désignant un nombre réel, on considère dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé le point $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} X = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \\ Y = \mathrm{e}^{-t}\sin t. \end{cases} \tag{1}$$

On désigne par $H(t) = X + \mathrm{i}Y$ l'affixe de $M(t)$.

1. Donner le module et l'argument du nombre complexe $H(t)$.
2. Montrer que l'application $H$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est injective, mais non surjective.
3. Démontrer les relations

$$\forall t_1 \in \mathbb{R}, \qquad \forall t_2 \in \mathbb{R} \ : \qquad H(t_1)H(t_2) = H(t_1+t_2),$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ : \qquad [H(t)]^n = H(nt).$$

C- Dans la suite, la variable $t$ représente le temps et l'on s'intéresse au mouvement du point $M(t)$ défini au B par les relations (1).

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ ainsi que la norme de $\vec{V}$.
2. Montrer que $\vec{V}$ fait avec $\overrightarrow{OM}$ un angle constant $\alpha$ que l'on déterminera.
3. Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ fait également avec $\overrightarrow{OM}$ un angle constant $\beta$.

# LXXI. Orléans-Tours, série C

**Ex. 762.** ./1973/orleansC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo $4$ :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3}\}.$$

**1.** Rappeler la structure de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**2.** Résoudre dans cet ensemble le système :

$$\begin{cases} \dot{3}\,x + y = \dot{3}\ ; \\ x + y = \dot{1}\ . \end{cases}$$

**Ex. 763.** ./1973/orleansC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** Montrer que $f$ est dérivable en tout point $x$ non nul. Calculer $f'(x)$.

**3.** Á l'aide de la définition, montrer que $f$ set dérivable au point $x = 0$.

**4.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. N.B. : *Pour la cosntruction de la courbe, on utilisera le tableau de valeurs approchées suivantes :*

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{9}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,78 | 0,60 | 0,37 | 0,22 | 0,02 |

Retour page 1

## PROBLÈME 224

./1973/orleansC/pb/texte

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions numériques $f$ définies pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x + c$$

où $a,\ b$ et $c$ décrivent $\mathbb{R}$.

A) 1° a) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les trois éléments de $\mathscr{E}$ définies par

$$f_1(x) = \cos 2x\ ;\ f_2(x) = \sin 2x\ ;\ f_3(x) = 1.$$

Montrer que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ est une base de $\mathscr{E}$, notée B.

2° a) Montrer que tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ est intégrable sur $[0\,;\pi]$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_i(x)f_j(x)\,\mathrm{d}x$ pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ et $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

b) Soit $f$ et $g$ deux éléments de $\mathscr{E}$ de composantes respectives $(a,\ b,\ c)$ et $(a',\ b',\ c')$ dans la base B. On considére l'application $I$ de $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(f,\ g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exprimer $I(f,\ g)$ puis $I(f,\ f)$ en fonction des composantes de $f$ et de $g$ dans la base B.

c) Déduire des résultats précédents que l'application $I$ définit sur $\mathscr{E}$ est un produit scalaire (c'est à dire une forme bilinéaire symétrique définie positive).

Montrer que B est une base orthogonale de $\mathscr{E}$. Est-elle orthonormée ?

B) 1° Montrer par récurrence que, quel que soit $n$ élément de $\mathbb{N}$, tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ possède une dérivée d'ordre $n$, notée $f^{(n)}$, qui appartient à $\mathscr{E}$ ; (par convention $f^{(0)} = f$).

Montrer que l'application qui à tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ associe $f^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$. Est-ce un automorphisme ?

2° $\mathscr{E}$ muni du produit scalaire $I$ est un espace euclidien.

Soit $\mathscr{E}'$ le plan vectoriel engendré par $f_1$ et $f_2$ qui constituent une base orthonormée B'. On considère l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathscr{E}$ défini par

$$\varphi(f) = f^{(2)} = f''.$$

Montrer que $f$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection orthogonale sur $\mathscr{E}'$.

C) Soit $\varphi_n$ l'endomorphisme de $\mathscr{E}'$ défini par

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{2^n} f^{(n)}.$$

On pose $\Phi = \{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\}$.

1° Montrer que $\varphi_n$ est un automorphisme de $\mathscr{E}'$ pour $n = 0,\ 1,\ 2$ ou $3$.

2° Écrire les matrices de $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ dans la base B'. Reconnaître ces automorphismes.

3° Montrer que $\Phi$ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe des automorphismes de $\mathscr{E}'$ isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ muni de l'addition.

Retour page 1

# LXXII. Orléans-Tours, série E

**Ex. 764.** ./1973/orleansE/exo-1/texte.tex

On appelle $S$ l'ensemble des suites $u = \{u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots\}$ de nombres complexes dont le terme général $u_n$ vérifie, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{10}u_n.$$

1. Trouver les deux valeurs non nulles, $Z_1$ et $Z_2$, du nombre complexe $Z$, telle que la suite géométrique $u$ de terme généal $u_n = Z^n$ soit un élément de $S$.
2. Soit $\theta$ le nombre réel compris entre $0$ et $\dfrac{\pi}{2}$ tel que $\tan\theta = 3$.

   Calculer $v_n = (Z_1)^n + (Z_2)^n$ en fonction de $\theta$ ($n$ étant toujours entier naturel). Quelle est la limite de $v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 765.** ./1973/orleansE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine, on considère un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et l'application affine $f$ qui, au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que

$$X = \frac{1}{2}(x+y-1) \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{1}{2}(3x-y+3).$$

1. Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par $f$.
2. On considère le point $\Omega\,(-1\ ;\ 0)$ et les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - 3\vec{j}$.

   Montrer que $\mathscr{R}' = (\Omega,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ est un repère du plan affine.
3. On note $(x'\ ;\ y')$ les coordonnées de $m$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

   Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$.
4. En déduire les formules exprimant, dans le repère $\mathscr{R}'$, les coordonnées $(X'\ ;\ Y')$ de $M$ en fonction des coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $m$. Quelle est la nature de l'application $f$ ?

Une figure accompagnera la solution de l'exercice.

## Problème 225

./1973/orleansE/pb/texte

Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, *non nul*, on considère la fonction $f_n$ d'une variable réelle $x$, définie par

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \log|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

A- 1. Préciser le domaine de définition de $f_n$.

   Pour quelles valeurs de $n$ la fonction $f_n$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

2. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(x'Ox,\ y'Oy)$. On appelle $(C_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$.

   a) Étudier les éléments de symétrie de $(C_n)$ suivant la parité de $n$.

   b) Montrer que les courbes $(C_n)$ passent par des points fixes $O$, $A$ et $B$, où $O$ est l'origine des axes, $A$ le point d'abscisse positive, $B$ son symétrique par rapport à $O$.

   c) Calculer la dérivée de $f_n$ pour $x \neq 0$. Montrer que les courbes $(C_n)$ admettent la même tangente en $A$.

   d) Pour quelles valeurs de $n$ la fonction $f <_n$ est-elle dérivable en $x = 0$ ?

3. Étudier les variations de $f_{-3}$, $f_1$ et $f_2$ et tracer avec soin les courbes $(C_{-3})$, $(C_1)$ et $(C_2)$ dans le repère $(x'Ox,\ y'Oy)$.

   Tracer les tangentes en $A$, $O$ et $B$ à ces courbes, dans la mesure où les tangentes existent.

4. Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions $f_n$ à l'ensemble $[0\,;+\infty[$ des réels positifs.

   Soit $M_n$ le point de la courbe $(C_n)$ de coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$, où $x_n$ est la valeur de $x$ strictement positive, pour laquelle $f_n$ présente un extrémum.

Retour page 1

Montrer que tous les points $M_n$ sont sur la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}} \log x.$$

Tracer $(\Gamma)$ dans le repère précédemment utilisé.

B- 1. a) Rappeler la formule d'intégration par parties.

b) Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. Calculer

$$I_n(\lambda) = \int_1^\lambda f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Dans cette question, on prend $n = 2$.

a) Calculer $I_2(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Quelle est la limite quand $\lambda$ tend vers $0$ (avec $\lambda > 0$) de cette intégrale ?

Interpréter géométriquement la valeur limite trouvée.

b) Déterminer un nombre réel $\alpha$ ($\alpha > 0$) tel que la valeur moyenne de $f_2$ sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$ soit nulle.

Quel point particulier de la courbe $(C_{-3})$ a pour abscisse $\alpha$ ?

c) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près.

# LXXIII. Orléans-Tours remplacement, série C

**Ex. 766.** ./1973/orleansCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie par

$$f(x) = \log(2x + \sqrt{4x^2}).$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$ et montrer que cette fonction est impaire.
   Étudier le sens de variation de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer $f^{-1}$ et donner sa représentation graphique dans le même repère.
   Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{4\mathrm{e}} \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

**Ex. 767.** ./1973/orleansCrem/exo-2/texte.tex

Soit $\theta$ un nombre réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$(1 + \cos 2\theta)z^2 - (2\sin 2\theta)z + 2 = 0.$$

## Problème 226

./1973/orleansCrem/pb/texte

A- Soit E un plan vectoriel muni de la base $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Soit F l'ensemble des endomorphismes $f$ de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ b & b+1 \end{pmatrix} \qquad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$



Retour page 1

a) Exprimer, sous la forme d'une relation entre $a$ et $b$, la condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit un automorphisme de E.

Montrer que l'ensemble de ces automorphismes est un sous-groupe du groupe linéaire.

b) Pour tout réel $\lambda$, on définit

$$E_\lambda = \{\vec{u} \in E \quad \text{tels que} \quad f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}.$$

a) Montrer que $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Trouver la condition que doivent vérifier $a$ et $b$ pour qu'il existe deux valeurs distinctes, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, telles que $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$ ne soient pas réduits à $\{\vec{0}\}$. (On appellera $\lambda_1$ la valeur indépendante de $a$ et de $b$.)

Déterminer $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$ et montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.

c) Soit $\vec{u_1} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{u_2} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

La condition précédente étant remplie, montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est une base de E.

Quelle est la matrice de $f$ dans cette base ?

Soit $A'$ cette matrice, calculer $(A')^n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) On suppose $a + b = -1$. Trouver le noyau de $f$, noté Ker $f$, et l'image de $f$, notée Im $f$.

Montrer que $f$ est la projection sur $E_{\lambda_1}$ parallèlement à $E_{\lambda_2}$.

B- Soit $A$ la matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ b & b+1 \end{pmatrix},$$

on suppose en outre que $a > 0$ et $b > 0$.

On lui associe l'application $S$ :

$$S : \mathbb{R} - \left\{-\frac{b+1}{b}\right\} \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$S(x) = \frac{(a+1)x + a}{bx + (b+1)}.$$

1. Montrer que $S$ a deux points invariants, $-1$ et $\dfrac{a}{b}$.
2. Soit $\overline{S}$ la restriction de $S$ à $\left]-1\,;\frac{a}{b}\right[$.

   Montrer que $\overline{S}$ est une bijection de $\left]-1\,;\frac{a}{b}\right[$ dans lui-même.
3. Vérifier que l'application $U$ définie par $U(x) = \dfrac{ax + a}{-ax + b}$ est une bijection de $]-\infty\,;0[$ dans $\left]-1\,;\frac{a}{b}\right[$.

   Déterminer son application réciproque $U^{-1}$.

   Exprimer $V = U^{-1} \circ \overline{S} \circ U$.
4. Soit $x_0$ un élément de $\left]-1\,;\frac{a}{b}\right[$, on considère la suite

$$x_1 = \overline{S}(x_0),\ x_2 = \overline{S}(x_1),\ \ldots,\ x_n = \overline{S}(x_{n-1}).$$

   Posons $y_n = U^{-1}(x_n)$. Montrer que $y_n = V(y_{n-1})$. En déduire la valeur de $y_n$ en fonction de $y_0$, puis la valeur de $x_n$ en fonction de $x_0$.

   Quelle est la limite de la suite $(x_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?



Retour page 1

# LXXIV. Orléans-Tours remplacement, série E

**Ex. 768.** ./1973/orleansErem/exo-1/texte.tex

1. Étudier les variations des fonctions $f$ et $g$ définies par
$$f(x)=x\log x \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{\log x}{x}.$$
Construire leurs courbes représentatives $(C)$ et $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé (unité de longueur 4 cm).
2. Calculer l'aire du domaine $D$, ensemble des points de coordonnées $x$ et $y$ tels que
$$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}, \qquad g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\ ;$$
(on pourra utiliser une intégration par parties).

**Ex. 769.** ./1973/orleansErem/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé d'axes $(x'Ox,\ y'Oy)$.
Soit $f$ l'application affine du plan (P) dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que
$$z'=(z+2+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}).$$

1. Quels sont les points du plan qui ont pour image l'origine $O$ du repère ?
2. a) Quel est l'ensemble $(C_1)$ des points $M$ du plan dont l'image par $f$ appartient à $y'Oy$.
   b) Quel est l'ensemble $(C_2)$ des points $M$ du plan dont l'image par $f$ appartient à $x'Ox$.
   c) Construire $(C_1)$ et $(C_2)$ dans un même repère orthonormé (unité de longueur 2 cm). Retrouver graphiquement les résultats de la question 1.

## Problème 227

./1973/orleansErem/pb/texte

- La partie **??** de ce problème n'utilise que la définition de l'application $\varphi_{a,b}$ donnée dans la partie A.

A- Le plan vectoriel V est rapporté à une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $a$ et $b$ deux nombres réels et $\varphi_{a,b}$ l'application linéaire de V dans lui-même définie par sa matrice $A$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :
$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}.$$

1. L'application $\varphi_{1,2}$ est-elle un automorphisme de V ? Est-elle involutive ?
2. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et sur $b$ pour que $\varphi_{a,b}$ soit une bijection de V sur V. Déterminer alors l'automorphisme réciproque.
   b) Préciser suivant les valeurs de $a$ et $b$, le noyau de l'application $\varphi_{a,b}$.
3. Montrer que l'égalité $\varphi_{a,b}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ n'est vérifiée, par des vecteurs non nuls, que pour les deux valeurs suivantes de $\lambda$ :
$$\lambda_1=1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=a-b.$$
4. On suppose dans cette question $\lambda_1\neq\lambda_2$. Soit $E_1$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de V tels que $\varphi_{a,b}(\vec{v})=\lambda_1\vec{v}$ et soit $E_2$ l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de V tels que $\varphi_{a,b}(\vec{v})=\lambda_2\vec{v}$.
   a) Montrer que le vecteur $\vec{u}_1$ de coordonnées $(b\ ;\ 1-a)$ appartient à $E_1$ et que le vecteur $\vec{u}_2$ de coordonnées $(1\ ;\ -1)$ appartient à $E_2$.
   b) Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de V.
   c) Vérifier que $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ est une base de V. Écrire la matrice de $\varphi_{a,b}$ dans la base $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$.

B- On suppose que le plan vectoriel V est euclidien.
Soit $(P)$ un plan affine euclidien associé à V et muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On note $f$ l'application linéaire $\varphi_{1,2}$ définie dans la première partie. Soit $g$ l'application linéaire de V dans lui-même définie par sa matrice $B$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :
$$B=\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & -1-2\sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$



Retour page 1

1. Écrire la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
2. Soit $T$ l'application affine, admettant $f \circ g$ comme application linéaire associée, et appliquant le point $I$ de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ sur le point $I'$ de coordonnées $\left(-\sqrt{3}-1\ ;\ -\sqrt{3}\right)$.
   Montrer que $T$ est définie analytiquement par les formules

$$x' = -\sqrt{3}x - y - 1$$

$$y' = x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} - 1.$$

3. On note $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe d'un point $M$ du plan $(P)$.
   a) Exprimer, en fonction de $z$, l'affixe $z'$ de $T(M)$.
   b) Reconnaître la nature de l'application $T$ et préciser ses caractéristiques géométriques.

## LXXV. Paris, série C

**Ex. 770.** ./1973/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.
soit $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe d'un point $M(x,\ y)$ de ce plan.

**1.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan P tels que

$$|(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}| = 2.$$

**2.** Étudier la transformation de P qui, à chaque point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}$.
Trouver en particulier le point qui coïncide avec son transformé.

**3.** En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de la première question.

**Ex. 771.** ./1973/parisC/exo-2/texte.tex

Soit $X$ un variable aléatoire prenant les valeurs

$$-2,\ -1,\ 3,\ 4,$$

avec les probabilités

$$0{,}10, \quad 0{,}65, \quad 0{,}15, \quad 0{,}10.$$

**1.** Calculer l'espérance mathématique et l'écart type $\sigma$ de $X$.

**2.** Déterminer suivant les valeurs de $h$ la probabilité $P(h)$ de l'inégalité $|X| \geqslant h$, où $h$ est un nombre positif donné.

**3.** Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions

$$h \longmapsto P(h) \qquad \text{et} \qquad h \longmapsto \frac{\sigma^2}{h^2}.$$

Comparer $P(h)$ et $\dfrac{\sigma^2}{h^2}$.

### Problème 228

./1973/parisC/pb/texte

A) 1° Étudier les variations de la fonction numérique $g$ définie par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{2x}.$$

Tracer la courbe $(\Gamma)$ représentative de $g$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ (unité de longueur : 5 cm).



Retour page 1

2° Soit $\mu$ un paramètre réel. Étudier les variations de la fonction $g_\mu$ définie par

$$g_\mu(x) = (x+\mu)\mathrm{e}^{2x}.$$

Montrer que, pour $\mu \geqslant 0$, la courbe $(\Gamma_\mu)$ représentative de $g_\mu$ dans le repère $\mathscr{R}$ se déduit de la courbe $(\Gamma)$ par une transformation, composée de deux transformations géométriques simples. (On ne demande pas de tracer $(\Gamma_\mu)$.)

3° $\lambda$ et $\mu$ sont deux paramètres réels. On considère l'ensemble $E$ des fonctions numériques $f_{\lambda,\,\mu}$ définies par

$$f_{\lambda,\,\mu}(x) = (\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{2x}.$$

Montrer que, relativement aux opérations usuelles d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient les fonctions $g_\mu$ définies précédemment.

L'ensemble des fonctions $g_\mu$ est-il un sous-espace vectoriel de $E$ ?

Montrer que les fonctions $f_{1,\,0}$ $(\lambda = 1,\ \mu = 0)$ et $f_{0,\,1}$ $(\lambda = 0,\ \mu = 1)$ constitue une base $\mathscr{B}$ de $E$. Quelles sont les coordonnées de $f_{\lambda,\,\mu}$ dans cette base.

B) On se propose de construire une suite de fonctions dérivables

$$G_0,\ G_1,\ G_2,\ \dots,\ G_n,\ \dots$$

appartenant à l'espace vectoriel $E$ défini en A3 et telles que

$$G_0 = g \qquad \text{et} \qquad G'_n = G_{n-1}$$

pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.
($G'_n$ désigne la fonction dérivée de $G_n$).
A cet effet, on pose, pour tout $n \geqslant 0$,

$$G_n(x) = (\lambda_n x+\mu_n)\mathrm{e}^{2x}.$$

1° Pour $n \geqslant 1$, exprimer $\lambda_n$ et $\mu_n$ en fonction de $\lambda_{n-1}$ et $\mu_{n-1}$.

Déduire de ce résultat qu'il existe une application linéaire, $\Phi$, de l'espace vectoriel $E$ dans lui-même, telle que

$$G_n = \Phi(G_{n-1}).$$

Écrire la matrice $M$ de $\Phi$ relativement à la base $\mathscr{B}$ de $E$ définie en A3.

2° On considère la matrice

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

où $a$ est un nombre réel donné.

Calculer $P^2$ et $P^3$. Calculer ensuite $P^n$ (on rappelle que $P^n = P \times P^{n-1}$).

Écrire alors l'expression de la matrice $M^n$. En déduire les expressions de $\lambda_n$ et de $\mu_n$ à l'aide des coordonnées $\lambda_0$ et $\mu_0$ de $G_0$.

Compte tenu des valeurs numériques de $\lambda_0$ et $\mu_0$, donner enfin l'expression de $G_n(x)$.

3° Démontrer que

$$G_n(x) = \int_{\frac{n}{2}}^{x} G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier cette formule en calculant l'intégrale

$$\int_{\frac{n}{2}}^{x} G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties.

Retour page 1

# LXXVI. Paris, série E

**Ex. 772.** ./1973/parisE/exo-1/texte.tex

Même exercice que le sujet de terminale C : Paris C

**Ex. 773.** ./1973/parisE/exo-2/texte.tex

Soit $X$ un variable aléatoire prenant les valeurs

$$-2,\ -1,\ 3,\ 4,$$

avec les probabilités

$$0{,}10, \quad 0{,}65, \quad 0{,}15, \quad 0{,}10.$$

**1.** Calculer l'espérance mathématique et l'écart type $\sigma$ de $X$.

**2.** Déterminer suivant les valeurs de $h$ la probabilité $P(h)$ de l'inégalité $|X| \geqslant h$, où $h$ est un nombre positif donné.

**3.** Tracer dans un s repère orthonormé la courbe représentative de la fonction $h \longmapsto P(h)$.

## Problème 229

./1973/parisE/pb/texte

1. Soit $f_n$ la fonction numérique définie par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \qquad (n \text{ entier positif ou nul}).$$

   a) Étudier la variation de la fonction $f_0$.
   tracer la courbe $(\mathscr{C}_0)$ représentative de $f_0$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$ (unité graphique : 4 cm).
   Démontrer que $(C_0)$ admet un centre de symétrie.

   b) Comparer $f_1(x)$ et $f_0(-x)$.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$ représentative de la fonction $f_1$ dans le repère $\mathscr{R}$ précédent.

2. On considère la suite dont le terme général $u_n$ est donné par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a) Mettre $f_0(x)$ sous la forme $\dfrac{z'(x)}{z(x)}$, avec $z'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Calculer $u_0$ et $u_1$. Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$.

   b) Démontrer que, pour $n > 1$,

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1-\mathrm{e}^{1-n}}{n-1}.$$

   En déduire successivement

   - le calcul de $u_2$ et l'inégalité $u_2 < 1$ ;
   - la limite de la somme $u_n + u_{n-1}$ lorsque $n$ tend vers l'infini (après avoir préciser le signe de $u_n$).

3. Soit E l'ensemble des fonctions numériques $G$ définies par

$$G(x) - \alpha + \beta\mathrm{e}^{-x} + \gamma\mathrm{e}^{-2x},$$

   où $\alpha,\ \beta, \gamma$ sont des nombres réels.

   a) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont la base $\mathscr{B}$ est formée des trois fonctions $h,\ k,\ l$ définies respectivement par

$$h(x) = 1, \qquad k(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad l(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

b) Á toute fonction $G$ de E, de coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ relativement à la base $\mathscr{B}$, on associe la fonction numérique $G_1$ définie par

$$G_1(x) = \int_0^1 \frac{G(t+x)}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que la fonction $G_1$ appartient à E et qu'elle est l'image de $G$ par une application linéaire $\varphi$ de E dans E.

c) On pose

$$\varphi^2 = \varphi\circ\varphi, \qquad \varphi^3 = \varphi\circ\varphi^2, \qquad \dots, \qquad \varphi^n = \varphi\circ\varphi^{n-1}.$$

Trouver en fonction de $n$ et des coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de $G$ (dans la base $\mathscr{B}$) les coordonnées $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ de $\varphi^n(G)$.

Ces coordonnées $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ tendent-elles vers une limite lorsque $n$ tend vers l'infini ?

## LXXVII. Paris remplacement, série C

**Ex. 774.** ./1973/parisCrem/exo-1/texte.tex

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.

**1.** On considère dans le plan P trois points distincts $ABC$ d'abscisses respectives $a, b$ et $c$.
Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle $ABC$ soit rectangle en $A$ est :

$$\frac{b-a}{c-a} + \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}} = 0.$$

**2.** Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$. On désigne par $M'$ et $M''$ les points ayant pour affixes $z^2$ et $z^3$.
Quelles conditions doit vérifier $z$ pour que les trois points $M$, $M'$, $M''$ soient distincts ?
Trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ tels que le triangle $MM'M''$ soit rectangle en $M$, ou en $M'$ ou en $M''$
Dessiner $\mathscr{E}$.

**Ex. 775.** ./1973/parisCrem/exo-2/texte.tex

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 1 et 0, les probabilités respectives des couples de valeurs de $X$ et $Y$ étant données dans le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $p$ | $\frac{1}{2}-p$ |
| 0 | $\frac{1}{3}-p$ | $\frac{1}{6}+p$ |

où $p$ est un nombre réel.

**1.** Dans quel intervalle doit se trouver $p$ pour que ces données soient acceptables ? Calculer les probabilités marginales des valeurs de $X$ et de $Y$.
Calculer les espérances mathématiques et les écarts-types de $X$ et de $Y$.

**2.** Calculer $p$ de façon que les variables aléatoires $X$ et $Y$ soient indépendantes.

### Problème 230

./1973/parisCrem/pb/texte

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, on désigne par $(\mathscr{H})$ la courbe qui a pour équation $x^2-2y^2=1$ et par $(\mathscr{K})$ la courbe qui a pour équation $x^2-2y^2=-1$.

Question préliminaire.- Tracer les courbes $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{K})$ et leurs asymptotes. Placer sur la même figure le rectangle dont les côtés sont portés par les quatre droites qui ont pour équations

$$x=1, \qquad x=-1, \qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Retour page 1

A- On considère la suite de points

$$M_1(a_1\ ;\ b_1),\ M_2(a_2\ ;\ b_2),\ \dots,\ M_n(a_n\ ;\ b_n),\ \dots$$

(où $a_n$, $b_n$ désignent les coordonnées de $M_n$ dans le repère choisi), telle que $a_1 = b_1 = 1$ et

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \end{cases}$$

pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $a_n$ et $b_n$ sont des entiers positifs.
   Étudier, suivant la parité de $n$, la parité de $a_n$ et $b_n$.
   Montrer que, suivant que $n$ est pair ou impair, le point $M_n$ appartient à la courbe $()\mathscr{H})$ ou à la courbe $(\mathscr{K})$.
   Vérifier que, lorsque $n$ tend vers l'infini, $a_n$ et $b_n$ tendent vers l'infini et trouver la limite de $\dfrac{b_n}{a_n}$.
   En déduire celle de $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ et celle de $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.
2. Démontrer que $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux.
3. Démontrer que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   Exprimer $(1-\sqrt{2})^n$ à l'aide de $a_n$ et $b_n$.

B- 1. A tout couple de points $P(x\ ;\ y)$ et $P'(x'\ ;\ y')$ appartenant à la courbe $(\mathscr{H})$, on associe le point $Q$ qui a pour coordonnées

$$xx' + 2yy', \qquad xy' + yx'.$$

   On note $Q = P \star P'$.
   Montrer que, pour la loi notée $\star$, $(\mathscr{H})$ est un groupe commutatif.
   Quel est son élément neutre ? Quel est le symétrique de $P$ pour la loi $\star$ ?
2. A tout point $P(x\ ;\ y)$ appartenant à $(\mathscr{H})$ on associe la matrice

$$G_P = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

   Montrer que pour la multiplication des matrices, l'ensemble des matrices $G_P$ est un groupe, isomorphe au groupe $((\mathscr{H}),\ \star)$ défini sur $(\mathscr{H})$ par la loi $\star$.
   Quelle est la matrice inverse de la matrice $G_P$ ?
3. On suppose distincts les points $P$ et $P'$ définis en B1. On désigne par $A$ le point de $(\mathscr{H})$ qui a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
   Vérifier que les droites $AQ$ et $PP'$ sont parallèles.
   Soit $P''$ un troisième point de $(\mathscr{H})$ (distinct de $P$ et de $P'$). On pose $R = P' \star P''$. En utilisant une propriété de la loi $\star$, démontrer que les droites $QP''$ et $PR$ sont parallèles.

# LXXVIII. Paris remplacement, série E

**Ex. 776.** ./1973/parisErem/exo-1/texte.tex

L'épure sera faite sur du papier quadrillé au demi-centimètre.
L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité de longueur est le centimètre.
On prend comme plan horizontal de projection le plan défini par $O$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et comme plan frontal de projection le plan défini par $O$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.
On donne, par leurs coordonnées, les points

$$A(9\ ;\ -1\ ;\ 4),\ B(3\ ;\ -1\ ;\ 4),\ C(9\ ;\ 7\ ;\ 4), D\left(9\ ;\ 3\ ;\ 4+4\sqrt{3}\right).$$

1. Il existe un cercle $(\Gamma)$ passant par les points $A$, $B$, $C$ et un cercle $(\Delta)$ passant par les points $A$, $B$, $D$. Déterminer leurs centres respectifs.
   Montrer u'il existe une rotation, que l'on précisera, qui transforme le cercle $(\Delta)$ en le cercle $(\Gamma)$.
2. Représenter sur l'épure chacun des cercles $(\Gamma)$ et $(\Delta)$, par ses projections horizontale et frontale.

Ex. 777. ./1973/parisErem/exo-2/texte.tex

Le sujet est identique à celui de la série C Sujet de la série C.

## Problème 231 ./1973/parisErem/pb/texte

Soit $f$ la fonction numérique définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin 2x.$$

1. a) Trouver les couples de réels $(T,\ k)$ tels que l'égalité

$$f(x+T) = kf(x)$$

soit vérifié pour tout réel $x$.
Trouver en particulier le couple $(T,\ k)$ qui correspond à la plus petite valeur strictement positive $T$.

   b) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$.
   Soit $(\mathscr{C}_n)$ la partie de $(\mathscr{C})$ telle que $x \left[n\frac{\pi}{2}\,;(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$ $(\mathscr{C})$ est la réunion des arcs $(\mathscr{C}_n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   déduire de ce qui précède qu'il existe une transformation simple (dépendant de $n$) qui fait passer l'arc $(\mathscr{C}_0)$ à l'arc $(C_n)$.

2. a) Calculer $f'(x)$. Montrer que dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, il existe une valeur $x_0$ de $x$, et une seule, telle que $f'(x_0) = 0$.
   Donner de $x_0$ une valeur approchée avec trois décimales. Donner de $f(x_0)$ une valeur approchée avec deux décimales exactes.

   b) Étudier les variations de la fonction $f$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Construire l'arc de courbe $(\mathscr{C}_0)$.
   Construire sur la même figure les arcs $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

3. a) Montrer que pour $x = x_0 + n\pi$ et pour $x = x_0 - n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ $f$ admet un maximum relatif.
   On pose

$$u_n = f(x_0 + n\pi), \qquad v_n = f(x_0 - n\pi).$$

Chercher si $u_n$ et $v_n$ tendent vers une limite finie quand $n$ tend vers l'infini.
En déduire que $f(x)$ ne tend vers aucune limite lorsque $x \to -\infty$. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ ?

   b) On appelle $(\Gamma)$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, dans le même repère $\mathscr{R}$ que pour la courbe $(\mathscr{C})$.
   Déterminer les points communs à $(\mathscr{C})$ et à $(\Gamma)$. Montrer que, en chacun des ces points, $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ ont même tangente.
   Même question en remplaçant $(\Gamma)$ par la courbe représentative $(\Gamma')$ de la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

4. a) Á l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer l'intégrale

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On trouvera un résultat de la forme

$$\mathrm{e}^{-x}(U\cos 2x + V\sin 2x) + W,$$

où $U$, $V$ et $W$ sont trois constantes réelles que l'on calculera.
Montrer que cette intégrale tend vers une limite quand $x$ tend vers $+\infty$.



Retour page 1

b) On considère les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$, ayant respectivement pour terme général

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_n = -Int\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(n+1)\pi f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{N}^{\star}.$$

Montrer que ce sont des suites géométriques.
Calculer les sommes

$$\alpha_p = \sum_{n=0}^{p} a_n \qquad \text{et} \qquad \beta_p = \sum_{n=0}^{p} \beta_n.$$

Trouver leurs limites respectives $A$ et $B$ lorsque l'entier $p$ tend vers l'infini. Comparer $A-B$ à la limite trouvée au 4a

## LXXIX. Paris, série D

**Ex. 778.** ./1973/parisD/exo-1/texte.tex

On donne le nombre complexe $a = 1 - \mathrm{i}$.

a) Calculer $a^2$ et $a^5$.
Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé, marquer les points qui ont pour affixes $a$, $a^2$ et $a^5$.

b) Á tout point $M$ d'affixe $z$ du plan P, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = az + a^5$.
On définir ainsi une transformation T du plan P. Préciser sa nature et trouver le position du point de P qui coïncide avec son transformé par T.

## LXXX. Poitiers, série C

**Ex. 779.** ./1973/poitiersC/exo-1/texte.tex

**1.** Dériver la fonction numérique $g$ d'une variable réelle définie par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-n)$, où $n$ est un entier relatif.

**2.** $E(x)$ désignant la partie entière d'un réel $x$ ($E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$), étudier la fonction $f$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^x(x - E(x))$.
Tracer sa courbe représentative en se limitant au cas où $x$ appartient à l'intervalle $[-2\,;1]$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**3.** Calculer $\displaystyle\int_0^f f(x)\,\mathrm{d}x$, où $k$ est un entier naturel strictement positif.

**Ex. 780.** ./1973/poitiersC/exo-2/texte.tex

Soit la nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ ayant pour image, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le point $M$ de coordonnées $x$ et $y$.

**1.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $Z = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que

a) $Z$ soit réel,

b) $Z$ soit imaginaire pur,

c) $Z$ ait pour argument $-\dfrac{\pi}{2}$.

## Problème 232

./1973/poitiersC/pb/texte

$E$ désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien, rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère l'ensemble $F$ des endomorphismes (voir note 1) $f_m$ de $E$ ayant pour matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$,

$$A_m = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5m-8 & 4\sqrt{2}(m-1)+3\sqrt{3}(m-2) \\ 4\sqrt{2}(m-1)-3\sqrt{3}(m-2) & m-4 \end{pmatrix}.$$

A) 1° $f_m$ peut-il être une homothétie vectorielle ?

A quelle condition (nécessaire et suffisante) doit satisfaire $m$ pour que $f_m$ soit bijectif ?

2° On suppose dans cette question que $m = \dfrac{3}{2}$.

Donner une base du noyau et une base de l'image de $f_{\frac{3}{2}}$.

3° Montrer que $f_m$ est un endomorphisme orthogonal (voir note 2) de $E$ si, et seulement si, $m = 1$ ou $m = 2$.

On trouve ainsi une rotation $\varphi$ dont on déterminera l'angle, et une symétrie $\sigma$ dont on déterminera l'axe.

4° On pose $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi$ et $\varphi^3 = \varphi\circ\varphi^2$.

Démontrer que l'ensemble $\Phi = \{\varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

En déduire que, pour toute symétrie orthogonale $\sigma_1$ de $E$, on a

$$\varphi^2\circ\sigma_1 = \sigma_1\circ\varphi \qquad \text{et} \qquad \varphi\circ\sigma_1 = \sigma_1\circ\varphi^2.$$

L'un des endomorphismes $\sigma\circ\varphi$ et $\varphi\circ\sigma$ appartient-il à $F$ ?

B) On considère un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à $E$ et rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Déterminer les applications affines $r$ et $s$ associées respectivement à $\varphi$ et à $\sigma$ et admettant $O$ comme point invariant.

Déterminer l'axe de chacune des symétries orthogonales $s\circ r$ et $r\circ s$.

2° Soit $(\Gamma_\lambda)$ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ satisfont l'équation

$$\lambda x^2 + y^2 - 2y + 2 - \lambda = 0$$

('$\lambda$ paramètre réel).

Discuter suivant les valeurs de $\lambda$ la nature de $(\Gamma_\lambda)$.

3° Montrer géométriquement que $r$ et $s$ transforment $(\Gamma_\lambda)$ en une courbe de même nature.

Notes.-

**1.** Un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéaire de cet espace dans lui-même.

**2.** Si $E$ est un espace vectoriel et si l'on désigne par $\left\|\vec{X}\right\|$ la norme du vecteur $\vec{X}$ de $E$, un endomorphisme orthogonal de $E$ est un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $\left\|f(\vec{X})\right\| = \left\|\vec{X}\right\|$ pour tout $\vec{X}$ de $E$.

# LXXXI. Poitiers, série E

Ex. 781. ./1973/poitiersE/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe, soit $S$ l'application qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z' = (-1+\mathrm{i})z + 2 + \mathrm{i}.$$

Rechercher les points invariants et caractériser géométriquement l'application $S$.

Retour page 1

**Ex. 782.** ./1973/poitiersE/exo-2/texte.tex

Calculer $\displaystyle\int_1^x 2te^{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en déduire, par une intégration par parties

$$\int_1^x 2t^3\mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

## PROBLÈME 233

./1973/poitiersE/pb/texte

Dans tout le problème, le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- Soit $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des matrices du type

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda, \end{pmatrix}$$

où $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ et Soit $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices du type

$$A' = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0, \end{pmatrix}$$

où $\mu$ décrit $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que

$$\mathfrak{M}_1 - \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_2 - \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

munis de la multiplications de matrices, sont des groupes commutatifs.

b) Vérifier l'égalité $AA' = A'A$ pour tout $A$ de $\mathfrak{M}_1$ et tout $A'$ de $\mathfrak{M}_2$.
L'ensemble $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ est-il stable pour la multiplication des matrices ?
Préciser la nature de l'endomorphisme associé, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, au produit $AA'$ lorsque $\lambda = \mu$.

2. a) Démontrer, par récurrence sur $n$, que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $(A'A)^n = A'^n A^n$ pour tout $A$ de $\mathfrak{M}_1$ et tout $A'$ de $\mathfrak{M}_2$.
En déduire l'expression de $(A'A)^n$ en fonction de $\lambda$, $\mu$ et $n$.

b) On désigne par $\varphi_n$ l'application affine qui laisse invariant le point $O$ et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $(A'A)^n$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit $M_0$ le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$, distinct de $O$. Exprimer les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point $M_n = \varphi_n(M_0)$ en fonction de $\alpha, \beta,\ \lambda,\ \mu$ et $n$.
Dans l'hypothèse $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, étudier la convergence des suites $(x_n$ et $(y_n)$ ; expliquer géométriquement, suivant les signes de $\lambda$ et $\mu$, comment se déplacent les points $M_n$ lorsque $n$ croît.

B- On suppose désormais que $\lambda = 1 - \mu$ et l'on pose $\psi_\lambda = \varphi_1$ (de sorte que $\psi_\lambda$ est alors l'application affine qui laisse invariant $O$ et dont l'endomorphisme associé est $A'A$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.)

1. $T$ étant la translation de vecteur $\vec{V}\left(1\ ; \dfrac{2\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda^2}\right)$, montrer que l'application affine $g_\lambda = T \circ \psi_\lambda \lambda$ a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = (1-\lambda)x + 1, \\ y' = \lambda y + \dfrac{2\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda^2}. \end{cases},$$

où $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ est l'image par $g_\lambda$ du point $M\,(x\ ;\ y)$.

2. Quelles sont les applications affines correspondant à $\lambda = 0$ ; $\lambda = 1$ ?
Préciser éventuellement leurs points invariants.

3. On désigne par $I$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ et par $\mathbb{R}'$ l'ensemble $\mathbb{R}-\{0,\ 1\}$.
On suppose dans cette question que $\lambda \in \mathbb{R}'$ ; montrer que $g_\lambda$ possède un point invariant, $\Omega_\lambda$, dont on calculera les coordonnées en fonction de $\lambda$.
En déduire que lorsque que $\lambda$ décrit $\mathbb{R}'$ l'ensemble des points invariants est

$$(C)-\{O, \mathrm{i}\},$$

où $(C)$ est une courbe d'équation $y = f(x)$, $f$ étant une fonction que l'on précisera.
Pourquoi faut-il exclure $O$ d'une part, $I$ d'autre part ? Construire la courbe $(C)$.
4. Calculer la'ire du domaine plan limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$.

## LXXXII. Poitiers remplacement, série C

**Ex. 783.** ./1973/poitiersCrem/exo-1/texte.tex

Dans $E$, espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, montrer qu'il existe une rotation $f$ ayant pour axe la droite vectorielle de base $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ et qui transforme $\vec{\imath}$ en $-\vec{\jmath}$.
Calculer $f(\vec{k} - \vec{\jmath})$. Calculer $f(\vec{k} + \vec{\jmath})$ (on pourra remarquer que $(\vec{k} - \vec{\jmath}) \wedge \vec{\imath} = \vec{k} + \vec{\jmath}$).
En déduire $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$.

**Ex. 784.** ./1973/poitiersCrem/exo-2/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des entiers relatifs le système suivant :

$$\begin{cases} 3x \equiv 1\ [4], \\ 2x \equiv 4\ [5]. \end{cases}$$

### Problème 234 ./1973/poitiersCrem/pb/texte

A) 1. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2. On pose

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$
$$\beta_n = \log n,$$
$$\gamma_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Déduire du A1 que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a

$$\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \gamma_n.$$

3. On sait que $\beta_n = \log n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Démontrer que $\alpha_n$ et $\beta_n$ tendent vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

B) 1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x} - \log\dfrac{x+1}{x}$ et tracer la courbe représentative.
Faire de même pour la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \log\frac{x+1}{x}.$$

Montrer que les graphes de $g$ et de $h$ sont symétriques par rapport au point $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.



Retour page 1

2. Déduire du A1 ou du B1 que la suite de terme général

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \quad (n \geqslant 2)$$

est croissante, et que la suite de terme général

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n \geqslant 2)$$

est décroissante.

3. Démontrer que, pour $n$ supérieur ou égal à 2, on a

$$U_n \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad V_n \geqslant 0$$

(on pourra utiliser A2).

4. On admet que toute suite croissante majorée a une limite, et que toute suite décroissante minorée a une limite.
En déduire que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ ont chacune une limite.
Démontrer que ces limites sont égales à un nombre $C$ de l'intervalle $]0\,;1[$. On donne $\log 2 = 0{,}70$ à $10^{-2}$ près par excès.

5. Montrer qu'il existe un nombre $\theta_n \in ]0\,;1[$ tel que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n = C + \frac{\theta_n}{n}.$$

Quelle valeur faut-il donner à $n$ pour être sûr d'avoir une valeur approchée de $C$ à $10^{-3}$ près par excès ?

# LXXXIII. Poitiers remplacement, série E

**Ex. 785.** ./1973/poitiersErem/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation définie dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$Z^2 + 4Z + 24\mathrm{i} - 3 = 0.$$

**Ex. 786.** ./1973/poitiersErem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

**2.** Préciser $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ et établir par récurrence que la dérivée d'ordre $n$ de $f$ est définie par $f^{(n)} = fP_n$, où $P_n$ est une fonction polynôme de degré $n$.

**3.** Établir la relation

$$P_n(x) + 2xP_{n-1}(x) + 2(n-1)P_{n-2}(x) = 0.$$

## Problème 235

./1973/poitiersErem/pb/texte

Soit $P$ le plan affine euclidien rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $f$ une application affine de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une involution affine ; déterminer l'ensemble des points de P invariants par $f$ et achever de caractériser $f$.

Retour page 1

**2.** On considère la courbe $(C_m)$ d'équation

$$5x^2 - 4y^2 - 20x + my = 0,$$

où $m$ est un nombre réel.
Déterminer l'équation réduite de $(C_m)$, la nature de $(C_m)$ et ses asymptotes.

**3.** Soit $(C'_m)$ la transformée de $(C_m)$ par l'application $f$.
Déterminer l'équation de $(C'_m)$ et en déduire que $(C'_0)$ peut être mise sous la forme

$$y = \frac{3x^2 + 20\sqrt{5}x}{12\sqrt{5}x + 40}.$$

Préciser les asymptotes de $(C'_0)$ et construire $(C'_0)$.

**4.** Évaluer l'aire de la portion de plan comprise entre $(C'_0)$, la droite d'équation $y = \frac{x\sqrt{5}}{20} + \frac{3}{2}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$.
Déterminer $\alpha$ pour que cette aire soit égale à $-1 + 3\sqrt{5}\mathrm{e}^{2{,}453}$. Donner une valeur approchée de $\alpha$.

# LXXXIV. Reims, série C

**Ex. 787.** ./1973/reimsC/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'x$ et $y'y$.
Soit $(D_1)$ la droite d'équation $x + \sqrt{3}y = 0$ et $(D_2)$ la droite d'équation $\sqrt{3}x - y = 0$.
Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan de coordonnées $x$ et $y$.
On appelle $M_1$ la projection, parallèlement à $x'x$, de $M$ sur $(D_1)$, et $M_2$ la projection, parallèlement à $y'y$, de $M$ sur $(D_2)$ ; $a$ et $b$ étant deux nombres réels non nuls, soit $M'(x'\ ;\ y')$ le point défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM_1} + b\overrightarrow{OM_2}.$$

**1.** Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

**2.** Lorsque les nombres $a$ et $b$ sont fixés, montrer que l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M$ fait correspondre le point $M'$ est une bijection affine que l'on notera $T_{(a,\ b)}$.

**3.** Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$ l'application $T_{(a,\ b)}$ est-elle involutive ?

**4.** Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$ l'application $T_{(a,\ b)}$ est-elle une rotation de centre $O$ ? Pour chaque couple $(a,\ b)$ trouvé, déterminer l'angle de cette rotation.

**Ex. 788.** ./1973/reimsC/exo-2/texte.tex

Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que $a < b$, on appelle $D$ le P.G.C.D. et $M$ le P.P.C.M. de $(a,\ b)$.
Trouver les couples $(a,\ b)$ tels que $M - D = 77$.

## Problème 236

./1973/reimsC/pb/texte

On désigne par $f_k$ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f_k(x) = \frac{\log x}{x^2} - kx,$$

et par $(C_k)$ la courbe représentative de $f_k$ dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé (courbe qu ?on ne demande pas d'étudier dans le cas général).
Dans tout le problème $k$ est un nombre réel vérifiant

$$0 \leqslant k \leqslant 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad k \in [0\,;1].$$

1. Pour $k \in [0\,;1]$ chercher la limite de $f_k(x)$ quand $x$ tend vers $0$, quand $x$ tend vers l'infini ; préciser les asymptotes à $(C_k)$. Faire la même étude (limites et asymptotes), pour $k = 0$.

2. Montrer que la fonction dérivée $f_k'$ de $f_k$ peut être définie par

$$f_k'(x) = \frac{\varphi_k(x)}{x^3},$$

où $\varphi_k(x) = 1 - kx^3 - 2\log x$.
Étudier les variations de $\varphi_k$. Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha_k$ tel que

$$\varphi_k(\alpha_k) = 0.$$

Montrer de plus que

$$1 \leqslant \alpha_k \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Déduire de l'étude de $\varphi_k$ le tableau de variations de $f_k$. Donner une expression de$f(\alpha_k)$ ne contenant pas de logarithme.

3. Écrire l'équation de la tangente $(D_k)$ à $(C_k)$ au point $M(x_0\ ;\ y_0)$. Montrer que pour $x_0$ fixé et $k$ décrivant l?intervalle $[0\,;1]$, il existe un point dont les coordonnées sont indépendantes de $k$ et qui appartient à toutes les droites $(D_k)$.

4. a) Construire $(C_0)$.

   b) Soit $h$ un réel tel que $h > 1$ ; en utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $S(h)$ de l?ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{P}$ tels que :

$$1 \leqslant x \leqslant h \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f_0(x).$$

   Quelle est la limite de $S(h)$ quand $h$ tend vers l?infini ?

# LXXXV. Reims, série E

**Ex. 789.** ./1973/reimsE/exo-1/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement, dans un repère orthonormé, la fonction numérique $f$, de la variable réelle $x$, définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}}},$$

$\mathrm{e}$ étant la base des logarithmes népériens.
Pour l'étude de la limite quand $x$ tend vers $+\infty$, on pourra écrire

$$f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right).$$

Des encadrements suivants :

$$2{,}718 < \mathrm{e} < 2{,}719 \qquad \text{et} \qquad 1{,}648 < \sqrt{\mathrm{e}} < 1{,}649,$$

déduire un encadrement à trois décimales de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$, puis de $f(1)$.
Donner de $f(1)$ une valeur approchée et l'incertitude correspondante.

**Ex. 790.** ./1973/reimsE/exo-2/texte.tex

On considère, dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, l'équation

$$Z^2 - (2 + \mathrm{i}c)Z + \mathrm{i}c + 2 - \mathrm{i} = 0,$$

où $c$ est un paramètre complexe.

1. Vérifier que $Z' = 1 + \mathrm{i}$ est solution de cette équation. Calculer l'autre solution, $Z''$.
   Déterminer $c$ pour que l'on ait soit $Z'' = Z'$, soit $Z'' = \overline{Z'}$, où $\overline{Z'}$ désigne le conjugué de $Z'$.
2. On pose maintenant $c = a + \mathrm{i}b$, où $a$ et $b$ sont deux réels.
   Exprimer, éventuellement à l'aide de $a$ et de $b$,

   a) la solution $Z''$,

b) Cos(Arg $Z'$), Sin(Arg $Z'$), Cos(Arg $Z''$) et Sin(Arg $Z''$) où Arg désigne l'argument.

3. Déterminer la forme algébrique des complexes $c$ pour lesquels Arg $Z'$ = Arg $Z''$ et retrouver la valeur de $c$ pour laquelle $Z'' = Z'$.
4. Déterminer la forme algébrique des complexes $c$ pour lesquels Arg $Z'$ = - Arg $Z''$ et retrouver la valeur de $c$ pour laquelle $Z'' = \overline{Z'}$.

## Problème 237

./1973/reimsE/pb/texte

On désigne par E un espace vectoriel de dimension trois sur $\mathbb{R}$, de base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
$\varphi$ est une application linéaire de E dans lui-même, $\mathscr{E}$ l'espace affine associé à E, de repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, $f$ est une application affine de $\mathscr{E}$ associée à $\varphi$.

A- On considère dans E l'application $\varphi$ définie par

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{j},\ \varphi(\vec{j}) = \vec{k},\ \varphi(\vec{k}) = \vec{0}.$$

On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$. ($\circ$ désigne la compositions des applications.)

1. Soit $\vec{V} = x\vec{k} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E, calculer $\varphi(\vec{V})$, $\varphi^2(\vec{V})$, $\varphi^3(\vec{V})$.
2. Déterminer
   a) les images respectives de E par $\varphi$, $\varphi^2$ et $\varphi^3$.
   b) les noyaux respectifs de $\varphi$, $\varphi^2$ et $\varphi^3$.

B- On suppose maintenant $\mathscr{E}$ euclidien et la base $\mathscr{B}$ orthonormée.
On considère dans $\mathscr{E}$, l'application $f$, associée à $\varphi$, qui au point $O$ fait correspondre le point $O'$ de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$.

1. Montrer que les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ de $m'$, image de $m(x\ ;\ y\ ;\ z)$ par $f$ sont

$$x' = 0,\ y' = x + 4,\ z' = y.$$

2. Soit (H) l'ensemble des points $m$ de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées sont

$$x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 4t$$

($t$ est un paramètre réel).
Donner une représentation paramétrique de $(C_1)$ et de $(C_2)$ images respectives de (H) par $f$ et $f^2 = f \circ f$.
Préciser la nature de (H), $(C_1)$ et $(C_2)$. Quelle est l'image, $(C_3)$, de (H) par $f^3 = f \circ f \circ f$ ?

3. a) Soit $g$ l'application qui au point $m(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ tel que

$$X = x,\ Y = y,\ Z = \frac{1}{2}z.$$

Soit $(\Gamma)$ l'image par $g$ de la courbe $(C_1)$ définie au B2.
Donner ses équations paramétriques et son équation cartésienne dans le plan $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ?

b) Représenter sur une même figure, les ensembles (H), $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ et $(\Gamma)$.

c) $t$ représente le temps ; déterminer les vecteurs vitesse et accélération des mobiles $m$ et $M$ à l'instant $t$, $m$ décrivant (H) et $M$ décrivant $(\Gamma)$.
Préciser la nature du mouvement de $m$.
A quels instants les vecteurs vitesse et accélération de $M$ sont-ils orthogonaux ?



Retour page 1

# LXXXVI. Rennes, série C

**Ex. 791.** ./1973/rennesC/exo-1/texte.tex

Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que

$$5^{2n}+5^n \equiv 0\,[13].$$

**Ex. 792.** ./1973/rennesC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par

$$f(x)=x+\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,$$

où le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien.
Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. (On prendra 2 cm comme unité de longueur.)

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$. Montrer que $f$ est impaire.
Étudier les variations de $f$.
Construire la courbe $(C)$.

**2.** On coupe la courbe $(C)$ par la droite $(\Delta_\lambda)$ d'équation

$$y=x+\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Montrer que $(\Delta_\lambda)$ coupe $(C)$, en général, en deux points $M_1$ et $M_2$ dont on déterminera les coordonnées en fonction de $\lambda$.
Calculer le produit des abscisses des points $M_1$ et $M_2$.

## Problème 238

./1973/rennesC/pb/texte

Le plan affine euclidien $\Pi$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$
Soient $T_1$ et $T_2$ les transformations de$\Pi$ dans $\pi$ telles que, si $(x\ ;\ y)$ sont les coordonnées d'un point quelconque $M$ de $\Pi$, $(x_1\ ;\ y_1)$ celles de $M_1=T_1(M)$ et $(x_1\ ;\ y_2)$ celles de $M_2=T_2(M)$ , on ait :

$$\begin{cases}x_1=x,\\ y_1=-\sqrt{2}x-y,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-x-\sqrt{2}y,\\ y_2=y.\end{cases}$$

1. a) On étudie l'ensemble des points $M$ de $\Pi-\{O\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des points de$\Pi$ distincts de l'origine O) tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}=\lambda_1\overrightarrow{OM},$$

où $\lambda_1$ désigne un nombre réel.
Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour $\lambda_1$ afin que cette condition soit satisfaite :

$$\lambda_1'=+1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1''=-1.$$

Déterminer l'ensemble $(\Delta_1')$, des points $M$ tels que $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM}$ et l'ensemble $(\Delta_1'')$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{OM_1}=-\overrightarrow{OM_1}$.
Montrer qu'à tout point $M$ de $\Pi$ correspond un couple unique de points $(M_1',\ M_1'')$, $M_1'\in(\Delta_1')$ et $M_1''\in(\Delta_1'')$ tel que

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1'}+\overrightarrow{OM_1''}.$$

Montrer que le milieu de $MM_1$ est sur une droite fixe ; faire une figure et décrire la transformation $T_1$.

b) Étudier de la même façon l'ensemble des points $M$ e $\Pi-\{O\}$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}=\lambda_2\overrightarrow{OM},$$

( $\lambda_2\in\mathbb{R}$).

Montrer qu'il n'existe que deux valeurs possibles pour $\lambda_2$ : $\lambda'_2$ et $\lambda''_2$. Déterminer les ensembles $(\Delta'_2)$ et $(\Delta''_2)$ tels que $\overrightarrow{OM_2} = \lambda'_2\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_2} = \lambda''_2\overrightarrow{OM_1}$.
Montrer qu'à tout point $M$ de $\Pi$ correspondent de manière unique de points $M_12 \in (\Delta'_2)$ et $M''_2 \in (\Delta'_2)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'_2} + \overrightarrow{OM'_2}.$$

2. On pose

$$T = T_2 \circ T_1 \qquad \text{et} \qquad P = T(M) = T_2\left[T_1(M)\right]$$

et on désigne par $(u\ ;\ v)$ les coordonnées de $P$. Calculer $u$ et $v$ en fonction de $x$ et $y$, puis $x$ et $y$ en fonction de $u$ et $v$.
Montrer analytiquement que l'image par $T$ d'une droite est une droite (on se donnera une droite par son équation cartésienne $ax + by + c = 0$).
Expliquer géométriquement le résultat.
Une droite peut-elle être parallèle à sa transformée ? Perpendiculaire à sa transformée ?

3. a) Soit les vecteurs $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{i} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$.
Montrer que $\overrightarrow{I}$ est un vecteur directeur d'une droite dont les points sont invariants par $T_1$ et que $\overrightarrow{J}$ est un vecteur directeur d'une droite invariante par $T_2$.
b) Soit $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de $M$ et $(U\ ;\ V)$ celles de $P = T(M)$ dans le??nouveau repère $(O,\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J})$. Calculer $U$ et $V$ en fonction de $X$ et $Y$, puis$X$et$Y$ en fonction de$U$ et $V$.
c) Soit $(H)$ l'hyperbole d'équation $XY = k$ ($k$ nombre réel donné) dans le?? nouveau repère $(O,\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J})$. Soit $(C)$ la transformée de $(H)$ par $T$. Déterminer les équations de $(()C) = T(H)$ d'une part dans le nouveau repère $(O,\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J})$ , d'autre part dans l'ancien repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Montrer que la courbe $(C)$ admet deux asymptotes qui sont les transformées par $T$ des asymptotes de $(H)$

# LXXXVII. Rennes, série E

**Ex. 793.** ./1973/rennesE/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1},$$

où le nombre e est la base des logarithmes népériens.
Étudier les variations de $f$.
Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère d'axes $x'Ox,\ y'Oy$.

**2.** Calculer l'aire de la partie du plan

$$A = \{(x,\ y)\ :\ 1 \leqslant x \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

**Ex. 794.** ./1973/rennesE/exo-2/texte.tex

Démontrer que si deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ d'un espace affine ont même centre de gravité, alors

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}.$$

Énoncer la reciproque de cette proposition. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

## Problème 239

./1973/rennesE/pb/texte

1. Le plan affine euclidien $(\Pi)$ est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Deux applications $g_1$ et $g_2$ de $(\Pi)$ dans $(\Pi)$ sont définies de la manière suivante :
   - si $z$ est le nombre complexe, affixe d'un point $M$ de $(\Pi)$ et $\overline{z}$ le conjugué de $z$,
   - si $z'_1$ est l'affixe de $M'_1 = g_1(M)$ et $z'_2$ celui de $M'_2 = g_2(M)$, on a

$$z'_1 = i\overline{z} \qquad \text{et} \qquad z'_2 = 3z - 1 + \mathrm{i}.$$



Retour page 1

Caractériser géométriquement les applications $g_1$ et $g_2$ et construire les points $M'_1$ et $M'_2$, homologues d'un point quelconque $M$.

2. Soit $f$ l'application de $(\Pi)$ dans $(\Pi)$ qui associe au point $M$ d'affixe $z$, le point $M'$ d'affixe $z' = \dfrac{z'_1 + z'_2}{2}$.
   Construire $M'$ et calculer les coordonnées $\left(x' \,;\, y'\right)$ de $M'$ en fonction des coordonnées $(x \,;\, y)$ de $M$.
   Montrer que $f$ est une bijection et définir analytiquement sa réciproque $f^{-1}$
3. Montrer que l'image par $f$ d'une droite $(D)$ d'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(D')$ dont on déterminera l'équation.
   Á quelle condition $a$ et $b$ doivent-ils satisfaire pour que $(D)$ et $(D')$ soient parallèles ?
   Montrer qu'il existe une droite $(D)$, et une seule, globalement invariante par $f$.
4. Montrer qu'il existe une seule translation $t$ de $(\Pi)$, et une seule application affine $\varphi$ de $(\Pi)$ dans $(\Pi)$ admettant le point $A(1 \,;\, 0)$ comme point fixe, telles que
$$f = t \circ \varphi.$$
   On déterminera $t$ par son vecteur directeur et $\varphi$ en donnant les expressions des coordonnées $(\zeta \,;\, \nu)$, du point $\mu = \varphi(M)$, en fonction des coordonnées $(x \,;\, y)$ de $M$.
   Déterminer l'ensemble $(\Delta)$ des points de $(\Pi)$ invariants par $\varphi$.
   Montrer que pour tout $M$ n'appartenant pas à $(\Delta)$, le droite $(M\mu)$ a une direction fixe.
   Calculer les coordonnées $(x_m \,;\, y_m)$ du point $m$, projection orthogonale de $M$ sur $(\Delta)$, en fonction de $x$ et $y$.
   Montrer qu'il existe une constant réelle $k$ telle que, pour tout $M$, $\overrightarrow{mM} = k\overrightarrow{m\mu}$.
   En déduire une nouvelle construction de $M' = f(M)$ connaissant $M$ (sans utiliser les résultats établis dans la première question).
5. On suppose le point $M$ animé d'un mouvement uniforme sur le cercle de $(\Pi)$, de centre $O$ et de rayon $r$ ; on suppose aussi que la vitesse angulaire est égale à 1 et qu'à l'instant 0, le point $M$ a pour coordonnées $(r \,;\, 0)$.
   Écrire les équations paramétriques du mouvement de $M$ en fonction du temps $t$ ; en déduire celles du mouvement $M' = f(M)$.
   Calculer, dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}'(t)$ de $M'$ à l'instant $t$.
   On suppose que $t$ varie de 0 à $2\pi$. Déterminer les instants auxquels les vecteurs vitesse de $M$ et de $M'$ sont égaux.
   Construire les points $M$ et $M'$ correspondants et les représentants d'origine $M$ et $M'$ de ces vecteurs vitesse.
6. Soit $\vec{e}_1 = (\vec{u} - \vec{v})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\vec{e}_2 = (\vec{u} + \vec{v})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Soit $(X \,;\, Y)$ les coordonnées dans $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ du point $M$ qui a pour coordonnées $(x \,;\, y)$ dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$, et $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.
   Écrire les coordonnées $\left(X' \,;\, Y'\right)$ de $M' = f(M)$ dans $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ en fonction de $t$, le point $M$, le point $M$ étant animé du mouvement circulaire uniforme étudié dans la question précédente.
   Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de $M'$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.
   Reconnaître la nature de cette courbe et la construire.

# LXXXVIII. Rennes remplacement, série C

Ex. 795. ./1973/rennesCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x \sin x.$$

1. $f'$ désignant la dérivée de $f$, montrer qu'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ que l'on calculera, tels que
$$\forall x \in [0\,;\pi],\ f'(x) = a\mathrm{e}^x \cos(x + b).$$



Retour page 1

2. Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
(On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}7 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} = 10 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\pi} = 13.)$$

3. Au moyen de deux intégrations par parties successives, calculer

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t.$$

En déduire l'aire de la partie du plan

$$A = \{(x\ ;\ y)\ :\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

**Ex. 796.** ./1973/rennesCrem/exo-2/texte.tex

Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n$ impairs tels que la fraction $\dfrac{n^3-n}{n+2}$ soit irréductible.

## Problème 240

./1973/rennesCrem/pb/texte

A- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée de E.
Soit $\varphi$ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

où $\theta$ est un nombre réel donné tel que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

1. a) Déterminer le noyau de $\varphi$.
   b) Montrer qu'il existe deux nombres réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ que l'on calculera, tels qu'il existe des vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non nuls de E vérifiant

   $$\varphi(\vec{u_1}) = \lambda_1\vec{u_1} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\vec{u_2}) = \lambda_2\vec{u_2}.$$

   Soit

   $$(\Delta_1) = \{\vec{u}\ :\ \varphi(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}\} \qquad \text{et} \qquad (\Delta_2) = \{\vec{u}\ :\ \varphi(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}\}.$$

   Montrer que $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont deux droites vectorielles.
   Donner une base $\vec{e_1}$ de $(\Delta_1)$ et $\vec{e_2}$ de $(\Delta_2)$.
   On examinera en particulier les cas $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
   c) Montrer que $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont orthogonales.
   d) Quelle est la nature de $\varphi$ ?
   e) Écrire la matrice $\varphi$ par rapport à la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
2. Montrer en utilisant la multiplication des matrices $2\times 2$, que $\varphi$ est la produit d'une rotation vectorielle d'angle $-\theta$ par une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $(D)$ que l'on déterminera.

B- Soit $\mathscr{E}$ un plan affine dont E est l'espace vectoriel associé. $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs de la base $\mathscr{B}$.
Soit $F$ une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $F(O) = O$ et que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ soit la matrice de l'application linéaire associée $f$.

1. Montrer que $F$ est une bijection affine.
   $(x\ ;\ y)$ étant les coordonnées d'un point $M$ de $\mathscr{E}$ et $(x'\ ;\ y')$ celles de son transformé $M' = F(M)$, montrer que

   $$x' = x + y \qquad \text{et} \qquad y' = x - y.$$

2. Montrer que la matrice de $f$ est le produit de la matrice d'une application $\varphi_0$ correspondant à une valeur particulière $\theta_0$ que l'on déterminera, par un scalaire positif.
   En déduire que $F$ est la composée de deux transformations ponctuelles simples permutables.
3. En identifiant le plan affine $\mathscr{E}$ au plan de représentation du corps des complexes, montrer que si l'on note $z$ l'affixe de $M$, $z'$ celle de $M' = F(M)$ et $\overline{z}$ le conjugué de $z$, on a $z' = a\overline{z}$, $a$ étant un nombre complexe dont on donnera la partie réelle et la partie imaginaire, ainsi que le module et l'argument.
4. a) Une courbe (H) de $\mathscr{E}$ a pour équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Quelle est l'équation de la transformée de (H) par $F$ dans le même repère ?
   b) Une courbe (L') de $\mathscr{E}$ a pour équation
   $$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4 = 0$$
   dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Quelle est, dans le même repère, l'équation de la courbe (L) dont la transformée par $F$ est (L') ?
   Reconnaître la nature de (L) et en déduire celle de (L').

## LXXXIX. Rennes remplacement, série E

**Ex. 797.** ./1973/rennesErem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log|4-x|.$$

**Ex. 798.** ./1973/rennesErem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable $x$ définie par
$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{(1-x)^2}.$$

1. Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un plan $\Pi$ rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.
2. Á $\lambda$, nombre réel supérieur ou égal à 2, on associe la partie du plan $\Pi$ :
   $$(\mathscr{A}_\lambda) = \{(x\ ;\ y)\ :\ 2 \leqslant x \leqslant \lambda,\ f(x) \leqslant y \leqslant 2x+1\}.$$
   Sur le graphique demandé dans la première question, représenter $(\mathscr{A}_3)$ au moyen de hachures. Calculer la'ire $\varphi(\lambda)$ de $(\mathscr{A}_\lambda)$.
   Chercher la limite de $\varphi(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

### PROBLÈME 241 ./1973/rennesCrem/pb/texte

A- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée de E.
Soit $\varphi$ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où $\theta$ est un nombre réel donné tel que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

1. a) Déterminer le noyau de $\varphi$.
   b) Montrer qu'il existe deux nombres réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ que l'on calculera, tels qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non nuls de E vérifiant
   $$\varphi(\overrightarrow{u_1}) = \lambda_1\overrightarrow{u_1} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\overrightarrow{u_2}) = \lambda_2\overrightarrow{u_2}.$$
   Soit
   $$(\Delta_1) = \{\vec{u}\ :\ \varphi(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}\} \qquad \text{et} \qquad (\Delta_2) = \{\vec{u}\ :\ \varphi(\vec{u}) = \lambda_2\vec{u}\}.$$
   Montrer que $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont deux droites vectorielles.
   Donner une base $\overrightarrow{e_1}$ de $(\Delta_1)$ et $\overrightarrow{e_2}$ de $(\Delta_2)$.
   On examinera en particulier les cas $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.



Retour page 1

c) Montrer que $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont orthogonales.

d) Quelle est la nature de $\varphi$ ?

e) Écrire la matrice $\varphi$ par rapport à la base $(\vec{e_1},\ \vec{e_2})$.

2. Montrer en utilisant la multiplication des matrices $2 \times 2$, que $\varphi$ est la produit d'une rotation vectorielle d'angle $-\theta$ par une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $(D)$ que l'on déterminera.

B- Soit $\mathscr{E}$ un plan affine dont E est l'espace vectoriel associé. $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

Soit $F$ une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $F(O) = O$ et que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ soit la matrice de l'application linéaire associée $f$.

1. Montrer que $F$ est une bijection affine.
   $(x\ ;\ y)$ étant les coordonnées d'un point $M$ de $\mathscr{E}$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ celles de son transformé $M' = F(M)$, montrer que
   $$x' = x + y \qquad \text{et} \qquad y' = x - y.$$
2. Montrer que la matrice de $f$ est le produit de la matrice d'une application $\varphi_0$ correspondant à une valeur particulière $\theta_0$ que l'on déterminera, par un scalaire positif.
   En déduire que $F$ est la composée de deux transformations ponctuelles simples permutables.
3. En identifiant le plan affine $\mathscr{E}$ au plan de représentation du corps des complexes, montrer que si l'on note $z$ l'affixe de $M$, $z'$ celle de $M' = F(M)$ et $\overline{z}$ le conjugué de $z$, on a $z' = a\overline{z}$, $a$ étant un nombre complexe dont on donnera la partie réelle et la partie imaginaire, ainsi que le module et l'argument.
4. a) Une courbe (H) de $\mathscr{E}$ a pour équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Quelle est l'équation de la transformée de (H) par $F$ dans le même repère ?

   b) Une courbe (L') de $\mathscr{E}$ a pour équation
   $$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4 = 0$$
   dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Quelle est, dans le même repère, l'équation de la courbe (L) dont la transformée par $F$ est (L') ?
   Reconnaître la nature de (L) et en déduire celle de (L').

## XC. Rouen, série C

**Ex. 799.** ./1973/rouenC/exo-1/texte.tex

Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 5 as, 3 rois et 2dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame *coûte* un point.
Du paquet on extrait simultanément 2 cartes et l'on désigne par $X$ le total des points marqués. On suppose que lse tirages sont équiprobables.

**1.** Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ ?

**2.** Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de $X$.

**Ex. 800.** ./1973/rouenC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation
$$x^2 + \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}.$$
(La classe de congruence de $n$, modulo 5, étant notée $\dot{n}$.)

**2.** Déterminer les entiers relatifs $n$ tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égale à 3.



Retour page 1

## PROBLÈME 242

./1973/rouenC/pb/texte

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) On se propose d'étudier les variations de la fonction $f$ définie dans $\mathbb{R}$ par

$$y=f(x)=\frac{3x^2-2x+11}{4(x-1)}.$$

On pourra chercher des constantes réelles $a,\ b,\ c$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}\ :\ f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}.$$

Construire la courbe représentative (C ).

b) Déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$. Calculer l'aire, $S$, du domaine plan limité par la courbe (C ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=5$.

2. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on désigne par $\mathscr{T}$ la transformation ponctuelle définie analytiquement par

$$x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}\qquad\text{et}\qquad y'=-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{12}{5}.$$

a) Déterminer l'ensemble des points du plan affine invariants par $\mathscr{T}$ .

b) Montrer que $\mathscr{T}$ est une isométrie involutive du plan affine.

c) Déterminer l'"image par $\mathscr{T}$ de la droite du plan affine qui a pour équation $x=1$.

d) Préciser la nature de $\mathscr{T}$ et en déduire (sans nouveaux calculs) ll'image de la droite $(\Delta)$du plan affine qui a pour équation $2x-y-1=0$.

e) Montrer que (C) est invariante par $\mathscr{T}$ .

3. Soit $\rho$ la rotation vectorielle transformant

$$\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

en $\vec{u'}(1\ ;\ 0)$. Soit $R$ la rotation du plan affine associée à $\rho$ et laissant invariant le point $\Omega\,(1\ ;\ 1)$.

a) Quel est le transformé de $(\Delta)$ par $R$?

b) Déterminer analytiquement cette transformation $R$.

c) Quel est le transformé (H) de (C) par $R$?

d) Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de la courbe (H) dont on précisera la nature et en déduire les coordonnées des sommets et des foyers de la courbe (C ) dont on précisera la nature.

# XCI. Rouen, série E

Ex. 801.

./1973/rouenE/exo-1/texte.tex

1. Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ qui à $x$ associe

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+\log|x-1|.$$

Calculer $f(0)$. Étudier les variations de $f$. En utilisant cette étude, étudier le signe de $f(x)$. On ne demande pas de tracer la courbe représentative de $f$.

2. Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ qui à $x$ associe

$$g(x)=x\log|x-1|.$$

Étudier les variations de $g$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Préciser les points d'intersection avec l'axe $x'x$.

**Ex. 802.** ./1973/rouenE/exo-2/texte.tex

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

L'espace affine est rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. On prendra comme unité 1 cm.

Les plans $(x'Ox,\ y'Oy)$ et $(y'Oy,\ z'Oz)$ sont respectivement le plan horizontal et frontal de projection.

Sur l'épure, le point $O$ sera placé au centre de la feuille et l'axe $y'Oy$ sera parallèle au petit côté de la feuille.

Construire les points $A(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ 2\ ;\ 4)$, $C\left(1\ ;\ \dfrac{13}{2}\ ;\ 10\right)$.

Montrer que le plan P contenant $A$, $B$ et $C$ est debout.

Construire l'épure d'un cercle de centre $B$ et de rayon 3 contenu dans P.

Á l'aide d'un rabattement, on construira les projections des points du cercle de cote 2, ainsi que sa tangente en ces points.

## PROBLÈME 243

./1973/rouenE/pb/texte

A- Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une application $f$ de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ associe au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$.

Cette application est définie par la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & m-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $m$ et $p$ sont des paramètres réels.

On notera $O' = f(O)$.

Si P est la plan vectoriel associe à $\mathscr{P}$, quelle est la matrice de l'application vectorielle $\varphi$ associée à $f$ ?

Déterminer $a$ et $b$ pour que

$$\begin{pmatrix} m-2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & m-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m-2)^2+\dfrac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{(m-2)^2+\dfrac{1}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer $a^2+b^2$.

Reconnaître les applications vectorielles associées aux deux dernières matrices. En déduire que $f$ est une similitude directe, dont on déterminera le centre $\omega$ et le rapport $k$.

Pour quelles valeurs de $m$, $f$ est-elle une rotation ?

Préciser, pour chacune de ses valeurs, l'angle de la rotation correspondante.

B- Aux point $M$ et $M'$, on associe respectivement les nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$.

Montrer que $z$ et $z'$ sont liés par la relation

$$z' = \left[(m-2) + \frac{\mathrm{i}}{2}\right] z + p\mathrm{i}.$$

En partant de cette relation, retrouver la nature de la transformation $f$.

Calculer $m$ pour qu'une détermination de l'angle $\theta$ de la similitude soit égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

Calculer alors $k$ et les coordonnées de $\omega$ en fonction de $p$.

On notera $g_p$ la similitude correspondante.

C- 1. Soit $(\gamma)$ la courbe d'équation $y^2 = x^2 - 2x - 3$.
Montrer que $(\gamma)$ est une hyperbole.
Tracer $(\gamma)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. On suppose $p = 0$ et l'on note donc $g_0$ la similitude $g_p$ correspondante.
Soit $(\gamma')$ la courbe transformée de $(\gamma)$ par $g_0$.
Déterminer l'équation de $(\gamma')$ relativement à un système d'axes portés par ses asymptotes. Quelle est la nature de $(\gamma')$ ? Tracer la courbe $(\gamma')$.



Retour page 1

D- On suppose dorénavant que $p = (m-3)^2$. Déterminer la relation indépendante de $m$ liant les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $\omega$. Montrer que

$$Y^2 = \frac{-2X^3}{2X+1}.$$

Tracer l'ensemble $\mathscr{U}$ des points $\omega$ quand $m$ décrit $\mathbb{R}$.

## XCII. Rouen remplacement, série C

**Ex. 803.** ./1973/rouenCrem/exo-1/texte.tex

On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $z$ par

$$z' = f(z) = (1+\mathbf{i})\overline{z} + 1 - \mathbf{i},$$

$\overline{z}$ désignant le conjugué de $z$.
On désigne par $F$ l'application du plan complexe dans lui-même, qui au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = f(z)$.

1. Existe-t-il des points invariants ?
2. Existe-t-il des droites invariantes ?
3. Montrer que $F$ est une similitude inverse dont on donnera le centre, le rapport et l'axe.

**Ex. 804.** ./1973/rouenCrem/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$$y = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}.$$

Montrer que $(\Gamma)$ est la réunion de parties de coniques dont on précisera les éléments caractéristiques.

### Problème 244

./1973/rouenCrem/pb/texte

1. Soit $E_2$ un espace vectoriel muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $\varphi$ l'application linéaire de $E_2$ dans $E_2$ de matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\varphi$ est involutive. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi$. Donner avec précision la nature de $\varphi$.
2. Soit $\mathscr{E}_2$ le plan affine euclidien de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ associé à $E_2$. Déterminer l'application affine $f$ telle que $f(O) = O$ et admettant $\varphi$ comme endomorphisme associé.
   Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$ transformé de $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, par $f$.
3. Dans $\mathscr{E}_2$, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ définie par

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

   Montrer qu'il s'agit d'une hyperbole, dont on déterminera le centre, les foyers, l'excentricité et les asymptotes.
4. Par la transformation $f$, la courbe $(\mathscr{C})$ a pour transformée la courbe $(\mathscr{C}')$ ; établir l'équation de $(\mathscr{C}')$. On trouvera une équation de la forme $y = g(x)$.
   Étudier les variations de $g(x)$ et tracer $(\mathscr{C}')$ ; mettre en évidence l'existence d'une asymptote oblique par rapport aux axes.
   Montrer que la connaissance de $(\mathscr{C})$ et de la transformation $f$ permettait l'étude directe de $(\mathscr{C}')$.

Retour page 1

# XCIII. Rouen remplacement, série E

**Ex. 805.** ./1973/rouenErem/exo-1/texte.tex

Soit $f_\lambda$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f_\lambda(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

1. Soit $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe représentant dans $(\mathscr{P})$ les variations de $f_\lambda$. Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ ont un point commun unique et qu'elles y admettent la même tangente.
2. On se place maintenant dans le cas où $\lambda = 1$.
   a) Étudier la fonction $f_1$. On tracera la courbe $(\mathscr{C}_1)$ représentant les variations de $f_1$ dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer

   $$\int_0^\alpha f_1(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha > 0).$$

   Si on appelle $S(\alpha)$ ce nombre, calculer

   $$\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha).$$

**Ex. 806.** ./1973/rouenErem/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé, on considère la rotation $\mathscr{R}$ dont le centre $\omega$ a pour coordonnées 1 et 2 et dont l'angle admet pour détermination $\dfrac{\pi}{3}$ et *l'homothétie* $\mathscr{H}$ dont le centre est le point $\omega'(-2\ ;\ 1)$ et dont le rapport est -2.
Écrire les équations de la transformation produit $\mathscr{H} \circ \mathscr{R}$ et déterminer sa nature géométrique et ses éléments caractéristiques.

### Problème 245

./1973/rouenErem/pb/texte

Dans le plan complexe $P$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on étudie l'application $T_t$ qui, au point $m$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M$ d'affixe $Z$, avec

$$Z = t\mathrm{i}z - 3\mathrm{i} + 2t, \qquad t \text{ étant un réel.}$$

**1.** Montrer que $T_t$ possède un point invariant $I_t$ dont on déterminera les coordonnées en fonction de $t$.
Quelle est la nature de $T_t$ et quels sont ses éléments caractéristiques ?

**2.** $T_t$ est-elle bijective ?
Peut-on déterminer $t$ pour que $T_t$ soit involutive ?
$T_t$ est-elle une application affine ?
La composition des applications est-elle une loi de composition interne dans l'ensemble des applications $T_t$, $t$ décrivant $\mathbb{R}$ ?

**3.** Dans cette troisième question, $t$ est un réel non nul.
Quelle est la nature de la transformée $(D')$ de la droite $(D)$ d'équation $ax + by + c = 0$ ?
Donner son équation. Que peut-on dire de $(D)$ et $(D')$ ?

# XCIV. Strasbourg, série C

**Ex. 807.** ./1973/strasbourgC/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations et tracer la courbe représentative $(C)$ de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
En déduire que pour $a > 0$ et distinct d'une valeur que l'on précisera, il existe un seul réel $b$, différent de $a$, tel que $a\mathrm{e}^b = b\mathrm{e}^a$.

**2.** Calculer l'aire du domaine délimité par $(C)$, son asymptote et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$, où $t$ désigne un réel strictement positif. Cette aire admet-elle une limite lorsque $t$ tend vers $+\infty$ ?

Retour page 1

Ex. 808. ./1973/strasbourgC/exo-2/texte.tex

On considère les applications $u$, $v$ et $w$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$u : z \longmapsto u(z) = \overline{z} + \frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3}},$$

$$v : z \longmapsto v(z) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z} + (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}),$$
$$w = v \circ u.$$

**1.** Calculer $w(z)$.

**2.** Montrer que $u$ et $v$ sont involutives.

**3.** On associe respectivement à $u$, $v$, $w$ les transformations ponctuelles $U$, $V$, $W$ d'un plan affin euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Quelle est la nature des transformations $U$, $V$, $W$ ? Indiquer les éléments caractéristiques de $W$.

## Problème 246

./1973/strasbourgC/pb/texte

On considère l'ensemble D des quadruplets d'entiers naturels $(a,\ b,\ c,\ d)$ qui vérifient les conditions :

$$ad - bc = 1, \tag{1}$$

$$a < b. \tag{2}$$

**1.** a) Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$, le quadruplet $(1,\ n,\ 0,\ 1)$ est-il un élément de D ?

b) Démontrer que le produit $abd$ est différent de zéro, que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont irréductibles et que l'on a $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. (On rappelle que « $\frac{a}{b}$ est irréductible » signifie que $a$ et $b$ dont premiers entre eux.)
Dans la suite P désigne un espace vectoriel réel rapporté à la base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$. Soit F l'ensemble des applications $f$ de P dans P qui associent au vecteur $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, le vecteur $\overrightarrow{V} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}$ tel que

$$\begin{cases} X = ax + cy, \\ Y = bc + dy, \end{cases}$$

où $(a,\ b,\ c,\ d) \in$ D.

**2.** 2°) On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V_0} = 4\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j}.$$

Chercher les éléments $f$ de F tels que $f(\overrightarrow{v_0}) = \overrightarrow{V_0}$.
(On pourra, par exemple, se ramener à la résolution de l'équation $4\lambda - 9\mu = 1$ où $\lambda$ et $\mu$ seront à déterminer d'abord dans $\mathbb{Z}$). En déduire qu'il existe une seule application $f$ répondant à la question.

**3.** Soient $f$ et $g$ deux éléments quelconques de F.

a) Montrer que $f$ est une bijection de P dans P. L'application réciproque est-elle un élément de F ?

b) Montrer que $f \circ g$ est un élément de F.

c) Dans le cas où P est euclidien et la base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ orthonormée, $f$ peut-elle être une isométrie ?

**4.** a) Déterminer, suivant le choix de f dans F, l'ensemble des vecteurs de P invariants par $f$.

b) Soit $f$ un élément donné de F. Quelle est l'image $(\Delta')$ par $f$de la droite vectorielle $(\Delta)$ d'équation $y = \alpha x$ ?

c) Quelle est la réunion des images $(\Delta')$ lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}^+$ ?
(On pourra représenter $(\Delta')$ par une droite affine $(D')$ passant par un point fixe $O$.)



Retour page 1

# XCV. Strasbourg, série E

**Ex. 809.** ./1973/strasbourgE/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes l'équation

$$\left(\frac{z-2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}\right)^3+\left(\frac{z-2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}\right)^2+\left(\frac{z-2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}\right)+1=0,$$

où i est tel que $\mathrm{i}^2=-1$.

**Ex. 810.** ./1973/strasbourgE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application affine $S$ définie par les équations

$$X=\frac{1}{5}(-3x+4y+4)\qquad\text{et}\qquad Y=\frac{1}{5}(4x+3y-2).$$

**1.** Démontrer que $S$ est une isométrie.

**2.** Montrer qu'il y a une droite de points invariants.

**3.** Caractériser géométriquement l'application $S$.

## Problème 247

./1973/strasbourgE/pb/texte

A- 1. a) Soit $g$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Étudier les variations de la fonction $g$ et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On précisera en particulier la tangente au centre de symétrie.

b) Montrer que $h(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}-x\right)$ est une fonction strictement croissante de $x$ et que l'équation $h(x)=0$ n'a qu'une racine réelle. En déduire la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2. Montrer que la fonction $g$ admet une fonction réciproque, notée $f$, définie par $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$, où $\log u$ désigne le logarithme népérien de $u$. Tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de la fonction $f$.

B- Dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application $T_a:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ qui au point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ associe le point $T_a(M)$ de coordonnées

$$X=ax\qquad\text{et}\qquad Y=y+\log a,$$

où $a$ est un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que $T_a$ est une application affine. Peut-on trouver $a$ tel que $T_a$ soit une isométrie ?
2. Montrer que $T_a\circ T_b=T_{ab}$. En déduire que l'ensemble des applications $T_a$ muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif $G$.

C- Soit $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_a(x)=\log(x+\sqrt{x^2+a^2}),$$

avec $a$ réel strictement positif.
On notera $(\Gamma_a)$ la courbe représentative de $f_a$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que la transformée de $(\Gamma_1)$ par $T_a$ est la courbe courbe $(\Gamma_a)$. En déduire que pour tout $a$, la courbe $(\Gamma_a)$ a un centre de symétrie, $I_a$.
   Tracer la courbe décrite par $I_a$ lorsque $a$ varie.
2. Montrer que deux courbes quelconques, $(\Gamma_a)$ et $(\Gamma_b)$ se déduisent l'une de l'autre par une transformation appartenant au groupe $G$.



Retour page 1

D- Soit $T'_a$ la transformation affine qui laisse le point $O$ invariant et ayant même application linéaire associé que $T_a$.
En construisant les transformés de quelques points de $(\Gamma_1)$ par $T'_2$ et $T'_{\frac{1}{2}}$, trouver la formes des courbes $T'_2(\Gamma_1)$ et $T'_{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et en déduire la forme des courbes $(\Gamma_2)$ et $\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right)$.
Tracer sur une même figure $(T'_2(\Gamma_1))$, $T'_{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $(\Gamma_1)$, $(\Gamma_2)$ et $\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right)$.

# XCVI. Sud Viêt-Nam, série C

**Ex. 811.** ./1973/sudvietnamC/exo-1/texte.tex

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 - 5z + (8 - 6\mathrm{i}) = 0.$$

**Ex. 812.** ./1973/sudvietnamC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé, soit I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et J le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
$H_1$ désigne l'homothétie de centre I et de rapport -2, $k$ désignant un nombre réel strictement positif, soit $H_2$ l'homothétie de centre J et de rapport $k$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $H_2\ circ H_1$, composée des homothéties $H_1$ et $H_2$ suivant les valeurs de $k$.

## Problème 248

./1973/sudvietnamC/pb/texte

A- Soit $(\mathscr{A}, +, .)$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la loi interne, notée $+$, définie par

$$(\forall f \in \mathscr{A}),\ (\forall g \in \mathscr{A}),\ (\forall x \in \mathbb{R}) :\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

et pour la loi externe, notée ., définie par

$$(\forall f \in \mathscr{A}),\ (\forall \lambda \in \mathbb{R}),\ (\forall x \in \mathbb{R}) :\ (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

1. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les ensembles des applications respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que les lois définies dans $\mathscr{A}$ munissent les deux parties $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ d'une structure d'espace vectoriel réel.
2. Déterminer $\mathscr{P} \cap \mathscr{I}$, intersection des ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$
3. Soit $F$ un élément quelconque de $\mathscr{A}$.
On considère les deux éléments $p_F$ et $i_F$ de $\mathscr{A}$ définis par
$$(\forall x \in \mathbb{R}) :\ p_F(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) + F(-x)\right],$$
et
$$(\forall x \in \mathbb{R}) :\ i_F(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - F(-x)\right].$$
Démontrer que $P_F \in \mathscr{P}$ et $i_f \in \mathscr{J}$ ; en déduire que $\mathscr{A}$ est somme directe de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{I}$.

B- Dans cette question, on considère le cas particulier où $F$ est la fonction exponentielle de base e et l'on désigne par $c$ et $s$ les deux applications $p_f$ et $i_F$ associées à $F$.

1. Étudier les variations des fonctions
$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} s : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}.$$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(c(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(s(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right)$.
Tracer sur le même graphique les courbes (C) et (S) d'équations cartésiennes
$$((\mathrm{C})) :\ y = c(x) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{S}) :\ y = s(x).$$

Retour page 1

3. Déduire du B1 l'existence d'une application $s^{-1}$, réciproque de $s$.
   Déterminer $s^{-1}(a)$. Pour cela on pourra résoudre l'équation
   $$(x \in \mathbb{R}): \ s(x) = a.$$
   On aura intérêt à effectuer le changement de variable d'inconnue définie par $\mathrm{e}^x = u$.
4. Soit D($\lambda$) le domaine du plan délimité par (C), (S) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ ($\lambda \in /GR$).
   Déterminer l'aire du domaine D($\lambda$).

C- Soit $M$ un point mobile du plan affine euclidien rapporté au repère $(O, \ \vec{I}, \ \vec{J})$ orthonormé. Á chaque instant $t$, les coordonnées de $M$ sont définies par
$$t > 0, \qquad x = c(t), \ y = s(t).$$
a) Déterminer le trajectoire du mobile $M$.
b) Soit $\vec{V}(t)$ la vitesse de $M$ à l'instant $t$. Déterminer l'ensemble (H) des points $m$ tels que, à chaque instant, on ait $\overrightarrow{Om} = \vec{V}(t)$.
c) Déterminer la nature du mouvement de $M$ sur la trajectoire.

# XCVII. Toulouse, série C

**Ex. 813.** ./1973/toulouseC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer les nombres complexes $Z$ tels que
$$Z^2 = -7 + 24\mathrm{i}.$$
**2.** Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation
$$z^2 - (1 - 2\mathrm{i})z + 1 - 7\mathrm{i}.$$

**Ex. 814.** ./1973/toulouseC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par
$$f(x) = \frac{x-1}{\mathrm{e}^x}.$$
**1.** Étudier les variations de $f$ et construire la courbe représentative $(C)$ de cette fonction dans un plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 3 cm pour unité de longueur).

**2.** Montrer que l'on peut trouver deux constantes réelles, $a$ et $b$, telles que la fonction $F$, définie par
$$F(x) = \frac{ax+b}{\mathrm{e}^x},$$
soit une primitive de $f$.
En déduire l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$, la courbe $(C)$ et la droite d'équation $x = m$, $m$ désignant un nombre réel strictement supérieur à 1. Quelle est la limite de cette aire lorsque $m$ tend vers plus l'infini ?

### Problème 249

./1973/toulouseC/pb/texte

On sait que l'ensemble $F$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
L'application constante d'image $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, l'application cosinus et l'application sinus sont notées respectivement $e_1, \ e_2, \ e_3$ ; le sous-espace vectoriel de F engendré par $e_1$, $e_2$ et $e_3$ est noté E. Ainsi, E est l'ensemble des applications $f$ pour lesquelles il existe un triplet $(a_1, \ a_2, \ a_3)$ de nombres réels tel que :
$$f = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$
ou encore, quel que soit $t$,
$$f = a_1 . \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \cos t + a_3 \sin t.$$

1. Une application de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ est notée et définie par :

$$(f,\ g) \longmapsto f \perp g = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que, lorsque $i$ et $j$ prennent respectivement toutes les valeurs $1,\ 2$ et 3, on a :

$$e_i \perp e_j = 0 \quad \text{pour } i \neq j \qquad \text{et} \qquad e_i \perp e_i = 1.$$

   b) Si $f = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ et $g = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ sont deux éléments de E ($a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ sont donc des nombres réels), exprimer $f \perp g$ uniquement à l'aide des six nombres $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$.

   c) En déduire que l'application $(f,\ g) \longmapsto f \perp g$ est un produite scalaire sur E et que, pour ce produit scalaire, $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée.
   Désormais, E est rapporté à cette base.

2. a) L'application dérivée de $f$ est notée $f'$. Démontrer que si $f$ appartient à E, il en est de même de $f'$ et exprimer les coordonnées de $f'$ à l'aide des coordonnées $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ de $f$.

   b) $x$ étant un élément de $\mathbb{R}$ et $g$ un élément de F, un nouvel élément de F est noté $g_x$ et défini par :

$$\forall t, \qquad g_x(t) = g(x-t).$$

   Démontrer que si $g$ appartient à E, il en est de même de $g_x$ et exprimer les coordonnées de $g_x$ dans la base $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ à l'aide de celles de $g$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, et à l'aide de $x$.

3. $f$ et $g$ étant éléments de E, un nouvel élément de F est noté $f \star g$ et défini par :

$$\forall x, \qquad (f \star g)(x) = f \perp g_x.$$

   a) Démontrer que $f \star g$ appartient E et exprimer ses coordonnées à l'aide de celles de $f$ et de $g$.

   b) L'application $(f,\ g) \longmapsto f \star g$ est donc une loi de composition interne de E. Démontrer que cette loi est commutative.

   c) Démontrer que pour cette loi, E possède un élément neutre noté $\delta$ dont on calculera les coordonnées.

   d) Trouver les éléments $f$ de E qui ont un symétrique $\overline{f}$ pour la loi $\star$ et exprimer les coordonnées de $\overline{f}$ à l'aide de celles de $f$.

   e) Démontrer qu'il existe un élément $d$ de E tel que, pour tout $f$ de E , $d \star f = f'$ et calculer ses coordonnées.

4. $\omega$ étant un nombre réel non nul, $f$ étant un élément de E, on se propose de rechercher les fonctions y de E vérifiant

$$y'' - \omega y = f$$

   où $y''$ désigne dérivée seconde de $y$.
   En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer que cette équation est équivalente à une équation du type $h \star y = f$ ; expliciter les coordonnées de $h$. Montrer, sans calculer les coordonnées de $y$, que l'équation proposée admet une solution et une seule.

## XCVIII. Toulouse, série E

Ex. 815. ./1973/toulouseE/exo-1/texte.tex

Soit la fonction numérique $f$, de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = 1 \quad \text{pour } x \leqslant 0,$$
$$f(x) = x\log x + 1 \quad \text{pour } 0 < x < 1,$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{x-1} \quad \text{pour } x \geqslant 1.$$

Étudier la continuité de $f$ et construire sa courbe représentative.

Ex. 816. ./1973/toulouseE/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}.$$

1. Trouver deux entiers $a$ et $b$ tels que

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}.$$

   En déduire, pour $x$ appartenant à $]0\,;+\infty[$,

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On considère la suite $s$ définie, pour $n$ naturel non nul, par

$$s(n)=F(1)+F(2)\cdots+F(n).$$

   Cette suite admet-elle une limite quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Problème 250

./1973/toulouseE/pb/texte

Soit la plan affine euclidien de repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère l'application affine $t$ telle que l'image de l'origine $O$ soit le point $O'$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$, et que les points $A(1\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 1)$ aient respectivement pour image les points $A'(3\ ;\ 2)$ et $B'(2\ ;\ 3)$.

A- 1. Quelle est la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de l'endomorphisme $T$ associé à $t$ ?

2. Exprimer en fonction des coordonnées $x$ et $y$ d'un point $M$, les coordonnées $x'$ et $y'$ de son image $M'$ par $t$.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est invariant par l'endomorphisme $T$ et que le point $C(0\ ;\ -1)$ est invariant par $t$.
   Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme $T$ ?
   Quel est l'ensemble des points invariants par $t$ ?

4. Soit les vecteurs $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.
   Quelle est la nature de chacune des restrictions de $T$ aux droites vectorielles $(D)$ et $(D')$ de bases respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

B- Soit le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Exprimer dans ce repère, en fonction des coordonnées $X$ et $Y$ du point $M$, les coordonnées $X'$ et $Y'$ de son image $M'$ par $t$.

2. On considère le cercle $(\Gamma)$ de centre $O$ et de rayon 1.
   Former l'équation dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ de la courbe $(\Gamma')$ transformée par $t$ du cercle $(\Gamma)$.
   Quelle est la nature de la courbe $(\Gamma')$ ?
   Déterminer les sommets de cette courbe, et la dessiner avec soin.

C- 1. On considère les sommes

$$S=1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx,$$

   et

$$S'=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx,$$

   $(n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$.
   On pose $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
   On suppose $z\neq 1$.
   Montrer que

$$S+\mathrm{i}S'=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

   En déduire que

$$S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

et

$$S' = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Calculer une valeur numérique approchée de $S$ et $S'$ pour $n = 10$ et $x = \frac{\pi}{10}$, avec la précision des tables.

2. Soit sur le cercle $(\Gamma)$ les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n$ tels que, quel que soit l'entier $p$, $0 \leqslant p \leqslant n$, l'une des mesure de l'angle
$(\vec{i},\ \overrightarrow{OM_p})$ est le nombre $p\frac{\pi}{n}$.
Déterminer, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, en fonction de $n$, les coordonnées du barycentre de ces points affectés de coefficients tous égaux à 1.
3. On désigne par $M'_0,\ M'_1,\ M'_2,\ \dots, M'_n$ les images respectives de ces points par $t$. Calculer, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, en fonction de $n$, les coordonnées du barycentre des ces points affectés des coefficients tous égaux à 1.
4. Quelles sont les limites des ces dernières coordonnées quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

# XCIX. Toulouse remplacement, série C

**Ex. 817.** ./1973/toulouseCrem/exo-1/texte.tex

On rappelle que l'ensemble E des fonctions polynômes de variable réelle, de degré inférieur ou égal à 2, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition des fonctions et la multiplication des fonctions par un nombre réel.

1/ Soit $\varphi$ l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\times\ \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,\ Q) &\longmapsto \varphi(P,\ Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire dans l'espace vectoriel E.

2/ Soit $P_0,\ P_1,\ P_2$ les fonctions polynômes de E définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = x^2.$$

Calculer les normes de $P_0,\ P_1,\ P_2$ et les produits scalaires $\varphi(P_0,\ P_1)$, $\varphi(P_1,\ P_2)$, $\varphi(P_0,\ P_2)$.
Déterminer trois fonctions polynômes $Q_0,\ Q_1,\ Q_2$, telles que

a) $(Q_0,\ Q_1,\ Q_2)$ soit une base orthonormée de E.
b) $P_0$ et $Q_0$ soient colinéaires.
c) $P_1$ et $Q_1$ soient colinéaires.

**Ex. 818.** ./1973/toulouseCrem/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, deux points $M_1$ et $M_2$ sont en mouvement par rapport au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sur deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de centre $O$ et de rayons $R$ et $\frac{1}{R}$ ($R$ est un nombre réel plus grand que 1) de sorte que $(\vec{i},\ \overrightarrow{Om_1})$ et $(\vec{i},:\overrightarrow{OM_2})$ ont, à chaque instant $t$, $(0/leqt \leqslant 2\pi)$, de déterminations respectivement égales à $t$ et à $-t$.
Montrer que les coordonnées du milieu $M$ de $(M_1,\ M_2)$ sont

$$x = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\cos t \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{R}\right)\sin t.$$

Quelle est la trajectoire de $M$ ? Donner ses éléments géométriques (sommets, foyers, ...) et la représentation graphique pour $R = 2$.
Montrer que le vecteur vitesse de $M$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

## 🏛PROBLÈME 251

./1973/toulouseCrem/pb/texte

$\mathbb{R}_+^\star$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on appelle $(\Gamma)$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $(x \longmapsto \log x)$ et, pour $a \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$, on appelle $(\Gamma_a)$ la courbe représentative de la fonction logarithme de base $a$ $(x \longmapsto \log_a(x))$.

A- 1. a) Soit $h$ l'homothétie de rapport $k$, de centre $O$. Calculer l'équation de l'image $(\Gamma'_a)$ de $(\Gamma_a)$ par $h$. $(k \neq 0)$.

b) Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{v}\,(0\ ;\ \alpha)$. Calculer l'équation de l'image $(\Gamma''_a)$ de $(\Gamma'_a)$ par $t$.

c) Peut-on déterminer $\alpha$ en fonction de $k$ et $a$ pour que $(\Gamma''_a)$ passe par le point $I\,(1\ ;\ 0)$ ?

d) Lorsque $\alpha$ existe, montrer qu'il existe un nombre $b$, que l'on calculera en fonction de $k$ et $a$ tel que $(\Gamma''_a) = (\Gamma)$.

2. On suppose $a \neq b$, $a \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$, $\dfrac{\log a}{\log b} > 0$.

Déduire de la première question qu'il existe une homothétie $H$ par laquelle $(\Gamma'_b)$ est l'image de $(\Gamma_a)$. Déterminer le rapport de $H$ et les coordonnées de son centre en fonction de $a$ et $b$.

3. Montrer que toute courbe $(\Gamma_a)$ est l'image de $(\Gamma)$ soit par une homothétie, soit par une similitude inverse.

B- On suppose $a > 1$ et $a \neq \mathrm{e}$. D'après la question A2, $(\Gamma)$ a pour image $(\Gamma_a)$ par une homothétie $H$ dont le centre $\omega_a$ a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = \frac{\log(\log a)}{1 - \log a}.$$

On se propose de déterminer l'ensemble des points $\omega_a$.

1. Soit $g$ la fonction définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}, & f(x) = \dfrac{\log x}{1-x}, \\ f(1) = -1. \end{cases} .$$

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Étudier sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^\star - \{1\}$, son sens de variation, ses limites.

2. Déduire, de l'étude de $f$, l'ensemble des points $\omega_a$.

ℹLa partie B peut être traitée en admettant les résultats de A qui y sont rappelés.

# C. Toulouse remplacement, série E

**Ex. 819.** ./1973/toulouseErem/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les applications affines $f_1$ et $f_2$ du plan vers lui-même définies respectivement par

$$f_1 \begin{cases} x' = x + y - 1, \\ y' = x - y + 1 \end{cases}, \qquad f_2 \begin{cases} x' = y + 2, \\ y' = x + 1. \end{cases}$$

**1.** Définir de même $f_2 \circ f_1$.

**2.** Á tout point $m$ du plan les applications $f_1$, $f_2$ et $F_2 \circ f_1$ associent respectivement les points $M_1 = f_1(m)$, $M_2 = f_2(m)$ et $M_3 = f_2 \circ f_1(m)$.
On note $f$ l'application qui, au point $m$, associe le point $M$ défini par

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} - \overrightarrow{MM_3} = \vec{0}.$$

Montrer que les coordonnées $X$ et $Y$ du point $M$en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $m$ sont

$$X = 3y - 2 \qquad \text{et} \qquad Y = x - 2y + 2.$$

**3.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.



Retour page 1

**Ex. 820.** ./1973/toulouseErem/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = (\sqrt{3}-1)z - 1 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(5 - 3\sqrt{3}).$$

Préciser la nature de cette transformation, déterminer son point double.
Si $A$ et $B$ ont pour homologue $A'$ et $B'$, comparer les distances $AB$ et $A'B'$ et déterminer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

## Problème 252

./1973/toulouseErem/pb/texte

Dans tout le problème, on désigne par $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}.$$

A- 1. Montrer qu'il existe deux rationnels $a$ et $b$ tels que

$$\frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} = ax + \frac{b}{x - \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{b}{x + \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

2. Étudier les variations de la fonction $f$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
3. Calculer pour $t \in \left]0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculer $I(0{,}5)$ avec la précision des tables.
4. Calculer la quantité $J(n)$ définie pour $n \in \mathbb{N} - \{0,\ 1\}$ par

$$J(n) = \int_1^n \left[\mathrm{e}^{-x} f'(x) - \mathrm{e}^{-x} f(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

et la limite

$$J = \lim_{n \to +\infty} J(n).$$

B- On désigne par D ls sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 1\}.$$

1. Montrer que le fonction $g$ définie par

$$g(x) = 3x - f(x)$$

est strictement croissante sur D.
2. On désigne par $\Phi$ l'ensemble des fonctions $\varphi$ définies sur D et vérifiant

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant 3\,|y - x|\,.$$

a) Montrer que la restriction à D de la fonction logarithme népérien appartient à $\Phi$.
b) Montrer que les fonctions de $\Phi$ sont continues sur D.
c) Montrer que si $\varphi$ appartient à $\Phi$, il existe un nombre $M$ tel que

$$|\varphi(x)| \leqslant 3\,|x| + M.$$

Retour page 1

# Chapitre XVI

# 1974.

## Sommaire



## I. Aix-Marseille, série C

**Ex. 821.** ./1974/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0, y_0)$ tel que :

$$37x_0 + 23y_0 = 1$$

En utilisant ce couple particulier déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de :

$$37x + 23y = 1.$$

Ex. 822. ./1974/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On désigne par $s$ l'application de P dans P qui à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'=(1+\mathrm{i})z$.

**1.** Préciser la nature géométrique de $s$ et indiquer ses éléments caractéristiques.

**2.** Soit $a$ un nombre complexe réel et $A$ le point d'affixe $a$.
Déterminer l'ensemble

$$E=\{M\in \mathrm{P}\mid A,\ M,\ M'\quad \text{sont alignés}\}.$$

## Problème 253

./1974/aixmarseilleC/pb/texte

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ , des fonctions continues au point $O$.
On désigne par $\mathscr{G}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$, des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients réels.
On définit dans $\mathscr{E}$ une addition et une multiplication par un nombre réel notées $+$ et . respectivement par

$$\forall f\in\mathscr{E},\quad \forall f\in\mathscr{E},\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$\forall f\in\mathscr{E},\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}\qquad (\lambda.f)(x)=\lambda f(x).$$

On rappelle que $\mathscr{E}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A- 1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

2. Dans tout le problème on considère les deux applications
$\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sigma(x)=2x$
$\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall f\in\mathscr{E},\quad \Phi(f)=f+f\circ\sigma$.

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ calculer $[\Phi(f)](x)$.

b) Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

c) Montrer l'inclusion $\Phi(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}$.

d) Montrer l'égalité $\Phi(\mathscr{G})=\mathscr{G}$.

B- Soit $f\in\mathscr{E}$ définie de la manière suivante :
$\forall x\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe $n$ appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x=2^n\qquad,\qquad f(x)=(-1)^n$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe aucun $n$ appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x=2^n\qquad,\qquad f(x)=0.$$

a) Déterminer $\Phi(f)$.

b) Est-ce que $\Phi$ est injective ?

C- On note $\overline{0}$ la fonction nulle définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\qquad \overline{O}(x)=0$.
Soit $\ker\Phi$ le noyau de $\Phi$ : $\ker\Phi=\left\{f\in\mathscr{E}|\Phi(f)=\overline{0}\right\}$

a) Établir que $\forall f\in\ker\Phi\ \ f(0)=0$.

b) Établir par récurrence sur $n$ entier naturel que :

$$\forall f\in\ker\Phi,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad f(x)=(-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

On désigne par $\Phi_{\mathscr{F}}$ la restriction de $\Phi$ à $\mathscr{F}$.

c) Montrer que $\ker\Phi_{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\cap\ker\Phi$.

d) Déterminer $\ker\Phi_{\mathscr{F}}$.



Retour page 1

D- Soit $g \in \mathscr{G}$ définie de la manière suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^{\star} = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n} \qquad , \qquad g(x) = \frac{1}{n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe aucun $n \in \mathbb{N}^{\star} = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n} \qquad , \qquad g(x) = 0.$$

a) Montrer que $g \in \mathscr{F}$.

b) S'il existe $f \in \mathscr{E}$ telle que $\Phi(f) = g$ établir une relation entre $f\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)$ et $f\left(\frac{1}{4^n}\right)$.

c) Soit la suite numérique de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^{\star}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}\ u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
En déduire que $u_n \longrightarrow +\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

d) Montrer que $g$ n'est l'image par $\Phi$ d'aucun élément de $\mathscr{F}$.
Est-ce que $\Phi_{\mathscr{F}}$ est surjective ?

## II. Aix-Marseille, série C remplacement

**Ex. 823.** ./1974/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

On donne la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, où $\mathrm{e}$ désigne « la base du système des logarithmes népériens ».

**1.** Montrer que quel que soit $n$ entier naturel, $u_n \geqslant 0$.

**2.** Montrer que $u$ est décroissante.

**3.** Démontrer que, quel que soit $n$ entier naturel,

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^1 x^n\ ddx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la convergence de la suite $u$ dont on précisera la limite.

**Ex. 824.** ./1974/aixmarseilleCrem/exo-2/texte.tex

$(x\ ;\ y)$ désigne un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$, auquel on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ; on note $\overline{z}$ le conjugué de $z$.

**1.** Pour quelles valeurs du nombre complexe $z$, peut-on calculer le nombre complexe $Z$ défini par

$$Z = \frac{z + 4\mathrm{i}}{\overline{z} - 4\mathrm{i}}\ ?$$

Dans ce cas calculer $|Z|$ (module du nombre complexe $Z$).

**2.** Pour quelles valeurs de nombre complexe $z$, $Z$ est-il réel ?
Pour quelles valeurs de nombre complexe $z$, la partie réelle de $Z$ est-elle nulle ?

## Problème 254

./1974/aixmarseilleCrem/pb/texte

Soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base d'un plan vectoriel $P$ sur $\mathbb{R}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $P$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ;

On désigne par $\mathscr{J} : P \to P$ l'application identique et par $\Omega$ l'endomorphisme nul $(\forall \vec{x} \in P, \quad \Omega(\vec{x}) = \vec{0})$.
On suppose que $f \neq \mathscr{J}$ et $f \neq \Omega$.
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine associé à $P$ et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de $\mathscr{P}$ ; $F$ est l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ associée à $f$ telle que $F(O) = O$.

A. Dans cette partie, mais seulement dans cette partie, on suppose :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a^2 + bc = 0. \end{cases}$$

1. Est-ce que $f$ est bijectif ? Montrer que $f \circ f = \Omega$. Déterminer $F \circ F$.
2. Vérifier qu'il existe des endomorphismes $f$ autres que $\Omega$ vérifiant les conditions posées au début de cette partie.
   Montrer que tout vecteur de $P$, d'image non nulle par $f$, constitue avec son image, une base de $P$.
   Écrire la matrice de $f$ dans cette base.
3. Montrer que le noyau de $f$ est l'image de $f$.

B. Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$. On pose $M' = F(M)$ et $M'' = F(M')$.

1. Montrer que le centre de gravité $G$ du triangle $\{M,\ M',\ M''\}$ est $O$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1. \end{cases}$$

   Montrer dans ces conditions,

$$\forall M \in \mathscr{P}, \qquad \forall N \in \mathscr{P}, \qquad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{M''N''} = \vec{0}.$$

2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que

$$\begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

   et que $M_0(1\ ;\ 1)$ ait pour image par $F$, $M_0'(1\ ;\ -1)$.
3. Dans les conditions précédentes, former une équation dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de l'ensemble

$$E = \{M \in \mathscr{P} \mid M,\ M',\ M_0' \quad \text{sont alignés}\}$$

   en supposant $\mathscr{P}$ euclidien et le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $E$.

C. Dans cette partie, on suppose $a = 0,\ b = 1,\ c \neq 0,\ d = 1 - c$.
On désigne par $M_1$ le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $x_1 = 1,\ y_1 = 0$.
On considère la suite $(M_n)_{n \geqslant 1}$ de point de $\mathscr{P}$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad M_{n+1} = F(M_n).$$

En désignant par $x_n$ et $y_n$ les coordonnées de $M_n$, calculer $x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3$.
Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad y_{n+2} = cy_n + (1 - c)y_{n+1}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ où $u_n = y_{n+1} - y_n$ est une suite géométrique.
Écrire $u_n$ en fonction de $n$ et $c$. Exprimer $y_n$ puis $x_n$ en fonction de $n$ et $c$.
Discuter l'existence d'une limite dans $\mathscr{P}$ pour la suite $(M_n)_{n \geqslant 1}$.



Retour page 1

# III. Aix-Marseille, série E remplacement

**Ex. 825.** ./1974/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

On donne la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, où e désigne « la base du système des logarithmes népériens ».

**1.** Montrer que quel que soit $n$ entier naturel, $u_n\geqslant 0$.

**2.** Montrer que $u$ est décroissante.

**3.** Démontrer que, quel que soit $n$ entier naturel,

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 x^n\ ddx\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la convergence de la suite $u$ dont on précisera la limite.

**Ex. 826.** ./1974/aixmarseilleErem/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier les variations et construire la courbe représentative, dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}.$$

Tracer la tangente au point d'abscisse $0$.
Montrer que cette courbe admet un centre de symétrie.

**2.** Déterminer une primitive continue de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}.$$

En remarquant que $f(x)+g(x)=1$, déterminer une primitive continue de $f$.

Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$.

En déterminer la valeur numérique (approximation permise par les tables).

# IV. Amiens, série C & E remplacement

**Ex. 827.** ./1974/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Linéariser $\sin^5 x$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

**Ex. 828.** ./1974/amiensCrem/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1-\mathrm{i}\tan\theta}{1+\mathrm{i}\tan\theta}$ $\theta$ étant un réel donné.

**2.** Dans le plan affine euclidien $P$ rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application $T$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'=T(M)$ d'affixe $z'=\dfrac{1-\mathrm{i}\tan\theta}{1+\mathrm{i}\tan\theta}.\overline{z}$.

Déterminer l'ensemble des points invariants de $P$ par l'application $T$. En déduire la nature de l'application $T$ dont on précisera les éléments.

Retour page 1

# V. Abidjan, série E

**Ex. 829.** ./1974/abidjanE/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{V}$ ub espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soit

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme $p$ de $\mathscr{V}$.

**1.** Montrer que $p$ est une projection vectorielle.

**2.** Déterminer l'image et le noyau de $p$.

**Ex. 830.** ./1974/abidjanE/exo-3/texte.tex

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère trois points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.
Quelle est l'affixe du centre de gravité $G$ du triangle $ABC$ ?

**Partie A.**
On considère le nombre complexe : $\Delta = (a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc)$.

**1.** Donner trois points $A$, $B$ et $C$ distincts tels que $\Delta \neq 0$.

**2.** Donner trois points $A$, $B$ et $C$ distincts tels que $\Delta = 0$.

**3.** Soit $a = 0$, $b = \mathrm{i}$ et $c = \dfrac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\Delta$. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**Partie B.**
On se propose de chercher les points M du plan tels que :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} + \frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} + \frac{\overrightarrow{MA}}{MA^2} = \vec{0} \qquad \text{(XVI. 1)}$$

**1.** a) Si $z$ désigne l'affixe de $M$, montrer que la relation XVI. 1 est équivalente à :

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} = 0 \qquad \text{(XVI.2)}$$

b) Montrer que l'ensemble des points $M$ vérifiant XVI. 1 se compose d'un ou de deux points.

c) Quand $\Delta = 0$ , que représente $M$ pour le triangle $ABC$ ?

d) Quel est l'ensemble des points $M$ dans le cas où : $a = 2\mathrm{i}$ ; $b = 1$ et $c = -1$ ?

**2.** On considère les triangles $ABC$ correspondant à : $a = (k+1)\mathrm{i}$ ; $b = k$ et $c = -k$ où $k \in \mathbb{R}$. Calculer $\Delta$. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe du point $M$ vérifiant XVI. 1.

a) Montrer que, si $\Delta \leqslant 0$, le point $M$ appartient à l'un des axes de coordonnées.

b) Lorsque $\Delta > 0$, exprimer $x$ et $y$ en fonction de $k$. Montrer que l'ensemble des points $M$ est la conique d'équation :

$$3x^2 - 6y^2 + 6y - 1 = 0.$$

c) Donner les éléments principaux de cette conique.

# VI. Besançon, série C

**Ex. 831.** ./1974/besanconC/exo-1/texte.tex

Pour quelle valeur du paramètre *positif* $a$ l'endomrphisme $\varphi$ du plan vectoriel $\mathrm{E}_2$, dont la matrice dans une base de $\mathrm{E}_2$ est :

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -2 & 1-a \end{pmatrix}$$

est-il involutif ?
Montrer alors que $\varphi$ est une symétrie vectorielle par rapport à une droite $(D)$ suivant la direction d'une droite vectorielle $(\Delta)$.
Déterminer $(D)$ et $(\Delta)$ par leurs équations cartésiennes.

**Ex. 832.** ./1974/besanconC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Étudier cette fonction et construire sa représentation graphique $(C)$ dans plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; pour calculer la limite de la fonction $f$ au voisinage de $+\infty$, on pourra poser $u = x^2$.
2. En utilisant un intégration par parties, trouver une primitive de la fonction $f$. En déduire l'aire de la partie du plan comprise entre $x'Ox$, $(C)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 1)$.
   Cette aire admet-elle un limite lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

## Problème 255

./1974/besanconC/pb/texte

A- On associe à tout couple $(a,\ b)$ de nombres complexes, l'application $f_{a,\ b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_{a,\ b}(z) = az + b\overline{z},$$

où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de $z$.

1° Démontrer que l'application $f_{a,\ b}$ est linéaire, $\mathbb{C}$ étant considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2° a) Démontrer que si le nombre $Az + B\overline{z}$ ($A$ et $B$ étant deux nombres complexes) est nul pour tout $z$, alors $A = B = 0$ (on pourra pour cela donner à $z$ les valeurs 1 et i).

b) Traduire alors par un système de deux relations entre $a,\ b, \overline{a}$ et $\overline{b}$ la condition pour que $f_{a,\ b}$ soit involutive.

c) Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,\ 0}$ involutives) ?

B- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Étant donné $\alpha$ de $\left]-frac\pi 2\,;+\frac{\pi}{2}\right]$, on considère l'application S qui, au point $M$ image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), fait correspondre le point $N$ image du nombre complexe $Z = X + \mathrm{i}Y$ ($X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$) tel que :

$$Z = f_{a,\ b}(z) \quad \text{avec} \quad a = 0 \quad \text{et} \quad b = \cos 2\alpha + \mathrm{i} \sin 2\alpha \quad (\alpha \text{ donné}).$$

1. Établir les relations qui donnent $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$ et réciproquement $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.
   Montrer que S est une transformation involutive du plan.
2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est une droite $(\Delta)$ dont on déterminera une équation. Pour tout point $M$ transformé par S démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est normal à la droite $(\Delta)$.
3. Déterminer l'ensemble des points $I$ milieux des bipoints $(M,\ N)$. Préciser la nature de la transformation S.



Retour page 1

4. On suppose, dans cette question , que $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

   a) Soit (H) la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 4$. Indiquer la nature de (H).

   b) Construire cette courbe dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Soit (H') la courbe déduite de (H) par la transformation S ; donner l'équation de (H') sous la forme $Y = f(X)$ et construire, dans le même repère, la courbe (H').

   c) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par (H'), la droite $(\Delta)$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 2\ k > 2$. Déterminer $k$ pour que cette aire soit égale à $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

C- On suppose maintenant que le point $M$ est animé d'un mouvement dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le mouvement est défini par :

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\right). \end{cases}$$

1° Quelle est la trajectoire du point mobile $M$ ? (On précisera le sens de parcourt).

2° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du point $M$ à l'instant $t$. Préciser dans quels intervalles le mouvement est accéléré, retardé.

3° Déterminer les dates $t$ auxquelles : $\left\|\vec{V}\right\| = 2$. Donner les coordonnées de $\vec{V}$ à l'une de ces deux dates.

## VII. Besançon, série E

**Ex. 833.** ./1974/besanconE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}$$
   pour tout entier non nul $n$.
   Trouver son terme général et donner sa limite.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$v_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} - 1$$
   pour tout entier non nul $n$.
   Déterminer le réel $\alpha$ tel que la suite de terme général $t_n = v_n + \alpha$ soit une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   Que peut-on dire des suites : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
   Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
3. Étudier la suite définie par :
$$w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{w_{n-1}}$$
   pour tout entier non nul $n$.
   ($\mathrm{e}$ est le nombre réel qui vérifie : $\log \mathrm{e} = 1$.)
   Donner l'expression de $w_n$ en fonction de $n$ et la limite de $(w_n)$.
   (On pourra calculer $\log w_n$ pour tout entier naturel $n$.)



Retour page 1

Ex. 834. ./1974/besanconE/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $x'x$ et $y'y$ les droites affines passant par $O$ et dirigées par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ respectivement.
$z$ étant un nombre complexe que l'on pourra prendre sous la forme $x + \mathrm{i}y$, d'image $M$, on pose :

$$Z' = \frac{1}{2}(z + \mathrm{i}\overline{z}) \qquad \text{et} \qquad Z'' = \frac{1}{2}(z - \mathrm{i}\overline{z}).$$

($\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$.)

1. Déterminer le module de $Z'$ et $Z''$.
   Quand $Z'$ et $Z''$ ne sont pas nuls, déterminer l'argument de $Z'$ et celui de $Z''$.
   Démontrer que les images $M'$ et $M''$ de $Z'$ et $Z''$ sont les projections orthogonales de $M$, sur les bissectrices du couple de droites $(x'x,\ y'y)$.
2. $M$ décrit l'ensemble $\mathscr{H}$ des points tels que :

$$z^2 + \overline{z}^2 = 2a^2$$

   ($a$ est un réel, non nul, donné).
   Identifier et construire $\mathscr{H}$. Calculer l'aire du triangle $OMM'$.

## Problème 256

./1974/besanconE/pb/texte

$\Pi$ est un plan affine associé au plan vectoriel P.
Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de P.
Soit $\mathscr{R} = (A,\ \mathscr{B})$ un repère cartésien de $\Pi$, associé à la base $\mathscr{B}$.
On donne dans $\Pi$ les points :

$$B(1\ ;\ 0)\ ;\ C(0\ ;\ 1)\ ;\ A'(b\ ;\ c)\ ;\ B'(c\ ;\ a)\ ;\ C'(a\ ;\ b)\ ;\ A''(c\ ;\ b)\ ;\ B''(a\ ;\ c)\ ;\ C''(b\ ;\ a)$$

A) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont des réels tels que : $\qquad \alpha + \beta + \gamma = 1.$

1. Calculer les coordonnées du barycentre $X$ du système pondéré :

$$(A,\ \alpha),\ (B,\ \beta),\ (C,\ \gamma).$$

   En déduire les coordonnées du centre de gravité $G$ du triangle $ABC$.
2. $a,\ b,\ c$ sont des réels tels que : $\qquad a + b + c = 1.$
   a) On suppose $a,\ b,\ c$ deux à deux distincts.
   Le triplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ prenant sa valeurs dans l'ensemble

$$\{(a,\ b,\ c),\ (b,\ c,\ a),\ (c,\ a,\ b),\ (a,\ c,\ b),\ (c,\ b,\ a),\ (b,\ a,\ c)\}$$

   déterminer les six barycentres $X$ correspondants.
   Placer les résultats dans le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\beta$ | $b$ | $c$ | $a$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $\alpha$ | $c$ | $a$ | $b$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| Barycentres | | | | | | |

   b) On suppose $b = c$, $a \neq b$.
   Le triplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ prenant sa valeur dans l'ensemble

$$\{(a,\ b,\ b),\ (b,\ b,\ a),\ (b,\ a,\ b)\}$$

   déterminer les barycentres correspondants.
3. Vérifier que $G$ est centre de gravité des triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$.
4. Représenter le triangle $ABC$ et les six barycentres dans chacun des cas suivants :

$$\text{Figure } F_1 \quad a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \; c=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Figure } F_2 \quad a=-\frac{1}{3} \quad b=\frac{2}{3} \quad c=\frac{2}{3}$$

$$\text{Figure } F_1 \; a=\frac{1-\sqrt{6}}{3} \; b=\frac{\sqrt{6}+5}{6} \; c=\frac{\sqrt{6}-1}{6}$$

On prendra pour faire ces figures :

$$AB \;:\; 12 \text{ cm} \qquad AC \;:\; 6 \text{ cm} \qquad BC \;:\; 9 \text{ cm}$$

$$\sqrt{5} \approx 2{,}24 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

B) $(A,\ B,\ C)$ est un repère affine, il existe une application affine $\sigma'$ unique et une application affine $\sigma''$, de $\Pi$ dans lui-même, telles que :

$$\sigma'(A)=A', \qquad \sigma'(B)=B', \qquad \sigma'(C)=C'$$

$$\sigma''(A)=A'', \qquad \sigma''(B)=B'', \qquad \sigma''(C)=C''$$

$s'$ et $s''$ sont des endomorphismes de P associés à $\sigma'$ et $\sigma''$, $S'$ et $S''$ sont leurs matrices dans la base $\mathscr{B}$.

1. Prouver que $G$ est invariant par $\sigma'$ et $\sigma''$.
2. Déterminer les matrices $S'$ et $S''$.
3. On pose $b=a+u$, $c=a+v$ avec $uv \neq 0$.
   Quelle relation a-t-on entre $a$, $u$ et $v$ ? Vérifier que $S'$ et $S''$ prennent les formes :
   $$S'=\begin{pmatrix} v-u & -u \\ -v & u-v \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S''=\begin{pmatrix} -v & u-v \\ v-u & -u \end{pmatrix}.$$
4. $\sigma$ est la symétrie affine par rapport à $AG$, de direction $BC$. Montrer que, dans la base $\mathscr{B}$, l'application linéaire $s$ associée à $\sigma$ admet pour matrice :
   $$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Vérifier que $\sigma \circ \sigma' = \sigma''$ et que les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont homologues par $\sigma$.

C) Dans cette partie, on se propose d'étudier $\sigma'$.

1. Démontrer que, pour tout couple $(u,\ v)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $(u,\ v) \neq (0,\ 0)$, on a $u^2-uv+v^2>0$. Dans la suite, on pose $k^2=u^2-uv+v^2$ avec $k>0$ et on suppose de plus que $u.v \neq 0$.
2. Montrer que la matrice $S'$ a pour carré : $S'^2=k^2\mathrm{I}$, où I est la matrice unité d'ordre 2.
   En déduire que $S'$ est inversible est calculer $S'^{-1}$.
3. On suppose $k=1$.
   a) $s'$ est un symétrie vectorielle. Déterminer les vecteurs de P invariants par $s'$, ainsi que ceux qui se transforment en leur opposé.
   b) Montrer que $s'$ est une symétrie affine. On mettra en évidence, sur la figure $F_1$, les éléments de cette symétrie affine (points invariants et direction) en ne faisant appel qu'à des considérations géométriques.
   c) Étudier le cas $u=v$ (figure $F_2$). Identifier $\sigma''$ dans ce cas.



Retour page 1

## VIII. Besançon Nancy Reims & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 835.** ./1974/besanconerem/exo-1/texte.tex

On considère la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

où $\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de $x$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ et déterminer la fonction dérivée.

**2.** Montrer que

$$f(x) = x + 2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Trouver les limites de $f$ aux bornes du domaine de définition.

**3.** Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Ex. 836.** ./1974/besanconerem/exo-2/texte.tex

Les entiers $\overline{xy}$ et $\overline{yx}$ sont écrits en base 4. Déterminer les couples $(x,\ y)$ tels que

$$\begin{cases} \overline{yx} - \overline{xy} = \alpha \\ x + y + 3 = \overline{xy} \end{cases}$$

$\alpha$ étant un élément de $\mathbb{N}$.

Écrire en base 10, puis en base 2, chacun des nombres $\overline{3x3y}$ ainsi obtenus et supposés écrits en base 4.

## IX. Bordeaux, série C

**Ex. 837.** ./1974/bordeauxC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer le plus grand diviseur commun $d$ des nombres :

$$a = 4\ 420 \qquad b = 2\ 772$$

2. Déterminer les restes dans la division par 5 des entiers naturels : $12^d$, $12^a$, $12^b$.

**Ex. 838.** ./1974/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Soit un espace vectoriel E, muni de la base $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et soit $f$ l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda$ réel, on désigne par $E_\lambda$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

**1.** Montrer que si $\lambda$ est différent de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{4}$, $E_\lambda$ est égal à $\{\vec{0}\}$.

**2.** Montrer que $E_{\frac{1}{2}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{I} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et que $E_{\frac{1}{4}}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{J} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
Vérifier que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base $\mathscr{B}'$ de E.

**3.** A partir du vecteur $\vec{u_0} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, qu'on exprimera en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$, on définit une suite de vecteurs par la relation $\overrightarrow{u_{n+1}} = f(\vec{u_n})$.
Quelles sont dans la base $\mathscr{B}'$ les coordonnées de $\vec{u_n}$ ?
Quelles sont dans la base $\mathscr{B}$ les coordonnées de $\vec{u_n}$ ?



Retour page 1

## Problème 257

./1974/bordeauxC/pb/texte

**1.** Étudier la fonction $f$ de la variable réelle $t$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.
Construire la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2.** $x$ étant un nombre réel positif ou nul, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que $F$ est définie pour tout $x$ positif ou nul et que $F$ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,;+\infty[$. (*On ne cherchera pas à calculer explicitement* $F$.)
En déduire le sens de variation de $F$.

b) Démontrer que : $\forall x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que le fonction $F$ est bornée.
En déduire que $K$ admet une limite $K$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. (*On ne cherchera pas à déterminer* $K$.)

c) En déduire que $F$ définit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;K[$.
Construire la courbe représentative de $F$.

**3.** $x$ étant un nombre réel positif ou nul on note $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Exprimer $G$ à l'aide de la fonction $F$. Démontrer que $G$ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et montrer que la fonction dérivée de $G$ est

$$x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

b) Étudier la fonction $\varphi$ définie pour $x$ réel positif ou nul par :

$$\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4+x^2} - 1.$$

Démontrer l'existence de deux nombres réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que

$$0 < \alpha_1 < \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 < \alpha_2 < 2$$

vérifiant $\varphi(\alpha_1) = 0$ et $\varphi(\alpha_2) = 0$.

c) En déduire la variation de $G$.
Construire la courbe représentative de $G$.

N.B. – On précisera avec le plus grand soin les théorèmes invoqués.

# X. Bordeaux remplacement, série C

Ex. 839. ./1974/bordeauxcrem/exo-1/texte.tex

On désigne par $a$, $b$ $c$ trois chiffres de la numération décimale tels que

$$1 \leqslant a < b < c \leqslant 9.$$

On considère les trois nombres $x = \overline{abc}$, $y = \overline{bca}$ et $z = \overline{cab}$.

**1.** Montrer que $x$, $y$, $z$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $4(b-a) = 3(c-b)$.

**2.** En déduire les trois nombres $x$, $y$, $z$ dans ce cas (on trouvera deux solutions).

**Ex. 840.** ./1974/bordeauxcrem/exo-2/texte.tex

$x$ étant un réel strictement positif donné, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^x \sin^{2n} t \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^x \sin^{2n} t \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Trouver une relation entre $J_n$, $I_n$ et $I_{n+1}$.

**2.** En intégrant par parties, calculer $J_n$ en fonction de $I_{n+1}$.
En déduire une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$.

**3.** Calculer $I_0$ et montrer que l'on peut ainsi calculer $I_n$ et $J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Problème 258

./1974/bordeauxcrem/pb/texte

On considère les fonctions numériques $\alpha$ et $\beta$ de la variable réelle $t$ définies par

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\left(a^t + a^{-t}\right)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\left(a^t - a^{-t}\right)$$

où $a$ est un nombre réel strictement positif, différent de 1.

A- 1. Montrer que la fonction $\alpha$ est paire et que la fonction $\beta$ est impaire.

2. Montrer que pour $t_1$ et $t_2$ réels quelconques on a

$$\alpha(t_1)\alpha(t_2) + \beta(t_1)\beta(t_2) = \alpha(t_1 + t_2),$$

$$\alpha(t_1)\beta(t_2) + \beta(t_1)\alpha(t_2) = \beta(t_1 + t_2).$$

3. En déduire $\alpha(t_1 - t_2)$ et $\beta(t_1 - t_2)$ en fonction de $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $\beta(t_1)$, et $\beta(t_2)$.

B- Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Á tout nombre réel $t$, on associe l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, notée $\varphi_t$ qui,à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ fait correspondre le vecteur $\varphi_t(\vec{v}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, défini par

$$x' = \alpha(t)x + \beta(t)y$$

$$y' = \beta(t)x + \alpha(t)y.$$

1. Étudier l'application $\varphi_0$.
2. Montrer que $\varphi_t$ est un automorphisme de $\mathscr{E}$ dont on précisera la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. On munit l'ensemble $\Phi_a$ des applications $\varphi_t$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$, de la loi de composition des applications, notée $\circ$. Montrer que $(\Phi_a, \circ)$ est un groupe commutatif.
4. Montrer que le groupe $(\Phi_a, \circ)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.
5. Montrer que toute application $\varphi_t$ laisse deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}$ globalement invariantes. Déterminer une base de chacune de ces droites vectorielles.

C- On considère un plan affine P, associé à $\mathscr{E}$ ,un point fixe $O$ de ce plan et le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ , d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. On associe à tout automorphisme $\varphi_t$ de $\mathscr{E}$, l'application affine $f_t$ laissant le point $O$ invariant et on note $\mathscr{F}_a$ l'ensemble des applications $f_t$ . On désigne par $D_1$ et $D_2$ les droites passant par $O$ et ayant respectivement pour direction $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

1. Soit $M\,(x\,;\,y)$ un point donné. Discuter, suivant la position de $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ dans P, l'existence d'une application $f_t$ telle que $f_t(M) = M'$. On envisage les cas : $M \in D_1$, $M \in D_2$, $M \notin D_1 \cup D_2$ et on précisera dans chacun de ces cas l'ensemble $C_M$ des images du point $M$ par tous les éléments de $\mathscr{F}_a$.
2. Construire la courbe $\Gamma$ d'équation $x^2 - y^2 = 9$. Préciser sa nature et ses caractéristiques (centre, sommets, foyers, asymptotes). Vérifier que $\Gamma$ passe par les points $K\,(5\,;\,4)$, $K'\,(-5\,;\,4)$, $E\left(2\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\right)$ et montrer que $\Gamma$ est la réunion de $C_K$ et $C_{K'}$.
3. Calculer $t$ sachant que $a = \sqrt{3}$ et $f_t(K) = E$.

Retour page 1

# XI. Bordeaux, série E

**Ex. 841.** ./1974/bordeauxE/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes les équations suivantes :

$$z^4 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$z^4 + 1 = 0, \tag{2}$$

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14} = 0. \tag{3}$$

(On montrera qu'il suffit de connaître $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ pour calculer les racines de l'équation (3)).

**Ex. 842.** ./1974/bordeauxE/exo-2/texte.tex

On se propose de calculer l'intégrale $I(\alpha)$ définie pour

$$\alpha \in [2\,;+\infty[ \text{ par } : I(\alpha) = \int_2^\alpha \frac{x\log x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** Déterminer $a$, $b$ et $c$ appartenant à $\mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

**2.** Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$.

**3.** Montrer que lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$, $I(\alpha)$ a une limite que l'on déterminera.

## Problème 259

./1974/bordeauxE/pb/texte

Soit E un espace affine de dimension 2 rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel associé à E.

Pour tout nombre réel $m$, on considère l'endomorphisme $\varphi_m$ dont la matrice relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est égale à

$$\begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & -\dfrac{3}{2}m+2 \end{pmatrix}.$$

A- 1. Déterminer, suivant les valeurs attribuées au réel $m$, le noyau de $\varphi_m$, l'iamge de $\varphi_m$ et l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$ invariants par $\varphi_m$.

2. a) Pour quelle valeur de $m$ a-t-on $\varphi_m \circ \varphi_m = \varphi_m$

 b) L'endomorphisme $\varphi_m$ peut-il être une symétrie vectorielle ?

 c) L'endomorphisme $\varphi_m$ peut-il être une homothétie vectorielle ?

3. On suppose dans cette question que $m = 2$.
 Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des automorphismes $\psi$ de $\mathscr{E}$ tels que $\psi \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \psi$.
 Déterminer les éléments de $\mathscr{H}$ par leurs matrices dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
 Montrer que $\mathscr{H}$ muni de la loi de composition des applications a une structure de groupe commutatif.

B- Dans tout ce qui suit, soit le point $O'$ de E défini par $\overrightarrow{OO'} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et l'application affine $f$ de $E$ dans $E$ associée à l'endomorphisme $\varphi_0$ que $f(O) = O'$.
 On considère dans $E$ la relation binaire$\mathscr{R}$ définie de la façon suivante :

$$A\mathscr{R}B \iff f(A) = f(B).$$

1. a) Définir analytiquement dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'application $f$. Est-elle injective ? surjective ?

 b) Sur quel sous-ensemble de $E$ la restriction de $f$ est-elle l ?application identique ?

2. a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d ?équivalence dans $E$.

b) Déterminer la classe d'équivalence du point $0$.

c) Montrer que les classes d'équivalence sont des variétés linéaires affines de $E$ de même direction et de même dimension que l?on déterminera

3. Pour $A \in E$, on pose $f(A) = A'$.

a) Montrer que $\overrightarrow{O'A'}$ a une direction fixe$\vec{u}$ que l?on déterminera.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point $A$ qui a pour coordonnées $\left(\mathrm{e}^t\ ;\ t\mathrm{e}^t\right)$.

Montrer que $\overrightarrow{0'A'} = g(t).(\vec{i} + 2\vec{j})$ où g est une fonction numérique de $t$.
Trouver, lorsque $t$ tend vers $+\infty$ et lorsque $t$ tend vers $-\infty$ les limites de $g(t)$.
(On posera respectivement $u = t - 1$ et $u = -t$).
Trouver lorsque $t$ tend vers $+\infty$ la limite de $\dfrac{g(t)}{t}$.
Etudier les variations de $g$ et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé. On construira la tangente au point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

## XII. Bordeaux remplacement, série E

**Ex. 843.** ./1974/bordeauxerem/exo-1/texte.tex

Même exercice n°1 qu'en série C Série C remplacement, exercice 1

**Ex. 844.** ./1974/bordeauxerem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $f(x) = \tan\left(x^2\right)$.

**1.** Quel est son ensemble de définition $\mathscr{D}$ ?
Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathscr{D}$, calculer sa dérivée $'f(x)$.

**2.** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\tan^2\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

**Problème 260** ./1974/bordeauxerem/pb/texte

Même sujet que dans la série C : Série C remplacement, problème.

## XIII. caen, série C

**Ex. 845.** ./1974/caenC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$-\mathrm{i}z^2 + (2 + 2\mathrm{i})z + (10 + 5\mathrm{i}) = 0.$$

**Ex. 846.** ./1974/caenC/exo-2/texte.tex

Dans un espace affine E rapporté à un repère cartésien $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on définit une application $f$ de E dans E par la condition suivante : le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ a pour image le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ données par :

$$\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y - 1. \end{cases}$$

Montrer que $f$ est un vissage dont on déterminera l'axe.

## 🏛 PROBLÈME 261

./1974/caenC/pb/texte

Dans tout le problème, $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$ et, si $f$ est une fonction réelle dérivable, $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.

A- 1. Comment choisir les constantes réelles $a$, $b$ et $c$ pour que le polynôme $P$ :

$$p : x \longmapsto P(x) = ax^2 + bx + c$$

vérifie l'équation

$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$

pour tout $x$ réel ?

2. Soit $f$ une fonction dérivable de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
Vérifier que $g$ est dérivable en tout point $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et démontrer que, pour que $f$ vérifie

$$xf'(x) - 2f(x) = \log x \tag{1}$$

pour tout $x$ réel $> 0$, il faut et il suffit que $g$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\log x}{x^3}$.

3. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\log x}{x^3}$ ? (On pourra faire une intégration par parties).

4. En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) pour tout $x > 0$ est l'ensemble des fonctions

$$x \longmapsto -\frac{1+\log(x^2)}{4} + ax^2$$

où $a$ désigne une constante réelle arbitraire.

5. On désigne par $\varphi$ la fonction :

$$x \longmapsto -\frac{1+\log(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2 \qquad \text{où } x \in\, ]0\,;+\infty[.$$

Étudier les variations de $\varphi$ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

B- 1. Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de $\lambda$ l'intégral

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(les primitives de la fonction logarithme népérien peuvent s'obtenir au moyen d'une intégration par parties).

2. **??** Montrer que, lorsque $\lambda$ tend vers 0, $I(\lambda)$ admet une limite égale à $\dfrac{1}{3}$.

3. **??** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et pour tout $x$ tel que $\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, on a

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right).$$

(On pourra aider le raisonnement par une interprétation géométrique).



Retour page 1

4. Déduire des questions **??** et **??** que, lorsque $n$ tend vers l'infini,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

admet une limite. La calculer.

5. a) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right]+\frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}\right)\right]-\frac{1}{4}.$$

b) Établir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}\right)=\log\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$

c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites

$$n\longmapsto v_n=\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^n}{n!}\right) \qquad \text{et} \qquad n\longmapsto u_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

ont des limites lorsque $n$ tend vers l'infini. Calculer ces limites.

# XIV. Clermont-Ferrand, série C

**Ex. 847.** ./1974/clermontferrandC/exo-1/texte.tex

Soit dans un espace affine euclidien de dimension 2, rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le point $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient, en fonction du temps $t$, les relations :

$$\log x = t+\log k$$

$$y=k\mathrm{e}^{-t} \qquad k \text{ étant un nombre réel positif donné.}$$

**1.** Calculer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération de $M$ à l'instant $t$.

**2.** Déterminer la trajectoire de $M$ et faire une description du mouvement.

**Ex. 848.** ./1974/clermontferrandC/exo-2/texte.tex

Trouver l'ensemble des entiers naturels $n$ qui vérifient :

$$5^{4n}+5^{3n}+5^{2n}+5^n\equiv 0 \quad \text{modulo } 13$$

(*On pourra remarquer que* : $x^4+x^3+x^2+x=x(x+1)(x^2+1)$).

# XV. Dahomey, série C

**Ex. 849.** ./1974/dahomeyC/exo-1/texte.tex

Soit E le corps des entiers modulo 3 : E$=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$ ; les coefficients intervenant dans cette exercice désignent des éléments de E.

**1.** a) Vérifier que l'on a, pour tout $x\in$ E, $x^3=x$.

b) Montrer en raisonnant par récurrence que l'on a pour tout $x\in$ E

$$x^n=x \qquad \text{si } n \text{ est impair}$$
$$x^n=x^2 \text{ si } n \text{ est pair, avec } n\in\mathbb{N}^\star.$$

c) En déduire que toute fonction polynôme

$$x\longmapsto\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

de E dans E est égale à une fonction du 2ème degré

$$x\longmapsto ax^2+bx+c.$$



Retour page 1

**2.** Montrer que l'on a :

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{pour tout } x\in \text{E, si et seulement si} a=b=c=0.$$

En déduire que l'on a :

$$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c, \quad \text{pour tout } x\in \text{E, si et seulement si} a=a',\ b=b',\ c=c'.$$

**3.** a) Combien existe-t-il d'applications de E dans E distinctes ?

b) Combien existe-t-il de fonctions polynômes du 2ème degré de E dans E distinctes ?

c) En déduire que toute application de E dans E est égale à une fonction polynôme de 2ème degré.

Ex. 850. ./1974/dahomeyC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=8x^3+6x-1.$$

**1.** Étudier les variations de $f$. Montrer que $f$ est bijective ; en déduire le nombre de racines de $f$ (c'est à dire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$).

**2.** Montrer que $f$ a une racine $x_0$ telle que $0<x_0<\dfrac{1}{2}$.

**3.** On considère l'équation dans $\mathbb{C}$

$$8z^3-12z^2+2+\mathrm{i}=0.$$

Montrer que cette équation possède une solution $z_0$ de la forme $z_0=\dfrac{1}{2}+\lambda\mathrm{i}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ telle que $|z_0|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## Problème 262 ./1974/dahomeyC/pb/texte

On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension 2, rapporté à une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et par $\mathscr{E}$ un espace affine sur E rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $2\times 2$ telle que $A\in\mathscr{A}$ si et seulement si $A^2=0$ (matrice nulle).

1° Montrer que toute matrice $A\in\mathscr{A}$ est non inversible.

2° Montrer qu'une matrice $A$ est élément de $\mathscr{A}$ si et seulement si elle est de la forme

$$A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & -\end{pmatrix}a \qquad \text{avec} \quad \det A=0.$$

3° Soit $f$ un endomorphisme *non nul* de E dont la matrice $A$ relative à $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est élément de $\mathscr{A}$.

a) Montrer que le noyau $\mathscr{N}$, ainsi que l'image $\mathscr{I}$ de $f$ sont des droites vectorielles ed E.

b) Montrer que l'on a : $\mathscr{I}\subset\mathscr{N}$ ; en déduire que $\mathscr{I}=\mathscr{N}$.

4° Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{N}$ non nul, et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit une base de E ; on pose

$$f(\vec{v})=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}, \quad (\lambda,\ \mu \text{ réels}).$$

a) Montrer que $\mu$ est une constante à déterminer.

b) Écrire la matrice $A'$ de $f$ relative à $(\vec{u},\ \vec{v})$.

B- Soit maintenant $g$ un endomorphisme de E de la forme

$$g=f+1_{\text{E}}$$

($1_{\text{E}}$ application identique dans E), où $f$ est un endomorphisme de E tel que

$$f(\vec{i})=\vec{0} \quad \text{et} \quad f(\vec{j})=\lambda\vec{i} \quad (\lambda\in\mathbb{R}). \tag{1}$$

1° a) Déterminer $f^2=f\circ f$.

b) Calculer $g\circ(1_{\text{E}}-f)$, composée de $g$ et de $1_{\text{E}}-f$.



Retour page 1

c) Montrer que $g$ est un automorphisme de E et déterminer l'automorphisme réciproque $g^{-1}$ de $g$.

2° On désigne à présent par $f_\lambda$ l'endomorphisme de E défini par les relations (1), et par $g_\lambda$ l'endomorphisme $f_\lambda + 1_{\mathrm{E}}$. On appelle $\mathscr{G}$ l'ensemble des endomorphismes $g_\lambda$ lorsque $\lambda$ varie dans $\mathbb{R}$.

a) Quelle est la matrice $M_\lambda$ de $g_\lambda$ relative à $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ?

b) Déterminer l'endomorphisme $g_\lambda \circ g_\mu$ et en déduire la stabilité de $\mathscr{G}$, pour la loi $\circ$.

c) Prouver que l'application $\lambda \longmapsto g_\lambda$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(\mathscr{G},\ \circ)$.

d) Montrer que $(\mathscr{G},\ \circ)$ est un groupe commutatif.

C- Soit $h_{\lambda,\ a}$ l'application affine de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = x + \lambda y + a \\ y' = y \qquad (\lambda,\ a \quad \text{paramètres réels}). \end{cases}$$

1° Montrer que $h_{\lambda,\ a}$ est une bijection.

2° Déterminer suivant les valeurs de $\lambda$ et $a$ l'ensemble des points de $\mathscr{A}$ invariants par $h_{\lambda,\ a}$.

3° Écrire $h_{\lambda,\ a}$ comme composée $t \circ u$ d'une application affine $u$ ayant $O$ comme point double et d'une translation $t$ de direction $\vec{\imath}$. Ce produit est-il commutatif ?

4° a) Déterminer la composée $h_{\lambda,\ 0} \circ h_{\mu,\ 0}$ des applications $h_{\lambda,\ 0}$ et $h_{\mu,\ 0}$.
En déduire que l'on a :

$$h_{\lambda,\ a} \circ h_{\mu,\ b} = h_{\lambda+\mu,\ a+b}.$$

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ des applications affines $h_{\lambda,\ a}$ muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^2,\ +)$.

## XVI. Dijon, série C

**Ex. 851.** ./1974/dijonC/exo-1/texte.tex

Soit $x$ un réel donné ; on appelle $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$, c'est à dire : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.
On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $[-1\,;2]$ par $f(x) = \mathrm{E}(x)\sin\pi x$.

1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\sin\pi x$ lorsque $x$ appartient à l'un des intervalles $[-1\,;0[$, $[0\,;1[$ ou $[1\,;2[$. En déduire que $f$ est continue sur $[-1\,;2]$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$ en $x=0$ et $x=1$. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
3. Tracer le courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Ex. 852.** ./1974/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls, $x$ un élément de $\mathbb{Z} - \{0,1\}$ donnés, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1 Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

$P_1$ : $p$ divise $x^2 - x$

$P_2$ : pour tout entier naturel non nul $n$, $p$ divise $x^n - x$.

2 Déterminer les entiers relatifs $x$ tels que, pour tout entier naturel non nul $n$, 6 divise $x^n - x$.

**Ex. 853.** ./1974/dijonC/exo-3/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
Soit $a$ et $b$ deux réels donnés, et $\varphi_{a,b}$ l'application de $P$ dans lui-même qui transforme tout point $M$, de coordonnées $x$, $y$, en le point $M'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y\mathrm{e}^b. \end{cases}$$

(e désigne la base des logarithmes népériens.)
On désigne par $\Phi$ l'ensemble des applications $\varphi_{a,b}$ lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

A- a) Démontrer que $\varphi_{a,b}$ est une transformation affine.

b) Démontrer que $\Phi$, muni du produit de composition des applications, est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^2,\ +)$.

c) Déterminer la courbe $\mathscr{E}_{a,b}$, transformée de cercle $(\mathscr{C})$ par l'application $\varphi_{a,b}$ ; on en donnera les axes, les sommets et l'excentricité $\epsilon$.

B- Soit $\Phi'$ les sous-ensemble de $\Phi$ défini par $\Phi' = \{\varphi_{a,\ -a\sqrt{2}},\ a \in \mathbb{R}\}$. On note $f_a$ l'application $\varphi_{a,\ -a\sqrt{2}}$.

a) Soit $M_0$ le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ dans le plan P. Déterminer l'équation de l'ensemble $\Gamma_{M_0} = \{f_a(M_0),\ a \in \mathbb{R}\}$.
Par quels points $M_0$, $\Gamma_{M_0}$ est-il une droite ? Démontrer que $\Gamma_{M_0}$ est globalement invariant par tout élément de $\Phi'$.

b) Lorsque $a$ n'est pas nul, on note $\mathscr{F}_a$ la courbe transformée du cercle $(\mathscr{C})$ par $f_a$, c'est à dire : $\mathscr{F}_a = \mathscr{E}_{a,\ -a\sqrt{2}}$.
Exprimer l'excentricité $\epsilon(a)$ de $\mathscr{F}_a$ en fonction de $a$. Soit $h$ la fonction numérique de la variable réelle $a$ définie par :

$$h(a) = \begin{cases} \epsilon(a) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si} a = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $h$. Tracer la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé.

c) Soit A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}\right)$.
Donner l'équation de la courbe $\Gamma_A$ et vérifier que $\Gamma_A$ et $(\mathscr{C})$ sont tangents au point $B$ de coordonnées $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, c'est à dire qu'ils admettent même tangente en ce point.
En déduire que $\Gamma_A$ est tangent à chacune des courbes $\mathscr{F}_a$ en un point que l'on précisera.

C- Construire sur un même dessin les courbes $(\mathscr{C})$, $\Gamma_A$, $\mathscr{F}_2$ et la courbe symétrique de $\Gamma_A$ par rapport à l'axe des abscisses.

`Note` : pour déterminer les coordonnées de quelques points des courbes demandées, on prendra les valeurs approchées suivantes :

$$\sqrt{2} : 1,4 \quad \mathrm{e}^{\sqrt{2}} : 4,1 \quad \mathrm{e}^{\sqrt{2}+1} : 11,1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} : 0,7 \quad \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} : 0,2.$$

## XVII. Dijon, série E

**Ex. 854.** ./1974/dijonE/exo-1/texte.tex

Soit $a$ un nombre complexe donné non nul, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et (E) l'équation sur $\mathbb{C}$ d'inconnue $z$ :

$$2z^2 - a(7 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + 2a^2(3 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0. \tag{E}$$

**1.** Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. En déduire ses racines carrés.

**2.** Calculer les racines $z_1$ et $z_2$ de (E).

**3.** Vérifier que $z_2-a=u(z_1-a)$.
En déduire la nature du triangle $AM_1M_2$ où $A$, $M_1$, $M_2$ sont respectivement les points d'affixes $a$, $z_1$, $z_2$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

**4.** Dessiner ce triangle dans le cas $a=1+\mathrm{i}$.

Ex. 855. ./1974/dijonE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. On donne les poinst fixes $A(1\;;\;0\;;\;0)$, $B(0\;;\;1\;;\;1)$, $C(1\;;\;1\;;\;0)$ et $D(0\;;\;0\;;\;1)$.
Les positions des points mobiles $M$ et $N$ sont définies par les relations :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cos t \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}\sin(t+\varphi), \qquad \text{où } \varphi \text{ est un réel donné.}$$

**1.** Représenter en géométrie descriptive les trajectoires de ces deux mobiles en prenant respectivement pour plan horizontal et plan frontal de projection les plans $xOy$ et $yOz$.

**2.** Utiliser l'épure pour préciser la position de l'unique point $P$ où les deux mobiles peuvent éventuellement coïncider.
Quelles sont les dates des passages au point $P$ du mobile $M$ ?
Quelles valeurs faut-il donner à $\varphi$ pour qu'il existe des dates auxquelles les deux mobiles coïncident ?
Préciser ces dates pour chaque valeur trouvée de $\varphi$.

## Problème 263 ./1974/dijonE/pb/texte

Le but du problème est la détermination d'un encadrement de $\pi$ en calculant de deux façon l'intégrale

$$\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

A- Méthode donnant la valeur exacte de $I$.

a) Calculer $\tan\theta$ en fonction de $t=\tan\frac{\theta}{2}$. En déduire que

$$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}.$$

b) Soit $f$ l'application de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\tan x.$$

*i.* Tracer la courbe $\gamma$ représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $Ox$ et $Oy$.

*ii.* Démontrer que $f$ admet une application réciproque $f^{-1}=F$ de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Donner la tableau de variation de cette application et la représenter graphiquement dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

*iii.* Démontrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$F'(x)=\frac{1+x^2}{.}$$

En déduire que

$$I=\int_0^{2-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{12}.$$

B- Méthode donnant un encadrement de $I$.



Retour page 1

a) a) Calculer $(2-\sqrt{3})^2$ et $(2-\sqrt{3})^4$ en fonction de $\sqrt{3}$.

b) Vérifier que $\dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+\dfrac{x^4}{1+x^2}$.

b) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}} 1-x^2 \,\mathrm{d}x$ en fonction de $\sqrt{3}$.

c) On désigne par $K$ l'intégrale :

$$K = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que pour tout réel positif $x$ :

$$\frac{x^4}{1+x^2} \leqslant \frac{x^3}{2}.$$

b) En déduire que $0 \leqslant K \leqslant \dfrac{97}{8} - 7\sqrt{3}$.

d) De l'égalité $I = J+K$ déduire l'encadrement

$$4\sqrt{3} - \frac{20}{9} \leqslant I \leqslant \frac{131}{24} - 3\sqrt{3}.$$

*Conclusion* : sachant que $1{,}73205 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1{,}73206$ déduire des deux parties le meilleur encadrement possible de $\pi$.

## XVIII. Grenoble, série C

Ex. 856. ./1974/grenobleC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = 2\dfrac{\log x^2}{x^3}$.

**1.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans une repère orthonormé.

**2.** Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$ et les droites ayant pour équations respectives $y=0,\ x=1,\ x=a \quad (a>1)$. (On pourra utiliser la méthode d'intégration par parties.)
Cette aire admet-elle une limite quand $a$ augmente indéfiniment ?

## XIX. Laos, série C

Ex. 857. ./1974/laosC/exo-1/texte.tex

$E$ étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3, soit $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base orthonormée de $E$.
On considère l'application linéaire $f$ de $E$ dans $E$ définie par :

$$\begin{aligned} f(\vec{\imath}) &= 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k} \\ f(\vec{\jmath}) &= \vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= \vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k} \end{aligned}$$

**1.** Montrer que $f\circ f$ est la composée d'une homothétie vectorielle $h$ et de $f$ ($f\circ f = h\circ f$).

**2.** Déterminer le noyau $E_1$ ed $f$ et l'image $E_2$ par $f$.
Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ et qu'ils sont orthogonaux.

**3.** Soit $p$ la projection orthogonale sur $E_2$.
Déduire des questions précédentes l'égalité : $f = h\circ p$.

**Ex. 858.** ./1974/laosC/exo-2/texte.tex

Soit $I_a = \int\limits_0^a x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$a$ étant un nombre réel positif donné.

1. Déterminer, en intégrant par parties, l'expression $I_a$ en fonction de $a$.
2. Montrer que $I_a$ admet une limite finie quand $a$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 859.** ./1974/laosC/exo-3/texte.tex

On définit une suite réelle $u$ par la donnée des deux premiers termes $u_1$ et $u_2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (1)$$

$a$ et $b$ étant des réels donnés non nuls.

A- 1. Calculer $u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7$ en fonction de $u_1,\ u_2,\ a$ et $b$.

2. a) On suppose que $a^2+4b>0$.
Montrer qu'il existe deux nombres réels distincts $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$\alpha+\beta = a \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta = -b.$$

b) Montrer que la suite $v$ définie par

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

est une suite géométrique de raison $\beta$.
Qu'en déduit-on pour la suite $w$ définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$ ?

c) Exprimer $v_{n+1}$ et $w_{n+1}$ en fonction de $u_1,\ u_2,\ \alpha,\ \beta$ et $n$.
En déduire l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_1,\ u_2,\ \alpha,\ \beta$ et $n$.

B- On suppose que $a^2+4b=0$.

1. Montrer que la relation (1) peut s'écrire

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \alpha\left[u_n - \alpha u_{n-1}\right].$$

2. On pose $u_n = s^n s_n$. Montrer que la suite $s$ est une suite arithmétique. En déduire l'expression de $s_n$ puis $u_n$ en fonction de $n,\ \alpha,\ u_1$ et $u_2$.
3. Montrer que l'expression trouvée pour $u_{n+1}$ est la limite de celle obtenue dans la première partie quand on fait tendre $\beta$ vers $\alpha$.

C- On suppose que $a^2+4b<0$.

1. On désigne par $\alpha$ et $\beta$ les racines complexes de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
Montrer qu'il existe un réel positif $r$ et un nombre $\theta \in \left]0\,;\pi\right[$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1} = u_n 2r\cos\theta - r^2 u_{n-1}. \qquad (2)$$

2. Montrer qu'il existe des nombres réels $A$ et $B$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r^n(A\cos n\theta - B\sin n\theta).$$

3. a) En déduire la relation

$$u_{n+1} = \frac{r^{n-1}}{\sin\theta}\left[u_2\sin n\theta - ru_1\sin(n-1)\theta\right].$$

b) En comparant le nombre $u_7$ donné dans cette relation et l'expression de $u_7$ trouvée dans 859, exprimer $\sin 5\theta$ et $\sin 6\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

# XX. Lille, série C

**Ex. 860.** ———— *4 points.* *./1974/lilleC/exo-1/texte.tex*

1 On donne deux entiers $a$ et $b$ et on considère l'équation : $ax - by = 1$
où l'inconnue est le couple $(x, y)$ d'entiers relatifs.
Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur $a$ et $b$, pour que l'ensemble des solutions de cette équation ne soit pas vide.

2 Vérifier que le couple $(7, 24)$ est solution de l'équation :

$$(E) \qquad 55x - 16y = 1$$

En déduire l'ensemble des couples $(x, y)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui sont solutions de $(E)$.

**Ex. 861.** ———— *4 points.* *./1974/lilleC/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{1}{x} - \log\frac{1+x}{x}.$$

Donner l'ensemble de définition, étudier les variations de la fonction $f$ (on pourra utiliser le limite de $x \ln x$ quand $x$ tend vers 0), tracer sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans un plan affine $P$ (On prendra 2 cm pour unité de longueur).
Pour le graphique, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $\ln 2 \approx 0{,}69$ $\ln 3 \approx 1{,}10$ $\ln 5 \approx 1{,}61$.

**2.** On donne un réel $a > 1$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(E)$ de l'ensemble $E$ des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x,\ y)$ vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant a \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Calculer la limite de $\mathscr{A}(E)$ quand $a \to +\infty$.
(On pourra poser $a = \dfrac{1}{X}$).

## Problème 264 *12 points.* *./1974/lilleC/pb/texte*

**Partie I.**
Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$. On considère l'application $f_{a,b}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

dans laquelle $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

**1.** Comment fait-il choisir $a$ et $b$ afin que l'application $f_{a,b}$ soit bijective ?
Déterminer, suivant les valeurs de $a$ et $b$, le noyau de $f_{a,b}$ et l'image de $\mathscr{P}$ par $f_{a,b}$.

**2.** On désigne par $\mathscr{F}^\star$ l'ensemble des applications $f_{a,b}$ bijectives.
On munit $\mathscr{F}^\star$ de la loi de composition des applications notée $\circ$.
Démontrer que $(\mathscr{F}^\star,\ \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

**3.** Démontrer que, pour deux valeurs du réel $\lambda$, distinctes ou confondues, il existe des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{P}$, distincts du vecteur nul, vérifiant $f_{a,b}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
Dans le cas où ces deux valeurs $\lambda$ sont confondues, reconnaître $f_{a,b}$. Dans le cas où ces deux valeurs $\lambda$ sont distinctes, déterminer pour chacune d'elles l'ensemble de vecteur $\vec{u}$ tels que $f_{a,b}(\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

**4.** Soit les vecteurs $\vec{e_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ $\vec{e_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.
Démontrer que $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1,\ \vec{e_2})$ est une base orthonormée de $\mathscr{P}$.
Quelle est la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}'$ ?

Retour page 1

**Partie II.**
Soit $P$ le plan affine associé à $\mathscr{P}$. On munit $P$ du repère orthonormé $(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans la suite du problème, les coordonnées seront toujours prises dans ce repère.
On considère l'application affine $g_{a,b}$ de $P$ à laquelle est associée l'application $f_{a,b}$ et qui transforme le point $O$ en le point $O'$ de coordonnées $x_{O'} = 2$, $y_{O'} = 0$.

**1.** Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ du point $N' = g_{a,b}(N)$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ du point $N$.

**2.** Pour quelles valeurs de $a$ et $b$, $g_{a,b}$ est-elle une isométrie affine ? Préciser, dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de cette isométrie.

**3.** Pour quelles valeurs de $a$ et $b$, $g_{a,b}$ est-elle une homothétie ? Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

**4.** Vérifier que, quels que soient $a$ et $b$,

$$f_{a,b} = f_{a,\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2},b}.$$

En déduire que $g_{a,b}$ est le produit de trois applications affines que l'on précisera.

Construire à l'aide de cette remarque, le transformé $N'$ (par $g_{a,b}$) du point N, lorsque $a = 2$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

# XXI. Limoges, série C

Ex. 862. ./1974/limogesC/exo-1/texte.tex

1 a désigne un entier naturel non nul donné.
Démontrer que le nombre $A = a(a^2 - 1)$ est divisible par 6.

2 Plus généralement, démontrer que $A_n = a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.
( $n$ désigne un entier naturel quelconque).
**Application** : Démontrer que les sommes :

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \qquad S_n = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \cdots + a_k^{2n+1}$$

dans lesquelles $a_1$, $a_2$, $\cdots a_k$ désignent des entiers naturels non nuls donnés, ont le même reste de division par 6.

# XXII. Lyon, série C

Ex. 863. ./1974/lyonC/exo-2/texte.tex

Soit $P$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $D$ la droite de $P$ d'équation : $3x + 4y - 1 = 0$

1 Déterminer l'ensemble $H$ de $D$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2 Quel est l'ensemble $H'$ des points de $H$ dont le carré de la distance à $O$ est un multiple de 13 ?

# XXIII. Montpellier, série C

Ex. 864. ./1974/montpellierC/exo-1/texte.tex

$\varphi$ désignant un paramètre réel vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, on considère l'équation :

$$z^2 - \frac{2}{\cos\varphi} z + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4 \qquad \text{(E)}$$

**1.** Trouver les racines $z'$ et $z''$ de l'équation (E) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

**2.** Soit $M'$ et $M''$ les images de $z'$ et $z''$ dans le plan complexe.
Montrer que $z'$ et $z''$ décrivent, quand $\varphi$ varie dans $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, une branche d'hyperbole que l'on dessinera.

Retour page 1

Ex. 865. ./1974/montpellierC/exo-2/texte.tex

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a$, $b$, $c$, $d$ étant des entiers relatifs vérifiant $ad - bc = 1$.

**1.** Vérifier que le produit de deux matrices appartenant à E est un élément de E.

**2.** Montrer que E, muni de la multiplication matricielle, a une structure de groupe.

**3.** Trouver une matrice de E pour laquelle $a = 22$ et $b = 17$ (on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide).

## Problème 265

./1974/montpellierC/pb/texte

A On dira qu'une fonction numérique $f$, continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, est convexe sur $I$ si :

$$x \in I \quad ; \quad y \in I \quad ; \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1° a) Montrer que les fonction $f_1 : x \longmapsto x^2$ et $f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $f_3 : x \longmapsto \log x$ est-elle convexe sur $]0\,;+\infty[$ ?

($\log x$ représente le logarithme népérien de $x$).

2° On considère la fonction $h$ définie sur $[0\,;\pi]$ par $h(x) = -\sin x$.

a) Montrer que $h$ est convexe sur $[0\,;\pi]$.

b) Montrer que si $x \neq y$ : $h\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{h(x)+h(y)}{2}$.

3° Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) > 0.$$

a) Soit $x_0$ un réel fixé et $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x)+f(x_0)}{2}\right].$$

Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b) Montrer que si $x < x_0 \quad g'(x) > 0$ et si $x > x_0 \quad g'(x) < 0$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant 0$ et que $f$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

B On considère la fonction $\varphi$ définie sur $[0\,;2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

Étudier les variations de la fonction $\varphi$ sur $[0\,;2\pi]$.

En déduire l'inégalite : $\forall x \in [0\,;2\pi] \qquad \varphi(x) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C Dans le plan affine euclidien, on considère le cercle $\Gamma$ de centre $O$, de rayon $R$. Soit A un point fixé de $\Gamma$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, 3 réels positifs vérifiant $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

On désigne par B et C les points de $\Gamma$ tels que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, soient des mesures respectives des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

1° Calculer en fonction de $R$, $\alpha$ et $\beta$ le périmètre

$$P = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$$

du triangle ABC.

2° Montrer, en utilisant la partie A2 puis la partie B, que :

$$P \leqslant 2R\varphi(\alpha+\beta) \leqslant 3R\sqrt{3}$$

et que si $\alpha \neq \beta \quad P < 3R\sqrt{3}$.

3° Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

Retour page 1

# XXIV. Maroc, série C

**Ex. 866.** ./1974/marocC/exo-1/texte.tex

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\dot{n}$ désigne la classe de $n$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

**1.** Trouver les couples $(\dot{a},\ \dot{b})$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$\dot{a}\,.\,\dot{b}=\dot{0} \qquad \text{et} \qquad \dot{a}-\dot{b}=\dot{5}\,.$$

**2.** Résoudre l'équation $x^2-\dot{3}\,x-\dot{4}=0$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

**3.** Déterminer les entiers naturels $x$, tels que le nombre entier $N$ qui s'écrit $\overline{138}$ en base $x$, soit divisible par $12$.

**Ex. 867.** ./1974/marocC/exo-3/texte.tex

On considère l'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices $m$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a$ et $b$ décrivent l'ensemble des nombres réels.

Soit I=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A=$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.
   b) Montrer que $\{\mathrm{I},\ \mathrm{A}\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$.
   c) Montrer que $\mathfrak{M}$, muni de l'addition, et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire. Est-ce un corps ? Montrer que si une matrice $M \in \mathfrak{M}$ est inversible dans l'anneau des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, alors $M^{-1}$ appartient à $\mathfrak{M}$.
   Que peut-on dire de l'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ des matrices $M \in \mathfrak{M}$, à coefficients rationnels ?
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit $(\vec{i},\ \vec{j})$ une base de E. Soit $f$ l'endomorphisme de E, représenté dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$ par la matrice M=$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   Déterminer, suivant les valeurs de $a$ et $b$, l'image de $f$, et le noyau de $f$, notés respectivement Im $f$ et Ker $f$.
3. Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}$ vérifiant la relation $M \times M = M$.
   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ représente dans E, relativement à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$, une projection vectorielle de direction $D'$ sur une droite $D$. Déterminer les droites $D$ et $D'$.
4. Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}$ vérifiant la relation $M \times M =$I.
   Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ représente dans E, relativement à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$, une projection vectorielle de E, direction $\Delta'$, par rapport à une droite $\Delta$. Déterminer les droites $\Delta$ et $\Delta'$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, P telles que A×P=P×A, est $\mathfrak{M}$.
   Montrer que si $\varphi$ est un endomorphisme fixé de E, l'ensemble des endomorphismes $g$ de E, tels que $g\circ\varphi=\varphi\circ g$, est un anneau unitaire, pour l'addition et la composition des endomorphismes.
   Montrer que si $\varphi$ et $g$ sont des endomorphismes de E, tels que $g\circ\varphi=\varphi\circ g$, on a :

$$\mathrm{Im}\ (g\circ\varphi) \subset \mathrm{Im}\ g \cap \mathrm{Im}\ \varphi$$
$$\mathrm{Ker}\ g \cup \mathrm{Ker}\ \varphi \subset \mathrm{Ker}\ (g\circ\varphi)$$

Retour page 1

## XXV. Nantes, série C

Ex. 868. ./1974/nantesC/exo-1/texte.tex

Étudier les restes des divisions par 9 des puissances successives de 2.
Démontrer que le nombre $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ est toujours divisible par 9, quel que soit l'entier naturel $n$.

Ex. 869. ./1974/nantesC/exo-2/texte.tex

$a$ et $b$ étant deux réels donnés, on note $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = x\mathrm{e}^x & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant } x \leqslant 1\\ f(x) = ax+b & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant } x > 1\ . \end{cases}$$

**1.** a) Indiquer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ soit continue au point $1$.

b) Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ pour que $f$ soit dérivable au point $1$.

**2.** Étudier les variation de la fonction $g$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = x\mathrm{e}^x & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant } x \leqslant 1\\ g(x) = \mathrm{e}(2x-1) & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ vérifiant } x > 1\ . \end{cases}$$

Tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**3.** Á l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $h$ définie par

$$h(x) = x\mathrm{e}^x.$$

Calculer l'aire du domaine plan défini par

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant 2\\ &0 \leqslant y \leqslant g(x). \end{aligned}$$

## XXVI. Nantes, série E

Ex. 870. ./1974/NantesE/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer les nombres complexes $Z = X + \mathrm{i}Y$, avec $(X,\ Y) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant

$$Z^2 = 8(1+\mathrm{i}\sqrt{3}).$$

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$2z^2 + 2(\sqrt{3}-\mathrm{i})z - (3+5\sqrt{3}\mathrm{i}) = 0.$$

Ex. 871. ./1974/NantesE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est $O$ et dont les axes sont $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.
Les plans $(x'Ox,\ y'Oy)$ et $(y'Oy,\ z'Oz)$ sont respectivement le plan horizontal et le plan frontal de projection.
On prendre 2 cm pour unité de longueur.
On considère le plan P d'équation paramétriques

$$\begin{cases} x = \alpha\\ y = 2\alpha + 2\beta - 3\\ z = 3\beta. \end{cases}$$

et le point $M$ de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 3)$.



Retour page 1

**1.** Construire les traces du plan P : elles correspondent respectivement à $z = 0$ et à $x = 0$ ; elles sont alors définies par des équations paramétriques, respectivement au moyen de $\alpha$ et de $\beta$.

**2.** Construire le droite D perpendiculaire à P menée par $M$.

**3.** Déterminer la distance $d$ du point $M$ au plan P ainsi que l'angle de ce plan avec le plan horizontal de projection.

**4.** Calculer la distance $d$.

## Problème 266

./1974/NantesE/pb/texte

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; l'axe $x'Ox$ et l'axe $y'Oy$ sont dirigés respectivement par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ; soit $\delta$ la droite ayant pour équation $x = 0$.
On note $T$ l'application de $\Delta = P - \delta$ vers $P$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $x' = \dfrac{1}{x}$ et $y' = -\dfrac{y}{x}$.

1. a) Montrer que $T$ est involutive sur $\Delta$.
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $T$.
2. Soit $D$ la droite ayant pour équation $ux + vy + w = 0$ ; quelle est l'équation de la courbe $D'$ transformée par $T$ de $D \cap \Delta$ ?
3. On note $\mathscr{C}(R)$ le cercle ayant pour centre $\omega(1\ ;\ 0)$, dont le rayon est mesuré par $R$ ($R > 0$).
   Démontrer que la courbe $\mathscr{C}'(R)$ transformée par $T$ de $\mathscr{C}(R) \cap \Delta$ est une conique dont on indiquera la nature suivant les valeurs de $R$.
   Préciser, quand ils existent, les éléments suivants de la conique $\mathscr{C}'(R)$ : centre, sommets, asymptotes.
4. a) Étudier en particulier $\mathscr{C}'(\sqrt{2})$.
   b) Désignons par $P^+$ l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est positive ou nulle.
   Déterminer la fonction $f$ dont la courbe représentative dans $P$ relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $\mathscr{C}(\sqrt{2}) \cap P^+$.
   c) Démontrer qu'il est possible de trouver une constante $k$ de sorte que la fonction $\varphi$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} f(x) + k \log[(x+1) + f(x)]$$

   soit une primitive de $f$.
   d) Calculer l'aire du domiane plan limité par $\mathscr{C}'(\sqrt{2})$ et les trois droites d'équations respectives

$$x = \sqrt{2} - 1\ ;\ x = 2 \qquad \text{et} \qquad y = x + 1.$$

# XXVII. Paris, série C

**Ex. 872.**

./1974/parisC/exo-1/texte.tex

Trouver, sous la forme $a + \mathrm{i}b$ ($a$ et $b$ réels), un nombre complexe $\omega$ tel que

$$\omega^2 = 48 + 14\mathrm{i}.$$

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 - 5(1+\mathrm{i})z - 12 + 9\mathrm{i} = 0.$$

Vérifier que le quotient des deux racines est un imaginaire pur.

**Ex. 873.**

./1974/parisC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \log(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1)$$

le symbole log désignant le logarithme de base e.

**1.** Étudier la variation de la fonction $f$. Soit C la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la variation de $f$.
Montrer en posant $x = \log(\mathrm{e}^x)$, que $f(x) - 2x$ tend vers une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$, et en déduire l'asymptote correspondante de C.



Retour page 1

**2.** Soit $k$ un nombre réel strictement positif.
Discuter, suivant la valeur de $k$, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue $x$

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1 - k = 0,$$

a) par le calcul,

b) en utilisant la courbe C.

## Problème 267

./1974/parisC/pb/texte

N.B. – La partie C est indépendante des parties A et B.

A- Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de E, $r_1$ la rotation vectorielle E⟶E ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{\imath}$ et telle que $r_1(\vec{\jmath}) = \vec{k}$, $r_2$ la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{\jmath}$ et telle que $r_1(\vec{k}) = \vec{\imath}$.

1. On pose $r = r_2 \circ r_1$, $r^2 = r \circ r$, $r^3 = r \circ r^2$.
   Quelles sont les images de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ par $r$, par $r^2$, par $r^3$ ?
   Quel renseignement relatif à l'angle de la rotation vectorielle $r$ déduit-on de ce qui précède ?
2. Calculer en fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un vecteur quelconque $\vec{V}$ de E les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ du vecteur $r(\vec{V})$ de E invariants par $r$.
3. Soit $r_3$ la rotation vectorielle ayant pour axe la droite vectorielle contenant $\vec{k}$ et telle que $r_3(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$.
   Déterminer les images de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ par la rotation vectorielle $r \circ r_3$, c'est à dire $r_2 \circ r_1 \circ r_3$. Qu'en déduit-on pour cette rotation ?
   Indiquer de même ce que sont les rotations $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_3 \circ r_2$.
   (*Les résultats de ce A3 ne seront pas utilisés par la suite*).

B- Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, associé à E, et $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$ (les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ étant définis au A).
On désigne par $\rho$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dans laquelle tout point $M$, de coordonnées $x$, $y$, $z$, a pour image le point $M'$ de coordonnées :

$$x' = y, \quad y' = -z, \quad z' = -x.$$

1. Préciser la nature de cette application $\rho$.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan de $\mathscr{E}$ d'équation $z = 1$. Déterminer l'ensemble H des points $M$ du plan $\mathscr{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux.
   La courbe H admet un centre de symétrie $\Omega$. Écrire une équation de H relativement au repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et indiquer la nature de la courbe H.
3. 

C- Les lettres $\mathscr{E}$, $O$, $\rho$ ont le même signification que dans la partie B.

1. On donne un nombre réel $k$, strictement positif, et l'on appelle $L_k$ l'ensemble des points $M$, appartenant au plan $\mathscr{E}$ d'équation $z = 0$, et tels que

$$MM' = k\, OM$$

   (en posant encore $M' = \rho(M)$).
   Écrire une équation de $L_k$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   On pose $x = \lambda \cos\theta$, $y = \lambda \sin\theta$, avec $\lambda \geqslant 0$.
   Montrer que si le point $M$ de coordonnées $x$, $y$ appartient à $L_k$ et si $\lambda > 0$, alors $\sin 2\theta$ s'exprime simplement en fonction de $k$.
   En déduire, suivant la valeur de $k$, la nature géométrique de l'ensemble $L_k$.
   *Application numérique :* $k = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   Calculer les valeurs correspondantes de $\theta$.

Retour page 1

2. Soit $\Sigma$ l'ensemble dont les éléments sont les inverses $\dfrac{1}{n}$ des entiers relatifs non nuls $n$.
On se propose de chercher certaines valeurs rationnelles $k$ pour lesquelles $\sin 2\theta$ appartient à $\Sigma$.
Montrer, à cet effet, que si $k = \dfrac{p}{q}$, où $p$ et $q$ désignent des entiers naturels premiers entre eux, les conditions C(2)a et C(2)b suivantes sont équivalentes :

a) $\sin 2\theta \in \Sigma$ ;
b) $p^2 - 2q^2 = \pm 1$.

En déduire les couples $(p,\ q)$ cherchés pour lesquels $1 \leqslant p < 20$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\sin 2\theta$ (on ne cherchera pas l'expression générale des couples $(p,\ q)$ vérifiant la condition C(2)b).

# XXVIII. Paris remplacement, série C

**Ex. 874.** ./1974/parisCrem/exo-1/texte.tex

On désigne par E un espace affine de dimension 3, par $A,\ B,\ C$ trois points fixes de E, non alignés, et l'on donne :

— un point $P$, quelconque, de E,

— trois réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Trouver un point $M$ de E tel que $(M,\ \overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC})$ soit une repère de E et que les coordonnées de $P$ dans ce repère soient les nombres $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ (on cherchera, à cet effet, à déterminer $\overrightarrow{PM}$, et l'on discutera l'existence et l'unicité de $M$ selon $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ et selon la position du point $P$).

**Ex. 875.** ./1974/parisCrem/exo-2/texte.tex

$\mathbb{Z}$ désignant l'ensemble des entiers relatifs, et $p$ un nombre *premier* donné, on considère l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés :

$$\overline{0},\ \overline{1},\ ,\ \dots,\ \overline{p^2-2},\ \overline{p^2-1}.$$

**1.** Dans ce qui suit, la lettre $x$ représente un entier naturel tel que $0 < x < p^2$.

— Montrer que si $\overline{x}$ est un diviseur de zéro (c'est-à-dire s'il existe dans l'anneau un élément $\overline{y}$ différent de $\overline{0}$ tel que $\overline{x}.\overline{y} = 0$), alors $p$ divise $x$.

— Réciproquement, montrer que si $p$ divise $x$, alors $\overline{x}$ est un diviseur de zéro.

— Combien l'anneau $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ a-t-il de diviseurs de zéro ?

**2.** a) Quel est l'ensemble des diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ?
Résoudre, dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, l'équation

$$(\overline{2}X + \overline{5})(X + \overline{4}) = \overline{0}.$$

b) En déduire l'ensemble des nombres entiers $n$ pour lesquels $(2n+5)(n+4)$ est divisible par 9.

**Problème 268** ./1974/parisCrem/pb/texte

Soient $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de $0$, et $f$ l'application de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

On désigne par P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ ; si un point $m$ de P a pour coordonnées $x$ et $y$, le nombre $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe de ce point.
Soient P$^\star$ l'ensemble P privé du point $O$, et F l'application de P$^\star$ dans P dans laquelle tout point $m$ de P$^\star$, d'affixe $z$, a pour image le point $M$ d'affixe $Z = f(z)$.

**1.** a) Montrer qu'il existe deux points de P$^\star$ invariants par F. Quelles sont leurs affixes ?

b) Montrer que tout point $M$ de P, autre que ces points invariants, est l'image par F de deux points $m$ de P$^\star$, dont $M$ est le milieu.

c) Marquer dans le plan P, en prenant 5 cm comme unité de longueur, le point $m$ d'affixe $z = 1+\mathrm{i}$, puis le point $m'$ d'affixe $-\dfrac{1}{z}$, enfin le point $M =$F$(m)$.

**2.** a) Soit $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels privé de $0$, et soit $\varphi$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Étudier la variation de la fonction $\varphi$ (on ne demande *pas* de tracer la courbe représentative).
En déduire l'image par l'application F des l'ensemble des points d'ordonnée nulle de P$^\star$.

b) Montrer que si $z$ est imaginaire pur (et non nul), $f(z)$ est aussi imaginaire pur.
On écrit alors $f(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}Y$ ($y$ et $Y$ réels), et l'on désigne par $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(y) = Y$.
Étudier la variation de la fonction $g$ (on ne demande *pas* de tracer la courbe représentative).
En déduire l'image par l'application F de l'ensemble des points d'abscisse nulle de P$^\star$.

**3.** a) Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $Z = f(z)$. Montrer que, si $z \neq \mathrm{i}$, le quotient $\dfrac{Z+\mathrm{i}}{Z-\mathrm{i}}$ s'exprime très simplement en fonction de $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.
On désigne par $U$ et $U'$ les points de P d'affixes respectives i et $-$i.
Soient $m$ un point de P$^\star$ distinct de $U$ et de $U'$, et $M =$F$(m)$.
Trouver une relation simple entre les angles $(\overrightarrow{mU},\ \overrightarrow{mU'})$ et $(\overrightarrow{MU},\ \overrightarrow{MU'})$.

b) Soit $\Gamma_1$ le cercle de diamètre $UU'$.
En utilisant la relation angulaire précédente, trouver :

— l'image de $\Gamma_1$ par F ;

— l'ensemble $\gamma$ des points $m$ de P$^\star$ tels que F$(m)$ appartienne à $\Gamma_1$.
Dessiner $\gamma$.

**4.** a) Soient $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ et $f(z) = Z = X + \mathrm{i}Y$ ($x,\ y,\ X,\ Y$ réels).
Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

b) On désigne par $\Gamma_r$ le cercle du plan P de centre $O$ et de rayon $r$, et l'on suppose que $r \neq 1$.
Trouver la nature de l'image $E_r$ de $\Gamma_r$ par l'application F ($x$ et $y$ étant les coordonnées d'un point de $\Gamma_r$, on pourra poser $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

c) Trouver une relation entre $r$ et $r'$ exprimant que $\Gamma_r$ et $\Gamma_{r'}$ ont la même image, et dessiner alors $\Gamma_r$, $\Gamma_{r'}$ et $E_r$ lorsque $r = 2$.

**5.** Soit $D$ la droite de P d'équation $y = x$, et D$^\star$ l'ensemble D privé du point $O$.
Calculer en fonction du nombre réel non nul $x$ la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $f(x+\mathrm{i}y)$, puis $Y^2 - X^2$.
Déterminer alors F(D$^\star$).
Exsite-t-il une autre droite D$_1$ telle que F(D$_1^\star$)=F(D$^\star$) ?

N.B.– *les questions 3, 4 et 5 peuvent être traitées dans un ordre quelconque.*

## XXIX. Paris remplacement, série E

Ex. 876. *./1974/parisErem/exo-1/texte.tex*

**1.** Étudier la variation de la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ dans un repère orthonormé, d'axes $Ox$ et $Oy$ (unité de longueur : 5 cm).



Retour page 1

**2.** En prenant comme unité l'aire du carré de côté 5 cm, calculer, en fonction du nombre réel positif donné $\lambda$, l'aire $\mathscr{S}(\lambda)$ de la portion de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $Ox$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$, c'est-à-dire l'aire de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant \lambda \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Montrer que l'aire $\mathscr{S}(\lambda)$ tend vers une limite quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

Trouver le nombre réel $\lambda_0$ tel que $\mathscr{S}(\lambda_0) = \dfrac{1}{4}$, et déterminer l'entier naturel $n$ tel que $n \times 10^{-3} < \lambda_0 < (n+1) \times 10^{-3}$.

**Ex. 877.** *./1974/parisErem/exo-2/texte.tex*

Soient $O$, $A$, $B$, $C$ quatre points fixes d'un espace affine E de dimension 3, et $a$, $b$, $c$ trois nombres réels donnés.
Soit $\mathscr{T}$ l'application de E dans E dans laquelle l'image d'un point $M$ quelconque de E est le point $M'$ tel que

$$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}.$$

Étudier, selon les valeurs de $a$, $b$, $c$, la nature géométrique de $\mathscr{T}$.

## XXX. Poitiers, série E

**Ex. 878.** *./1974/poitierse/exo-1/texte.tex*

On donne une réel $a > 0$ ;
Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les coordonnées d'un point mobile $M$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a}{2}\sin(4t) \\ y(t) = a\cos^2(2t) + a. \end{cases}$$

**1.** Déterminer la trajectoire de $M$ par son équation cartésienne.

**2.** Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de $M$ à l'instant $t$ ; calculer la longueur du vecteur vitesse ; caractériser le mouvement de $M$ sur sa trajectoire.

**Ex. 879.** *./1974/poitierse/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 - 2(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0.$$

Représenter dans le plan complexe, les images de ses solutions.

## XXXI. Reims, série E

**Ex. 880.** *./1974/reimse/exo-1/texte.tex*

On note $\log x$ le logarithme népérien du nombre réel $x$.
Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \log(2^x - 1).$$

**1.** Déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où elle est définie.

**2.** Déterminer sa dérivée.

**3.** Utiliser la question précédente pour calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{1-2^{-x}}\,\mathrm{d}x$.



Retour page 1

**Ex. 881.** ./1974/reimse/exo-2/texte.tex

Soit (E) un espace de dimension trois, rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, d'axe $Ox$, $Oy$, $Oz$. On considère les trois points :

- $A$ de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$
- $B$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$
- $C$ de coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

**1.** Démontrer que le triangle $ABC$ est rectangle.

**2.** Calculer le sinus et le cosinus de ses angles.

**3.** Faire une épure des trois points $A$, $B$ et $C$ en prenant comme plan horizontal de projection le plan $xOy$, comme plan frontal le plan $xOz$, le point $O$ étant au milieu de la ligne de terre $x'Ox$. (L'unité est le centimètre.)

**4.** Justifier sans calcul le fait que la projection frontale du triangle $ABC$ est un triangle rectangle.

# XXXII. Rennes, série C

**Ex. 882.** ./1974/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo 10.

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation : $\dot{2}x = \dot{0}$

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$$

# XXXIII. Rennes, série E

**Ex. 883.** ./1974/rennese/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $h$ un paramètre réel, supposé non nul. On considère les points $A(2\ ;\ 0)$, $B(2+h\ ;\ 0)$, $A'(2\ ;\ 2)$ et le point $B'$ tel que

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{h\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{OA'}.$$

Montrer qu'il existe une rotation ponctuelle $R$ unique telle que

$$A' = R(A) \qquad \text{et} \qquad B' = R(B).$$

Déterminer son angle et les coordonnées de son centre.

**Ex. 884.** ./1974/rennese/exo-2/texte.tex

Soit les fonctions $f$ et $g$ de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**1.** Déterminer la fonction dérivée de $f$.

**2.** Trouver les primitives de $g$.

**3.** Soit $t$ un nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer

$$F(t) = \int_0^t \frac{x + \sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Donner une valeur approchée de $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ à $10^{-3}$ près.

Retour page 1

# XXXIV. Rouen, série C

**Ex. 885.** ./1974/rouenC/exo-1/texte.tex

Linéariser $\cos^4 x$.

Calculer $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 3\cos x \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

# XXXV. Toulouse , série C

**Ex. 886.** ./1974/toulouseC/exo-1/texte.tex

On considère l'application $f$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels vers l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par : $f(n) = \overline{5^n}$

( $\overline{5^n}$ désignant la classe d'équivalence de $5^n$ modulo 7 )

1. Déterminer $f(n)$ pour $n$ appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Montrer que $f$ est périodique et a pour période 6.
3. Déterminer $f(n)$ suivant les valeurs de $n$.
4. En déduire, suivant les valeurs de $n$, le reste de la division par 7 du nombre $12192^n$.

**Ex. 887.** ./1974/toulouseC/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe orienté, muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation $T$ qui, au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par :

$$z' = 2(1-\mathrm{i})\overline{z} + \frac{7}{2}\mathrm{i}.$$

($\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$.)

Démontrer que $T$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie dont le centre $\omega$ appartient à l'axe $\Delta$ de la symétrie.

Déterminer $\Delta$, $\omega$, et le rapport de l'homothétie.

## Problème 269

./1974/toulouseC/pb/texte

A tout entier naturel $n$, on associe le polynôme $P_n$ défini par :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

(On rappelle : $0! = 1$.)

Soit $f_n$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^x - P_n(x).$$

On a ainsi : $f_0(x) = \mathrm{e}^x - 1$, ...

**1.** Étudier et représenter graphiquement les fonctions $f_0$ et $f_1$.

**2.** a) Montrer que la fonction $F_n$ définie par : $F_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ est paire.
Montrer que la fonction $G_n$ définie par : $G_n(x) = f_n(x) - f_n(-x)$ est impaire.

b) Étudier et représenter graphiquement les fonctions $F_0$ et $G_0$.

c) Démontrer que, quel que soit le réel positif $\lambda$, la restriction de $F_0$ à l'intervalle $[0\,;\lambda]$ est une bijection de $[0\,;\lambda]$ sur $[F_0(0)\,;F_0(\lambda)]$, et que le restriction $G_0$ à tout intervalle $[a\,;b]$ est une bijection de $[a\,;b]$ sur $[G_0(0)\,;G_0(\lambda)]$.

d) Démontrer que la fonction réciproque de la restriction de $F_0$ à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$x \longmapsto \log \frac{x + 2 + \sqrt{x^2+4x}}{2},$$

et que l'application réciproque de $G_0$ est définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par :

$$x \longmapsto \log \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}.$$



Retour page 1

**3.** a) Montrer que, pour tout réel $x$ : $f_n(x) = f'_{n+1}(x)$ et que : $f_n(0) = 0$.

b) Montrer que : $f_1(x) > 0$ si $x \neq 0$ ; $f_2(x) > 0$ si $x > 0$ ; $f_2(x) < 0$ si $x < 0$.
Plus généralement, discuter le signe de $f_n(x)$ en fonction du signe du réel non nul $x$ et de la parité de l'entier naturel $n$.

c) Montrer pour $x < 0$ : $1 + x < \mathrm{e}^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
En déduire un encadrement de $\mathrm{e}^{-0,1}$.
Comment pourrait-on obtenir un encadrement plus précis ?

## XXXVI. Toulouse remplacement, série E

**Ex. 888.** ./1974/touloseErem/exo-1/texte.tex

Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la fonction numérique $f$ définie par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 - 1}.$$

**Ex. 889.** ./1974/touloseErem/exo-2/texte.tex

On considère le polynôme

$$P(z) = 8z^4 - 8z^3 + 27z - 27.$$

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation $P(z) = 0$.
On donnera les racines sous leur forme trigonométrique et sous leur forme cartésienne.

### Problème 270

./1974/touloseErem/pb/texte

N.B.– *Les parties B et C sont indépendantes.*
Dans le plan affine P, on donne trois points distincts $A$, $B$, $C$, pondérés respectivement par trois nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.
On pose $\sigma = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. et on suppose que $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$.
A tout point $M$ on associe la barycentre $N$ du système :

$$\Sigma = \{(A,\ \alpha)\ ;\ (B,\ \beta)\ ;\ (C,\ \gamma)\ ;\ (M,\ 1)\}.$$

On détermine ainsi une application de P dans lui-même, que l'on note $f_\sigma$ et que l'on appelle application associée au triplet $\sigma = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

A 1∘ $O$ est un point choisi arbitrairement, démontrer que le vecteur $\overrightarrow{ON}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} + \vec{a}$$

le réel $k$ et le vecteur $\vec{a}$ étant indépendants de $M$ ; exprimer $k$ et $\vec{a}$.

2∘ On suppose ici que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Démontrer que le vecteur $\vec{a}$ s'écrit :

$$\vec{a} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$$

et ne dépend pas du choix du point $O$.
Démontrer que $k = 1$. En déduire que $f_\sigma$ est une translation que l'on caractérisera.

3∘ On suppose ici que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Démontrer que $f_\sigma$ est une homothétie que l'on caractérisera. (On pourra considérer le barycentre $G$ du système $\{(A,\ \alpha)\ ;\ (B,\ \beta)\ ;\ (C,\ \gamma)\}$).

B 1° Soit $\vec{u}$ un vecteur donné et $T_{\vec{u}}$ la translation de $\vec{u}$.
Peut-on trouver un triplet $\sigma = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ tel que l'application $f_{sigma}$ qui lui est associée soit égale à $T_{\vec{u}}$ ?,

a) quand $A$, $B$, $C$ sont alignés ?

b) quand $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés ?



Retour page 1

2° Soit $\Omega$ un point fixé, $t$ un nombre réel donné et $H_{\Omega,\ t}$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $t$.
Peut-on trouver un triplet $\sigma = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ tel que l'application $f_{sigma}$ qui lui est associée soit égale à $H_{\Omega,\ t}$ ?
Si oui, y a-t-il unicité de la solution ?
(On considérera successivement les cas B(1)a et B(1)b du B1).

C Le plan P est rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

puis $\alpha = 1 + t^2$, $\beta = 1 - t^2$, $\gamma = t - 2\ t$ étant un paramètre réel différent de $-1$.
Le point $M$ étant fixé en $O$, à tout $t$ ($t > -1$), on associe le point $N$ image de $M$ par $f_\sigma$.
On envisage ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans P qui définit le mouvement dans P du point $N$.

1° Calculer, en fonction de $t$, les coordonnées de $N$.

2° Déduire du résultat précédent une équation de la courbe, support de la trajectoire de $N$. Construire cette courbe.

Retour page 1

## Chapitre XVII

# 1975.

### Sommaire

# I. Aix marseille, série C

Ex. 890. ./1975/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les coordonnées (dans ce repère) d'un point mobile $M$ sont données en fonction du temps par

$$x = e^t, \qquad y = e^{2t} - 2t,$$

$M$ ayant $(x\ ;\ y)$ pour coordonnées dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et e désigne la la base du logarithme népérien.

**1.** Déterminer la trajectoire $(T)$ de $M$ [équation cartésienne et construction de $(T)$]

**2.** Déterminer l'hodographe $(H)$ du mouvement de $M$. Tracer cet hodographe dans le même repère que $(T)$. (il s'agit de l'hodographe par rapport au point $O$).

**3.** Calculer l'aire de la portion de plan limitée par l'axe $(O,\vec{\imath})$ par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ et par la courbe $(T)$.

Ex. 891. ./1975/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires, 1 boule blanche. On tire en une seule fois trois boules. On veut la probabilité d'avoir

A : deux boules rouges au moins,

B : deux boules de même couleur au moins,

C : 1 boule de chaque couleur.

On admet l'équiprobabilité des tirages.

**1.** Proposer un espace probabilisé fini permettant la description de cette situation.

**2.** Calculer ensuite $p(A)$, $p(B)$, $P(C)$.
On attachera la plus grande importance au 1 Les réponses à la question 2 n'ont d'intérêt que si un espace probabilisé fini $(\Omega,\ \beta,\ p)$ a été correctement défini.

**Problème 271** ./1975/aixmarseilleC/exo-3/texte

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers « relatifs », $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \qquad \text{et } u = 1 + j,$$

$|z|$ désigne le module de $z \in \mathbb{C}$.

A) 1. Établir la relation $1 + j + j^2 = 0$.
Calculer $u^2, u^3 \dots, u^n$ pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérifier que $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, corps des nombres réels.

B) 1. Soit $E = \{z \in \mathbb{C} | \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, z = a + jb\}$.
Y a-t-il unicité de l'écriture d'un élément de $E$ sous la forme $z = a + jb, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$?
Déterminer $U = \{z \in E || z| = 1\}$.

2. Établir que les opérations sur $\mathbb{C}$ définissent sur $E$ une structure d'anneau unitaire.
Déterminer les éléments inversibles (pour la multiplication) de $E$. Montrer que la multiplication (dans $\mathbb{C}$) définit sur $U$ une structure de groupe.

3. Déterminer $z \in E$ tel que $z\overline{z} = 3$ et $z + \overline{z} > 0$.

4. Soit $v = 1 - j$ ; montrer que, si $v$ peut être écrit $v = \lambda\mu, \lambda \in E, \mu \in E$, alors $\lambda \in U$ ou $\mu \in U$.

C) 1. Soit $I = \{w \in E | \exists z \in E, w = vz\}$, avec $v = 1 - j$.
Établir que $I$ est un sous-groupe du groupe additif $E$.
Déterminer $\{z \in I | x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$.
Démontrer que $\forall w \in I, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $w = \alpha v + \beta(vu)$ avec unicité du couple $(\alpha, \beta)$).

2. Soit $z = a + jb \in E, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $z - (a + b) \in I$.
En déduire que $\forall z \in E$, on a l'une des relations $z \in I, z - 1 \in I, z + 1 \in I$.

3. On définit une relation binaire $\sim$ entre éléments de $E$ par $z \sim z' \Longleftrightarrow z - z' \in I$.
Vérifier que cette relation est bien une relation d'équivalence.
Vérifier que cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication dans $E$.
Vérifier que l'ensemble quotient peut être muni d'une structure de corps par des opérations définies naturellement à partir des opérations dans $E$. Préciser la nature de ce corps (nombre d'éléments, comparaison avec un corps classique).

## II. Aix marseille, série E

**Ex. 892.** ./1975/aixmarseillee/exo-1/texte.tex

Dans un plan affine $E$ on considère deux points fixes $A$ et $B$. $k$ désigne un nombre réel non nul et $\lambda$ un nombre réel, $\lambda \neq 2$.
$M$ étant un point quelconque de $E$, on appelle $M_1$ le transformé de $M$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $k$, $M_2$ le transformé de $M$ par l'homothétie de centre $B$ et de rapport $-1$ ; $M'$ désigne le barycentre des deux points $M_1$ et $M_2$ affectés respectivement des coefficients $1$ et $1 - \lambda$. $f$ désigne l'application de $E$ dans lui-même définie par

$$\forall M \in E, \qquad f(M) = M'.$$

**1.** Démontrer que

$$\forall M \in E, \qquad (2 - \lambda)\overrightarrow{MM'} = (1 - k)\overrightarrow{MA} + 2(1 - \lambda)\overrightarrow{MB}.$$

**2.** On suppose que dans cette question seulement $k = 2$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Montrer que $f$ est une translation dont on précisera le vecteur.

**3.** Chercher les points invariants par $f$. (Discuter suivant les valeurs de $k$ et $\lambda$.)

**4.** Déterminer les conditions sur $k$ et $\lambda$ de telle sorte que $f$ soit une homothétie.

**Ex. 893.** ./1975/aixmarseillee/exo-2/texte.tex

**1.** Construire dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant dans ce repère

$$9y^2 = \left|-4x^2 + 16x + 20\right|,$$

on prendra pour unité un centimètre.

**2.** Préciser les éléments de symétrie de $(\mathscr{C})$.



Retour page 1

## Problème 272

./1975/aixmarseillee/pb/texte

On considère un plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les coordonnées d'un point sont données dans ce repère. $V$ désignera le plan vectoriel associé à E ; soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $f_k$ l'application de E dans E qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\begin{cases} 2x' = (k-1)x + (k+1)y, \\ 2y' = (k+1)x + (k-1)y. \end{cases}$$

**1.** a) Montrer que $f_k$ est une application affine. Quelle est dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ la matrice de l'application linéaire $\varphi_k$ qui lui est associée ?
Quelle est la nature de $f_{-1}$ ?

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application $f_k$.
Quand cet ensemble n,'est pas réduit au point $O$, préciser la nature géométrique de $f_k$.

c) Montrer que si $k$ est différent de zéro, $f_k$ est bijective.
$f_k^{-1}$ désignant l'application réciproque de $f_k$, comparer $f_k^{-1}$ et $f_{\frac{1}{k}}$.

**2.** Dans toute cette question on suppose que $k = 0$.

a) Déterminer l'ensemble image F de E par l'application $f_0$ : $f_0(\text{E}) = $F.

b) Soit $M_0$ appartenant à F. Quel est l'ensemble des points $M$ de E vérifiant $f_0(M) = M_0$ ?

c) Montrer que $f_0$ est la composée d'une syémtrie orthogonale et d'une projection, que l'on précisera, et que cette composition est commutative. (Il est fortement recommandé de faire une figure.)

**3.** On considère les vecteurs $\vec{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\vec{J} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

a) Montrer que $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ est un repère orthonormé de E.

b) Soit $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de $M$ dans $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ et $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ les coordonnées de $M'$ dans $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ (on rappelle que $M' = f_k(M)$).
Montrer que

$$\begin{cases} X' = kX \\ Y' = -Y. \end{cases}$$

**4.** a) Construire la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation cartésienne dans $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ :

$$Y = \frac{1}{4}X^4 - 2X^2 + 2,$$

on prendra comme unité de longueur 2 centimètres.

b) Montrer que la courbe $(\mathscr{C}')$ transformée de $(C)$ par $f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ a pour équation dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ :

$$Y = -X^4 + 4X^2 - 2.$$

Construire $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ , sur la même figure que $(\mathscr{C})$.

c) Quelle est l'aire de la portion du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $X = -2$ et $X = 2$ ?
On donnera une valeur approchée de cette aire avec la précision permise par les tables logarithmiques.

# III. Aix marseille remplacement, série C

Ex. 894.

./1975/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de $n$ le reste de la division par 7 et $3^n$.
En déduire le reste de la division par 7 de $3^{123}$.
Déterminer le chiffre $x$ des unités pour que $3^{123} + \overline{197x}_{10}$ soit divisible par 7.



Retour page 1

**Ex. 895.** ./1975/aixmarseilleCrem/exo-2/texte.tex

On désigne par log la fonction « logarithme népérien ».

**1.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par $f(x) = x^2+1-\log x$. Déterminer le domaine maximal de définition de $f$.

**2.** Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par $g(x) = x-1-\dfrac{\log x}{x}$.
Déterminer le domaine maximal de définition de $g$.
Étudier les variations de $g$. Tracer la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormé.
Calculer dans ce repère l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}, \qquad x-1 \leqslant y \leqslant g(x).$$

## Problème 273

./1975/aixmarseilleCrem/pb/texte

Soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base d'un espace vectoriel $X$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).
On donne dans $X$ deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{v} = a\vec{i}+b\vec{j}$, $\vec{v'} = a'\vec{i}+b'\vec{j}$.
Soit $(\Delta)$ la droite vectorielle de base $\{\vec{v}\}$ et $(\Delta')$ la droite vectorielle de base $\{\vec{v'}\}$.

A) 1° Montrer que la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de la symétrie $S$ par rapport à $(\Delta)$ de direction $(\Delta')$ est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$.
Calculer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en fonction de $a$, $b$, $a'$, $b'$ et vérifier que $\alpha^2+\beta\gamma = 1$.

2° Montrer que toute application linéaire de $X$ dans lui-même dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$ vérifiant $\alpha^2+\beta\gamma = 1$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.

3° Soit $P$ un plan affine associé à $X$, dont $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère.
On définit l'application affine $s : P \to P$ associant au point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ dans ce même repère de sorte que

$$\begin{cases} x' = 3x+4y+m,\\ y' = -2x-3y+m'. \end{cases}$$

Déterminer $m'$ en fonction de $m$ pour que $m$ soit une symétrie dont on déterminera l'axe et la direction.

B) Dans cette partie (indépendante de la précédente) on suppose $X$ euclidien et $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ orthonormée.
On posera $\|\vec{v}\| = r$, $\left\|\vec{v}'\right\| = r'$, $\cos\left(\widehat{\vec{v};\vec{v'}}\right) = z$.

1° Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $X$ dont la matrice dans la base $(\vec{v},\ \vec{v'})$ est $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.
Déterminer les couples $(\vec{v},\ \vec{v'})$ tels que $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ et $\left\|\varphi(\vec{v'})\right\| = \left\|\vec{v}'\right\|$.
Montrer que ce problème admet une infinité de solutions. En choisissant $\vec{v}$ arbitrairement, on trouve deux vecteurs $\vec{v'}_1$ et $\vec{v'}_2$ tels que $(\vec{v},\ \vec{v'}_1)$ et $(\vec{v},\ \vec{v'}_2)$ soient solutions du problème.
Obtenir $\vec{v'}_1$ et $\vec{v'}_2$ à partir de $\vec{v}$ par composition d'une rotation et d'une homothétie vectorielle.

2° Calculer les coordonnées de $(a'_1,\ b'_1)$ de $\vec{v'}_1$ et $(a'_2,\ b'_2)$ de $\vec{v'}_2$ en fonction de $a$ et $b$, coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

3° Montrer que si la matrice de $\varphi$ est $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ dans l'une ou l'autre des bases $(\vec{v},\ \vec{v'}_1)$, $(\vec{v},\ \vec{v'}_2)$, $\varphi$ set une rotation vectorielle : on comparera les deux rotations vectorielles ainsi identifiées.

4° Montrer que si $\Psi : X \to X$ est une rotation vectorielle, sa matrice dans toute base $(\vec{e_1},\ \vec{e_2})$ est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ avec $|\alpha+\delta| \leqslant 2$ et $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$, et que, $\theta$ étantb une détermination de la mesure de l'angle de la rotation,

$$\cos\theta = \frac{\alpha+\delta}{2}.$$

On pourra rechercher la matrice $\Psi$ dans la base $\left(\frac{\overrightarrow{e_1}}{\|\overrightarrow{e_1}\|}, \frac{\|\overrightarrow{e_2}\|}{\overrightarrow{e_1}}\right)$ puis dans une base orthonormée $\left(\frac{\overrightarrow{e_1}}{\|\overrightarrow{e_1}\|}, \overrightarrow{e_3}\right)$.

# IV. Aix marseille remplacement, série E

**Ex. 896.** ./1975/aixmarseilleerem/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2\left(1\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+4\mathrm{i}z\tan\frac{\theta}{2}-4=0.$$

**2.** Déterminer le module et un argument de chaque solution en fonction de $\theta$.

**Ex. 897.** ./1975/aixmarseilleerem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ d'axes $x'0x$, $y'Oy$, $z'Oz$, on considère le plan $(P)$ d'équation $x-2y+2z=0$.
On prendra pour unité le centimètre.
Soit $A$ le point de coordonnées $(1~;~8~;~6)$.
On prend le plan $xOy$ comme plan de projection, le plan $yOz$ comme plan frontal de projection et $y'y$ comme ligne de terre.
On tracera la ligne de terre au milieu de la feuille d'épure parallèlement au petit côté de cette feuille et l'on prendra l'origine $O$ sur $y'y$ à 2 cm du bord gauche de la feuille.
Représenter l'épure du point $A$ et du plan $(P)$.
Par une rotation autour de l'axe de bout contenant $A$, faire apparaître en vraie grandeur sur l'épure la distance de $A$ à $(P)$. (Indiquer sur l'épure.)
Mettre en évidence sur l'épure une section droite du trièdre formé par le plan $(P)$ et le plan frontal de projection (en un autre langage, faire apparaître en « vraie grandeur » l'angle du plan $(P)$ et du plan frontal).

**Problème 274** ./1975/aixmarseilleerem/pb/texte

Dans l'ensemble des nombres complexes, on désigne par $z$ le nombre $x+\mathrm{i}y$, par $\overline{z}$ son conjugué $x-\mathrm{i}y$, et par $z'$ le nombre $x'+\mathrm{i}y'$.
Dans le plan affine euclidien $(P)$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on associe au complexe $z$ le point $P$ de coordonnées $(x~;~y)$, et à $z'$ le point $M'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$.
Soit $V$ le plan vectoriel associé à $(P)$.
Étant donné deux réels $(a,~b)$, on considère le point $A$ de coordonnées $(a~;~b)$, et l'on suppose $z$ et $z'$ liés par la relation

$$z' = az + b\mathrm{i}\overline{z}.$$

Le point $M'$ est donc l'image du point $M$ par l'application $f_A$ de $(P)$ dans lui-même.

A) Exprimer les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ de $M'$ en fonction ses coordonnées $(x~;~y)$ de $M$.
Montrer que l'application $f_A$ est une application affine associée à une application linéaire $F_A$ de $V$ dans lui-même.
Déterminer la matrice de $F_A$ dans la base $(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath})$.
Étudier, suivant les valeur de $a$ et $b$, le noyau et l'espace-image de $F_A$.
Comment faut-il choisir le point $A$ pour que l'application $F_A$ soit bijective ?

B) Soit E l'ensemble des applications $F_A$ bijectives. Étant donné deux applications $F_A$ et $F_{A'}$ de E, montrer que $F_A \circ F_{A'}$ appartient à E. Quelle est la structure de E muni de la loi $\circ$, composition des applications ?

C) Comment faut-il choisir le point $A$ pour que

- $F_A$ soit une homothétie vectorielle ;
- $F_A$ soit une projection (préciser les éléments de cette projection) ;
- $F_A$ soit une symétrie vectorielle (préciser les éléments de cette symétrie) ?

D) On considère l'application $f_A$ de $(P)$ dans lui-même, et l'on suppose $a^2 - b^2 \neq 0$ et $b \neq 0$.
Montrer qu'il existe deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ invariantes par $f_A$. Déterminer un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, $\vec{I}$ et $\vec{J}$ étant respectivement vecteurs directeurs de $(D_1$ et $(D_2)$.
On désigne par $(X\ ;\ Y)$ et par $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ les coordonnées de $M$ et $M'$ dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
Calculer $X'$ et $Y'$ en fonction de $X$ et $Y$.
Montrer que $f_A$ est composée d'une homothétie de centre $O$, de rapport $(a+b)$, et d'une application, que l'on précisera.
Montrer que $f_A$ est composée d'une homothétie de centre $O$, de rapport $(a-b)$, et d'une application, que l'on précisera.
Ces résultats sont-ils valables si $b = 0$ ?

E) On considère l'application $f_A$ de $(P)$ dans lui-même. On désigne par $T$ l'ensemble des applications $f_A$ pour lesquelles $b = 0,\ a \neq 0$.
On désigne par $T'$ l'ensemble des applications $f_A$ pour lesquelles $a = 0,\ b \neq 0$.
Montrer que $T \cup T'$, muni de la loi $\circ$, a une structure de groupe et que $T$ est un sous-groupe de $T \cup T'$.

## V. Amiens, série C

**Ex. 898.** ./1975/amiensC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2(2+i)z + 6 = 0.$$
Déterminer le module et l'argument de chacune de ses racines.

**2.** On considère la fonction polynôme $P$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par
$$P(z) = z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42.$$
a) Montrer l'existence d'un réel $r$ tel que $P(r) = 0$.
b) Montrer l'existence d'une fonction polynôme $Q$ telle que
$$(\forall z \in \mathbb{C})\ P(z) = (z-r)Q(z).$$
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**Ex. 899.** ./1975/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par
$\forall x,\ x \in ]-\infty, 0]\ f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,
$\forall x,\ x \in ]0, 1[\quad f(x) = x \log x$,
$\forall x,\ x \in ]1, +\infty[\ f(x) = -e^{-x} + e^{-1}$.

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $0$ et $1$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.

**3.** Soit $a \in ]0, 1[$. Calculer l'aire $D_a$ du domaine délimité par la courbe $(C)$ et les droites ayant pour équations respectives $x = a$, $x = 1$ et $y = 0$.
Cette aire $D_a$ a-t-elle une limite quand $a$ tend vers $0$.

## PROBLÈME 275

./1975/amiensC/pb/texte

Soit $P$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appellera $\mathscr{P}$ le plan vectoriel associé à $P$.
Soit $f_\lambda$ l'application affine de $P$ dans $P$ laissant $O$ invariant, dont l'application linéaire associée $\varphi_\lambda$ a pour matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \dfrac{\lambda+1}{2} & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) 1. Pour quelles valeurs de $\lambda$, $f_\lambda$ est-elle bijective ?

2. Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda$, le noyau de $\varphi_\lambda$ noté $\ker \varphi_\lambda$. Lorsque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, en donner une base.

3. Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda$, l'image de $\varphi_\lambda$ notée $\operatorname{Im} \varphi_\lambda$. En donner une base.

4. Pour quelle valeur de $\lambda$, $f_\lambda$ est-elle involutive ?

5. Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda$, l'ensemble des points invariants par $f_\lambda$. Lorsque cet ensemble est une droite, préciser cette droite par un point et un vecteur directeur.

B) Étude de $f_\lambda$ pour $\lambda = -1$.

a) Déterminer l'ensemble $U = \{\vec{u} \in \mathscr{P} | \varphi_{-1}(\vec{u}) = \vec{u}\}$.

b) Montrer que les sous-espaces $U$ et $\ker(\varphi_{-1})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{P}$.

c) En déduire que $\varphi_{-1}$ est la composée de d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle, que l'on déterminera.

d) En déduire que $f_{-1}$ est la composée de d'une projection et d'une homothétie.

C) Étude de $f_\lambda$ pour $\lambda = -1$.

a) Déterminer les réels $k$ pour chacun desquels il existe un vecteur $\vec{V}$ non nul vérifiant $\varphi_3\left(\vec{V}\right) = k\vec{V}$.

b) Pour chaque réel $k$ déterminé au 1° vérifier que l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathscr{P} | \varphi_3(\vec{u}) = \vec{u}\}$ est une droite vectorielle.

c) En désignant par $k_1$ et $k_2$ les deux réels trouvés en C),1° ($k_1 < k_2$), montrer que qu'il existe une base $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ de $\mathscr{P}$ telle que

$$\forall i \in \{1,2\},\ \varphi_3\left(\vec{V}_i\right) = k_i \vec{V}_i.$$

4° Montrer que tout point $M' = f_3(M)$ est obtenu en construisant la projection $m$ de $M$ sur la droite passant par $O$ de vecteur directeur $\vec{V}_1$ suivant la direction donnée par $\vec{V}_2$, puis en construisant $M'$ tel que $\overrightarrow{mM'} = 2\overrightarrow{mM}$. Faire une figure avec un point $M$, sa projection $m$ et le point $M'$.

D) Étude de $f_\lambda$ pour $\lambda = 0$.

a) Montrer que $f_0$ est une symétrie par rapport à une droite relativement à une direction que l'on précisera.

b) Soit le cercle $(C)$ de centre $\Omega(0, -2)$ de rayon 1.

a) Donner une équation de ce cercle dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Soit $(E)$ l'image de $(C)$ par $f_0$. Déterminer une équation de $(E)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

c) Montrer que $(E)$ est une ellipse dont on donnera les coordonnées du centre, le demi-grand axe et le demi petit axe.

d) Faire une figure.

# VI. Amiens, série E

Ex. 900. ./1975/amiense/exo-1/texte.tex

L'exercice est le même que celui de la série C : Amiens série C exercice 1



Retour page 1

**Ex. 901.** ./1975/amiense/exo-2/texte.tex

**1.** Trouver une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$.

**2.** En déduire, en intégrant par parties,

$$I(a) = \int_0^a x\cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

où $a$ est un réel donné.

**3.** Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de

$$I\left(\frac{\pi}{5}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{5}} x\cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x.$$

### Problème 276 ./1975/amiense/pb/texte

Le problème est le même que celui de la série C : Amiens série C problème

## VII. Amiens remplacement, série C

**Ex. 902.** ./1975/amiensCrem/exo-1/texte.tex

**1.** On considère les nombres $A = 2n+3$ et $B = 5n-2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Trouver deux entiers naturels $u$et $v$, premiers entre eux, tels que $Au - Bv$ soit indépendants de $n$. En déduire que, si $A$ et $B$ ne sont pas premiers entre eux, leur pgcd est $19$.

**2.** Étudier l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que le pgcd de $A$ et $B$ soit égal à $19$.

**Ex. 903.** ./1975/amiensCrem/exo-2/texte.tex

On note la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \log\left[1 + |1-x|\right].$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Étudier le fonction $f$ et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On indiquera, avec précision, les tangentes ou demi-tangentes aux points remarquables de la courbe.

**3.** Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$. Représenter $f^{-1}$ dans le repère du 2.

**4.** Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 (x - f(x))\,\mathrm{d}x$. interpréter cette valeur de $I$.

### Problème 277 ./1975/amiensCrem/pb/texte

A) Soit E un plan vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormé $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ notée aussi $\mathscr{B}$.

1. On considère l'endomorphisme $F$ de E auant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$ : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout couple $(\vec{v},\ \vec{v}')$ de $\mathrm{E}^2$, comparer les produits scalaires $F(\vec{v}).F(\vec{v}')$ et $\vec{v}.\vec{v}'$ ; en déduire que $F$ ne conserve pas le produit scalaire mais « conserve » l'orthogonalité et « multiplie » la norme de tout vecteur par $\sqrt{2}$.

   Montrer que $F$ est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une symétrie orthogonale $s$ par rapport à une droite vectorielle $(\Delta)$, que l'on déterminera avec précision. Évaluer les applications $F^n$ pour $n \in \mathbb{N}\star$.

2. On considère également l'endomorphisme $G$ de E ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Comparer également les produits scalaires $G(\vec{v}).G(\vec{v}')$ et $\vec{v}.\vec{v}'$. Que peut-on en conclure pour $G$ ?
Montrer que $G$ est la composée d'une homothétie vecteorielle de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'une rotation $r$ dont on déterminera l'angle.
Préciser $G^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Déterminer la matrice et la nature des endomorphismes de E, $s'$ et $s''$ tels que $r = s \circ s' = s'' \circ s$ ; préciser $F \circ G$ et $G \circ F$.

B) Soit un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E et muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ étant la base orthonormée $\mathscr{B}$ définie au A.
On appelle $f$ et $g$ les applications affines de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}$ associées respectivement à $F$ et $G$ et laissant le point $\Omega\,(1\ ;\ 1)$ invariant. A chaque point $M\,(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{E}$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Montrer que l'affixe $z_1$ de $M_1$, si $M_1 = f(M)$, est égale à $(1-\mathrm{i})(1-\overline{z})$. Quelle est la nature géométrique de $f$ ?
Soit $A$ le point d'affixe 1.
Soit les points $A_0 = A,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n,\ \dots$ tels que $A_n = f(A_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que les points $A_n$ appartiennent à l'union de deux demi-droites d'origine $\Omega$.

2. Montrer que l'affixe $z_1'$ de $M_1$, si $M_1 = g(M)$, est égale à $\frac{1-\mathrm{i}}{2}z + \mathrm{i}$. Quelle est la nature géométrique de $g$ ?
Soit les points $A_0' = A,\ A_1',\ A_2',\ \dots,\ A_n',\ \dots$ tels que $A_n' = g(A_{n-1}')$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que si l'on pose
$$u_n = a_n' - a_{n-1}' \qquad \text{et} \qquad v_n = |u_n|,$$
$a_n'$ désignant l'affixe de $A_n'$, les suites
$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^\star &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} v : \mathbb{N}^\star &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto v_n \end{aligned}$$
sont des suites géométriques.
Calculer la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de la suite $v$. Montrer que $S_n$ admet une limite, que l'on calculera, quand $n$ tend vers $+\infty$.

C) 1. Construire dans le repère précédent $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = \frac{x}{x-1}$.
Déterminer les valeurs de $\alpha$ ($\alpha < 1$) pour que l'aire arithmétique du domaine limité par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations :$y = 1$, $x = -1$ et $x = \alpha$ soit égale à $2\log 2$.
2. $(\mathscr{C}_1)$ désignant la transformée de $(\mathscr{C})$ par $f$, donner une équation de $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ puis da ns le repère $(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Construire $(\mathscr{C}_1)$.
3. Déterminer la nature géométrique de $g \circ f$. Quelle est la transformée de la courbe $(\mathscr{C})$ par $g \circ f$ ? EXpliquer le résultat obtenu.

## VIII. Amiens remplacement, série E

**A**Ex. 904. ./1975/amiensErem/exo-1/texte.tex

Un espace affine de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.
On choisit le plan $(xOy)$ pour plan horizontal et le plan $(yOz)$ pour plan frontal. L'unité est le centimètre.

**1.** Vérifier que le point de coordonnées $(3\ ;\ 7\ ;\ 2)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

**2.** Placer le point sur l'épure et déterminer les traces du plan $\mathscr{P}$ sur les plans de projection.

**3.** $(\mathscr{C})$ est le cercle du plan $\mathscr{P}$ qui admet $A$ pour centre et 3 pour rayon. Faire l'épure.



Retour page 1

**Ex. 905.** ./1975/amiensErem/exo-2/texte.tex

Le problème est le même que celui de la série C : Amiens série C remplacement exercice 2

### Problème 278 ./1975/amiensErem/pb/texte

Le problème est le même que celui de la série C : Amiens série C remplacement problème

## IX. Besançon, série C

**Ex. 906.** ./1975/besanconC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

**1.** En étudiant les variations de la fonction $f$, montrer que l'équation

$$f(x) = 0 \tag{XVII.1}$$

a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

**2.** Montrer qu'aucune des solutions de l'équation (1) n'est rationnelle : on pourra pour cela montrer qu'il est impossible de trouver deux nombres $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\frac{r}{s}$ soit une solution de cette équation.

**3.** Calculer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$. Poser alors $x = \cos 2\alpha$, et en déduire les trois solutions de l'équation XVII.1 sous forme trigonométrique.

**Ex. 907.** ./1975/besanconC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1},$$

où le nombre $e$ est la la base des logarithmes népériens.
Étudier les variations de $f$. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$.

**2.** Calculer l'aire de la partie du plan

$$A = \{M(x, y) \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \qquad 1 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

### Problème 279 ./1975/besanconC/pb/texte

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & -1 \end{bmatrix},$$

où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

A) 1. a) Montrer que si $A_\lambda$ et $A_\mu$ sont deux éléments de $\mathscr{M}$, on a

$$A_\lambda \cdot A_\mu = A_\mu \cdot A_\lambda \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad \lambda = \mu.$$

b) Montrer que $A_\lambda \cdot A_\mu + A_\mu \cdot A_\lambda = h(\lambda, \mu) I$, où $h(\lambda, \mu)$ est un scalaire réel et $I$ la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $h(\lambda, \mu) = 0$ si, et seulement si $\lambda = \mu$.
Que peut-on dire de $A_\lambda^2$ ?

c) Calculer $(A_\lambda + A_\mu)^2$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que

$$(A_\lambda + A_\mu)^{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda - \mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n} I.$$

b) Montrer que la matrice $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de $\lambda$.

3. On dit qu'une matrice $M(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$ dont les éléments dépendent d'un paramètre $x$, possède une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$ s'il existe une matrice $L = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ telle que

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} a(x) \quad \beta = \lim_{x\to+\infty} b(x)$$
$$\gamma = \lim_{x\to+\infty} c(x) \quad \delta = \lim_{x\to+\infty} d(x).$$

a) Montrer que la matrice $C_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ a, pour $n$ tendant vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

b) Exprimer la matrice $B_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_p + A_{p+1})^2$.

c) Montrer que la matrice $B_n$ a, lorsque $n \to +\infty$, une limite que l'on calculera.

B) On pose $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices de la forme $aI + bJ$ ; $a$ et $b$ étant réels.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble $\mathscr{M}_{2,2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.
2. $\mathscr{E}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est-il un anneau ?
3. Soit $M = aI + bJ$ un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$ la matrice $M^q$ peut s'écrire $M^q = a^q I + q a^{q-1} J$.

C) $\overrightarrow{E}$ étant un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère pour $a, b$ fixés l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $\overrightarrow{E}$ défini par la matrice $M = aI + bJ$.

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un automorphisme de $\overrightarrow{E}$ si, et seulement si, $a \neq 0$.
2. Quelle est la matrice représentant $f_{a,b}$ quand on rapporte le plan à une nouvelle base orthonormée $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$ déduite de la première par une rotation vectorielle d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$ ?

## X. Besançon, série E

**Ex. 908.** ./1975/besancone/exo-1/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(2+\mathrm{i})Z^2 - (9+2\mathrm{i})Z + 5(3-\mathrm{i}) = 0.$$

**Ex. 909.** ./1975/besancone/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$,on représente l'axe des ordonnées par le petit axe de la feuille, l'axe des abscisses et l'axe des cotes par le grand axe. Soit $(P)$ le plan d'équation cartésienne $x - y + 2z - 8 = 0$, le point $A$ de coordonnées $(8\ ;\ 4\ ;\ 8)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$. (L'unité est le centimètre.)

**1.** Construire les traces du plan $(P)$

**2.** Construire l'épure de la droite $(D)$ contenant $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

**3.** Construire la projection orthogonale e la droite $(D)$ sur le plan $(P)$.

## 🏛Problème 280

./1975/besancone/pb/texte

Soit un plan affine P rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et le plan vectoriel associé $\mathscr{P}$.

A) On considère l'endomorphisme $\psi$ de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\psi$ est une bijection et déterminer $\psi^{-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $\psi$ est une droite vectorielle, que l'on déterminera.
3. On pose $\psi^2 = \psi \circ \psi$, $\psi^3 = \psi \circ \psi^2$, ..., $\psi^n = \psi \circ \psi^{n-1}$.
   Déterminer les matrices de $\psi^2$ et $\psi^3$.
   Trouver par récurrence la matrice de $\psi^n$ $(n \in \star)$.

B) Soit $\varphi$ l'application de P dans P d'endomorphisme associé $\psi$ et qui laisse le point $\Omega$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ invariant.

1. Déterminer analytiquement l'application $\varphi$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Démontrer que $\varphi$ est une bijection et déterminer analytiquement $\varphi^{-1}$.
3. Soit $(D)$ la droite de P d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.
   Montrer que l'image de $(D)$ par $\varphi$ est une droite $(D')$ dont on déterminera l'équation en fonction de $a$, $b$ et $c$.
   Quelles sont les droites transformées par $\varphi$ en des droites de même direction ?
   P étant supposé euclidien, et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé, existe-t-il des droites $(D)$ perpendiculaires à leur image ?

C) Soit la fonction numérique $f$ de la variable numérique $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3}{2(x-1)}.$$

1. Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On déterminera en particulier l'asymptote oblique $(\Delta)$ de $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer l'aire de la portion du plan limitée par $(\mathscr{C})$, $(\Delta)$ et les droites d'équations $x=2$ et $x=\lambda$ $(\lambda > 2)$.
3. Déterminer$\lambda$ avec la précision permise par les tables pour que cette aire ait pour valeur $\pi$.

D) Déterminer analytiquement l'image $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C})$ l'application $\varphi$ étudiée au B. Trouver la nature de $(\Gamma)$ et déterminer ses éléments caractéristiques. Construire $(\Gamma)$ sur la même figure que $(\mathscr{C})$.

# XI. Besançon Nancy, Reims & Strasbourg remplacement, série C

**Ex. 910.** ./1975/besanconCrem/exo-1/texte.tex

Un joueur lance $n$ fois un pièce non truquée. Il reçoit 1 franc chaque fois qu'il obtient pile et il perd 1 franc chaque fois qu'il obtient face.
Soit $y$ un nombre relatif compris entre $-n$ et $n$.
Quelle est la probabilité pour que son gain à l'issue des $n$ coups soit égal à $y$ ?
(Il est bien sûr entendu qu'un gain négatif correspond à une perte d'argent.)

**Ex. 911.** ./1975/besanconCrem/exo-2/texte.tex

Soit $p$ et $q$ deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que $q$ et $q$ sont strictement supérieurs à 1.



Retour page 1

2. Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = ax - \frac{x^q}{q},$$

où $a$ est un réel strictement positif, et calculer la valeur de son maximum.
Indiquer l'allure de la courbe représentative de $g$.

3. En déduire que pour tous nombres réels strictement positifs $a$ et $b$, on a :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

## Problème 281

./1975/besanconCrem/pb/texte

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Étant donné deux nombres réels $a$ et $b$, on désigne par $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ défini par

$$\begin{cases} \varphi_{a,b}(\vec{i}\,) = (a-b)\,\vec{i} + b\,\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{j}\,) = b\,\vec{i} + (a-b)\,\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{k}\,) = \vec{k}\,. \end{cases}$$

A) 1. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est bijectif si et seulement si $a(a-2b) \neq 0$.

2. Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$ lorsque $a(a-2b) = 0$ (on distinguera trois cas).
Montrer que dans tous les cas ce noyau et cette image sont supplémentaires.

3. Pour quelle valeur de $a$ et $b$ l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est-il une isométrie vectorielle ? Soit $G_y$ l'ensemble de ces isométries :

a) Caractériser les éléments de $G_y$.

b) Dresser la table de composition des éléments de $G\ y$. Qu'en déduisez-vous, quant la la structure de $(G_y,\ \circ)$ ?

B) On considère désormais le cas particulier $a = 2$, $b = 3$ et l'on pose $\varphi = \varphi_{2,3}$.

1. Montrer qu'il existe des vecteurs $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ et des réels $\lambda_1,\ \lambda_2$ tels que :

(i) $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{k})$ soit une base orthonormée de $\mathscr{V}$

(ii) $\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e_1}$ et $\varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e_2}$

(iii) $\lambda_1 > \lambda_2$.
On montrera que ces conditions déterminent $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de manière unique ; en est-il de même pour $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ?
Montrer enfin que si l'on impose la condition supplémentaire :

(iv) $\vec{e}_1.\vec{i} > 0$ et $\vec{e}_2.\vec{j} > 0$
les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont alors uniques. Les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ seront ainsi choisis dans ce qui suit.

2. Soit $\epsilon$ un espace affine euclidien dont $\mathscr{V}$ est l'espace vectoriel euclidien associé et $(O\,;\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{k})$ un repère cartésien de $\epsilon$.
On considère l'application affine $f$ qui laisse $O$ invariant et dont l'endomorphisme associé est $\varphi$.

a) Pourquoi $f$ est-elle une application affine bijective ?

b) Déterminer analytiquement $f$ et caractériser par une relation entre leurs coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M$ de $\epsilon$ tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{Of(M)}$ soient orthogonaux.

c) Reconnaître et donner les principales caractéristiques de l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan d'équation $z = \alpha$.

d) Même question pour l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan d'équation $y = \beta$.



Retour page 1

# XII. Bordeaux, série C

**Ex. 912.** ./1975/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soit $a$ un entier naturel donné.
Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ vérifiant simultanément les conditions :
$x \equiv a$ $(modulo\ 2)$ et $x \equiv 3$ $(modulo\ 5)$.
(On pourra utiliser l'inconnue auxiliaire $y = x - 5a$.)

**Ex. 913.** ./1975/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la similitude $S$ de centre $O$, d'angle $\theta$, $(\theta \neq 2k\pi)$ de rapport $r$, et la rotation $R$ de centre $A$ ( de coordonnées $(1, \sqrt{3})$) et d'angle $\varphi$ $(\varphi \neq 2k\pi)$.

**1.** Montrer que les transformations d'une même figure $(F)$ par le produit $R \circ S$ et par le produit $S \circ R$ se déduisent l'une de l'autre par une translation.

**2.** On donne $\theta - \dfrac{\pi}{6}, \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.
Déterminer $r$ de façon que le vecteur définissant la translation du (1) soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
(Toute forme de solution est acceptée : géométrique, par les complexes. . .)

## Problème 282

./1975/bordeauxC/pb/texte

A) On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites numériques (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si l'on considère sur $\mathscr{E}$ les lois suivantes
$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \alpha.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}},$
$(\mathscr{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\vec{0}$ l'élément neutre.
Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

1° Vérifier que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
Montrer que l'application $\varphi$ de $\mathscr{F}$ vers $\mathbb{R}^2$ qui à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe le couple $(u_0, v_0)$ est une application linéaire bijective. En déduire la dimension de $\mathscr{F}$.

2° Soit $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathscr{F}$. Montrer que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ dans $\mathscr{F}$ équivaut à

$$\lambda u_0 + \mu v_0 = 0, \qquad \lambda u_1 + \mu v_1 = 0.$$

En déduire que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une partie libre de $\mathscr{F}$ si, et seulement si $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$.

3° a) Soit $r$ un réel non nul. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si $2r^2 - 3r - 2 = 0$.

b) En déduire l'existence dans $\mathscr{F}$ de deux suites du type précédent qu'on notera $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathscr{F}$.

c) En déduire la forme générale des éléments de $\mathscr{F}$.
Déterminer ces éléments $\vec{u}$ en fonction de $u_0$ et de $u_1$.

B) Pour toute application $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ quand elle existe.
On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2f^{(2)} - 3f^{(1)} - 2f = \theta$$

(où $\theta$ désigne l'application nulle).

1° Démontrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Établir que les applications $\varphi$ et $\psi$ telles que

$$\varphi(x) = e^{2x} \qquad \text{et } \psi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

sont des éléments linéairement indépendants de $\mathscr{S}$.
Remarque : Il y avait déjà une application $\varphi$ au A1° ...



Retour page 1

2° Soit $f$ appartenant à $\mathscr{S}$. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}$ appartient à $\mathscr{S}$ pour tout entier $n$.
En déduire que $f$ appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si $f$ possède des dérivées de tous ordres et si pour tout réel $x$ la suite de terme général $f^{(n)}(x)$ appartient à $\mathscr{F}$.

3° On veut montrer que $\mathscr{S}$ est engendré par $\varphi$ et par $\psi$. Soit $f$ un élément de $\mathscr{S}$. Montrer que pour

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$$

implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha f^{(n)} + \beta\varphi^{(n)} + \gamma\psi^{(n)} = 0.$$

Quel (sic) est la forme générale des éléments de $\mathscr{S}$ ?

# XIII. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 914.** ./1975/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

1. Calculer $x^4$ pour $x$ appartenant à l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire $x^5 - x$.
2. Trouver tous les couples $(x,\ y)$ avec $x$ et $y$ éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tels que $x^5 + y^5 = \dot{3}$.

**Ex. 915.** ./1975/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ on donne la rotation $r_1$ de centre $O$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ ; puis la rotation $r_2$ de centre $A$ de coordonnées $\left(1\ ;\ \sqrt{3}\right)$et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Étudier l'application $r_2 \circ r_1$.
Déterminer les points invariants éventuels.
(Toute forme de solution est acceptée :

— soit géométrique (marquer dans ce cas sur une figure tous les points que l'on voudra utiliser) ;*

— soit en utilisant les coordonnées, les affixes, etc.)

## Problème 283

./1975/bordeauxCrem/pb/texte

A) On rappelle que l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré au plus égal à 2 auquel on ajoute la fonction identiquement nulle, est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, avec pour base naturelle $\{p_0,\ p_1,\ p_2\}$, $p_n$ désignant la fonction $x \longmapsto x^n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2$.
Pour $p \in \mathscr{P}_2$, on considère l'application $f : p \longmapsto f(p)$ définie par

$$f(p)(x) = x^2 p''(x) - (\mu x + \mu - 1)p'(x) + p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$\mu$ réel donné et $p'$ et $p''$ désignant les fonctions polynômes dérivées première et seconde de $p$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{P}_2$. Calculer $f(p_0),\ f(p_1),\ f(p_2)$ et en déduire $f(p)$, où $p$ est défini par
$$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que si $\mu \neq \dfrac{3}{2}$ et $\mu \neq 1$, $f(p_0),\ f(p_1),\ f(p_2)$ sont trois fonctions polynômes indépendantes dans $\mathscr{P}_2$.
En déduire alors que $f$ est bijective.
*Cas particulier :* Si $\mu = 2$, trouver les fonctions polynômes $p$ de $\mathscr{P}_2$, solutions de l'équation $f(p) = q$, où $q$ est définie par $q(x) = x^2 - 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Dans cette question, on suppose que $\mu = 1$. Trouver le noyau et l'image de $f$ et montrer que c'est une projection vectorielle.
Comment faut-il choisir $q$ dans $\mathscr{P}_2$ pour qu'il existe des fonctions polynômes $p$ dans $\mathscr{P}_2$ vérifiant l'équation
$$f(p) = q\ ? \tag{2}$$
*Application :* On considère $q$ défini par $q(x) = x^2 - 1$, trouver les fonctions polynômes $p$ solution de (2).

4. Étudier $f$ (noyau et image) dans le cas où $\mu = \dfrac{3}{2}$.

B) On se propose d'étudier l'ensemble E des fonctions $\varphi$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+$, deux fois dérivables vérifiant :

$$x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star. \tag{3}$$

1. En comparant (1) et (3) et grâce au A3, montrer que E n'est pas vide.
2. On cherche une fonction $\varphi$ de E sous la forme

$$\varphi(x) = xu(x) \quad \text{sur}\mathbb{R}_+^\star,$$

où $u$ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Vérifier que (3) équivaut à : $xu'(x) = A$ (constante arbitraire) pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+^\star$. En déduire la forme générale des fonctions $u$, puis celle des fonctions de E.

3. On considère la fonction $h : x \longmapsto x \log x$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ ($\log$ désigne la fonction logarithme népérien).

a) Montre qu'elle appartient à E.

b) On désigne par $\tilde{h}$ le prolongement de $h$ défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^\star \\ \tilde{h}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{h}$ est-elle continue au point $x = 0$ ; dérivable ?

c) Étudier la variation et représenter le graphe de $\tilde{h}$.

- $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels ; $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des réels positifs privé de 0.

## XIV. Bordeaux, série E

Ex. 916. ./1975/bordeauxe/exo-1/texte.tex

On considère la suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^s tar$ $u_n = \dfrac{u_{n-1}+5}{3}$ et la suite $(v_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par $v_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{3}$.

**1.** Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ $\left(v_n = \dfrac{1}{3^n}\right)$ ; on ne cherchera pas dans cette question à calculer $u_n$.

**2.** Soit $(\mathscr{S}_p)$ le suite dont le terme général est la somme des $p$ premiers termes de la suite $(v_n)$.

a) Montrer que $(\mathscr{S}_p)$ est convergente et trouver sa limite.

b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et trouver sa limite.

**3.** On partage l'intervalle $[0\,;a]$ où $a > 0$ en intervalles partiels de même amplitude égale à $av_n$.

Calculer $\displaystyle\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x$ en considérant cette intégrale comme la limite pour $n$ tendant vers l'infini d'une somme de Riemann $\sigma_n$ relative à la subdivision de $[0\,;a]$ considérée.

$$\left(\text{On pourra prendre } \sigma_n = av_n \sum_{k=1} k = 3^n (kav_n)^3\ ;\ v_n = \frac{1}{3^n}\right).$$

On rappelle que la somme des cubes des $n$ premiers nombres entiers est égale à $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Retour page 1

Ex. 917. ./1975/bordeauxe/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle telle que $f(0)=1$,

$$\forall x>0, \qquad f(x)=\mathrm{e}^x+x(\log(x)-\mathrm{e}-1).$$

**1.** Étudier la continuité et da dérivabilité de $f$ en $0$.

**2.** En étudiant le signe de la dérivée seconde de $f$, étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+$ (on calculera $f'(1)$).

**3.** Tracer une représentation graphique de $f$.

## Problème 284

./1975/bordeauxe/pb/texte

A- On considère l'ensemble $\{M_{(\alpha,\ \beta)}\}$ des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels quelconques.

1. Montrer que $\{M_{(\alpha,\ \beta)}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathscr{M}_2$, espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.
2. Trouver une base de $\{M_{(\alpha,\ \beta)}\}$ et en déduire sa dimension.
3. Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ sachant que $\alpha^2+\beta^2=1$, $5(\alpha+\beta)=7$ et $\alpha<\beta$.

B- Dans la suite du problème, on considère un plan vectoriel euclidien E et une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de E.

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien associé à E et un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathscr{E}$.

1. a) Soit $\varphi$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$M_\varphi=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\varphi$ est involutif et préciser l'ensemble des vecteurs invariants. Nature de $\varphi$.

b) On considère dans $\mathscr{E}$ l'application affine $f$, dont l'endomorphisme associé est $\varphi$, et telle que $A'=f(A)$ avec $A(2\ ;\ -1)$ et $A'\left(-\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{5}\right)$.

Tout point $M$ de $\mathscr{E}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour image par $f$ le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$.

Exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$

Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ invariants par $f$.

$f$ est-elle involutive ?

Nature géométrique de $f$.

2. Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$x\longmapsto g(x)=\frac{3x^2-4x+8}{4(x-2)}.$$

a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que

$$g(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}.$$

b) Étudier les variations de $g$ et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie.



Retour page 1

# XV. Bordeaux remplacement, série E

**Ex. 918.** ./1975/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$x^4 - x^2 + 1 = 0,$$

1. en remplçcant par le système

$$\begin{cases} y^2 - y + 1 = 0 \\ y = x^2, \end{cases}$$

2. en utilisant l'identité

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2.$$

**Ex. 919.** ./1975/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ; calculer au moyen de plusieurs intégrations par parties une primitive de la fonction

$$f : x \longmapsto (x^3 - x + 1)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

## Problème 285

./1975/bordeauxErem/pb/texte

Même sujet que le série C : Problème C 1975

# XVI. Caen, série C

**Ex. 920.** ./1975/caenC/exo-1/texte.tex

On considère l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \qquad z^3 + (2\mathrm{i} - 5)z^2 + 7(1 - \mathrm{i})z - 2 + 6\mathrm{i} = 0.$$

Démontrer qu'elle admet une racine réelle que l'on calculera.
Résoudre ensuite l'équation dans $\mathbb{C}$.

**Ex. 921.** ./1975/caenC/exo-2/texte.tex

L'espace vectoriel euclidien E est rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Soit $s_1$ la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\mathrm{P}_1$ d'équation

$$x + y - 2z = 0.$$

   Connaissant les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un vecteur $\vec{v}$ de E, calculer les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ de son image $s_1(\vec{v})$.

2. Soit $r$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel E défini par :

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= \vec{j} \\ r(\vec{j}) &= \vec{k} \\ r(\vec{k}) &= \vec{i}. \end{aligned}$$

   Démontrer que $r$ est une rotation vectorielle, déterminer son axe et la mesure de l'angle de cette rotation.

   Démontrer qu'il existe une symétrie vectorielle orthogonale $s_2$ par rapport à un plan vectoriel $\mathrm{P}_2$ telle que $s_2 \circ s_1 = r$ ; donner une équation cartésienne de $\mathrm{P}_2$.

Retour page 1

## 🏛 Problème 286

./1975/caenC/pb/texte

A) 1. Soit $g$ l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x + 1 - \log x,$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.
Étudier son sens de variation et en déduire que, pour $x$ strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

2. Soit $h$ l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\log x.$$

a) Étudier les variations de la fonction $h$ et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan affine euclidien $(P)$ rapporté à un repère orthonormé. (On remarquera que $h'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.)

b) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. ($\mathrm{e}$ désigne la base des logarithmes népériens.)

B) Soit $f$ l'application de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{h(x)} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Cette fonction est-elle continue sur $[0\,;+\infty[$ ; est-elle dérivable sur $[0\,;+\infty[$ ?
2. Démontrer que

$$\frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x} \quad \text{pour } x > 0.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Démontrer que, pour $x$ strictement positif et différent de 1,

$$\frac{f(x) - x}{\log x} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x} - 1}{\frac{1}{x}\log x}.$$

Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - x}{\log x}$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ ; quelle est cette limite ?
La fonction $x \longmapsto f(x) - x$ admet-elle une limite quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

3. Étudier le sens de variations de la fonction $f$ et montrer que $f$ est une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur lui-même.
Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$ et $f(2)$ et tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de la fonction $f$. On indiquera la tangente en $O$ et l'on précisera la branche infinie.
Soit $A$ le point de $(\Gamma)$ d'abscisse 1. Écrire l'équation de la tangente en $A$ à $(\Gamma)$.
Montrer que $f''(1) = 0$. (On admettra que le point $A$ est un point d'infléxion pour $(\Gamma)$, c'est-à-dire un point où la courbe traverse sa tangente.)

C) Un point mobile $M$ du plan affine $(P)$ a, dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $(P)$ ; à chaque instant $t$ strictement positif, des coordonnées

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

$f$ et $g$ étant les fonctions définies dans les questions précédentes.

1. Démontrer que pour tout $c$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$

$$y = (g \circ f^{-1})(x).$$



Retour page 1

2. Construire la trajectoire de $M$ lorsque $t$ décrit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$.

   Préciser le vecteur vitesse et le vecteur accélération de $M$ à la date $t=1$ et les vecteurs vitesses aux dates $t=\frac{1}{2}$ et $t=2$.

## XVII. Caen remplacement, série C

**Ex. 922.** ./1975/caenCrem/exo-1/texte.tex

Déterminer tous les couples d'entiers naturels, non nuls, $(a,\ b)$ tels que leur p.g.c.d. et leur p.p.c.m., notés respectivement $d$ et $m$ vérifient la relation

$$2m+3d=78.$$

## XVIII. Caen, série E

**Ex. 923.** ./1975/caene/exo-1/texte.tex

On considère l'équation

$$z\in\mathbb{C},\qquad z^3+(2\mathrm{i}-5)z^2+7(1-\mathrm{i})z-2+6\mathrm{i}=0.$$

Démontrer qu'elle admet une racine réelle, que l'on calculera.
Résoudre ensuite l'équation dans $\mathbb{C}$.

**Ex. 924.** ./1975/caene/exo-2/texte.tex

**1.** Lors d'une élection, on considère que chaque candidat a la probabilité $0{,}1$ d'être élu. On considère un groupe de cinq candidats et l'on note $x$ le nombre de candidats élus parmi les cinq.
Calculer la probabilité d'obtenir $x=k,\ k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant 5$.

**2.** On considère un groupe de 100 candidats et l'on fait l'hypothèse suivante : parmi les 100 candidats, 10 seront élus. On considère un groupe de 5 candidats pris parmi les 100 et l'on note $x$ le nombre de candidats élus parmi les 5.
Calculer la probabilité d'obtenir $x=k,\ k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant 5$.

**3.** On considère un groupe de $10n$ candidats ($n\in\mathbb{N}^\star$) et l'on fait l'hypothèse suivante : parmi les $10n$ candidats, $n$ seront élus.
On considère un groupe de 5 candidats parmi les $10n$ et l'on note $x$ le nombre de candidats élus parmi les 5.
Calculer la probabilité d'obtenir $x=k,\ k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant 5$.
Montrer que la limite de cette probabilité quand $n$ tend vers l'infini est la probabilité obtenue au 1.

### Problème 287 ./1975/caene/pb/texte

Même sujet que le série C : Problème C 1975

## XIX. Clermont Ferrand & Grenoble, série C

**Ex. 925.** ./1975/clermontC/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\mathscr{C}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ; on le notera $(\mathscr{C},\ +,\ .)$.

1. Soit $f$ un élément de $\mathscr{C}$, on considère l'application, notée $\varphi$,

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}\quad.$$

Montrer que $\varphi$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.
L'application $\varphi$ a-t-elle une dérivée seconde pour $x = 0$ ?

2. On considère l'application, notée $\theta$,

$$\begin{aligned} \theta : \mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{C} \\ f &\longmapsto \varphi \end{aligned}$$

Démontrer que $\theta$ est une application linéaire de $(\mathscr{C},\ +,\ .)$ dans lui-même.
Déterminer le noyau de $\theta$.

3. Dans le cas où $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2^{-x} \end{aligned}$ déterminer l'application $\varphi$.

**Ex. 926.** ./1975/clermontC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on considère le triangle équilatéral $ABC$ tel que

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$$

$a$ étant un nombre réel strictement positif.

**1.** Déterminer le point $G$, barycentre des points $A$, $B$ et $C$ respectivement affectés des coefficients $2$, $1$ et $1$.
Préciser sur une figure la position du point $G$.

**2.** On considère l'application $f$ de P dans P, qui, au point $M$, associe le point $M'$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Préciser la nature de l'application $f$ et les éléments qui la caractérisent.

**3.** Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ de P vérifiant :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2.$$

(On pourra remarquer que $A$ est un élément de $\Gamma$.)

**4.** Déterminer l'ensemble $\Delta$ des points $M$ de P vérifiant :

$$\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 = 2a^2.$$

(On pourra remarquer que $A$ est un élément de $\Delta$.)

# XX. Dahomey, série C

**Ex. 927.** ./1975/dahomeyC/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $6x - 3y = a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, $a$ est un multiple de $3$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

- $6x - 3y = 5$ ;
- $6x - 3y = 3$.

**3.** En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :

$$(6x - 3y - 4)(2x - 3y + 4) = 1.$$



Retour page 1

## XXI. Dakar, série C

**Ex. 928.** ./1975/dakarC/exo-1/texte.tex

On considère dans $\mathbb{Z}$, l'équation de congruence

$$X^3+2X^2-X-13 \equiv 0\,[11]. \qquad (1)$$

a) Montrer qu'il existe deux nombres $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{Z}$, tels que

$$X^3+2X^2-X-13=(X+1)(X^2+\alpha X+\beta)-11.$$

b) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont l'une des solutions des deux équations

$$X+1 \equiv 0\,[11] \qquad (2) \qquad \text{(XVII.2)}$$
$$X^2+X-2 \equiv 0\,[11] \qquad (3) \qquad \text{(XVII.3)}$$

c) Déterminer les solutions de l'équation (1).

**Ex. 929.** ./1975/dakarC/exo-2/texte.tex

Au jeu de poker, on utilise un jeu de 32 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as, dans chacune des couleurs suivantes : pique, cœur, carreau, trèfle) et l'on donne 5 cartes à chaque joueur.
Quelle est la probabilité pour qu'un joueur (déterminé) ait une échelle royale ( cinq cartes de la même couleur qui se suivent dans l'ordre précédemment mentionné) ?

## XXII. Dijon, série C

**Ex. 930.** ./1975/dijonC/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier le reste de la division euclidienne par $7$ de $10^n$ lorsque $n$ décrit l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.

**2.** Déterminer les chiffres $x$ et $y$ tels que le nombre $\overline{2xyyx2}_{10}$ dans le système décimal soit divisible par $21$.

**Ex. 931.** ./1975/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les courbes $(H)$ et $(E)$, ensembles des points $M$ dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient

$$4x^2-9y^2+8x+54y-113=0 \qquad \text{(H)}$$

$$16x^2+9y^2+32x-54y-47=0 \qquad \text{(E)}$$

Trouver les équations réduites de $(H)$ et $(E)$.
Vérifier que $(H)$ et $(E)$ ont le même centre de symétrie.
Trouver les axes de symétries de $(H)$ et $(E)$ ainsi que leurs foyers.
Reconnaître les courbes $(H)$ et $(E)$.

## XXIII. Grenoble, série C

**Ex. 932.** ./1975/grenobleC/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathscr{C}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ; on le notera $(\mathscr{C},\ +,\ .)$.

**1.** Soir $f$ un élément de $\mathscr{C}$ ; on considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Montrer que l'application $\varphi$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.
L'application $\varphi$ admet-elle une dérivée seconde pour $x=0$ ?

**2.** On considère l'application, notée $\theta$,
$$\begin{aligned}\theta : \mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{C}\\ f &\longmapsto \varphi\end{aligned}$$
Montrer que $\theta$ est une application linéaire de $(\mathscr{C},\ +,\ .)$ dans lui-même. Déterminer le noyau de $\theta$.

**3.** Dans le cas où
$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 2^{-x}\end{aligned}$$
déterminer l'application $\varphi$.

Ex. 933. ./1975/grenobleC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on considère le triangle équilatéral $ABC$ tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$, $a$ étant un réel strictement positif.

1. Déterminer le point $G$, barycentre des points $A$, $B$ et $C$ respectivement affectés des coefficients 2, 1 et 1.
2. On considère l'application $f$ de P dans P qui, au point $M$ associe le point $M'$ tel que
$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$
Préciser la nature et l'application $f$ et les éléments qui la caractérisent.
3. Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ de P vérifiant
$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2.$$
(On pourra remarquer que $A$ est un élément de $(\Gamma)$.)
4. Déterminer l'ensemble $(\Delta)$ des points $M$ de P vérifiant
$$\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 = 2a^2.$$
(On pourra remarquer que $A$ est un élément de $(\Delta)$.)

## PROBLÈME 288

./1975/grenobleC/pb/texte

Dans tout le problème, on désignera par P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A. Soit $a$ un nombre réel quelconque et $f_a$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{a(x-2)} + 1$. On désignera par $(\mathscr{C}_a)$ sa courbe représentative relativement au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Étudier, en discutant suivant le saleurs de $a$, les variations de la fonction $f_a$ (dresser ses tableaux de variations).
Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_a)$ ont en commun un point $A$ et une asymptote $(\Delta)$.
Tracer sur une même figure les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_{-1})$ représentatives des fonctions $f_1$ et $f_{-1}$.
2. Préciser dans chacun des deux cas suivants la relation que doivent vérifier les nombres $a$ et $a'$ pour que les courbes $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{a'})$
   - aient au point $A$ des tangentes orthogonales,
   - soient symétriques par rapport à la droite d'équation $x - 2 = 0$.
3. Soit $\lambda$ un nombre réel positif. Calculer en fonction de $\lambda$ l'aire du domaine plan défini par
$$\begin{cases} 2-\lambda \leqslant x \leqslant 2+\lambda \\ 1 \leqslant y \leqslant \inf\{f_{-1}(x),\ f_1(x)\}, \end{cases}$$
où $\inf\{f_{-1}(x),\ f_1(x)\}$ désigne le plus petit des deux nombres réels $f_{-1}(x)$ et $f_1(x)$.
Cette aire a-t-elle une limite lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

B. On envisage l'application ponctuelle de P dans P définie par les relations
$$\begin{cases} X &= x+2 \\ Y &= \mathrm{e}^y + 1 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

1. Cette application est-elle injective ? Quelle est l'image de P par cette application, ensemble que l'on notera $P_1$ ?
   Montrer que l'application $g$ de P dans $P_1$ définies par les relations ()I) est une bijection ; donner l'expression analytique de l'application réciproque $g^{-1}$.
2. Quelle est l'image par $g$ de la droite $((O;\vec{u}))$ ?
   Quelle est l'aime de $(D_a)$ par $g^{-1}$ de la courbe $(\mathscr{C}_a)$ ? Tracer $(D_1)$ et $(D_{-1})$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
3. Soit $\mathscr{H}$ la courbe d'équation $y = 2+\sqrt{x}$. On désigne par $(\Gamma)$ l'image de $\mathscr{H}$ par $g^{-1}$. Quelle est l'équation de $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ ? Tracer la courbe $(\Gamma)$ en précisant ses particularités.

C. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres complexes, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$. On définit la suite $(z_n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} z_0 = k(1+\text{i}) \\ z_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\overline{z}_{n-1}. \end{cases}$$

($k$ est un nombre réel non nul).

Soit $m_n$ le point d'affixe $z_n$ du plan P relativement au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Calculer $z_n$ en fonction de $z_0$ et de $n$. Quelle est la limite du module de $z_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
2. Exprimer les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point $m_n$ en fonction de $k$ et de $n$.
   Montrer que tous les points $m_n$ appartiennent à la réunion de deux droites fixes, que l'on précisera.
   Dans quelle application indépendante de $n$ le point $m_n$ est-il l'image de $m_{n-1}$ ?
   Dans quelle application indépendante de $n$ le point $m_{n+1}$ est-il l'image de $m_{n-1}$ ?
   Le point $m_n$ a-t-il une position limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
3. On pose $M_n = g(m_n)$. Exprimer les coordonnées $(X_n\ ;\ Y_n)$ ed $M_n$ en fonction de $k$ et de $n$. Montrer que tous les points $M_n$ appartiennent à la réunion de deux courbes fixes, que l'on précisera.

# XXIV. Lille, série C

**Ex. 934.** ./1975/lilleC/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien E, rapporté au repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit T l'application de E dans E qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par

$$z' = (2+\text{i})\overline{z} + 1 - \text{i},$$

$\overline{z}$ désignant le conjugué de $z$.

**1.** Reconnaître la nature de l'application T. Exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M'$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$. Démontrer que T admet un point invariant unique, que l'on déterminera.

**2.** Déterminer les droites du plan globalement invariantes par T.

**Ex. 935.** ./1975/lilleC/exo-2/texte.tex

On note $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$ les éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**1.** Dresser la table de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**2.** Déterminer les éléments $x$ de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ solutions de l'équation $\dot{4}x = \dot{4}$.

**3.** Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ appartenant à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, solutions du système

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{2}, \\ \dot{3}x + \dot{5}y = \dot{5}. \end{cases}$$

Retour page 1

# XXV. Lille, série E

**Ex. 936.** ./1975/lilleE/exo-1/texte.tex

Dans $\mathscr{P}$ plan affine euclidien, les trois points $A$, $B$ et $C$ sont les sommets d'un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur $a$.

**1.** Soit $G$ la barycentre du système formé par les trois points $A$, $B$ et $C$ affectés chacun du coefficient $+1$. Montrer que pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, on a

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2.$$

**2.** Discuter suivant la valeur du paramètre $k$, réel, la nature de l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2.$$

**Ex. 937.** ./1975/lilleE/exo-2/texte.tex

Soit $\varphi$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + \log x.$$

**1.** Montrer que $\varphi$ est strictement croissante sur son domaine de définition et s'annule pour une seule valeur de $x$ que l'on précisera.

**2.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = x - \frac{\log x}{x}$$

et dessiner sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**3.** Calculer en fonction de $\alpha$ l'intégrale

$$\int_1^\alpha \frac{\log x}{x}\, ddx = I(\alpha),$$

où $\alpha$ désigne un nombre réel supérieur à 1. Interpréter géométriquement $I(\alpha)$ sur le graphique.

## Problème 289

./1975/lilleE/pb/texte

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, du plan $\mathscr{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, affixe de $M$.

A) Soit $\mathscr{T}_\alpha$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x - \alpha y, \\ y' = \alpha x - \dfrac{1}{2}y, \end{cases}$$

où $\alpha$ est un paramètre réel.

1. Montrer que, quel que soit $\alpha$, $\mathscr{T}_\alpha$ est bijective et admet un unique point invariant, que l'on précisera.
2. Montrer qu'il existe une valeur unique de $\alpha$ pour laquelle $\mathscr{T}_u\alpha$ est une homothétie $\mathscr{H}$. En donner le centre et le rapport.
3. Montrer qu'il existe deux valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $\mathscr{T}_\alpha$ est une isométrie. Vérifier que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre ; on les notera $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^{-1}$.
4. Montrer que les affixes $z'$ et $z$ de $M'$ et $M$ sont liés, pour tout $\alpha$, par une relation de la forme

   $$z' = az,$$

   où $a$ est un nombre complexe que l'on explicitera en fonction de $\alpha$.
   En déduire que $\mathscr{T}_\alpha$ est une similitude directe, dont on précisera le centre, le rapport $r$ et la mesure $\theta$ de l'angle en fonction de $\alpha$. (On caractérisera $\theta$ par son cosinus et son sinus.)

Retour page 1

5. Donner la valeur de $a$ pour $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{H}$, $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{R}$, $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{R}^{-1}$. Montrer que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^{-1}$ laissent globalement invariant, tout triangle équilatéral du plan $\mathscr{P}$, ayant $O$ pour isobarycentre.

B) 1. Résoudre l'équation $z^3 = 1$ dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On désigne par $A$, $B$ et $C$ les images des trois solutions dans le plan $\mathscr{P}$ ($B$ et $C$ sont d'abscisses négatives, et $B$ d'ordonnée positive) et par $A_1$, $B_1$ et $C_1$ leurs transformés par $\mathscr{T}_\alpha$.
Calculer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées des points $A_1$, $B_1$ et $C_1$en fonction de $\alpha$. En déduire que pour tout $\alpha$ réel, le point $A_1$ appartient à la droite $(BC)$, $B_1$ à la droite $(AC)$ et $C_1$ à la droite $(AB)$.

2. Montrer que lorsque $\alpha$ décrit l'ensemble des nombre réels, le milieu du segment $[B_1C_1]$ décrit une droite, que l'on précisera.

3. a) Soit $A_2$ la transformé de $A_1$ par $\mathscr{T}_\alpha$. Démontrer que les coordonnées de $A_2$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $x = \dfrac{1}{4} - \alpha^2, \quad y = -\alpha$.

b) Reconnaître et construire l'ensemble $(\pi)$ des points $A_2$ lorsque $\alpha$ varie.

c) Montrer que le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OA_2}$, la variable étant $\alpha$, et le vecteur $\overrightarrow{B_1C_1}$ sont linéairement dépendants. En déduire que la droite $(B_1C_1)$ est tangente au point $A_2$ à la courbe $(\pi)$.

C) On fixe à présent la valeur de $\alpha$ et l'on définit par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $\mathscr{T}_\alpha = 1$ (application identique de $\mathscr{P}$)

$$\mathscr{T}_\alpha^1 = \mathscr{T}_\alpha, \quad \mathscr{T}_\alpha^2 = \mathscr{T}_\alpha \circ \mathscr{T}_\alpha, \ \ldots, \ \mathscr{T}_\alpha^n = \mathscr{T}_\alpha \circ \mathscr{T}_\alpha^{n-1}.$$

$A$ est toujours le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(1 ; 0)$ et $A_n = \mathscr{T}_\alpha^n(A)$.

1. Calculer l'affixe $z_n$ de $A_n$ en fonction de $a$ (cf. A4) et démontrer que

$$z_n = \left(-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n (\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta),$$

$\theta$ mesurant l'angle de la similitude $\mathscr{T}_\alpha$.
Pour quelles valeurs de $\theta$ le module $z_n$ est-il fonction décroissante de $n$ ?

2. Calculer $\|\overrightarrow{A_pA_{p+1}}\|$ en fonction de $\theta$ et de $p$, $p$ entier naturel puis $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \|\overrightarrow{A_pA_{p+1}}\|$ (on pourra utiliser des résultats connus sur les suites géométriques).
Comment faut-il choisir $\theta$ pour que $S_n$ admette une limite finie quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de cette limite lorsque $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

# XXVI. Limoges, série C

**Ex. 938.** ./1975/limogesC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = 1 - \left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}\right|.$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ pour $x = 0$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(/C)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axe $x'Ox$ et $y'Oy$ en prenant 3 centimètres comme unité de longueur.

**3.** Soit $\lambda$ un nombre réel négatif. Déterminer, en centimètres carrés et en fonction de $\lambda$, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $y = 1$ $x = \lambda$ et $x = 0$.

Retour page 1

# XXVII. Limoges remplacement, série C

**Ex. 939.** ./1975/limogesCrem/exo-1/texte.tex

Soit l'équation $z^2+(1-2\mathrm{i})z+1+5\mathrm{i}=0$ définie dans l'ensemble des nombres complexes.

**1.** Trouver les deux racines $z'$ et $z''$ de cette équation.

**2.** Soit $A$ et $B$ les images par rapport à un repère orthonormé des solutions $z'$ et $z''$, $A$ étant le point dont l'abscisse est positive.

Déterminer le centre $\omega$ d'une rotation, dont l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$ radians, qui transformerait $A$ en $B$. (On précisera les coordonnées de $\omega$).

**Ex. 940.** ./1975/limogesCrem/exo-2/texte.tex

**1.** Construire les tables d'addition et de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**2.** Résoudre chacune des équations suivantes où l'inconnue est, suivant le cas, $x$ ou le couple $(x,\ y)$ :

$$\dot{2}x=\dot{1}$$
$$\dot{2}x=\dot{0}$$
$$x+\dot{3}y=\dot{1}$$
$$\dot{2}x+y=\dot{0}$$

$x$ et $y$ étant éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**3.** Déterminer les entiers relatifs $a$ et $b$ tels que $a+3b-1$ et $2a+b$ soient tous les deux multiples de 4.

## Problème 290

./1975/limogesCrem/pb/texte

On cherche à déterminer une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\qquad f(x+y)+x+y=[f(x)+x][f(y)+y] \tag{1}$$

et

$$f(1)=\mathrm{e}. \tag{2}$$

1. En posant $x=y=\frac{t}{2}$, vérifier que

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad f(t)+t\geqslant 0. \tag{3}$$

Démontrer que, s'il existe un réel $x_0$ tel que $f(x_0)+x_0=0$, alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)+x=0. \tag{4}$$

En déduire que $f(x)+x$ n'est jamais nulle, et démontrer que $f(0)=1$.

2. Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}\qquad f(nx)=[f(x)+x]^n-nx. \tag{5}$$

Calculer $f(-x)-x$ et démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z}\qquad f(nx)=[f(x)+x]^n-nx. \tag{6}$$

3. Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier $q$, l'expression :

$$f\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}.$$

Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{Q},\qquad f(x)=\mathrm{e}^x-x. \tag{7}$$

4. Vérifier que la fonction $f$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{e}^x-x$ satisfait bien à (1) et (2). On admettra que cette fonction est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.

Retour page 1

a) Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans un système d'axes orthonormé.

Quelle remarque peut-on faire au sujet de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$ au point d'abscisse 1 ?

b) Évaluer l'aire $\mathscr{A}(x)$, de la portion du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, son asymptote et les droites d'équations $x=0$ et $x=X$ $(X<0)$.

5. a) Démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x. \tag{8}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$P_n(a) = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) \qquad (a>0).$$

Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de $n$ satisfaisant à :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad 0 < P_n(a) < \mathrm{e}^{\frac{a(1-a^n)}{1-a}}. \tag{9}$$

Démontrer enfin que pour $0<a<1$, il existe des nombres $M$ dépendant de $a$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{N}^\star, \qquad P_n(a) < M. \tag{10}$$

Préciser en fonction de $a$ une valeur possible de $M$.

## XXVIII. Lyon, série C

**Ex. 941.** ./1975/lyonC/exo-1/texte.tex

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, les restes de la division euclidienne par 7 et $2^n$ et $3^n$. En déduire l'ensemble des entiers naturels tels que 7 divise $2^n+3^n$.

## XXIX. Lyon , série E

**Ex. 942.** ./1975/lyonE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$x :\longmapsto f(x) = \log(\mathrm{e}^x - 1),$$

où la notation $\log$ désigne le logarithme népérien.

**1.** Quel est le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $f$ ? Étudier les variations de $f$.

**2.** Vérifier, pour toute valeur de $x$, l'égalité

$$\log(\mathrm{e}^x - 1) = x + \log(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

En déduire que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la cource $(\mathscr{C})$, représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**3.** Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$, que l'on déterminera. Construire dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de $f^{-1}$.

**Ex. 943.** ./1975/lyonE/exo-2/texte.tex

A) Instructions pour la mise en place de l'épure proposée. L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$.

On choisit le plan $(xOy)$ comme pour plan horizontal de projection et le plan $(yOz)$ pour plan frontal de projection.

L'unité de longueur est : $u=2$ cm. Le point $O$ est au centre de la feuille d'épure, $Ox$ est dirigé vers le bas, $Oy$ vers la droite et $Oz$ vers le haut.

Tous les traits de constructions doivent être conservés.

B) On considère le plan $(\Pi)$ d'équation

$$2x-2y+3z-6=0.$$

On note $A$ et $C$ les deux points de $(\Pi)$ dont les projections horizontales sont respectivement

$$a(x=3,\ y=0) \qquad \text{et} \qquad c(x=3,\ y=3).$$

**1.** Mettre en place, sur l'épure, la trace horizontale et le trace frontale de $(\Pi)$, les points $a$ et $c$. Construire les projections frontales $a'$ et $c'$ de $A$ et $C$.

**2.** A l'aide d'un rabattement du plan $(\Pi)$ sur le plan $(xOy)$, déterminer les projections $b,\ b',\ d,\ d'$ des deux points $B$ et $D$ du plan $(\Pi)$ tels que les points $A,\ B,\ C,\ D$ soient les sommets consécutifs d'un carré ($AC$ sera donc une diagonale du carré).
On mentionnera dans une courte notice la façon dont a été réalisé le rabattement.

## Problème 291

./1975/lyonE/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. $P$ est le, plan affine associé à $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A) On considère l'application affine de $P$ dans $P$ qui laisse invariants les points $A(2\ ;\ -1)$ et $I(0\ ;\ -1)$ et transforme le point $B(4\ ;\ 1)$ en $B'(4\ ;\ 0)$.

1. Donner une expression analytique de cette application, c'est-à-dire exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ du point $M'$, image du point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ par l'application précédente.
2. Soit $g$ l'application de $P$ dans $P$ définie par
$$x'=x \qquad \text{et} \qquad y'=\frac{y}{2}-\frac{1}{2}.$$
Déterminer l'application $g^{-1}$ réciproque de $g$.
3. Quel est l'ensemble des points invariants par $g$ ?
4. Montrer que, si $M'$ est transformé de $M$ par $g$ et si $M$ et $M'$ sont distincts, la droite $MM'$ a une direction fixe.
Montrer ensuite que, si $H$ est la projection orthogonale de $M$ sur la droite d'équation $y=-1$, le point $M'$ satisfait la condition $2\overrightarrow{HM'}-\overrightarrow{HM}=\vec{0}$.
En déduire une construction géométrique de $M'$ connaissant $M$.

B) Soit la fonction vectorielle $\vec{f}:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ définie par

$$\varphi\longmapsto\vec{f}(\varphi)=2(2+\cos\varphi)\vec{\imath}-(1-2\sin\varphi)\vec{\jmath}.$$

1. Donner une équation cartésienne de la forme $F(x,\ y)=0$ dans le repère $\mathscr{R}$, de la courbe $(\mathscr{C})$ ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan $P$ tels que $\overrightarrow{OM}=\vec{f}(\varphi)$.
2. Écrire une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $M_0$ défine par $\overrightarrow{OM_0}=\vec{f}(\varphi_0)$.
3. Trouver des équations cartésiennes dans $\mathscr{R}$ des tangentes $(D)$ et $(D')$ à $(\mathscr{C})$ issues du point $I(0\ ;\ -1)$.
4. Quelle est la transformée $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C})$ par $g$ ? Construire $(\Gamma)$ avec soin. Par quel point remarquable passent les transformées $(\Delta)$ et $(\Delta')$ des tangentes $(D)$ et $(D')$ à $(\mathscr{C})$ ?

C) Soit l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ corps des complexes) définie par

$$z\longmapsto z'=\frac{\mathrm{i}z-1-4\mathrm{i}}{4}$$

(i élément de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2=-1$).
A tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$, on associe le point $N$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{R}$ ; $z$ est l'affixe de $N$.
Appelons $s$ l'application de $P$ dans $P$ qui donne comme image de tout point $N$ d'affixe $z$ le point $N'$ d'affixe $z'$.



Retour page 1

1. Donner une définition analytique de $s$ en exprimant en fonction des coordonnées $x$ et $y$ de $N$, les coordonnées $x'$ et $y'$ de $N' = s(N)$.
2. Quelle est la nature de l'application $s$ ? La caractériser géométriquement.
3. Écrire l'équation de la transformée $(\Gamma')$ de $(\Gamma)$ par $s$. Construire $(\Gamma')$.
4. Soit $h$ l'application affine qui laisse le point $I(0\ ;\ -1)$ invariant et est associé à l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ de matrice $H = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

   Montrer que $h = s \circ g$. Quelle est la transformée de $(\mathscr{C})$ par $h$ ?

# XXX. Lyon remplacement, série C

**Ex. 944.** ./1975/lyonCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = 1$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = p$ où $p$ est un nombre premier.

**Ex. 945.** ./1975/lyonCrem/exo-2/texte.tex

Soit $P$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points $M$ de P dont l'affixe $z$ est telle que :

$$z^3 + z^2 + z + 1 \qquad \text{appartient à } \mathbb{R}.$$

Représenter cet ensemble.

**PROBLÈME 292** ./1975/lyonCrem/pb/texte

V est un espace vectoriel réel de dimension 2, muni d'une base $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
E est un espace affine admettant V pour espace vectoriel associé et muni d'un repère cartésien $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) Pour tout couple de réels $(a,\ b)$ on définit un endomorphisme

# XXXI. Mexique, série C

**Ex. 946.** ./1975/mexiqueC/exo-1/texte.tex

On donne l'application $f$ du corps des nombres complexes dans lui-même

$$z \longmapsto f(z) = z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 5(\mathrm{i} - 2)z + 3(7 + \mathrm{i}).$$

Déterminer l'ensemble E des nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$, sachant qu'un nombre réel est élément de E.

**Ex. 947.** ./1975/mexiqueC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f_a$ qui à tout $x$ fait correspondre

$$f_a(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Préciser le domaine de définition de $f_a$ suivant les valeurs de $a$.

b) On considère maintenant $a$ positif.
Étudier les variations de la fonction $f_a$. Tracer le courbe représentative de $f_2$ en axes orthonormés.
Préciser les tangentes aux points d'ordonnée nulle.

c) Déduire de l'étude précédente la courbe $(C)$ correspondant à l'équation

$$y^2(a+x) = x^2(a-x).$$

Retour page 1

## 🏛 Problème 293

./1975/mexiqueC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques, d'une variable réelle, muni de l'addition des fonctions numériques, et de la multiplication par les nombres réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $m$ un réel $> 0$ fixé. On considère alors l'ensemble $E$, des fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = a\mathrm{e}^{mx} + b\mathrm{e}^{-mx} + c$$

(où $a,\ b,\ c$ décrivent $\mathbb{R}$.)

A- 1. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Déterminer sa dimension. On démontrera que si l'on considère les fonctions $f_1,\ f_2,\ f_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout réel $x$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{mx}\ ;\ f_2(x) = \mathrm{e}^{-mx}\ ;\ f_3(x) = 1$$

la partie $B = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ est une base de $E$.

2. a) Soit $f$ un élément de $E$, de composantes $(a,\ b,\ c)$ dans la base $B$. Déterminer par récurrence, la dérivée $n$ième $f^{(n)}$ de $f$ $(n \geqslant 1)$.
Démontrer que $f^{(n)}$ est un élément de $E$.

b) On considère l'application $\varphi_n$ de $E$ dans $E$, qui à tout élément $f$ de $E$ associe $f^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$.
Démontrer que $\varphi_n$ est un endomorphisme de $E$. $\varphi_n$ est-il un automorphisme de $E$ ?

3. On désigne par $F$ le sous-espace vectoriel $E$engendré par la partie $B' = \{f_1,\ f_2\}$.

a) Démontrer que si $n$ est pair, $\varphi_n$ est la composée d'une projection sur $F$ et d'une homothétie que l'on précisera.

b) On considère l'endomorphisme $\psi_n$ de $F$, qui à tout élément $f$ de $F$ associe $f^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$. Démontrer que si $n$ est pair, $\psi_n$ est une homothétie vectorielle, et que si $n$ est impair, $\psi_n$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on précisera.

B- 1. On suppose toujours $m \neq 0$, et on considère le sous-espace vectoriel $F$. On désigne par $F_1$ l'ensemble des fonctions de $F$, impaires, et par $F_2$, l'ensemble des fonctions de $F$ paires.

a) Démontrer que $F = F_1 \oplus F_2$. (On démontrera l'égalité suivante :

$$a\mathrm{e}^{mx} + b\mathrm{e}^{-mx} = (a+b)\left[\frac{\mathrm{e}^{mx} + \mathrm{e}^{-mx}}{2}\right] = (a-b)\left[\frac{\mathrm{e}^{mx} - \mathrm{e}^{-mx}}{2}\right]).$$

b) Déterminer dans la base $B' = \{f_1,\ f_2\}$, la matrice de la projection vectorielle $p_1$ de $F$ sur $F_1$parallèlement à $F_2$ ainsi que la matrice de la projection vectorielle $p_2$ de $F$ sur $F_2$ 2 parallèlement à $F_1$.

2. On pose $C = p_2(f_2)$ et $S = p_1(f_1)$. Démontrer pour tout $x$ et $y$ de $\mathbb{R}$, les égalités suivantes :

$$S(0) = 0 \qquad ; \qquad C(0) = 1$$

$$C(-x) = C(x) \qquad ; \qquad S(-x) = -S(x)$$

$$C^2(x)?S^2(x) = 1$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) + S(x)S(y)$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

En déduire les égalités suivantes :
$S(2x) = 2C(x)S(x)$ et $C(2x) = C^2(x) + S^2(x)$.



Retour page 1

# XXXII. Mexique, série E

**Ex. 948.** ./1975/mexiqueE/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{\ln|x+2|}{|x|}.$$

On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un système d'axes rectangulaires.

**1.** Montrer que $(C)$ admet comme centre de symétrie le point $(-2\ ;\ 0)$. Étudier $f$ et construire $(C)$.

**2.** Pour $a>-2$, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe $x'Ox$, $(C)$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=a$.

Cette aire admet-elle une limite

a) quand $a$ tend vers $-2$,

b) quand $a$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 949.** ./1975/mexiqueE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on considère trois points A, B, C tels que ABC soit un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse AC, avec $d$(A, B)=$a$, où $a$ est un réel positif.

**1.** Déterminer le point G du plan P vérifiant

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}.$$

**2.** En déduire l'ensemble E des points $M$ du plan P tels que

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}}^2-\overrightarrow{\mathrm{GB}}^2+\overrightarrow{\mathrm{GC}}^2=0.$$

Vérifier que E contient les points B et C.

## Problème 294

./1975/mexiqueE/pb/texte

A) On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices $M$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b-c \\ b+c & -a \end{pmatrix}$$

où $a$, $b$, $c$ sont des nombres réels.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.
Quelle est la dimension de $\mathscr{M}$ ?

2° Déterminer l'ensemble $\mathscr{M}_1$ des matrices inversibles de $\mathscr{M}$.

3° Quel est le sous-ensemble $\mathscr{M}_2$ de $\mathscr{M}$ des matrices $M$ qui vérifient $M\times M=\mathrm{I}$ où $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ?

B) Soit $u$ et $v$, les deux nombres complexes suivants :

$$u=c\mathrm{i}\quad \text{et}\quad v=a+b\mathrm{i}.$$

On considère l'application $l_{u,\,v}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $l_{u,\,v}(z)=uz+v\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de $z$.

1° $\mathbb{C}$ étant considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que $l_{u,\,v}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2° Écrire la matrice de $l_{u,\,v}$ dans la base $(1,\mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$.

3° Quelles conditions $u$ et $v$ doivent-ils vérifier pour que $l_{u,\,v}$ soit bijective ?

4° Donner une relation liant $u$ et $v$ pour que $l_{u,\,v}$ soit involutive.

Retour page 1

5° Quel est l'ensemble des éléments invariants par une application $l_{u,\ v}$ involutive ?

C) On considère la plan affine euclidien P rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}$ a pour affixe $1$ et $\vec{\jmath}$ a pout affixe i, et l'on suppose que $u^2 + v\overline{v} = 1$.
Soit $f_{u,\ v}$ l'application de P dans P qui à tout point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $uz + v\overline{z}$.

1° Quel est l'ensemble E des points invariants par $f_{u,\ v}$ ?

2° Soit A un point de E.
On note $\varphi_{u,\ v}$ l'application linéaire associée à $f_{u,\ v}$.
Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que

$$\varphi_{u,\ v}(\overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AM}.$$

3° Préciser quelle est la transformation $f_{u,\ v}$ .

4° Quel est l'ensemble des couples $(u,\ v)$ tels que $f_{u,\ v}$ soit une symétrie orthogonale ?

## XXXIII. Montpellier, série C

Ex. 950. ./1975/montpellierC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $7x - 4y = 4$.

**2.** Un entier naturel $a$ s'écrit $\overline{75}_x$ dans le système de base $x$ et $\overline{49}_y$ dans le système de base $y$. Un entier naturel $b$ s'écrit $\overline{310}_x$ dans le système de base $x$ et $\overline{125}_y$ dans le système de base $y$.
Déterminer $x$ et $y$ puis $a$ et $b$.

Ex. 951. ./1975/montpellierC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $7x - 4y = 4$.

**2.** Un entier naturel $a$ s'écrit $\overline{75}_x$ dans le système de base $x$ et $\overline{49}_y$ dans le système de base $y$. Un entier naturel $b$ s'écrit $\overline{310}_x$ dans le système de base $x$ et $\overline{125}_y$ dans le système de base $y$.
Déterminer $x$ et $y$ puis $a$ et $b$.

## XXXIV. Montpellier remplacement, série C

Ex. 952. ./1975/montpelliercrem/exo-1/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel représenté en base $b$ par $n = \overline{123x}$.

**1.** Déterminer $x$ pour que $n$ soit divisible par $3$ quand $b$ est égal à 4.

**2.** Déterminer $x$ pour que $n$ soit divisible par $5$ quand $b$ est égal à sept.

**3.** Déterminer $x$ pour que $n$ soit divisible par $7$ quand $b$ est égal à onze.

Ex. 953. ./1975/montpelliercrem/exo-2/texte.tex

**1.** Montrer que l'on peut écrire $\dfrac{5x}{x^2+x-6}$ sous la forme

$$\frac{5x}{x^2+x-6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3},$$

où $a$ et $b$ sont deux nombres réels que l'on déterminera.

**2.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ sous la forme $\log\left(\dfrac{p}{q}\right)$, $p$ et $q$ étant deux entiers.
(Le symbole $\log$ représente le logarithme népérien.)



Retour page 1

**3.** Écrire la formule d'intégration par parties pour :

$$\int_0^1 V(x).U'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire, en prenant $U'(x)=1$, le calcul de l'intégrale

$$I=\int_0^1 \log\left|\frac{x+3}{x+2}\right|\,\mathrm{d}x.$$

## Problème 295

./1975/montpelliercrem/pb/texte

Dans un plan affine euclidien (P) muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère le point $A$ de coordonnées $\left(-\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$, le point $B$ de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$ et le point $C$ de coordonnées $(1\ ;\ 2)$.

**1.** Dresser le tableau des variations de la fonction $f$ de la variable $x$, définie par

$$f(x)=\frac{3x^2+6x+4}{6(x+1)}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan (P).

Tracer cette courbe en précisant ses asymptotes et son centre de symétrie. (Unité conseillée : 2 cm.)

**2.** Soit $\vec{V}$ le vecteur de composantes $(2\ ;\ 1)$ et (D) la droite d'équation $x+1=0$. On désigne par $s$ la symétrie par rapport à (D) et de direction $\vec{V}$.

Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées d'un point quelconque $M$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$les coordonnées du point $M'=s(M)$.

a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Soit $(\mathscr{C}')$ la transformée de la courbe $(\mathscr{C})$ par $s$. Déterminer une équation de $(\mathscr{C}')$ et tracer $(\mathscr{C}')$ sur la même figure que $(\mathscr{C})$.

c) Soit (D') la droite d'équation $y=\dfrac{x+1}{2}$. On désigne par $s'$ la symétrie par rapport à (D') de direction $\vec{\jmath}$.

Montrer que $s'\circ s$ est une transformation affine involutive que l'on reconnaîtra.

Quelle est la courbe $(\mathscr{C}'')$ transformée de $(\mathscr{C}')$ par $s'$ ?

**3.** Soit $g$ l'application affine de (P) dans (P) telle que $g(A)=B$, $g(B)=O$ et $g(O)=A$.

a) Déterminer la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de l'application linéaire associé à $g$. Montrer que $g$ est bijective.

b) Soit $\left(x''\ ;\ y''\right)$ les coordonnées de $M''=g(M)$. Exprimer $x''$ et $y''$ en fonction de $x$ et $y$ puids $y$ et $y$ en fonction de $x''$ et $y''$.

**4.** Soit $(\mathscr{C}_1)$ la transformée de la courbe $(\mathscr{C})$ par $g$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C}_1)$.

b) Reconnaître et tracer $(\mathscr{C}_1)$.

# XXXV. Montpellier, série D

Ex. 954. ./1975/montpellierD/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre l'équation suivante, à l'inconnue $z\in\mathbb{C}$ :

$$z^2-(\mathrm{i}\sqrt{3}+1)-1+\mathrm{i}\sqrt{3}=0.$$

On note $u$ et $v$ les racines de cette équation.



Retour page 1

**2.** Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $a$ et $b$

$$a = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}.$$

Construire dans le plan complexe les images $A$ et $B$ de $a$ et de $b$.
Exprimer $u$ et $v$ en fonction de $a$ et $b$. En déduire une construction simple des images $U$ et $V$ des complexes $v$ et $v$.

**3.** En utilisant les résultats du 2, écrire $v$ et $v$ sous forme trigonométrique.
En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

## XXXVI. Nancy Metz, série C

**Ex. 955.** ./1975/nancyC/exo-1/texte.tex

**1.** Trouver l'ensemble des entiers naturels divisant 276.

**2.** Trouver les paires d'entiers naturels dont le pgcd $d$ et le ppcm $m$ vérifient :

$$\begin{cases} m+3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$$

**Ex. 956.** ./1975/nancyC/exo-2/texte.tex

Soit $E$ un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A$, $B$ et $O'$ ayant pour coordonnées respectivement $(a~;~0~;~0)$, $(0~;~b~;~0)$, $(0~;~0~;~c)$.
Soit $C$ le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ et soit $A'$, $B'$, $C'$ les points définis par

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}.$$

Soit $S_1$, $S_2$ et $S_3$ les symétries orthogonales ayant pour axes respectivement $OA$, $BB'$ et $A'C'$.

**1.** La transformation $T = S_3 \circ S_2 S_1$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

**2.** Quelle est l'application linéaire associée à $T$.

**3.** Déterminer la nature de $T$.

### Problème 296

./1975/nancyC/pb/texte

A) On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de degré au plus égal à 2. On rappelle que $\mathscr{E}$ est de dimension 3.
Soit $a$ un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$. On considère les trois applications polynomiales $R_a$, $S_a$, $T_a$ définie de la manière suivante : pour tout $x$ de $\mathbb{R}$,

$$R_a(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{2(1+a)}, \quad S_a(x) = \frac{x^2-1}{a^2-1}, \quad T_a(x) = \frac{(x+1)(x-a)}{2(1-a)}.$$

1° Calculer les valeurs de $R_a$, $S_a$, $T_a$ aux points $-1$, $a$, $1$ et en déduire que ces trois applications polynomiales sont linéairement indépendantes. Constituent-elles une base de $\mathscr{E}$ ?

2° Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des nombres réels. Montrer qu'il existe un, et un seul, élément $P$ de $\mathscr{E}$ tel que $P(-1) = \alpha$, $P(a) = \beta$ et $P(1) = \gamma$ en cherchant à exprimer $P$ à l'aide de $R_a$, $S_a$, $T_a$.

B) 1° Soit $f$ l'application de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x3+x} + \frac{1}{3-x}\right) \ ; \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Retour page 1

2° Déterminer un élément $Q_0$ de $\mathscr{E}$ qui prend aux points $-1,\ 0,\ 1$ les mêmes valeurs que celles de $f$ et calculer $Q_0 - f$ ainsi que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_0(x)\,\mathrm{d}x$.

3° On pose $\Delta = \displaystyle\int_{-1}^{1} (Q_0(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

En minorant et en majorant $9 - x^2$ lorsque $|x| \leqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{810} \leqslant \Delta \leqslant \frac{1}{720}.$$

4° En déduire un encadrement de $\log 2$ par des nombres décimaux dont la différence est $16.10^{-5}$.

C) On considère à nouveau, lorsque $a^2 \neq 2$, les polynômes $R_a,\ S_a,\ T_a$ introduits au A).

1○ Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^{1} R_a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} S_a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} T_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

2○ On suppose que $(a^2-1)(a^2-9) \neq 0$. Soit $Q_a$ l'élément de $\mathscr{E}$ qui prend aux points $-1,\ a,\ 1$ les mêmes valeurs que $f$.
Calculer

$$I(a) = \int_{-1}^{1} Q_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Il est conseillé de vérifier que pour $a = 0$, on obtient le résultat trouvé au B2).

3○ Étudier les variations de $I(a)$ lorsque $a$ parcourt l'intervalle $]-1\,;1[$.

4○ En déduire qu'il existe un nombre $a_0$ tel que $-1 < a_0 < 1$ et $I(a_0) = \log 2$.

## XXXVII. Nancy Metz, série E

Sujet identique à celui de la série C BesançonE75

## XXXVIII. Nantes, série C

**Ex. 957.** ./1975/nantesC/exo-1/texte.tex

On considère l'ensemble $E_4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et l'application $p$ de $E_4$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément $k$ de $E_4$ associe $p(k) = \log(a^k)$, où $k$ est un réel strictement positif.

**1.** Déterminer $a$ pour que $(E_4,\ \mathscr{P}(E_4),\ p)$ soit un espace probabilisé.

**2.** On donne à $a$ la valeur trouvée ci-dessus et l'on considère la variable aléatoire $X$ définie sur $(E_4,\ \mathscr{P}(E_4),\ p)$ et associant à chaque élément $k$ de $E_4$ le nombre $p(k)$.
Calculer l'espérance mathématique de $X$, sa variance et son écart type.

**3.** Généraliser les résultats précédents à l'ensemble

$$E_n = \{k | k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n\}$$

où $n$ est un entier naturel non nul.
On rappelle

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ex. 958. ./1975/nantesC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x+2) = f(x) \\ \forall x \in [0\,;2[ \ : \ f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx, \end{cases}$$

où $b,\ c,\ d$ sont des nombres réels.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'axes $x'Ox,\ y'Oy$.

**1.** Déterminer $f(2)$.
Trouver sous la forme d'une relation entre $b,\ c,\ d$ une condition suffisante pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** Déterminer $b,\ c,\ d$ de manière que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$, et que, de plus, $(\mathscr{C})$ admette le point $I\left(1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ comme extrémum relatif.

**3.** Étudier la dérivabilité de $f$ et construire $(\mathscr{C})$, les valeurs de $b,\ c,\ d$ étant celles qui on été trouvées au 2.

## Problème 297

./1975/nantesC/pb/texte

A- Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix},$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels.

On note respectivement $O$ et $I$ les matrices nulle et unité d'ordre 2 ; on pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel.
   Établir que $(I,\ J)$ est une base de E et déterminer les composantes d'une matrice de E dans cette base.
2. Calculer $J^2$. En déduire que la multiplication des matrices est une loi de composition interne dans E.
   Démontrer que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, a une structure d'anneau.
   Cette anneau est-il commutatif ; unitaire ? Admet-il des diviseurs de zéro ?
   Quels sont les éléments inversibles de E ?
3. Soit $M$ un élément de E. On pose $M^1 = M$ et $M^n = M.M^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.
   Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les composantes de $M^n$ dans la base $(I,\ J)$ sont $(a^n,\ na^{n-1}b)$.
   Déterminer la matrice $M + M^2 + \cdots + M^n$ à l'aide de ces composantes dans la base $(I,\ J)$.

B- Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et P le plan affine associé à $\mathscr{P}$ rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathscr{P}$, dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est un élément de E.

1. A quelle condition $f$ est-il un automorphisme de $\mathscr{P}$ ?
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$. A quelles conditions a-t-on l'égalité entre ces deux ensembles ? Dans ce cas que dire de $f \circ f$ ?
3. Trouver les vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par $f$.
4. Déterminer les droites vectorielles de $\mathscr{P}$ invariantes par $f$.
5. On désigne par $\varphi$ l'application affine de P, associée à $f$ et laissant le point $O$ invariant.
   Quels sont les points de P invariants par $\varphi$ ? Trouver les droites affines de P parallèles à leurs transformées par $\varphi$.
6. On note $M_0$ le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, puis $M_1 = \varphi(M),\ M_n = \varphi(M_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$.
   Soit $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées de $M_n$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Déterminer $x_n$ et $y_n$.
   Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont-elles convergentes ?

C- Soit $\theta$ l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui, à une matrice $M$ de E de composantes $a$ et $b$ dans la base $(I,\ J)$ associe le nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$.

1. Démontrer que $\theta$ est une application linéaire, bijective, de E sur $\mathbb{C}$.
2. Si $Z = \theta(M)$ et $z' = \theta(M')$, on pose $Z \star Z' = \theta(M.M')$.
   Déterminer $(a+\mathrm{i}b) \star (a'+\mathrm{i}b')$, où $a,\ b,\ a',\ b'$ sont des nombres réels.
   Quelle est la structure de $(\mathbb{C},\ +,\ \star)$ ?
3. Quels sont les nombres complexes admettant un symétrique pour la loi $\star$ ?
4. On pose, pour $Z \in \mathbb{C}$ : $Z_1 = Z,\ Z^{(n)} = Z \star Z^{(n-1)}$ pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.
   Calculer $Z^{(n)}$.
   Résoudre l'équation $Z^{(n)} = 1$.
   Résoudre l'équation $Z^{(2)} - 5Z + \dfrac{25}{4} = 0$.

## XXXIX. Nantes, série E

**Ex. 959.** ./1975/nantesE/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, les plans de repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ sont respectivement les plans horizontal et frontal de projection tandis que la droite $(O;\vec{\jmath})$ est la ligne de terre.
Les axes $Ox,\ Oy,\ Oz$ sont respectivement dirigé par $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.
On prendra le centimètre comme unité de longueur et l'on placera $O$ au centre de la feuille ?
Par rapport à ce repère, on définit une droite $(L)$ par les équations paramétriques

$$x = p, \qquad y = -p, \qquad z = 6 - 3p.$$

**1.** Construire l'épure $(l,\ l')$ de la droite $(L)$.

**2.** Construire les traces du plan $(\Pi)$ passant par $(L)$ et dont les horizontales sont perpendiculaires à $(L)$.

**3.** Construire la perpendiculaire $(\Delta)$ abaissée du point $M\,(2\ ;\ 4\ ;\ 2)$ sur le plan $(\Pi)$.

**4.** Déterminer, par une méthode de géométrie descriptive, la distance de $M$ au plan $(\Pi)$.

**Ex. 960.** ./1975/nantesE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$, définie par $f(x) = x^3\mathrm{e}^x$.
On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$.

1. Calculer $f^{(3)}(x)$.
2. Démontrer que, pour tout entier positif $n$, $f^{(n)}(x)$ est égal à

$$f^{(n)(x)} = \mathrm{e}^x\left(x^3 + n(3x^2) + \frac{n(n-1)}{2}6x + n(n-1)(n-2)\right).$$

3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
4. En utilisant les résultats précédents, calculer l'intégrale

$$J = \int_{-1}^{+1} (t^3 + 12t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

## Problème 298

./1975/nantesE/pb/texte

**1.** Pour chaque couple $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^{\star 2}$, on considère l'endomorphisme d'un espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$, noté $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$, dont la matrice par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 3\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ est bijectif si, et seulement si, $(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)$ n'est pas nul.
2. Si $\vec{v}$ est un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}$, écrire, par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, les composantes de $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}(\vec{v})$ en fonction de celles de $\vec{v}$.
   Discuter suivant les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ la nature du noyau $\ker \varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ et de l'image $\mathrm{Im}\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$.
   Donner dans chaque cas une base de $\ker \varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ et une base de $\mathrm{Im}\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha,\ \beta)$ tels que $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ soit une homothétie vectorielle de $\vec{\mathscr{E}}$.
4. On étudie l'endomorphisme $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ dans le cas
   $$\alpha = \beta = \frac{1}{4}.$$
   Démontrer que les deux vecteurs $\vec{e}_1 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ forment une base de $\vec{\mathscr{E}}$.
   Déterminer la matrice $M'$ de l'endomorphisme $\varphi_{\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)}$ par rapport à cette nouvelle base.
   En déduire que $\varphi_{\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)}$ est une projection vectorielle dont on précisera les éléments.
5. On considère l'endomorphisme $\varphi_{(\alpha,\ \beta)}$ dans le cas $\alpha = 2,\ \beta = 1$.
   Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ non nuls tels qu'il existe un réel $k$ vérifiant $\varphi_{(2,\ 1)}(\vec{u}) = k\vec{u}$.

**2.** Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et d'espace vectoriel associé $\vec{\mathscr{E}}$.
Les axes $Ox$ et $Oy$ de E sont dirigés respectivement par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
On désigne par $f$ l'application de E dans E qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ dont les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ sont définies par

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = 3x + 4y + 3. \end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est une application affine bijective.
   Déterminer l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$.
   Définir analytiquement $f^{-1}$.
2. L'application $f$ admet-elle des points invariants ?
   Déterminer la transformée par $f$ d'une droite quelconque du plan.
   Quelles sont les droites globalement invariantes par $f$ ?
   Quelles sont les droites parallèles à leur transformée ?

# XL. Nice, série C

**Ex. 961.** ./1975/niceC/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3.
On donne trois points distincts $A,\ B,\ C$ de $\mathscr{E}$. Soit $f$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$M \longmapsto f(M) = 2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2.$$

**1.** Justifier l'existence de $G$ barycentre des points $A,\ B,\ C$ affectés respectivement des coefficients $2,\ 3,\ -2$.
Donner une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GB},\ \overrightarrow{GC}$.

**2.** Montrer que $f(M) = 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + k$ avec $k = f(G)$.

**3.** Discuter suivant la valeur de $k$, la nature de l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{E}$ tels que $f(M) = 4$.

Retour page 1

Ex. 962. ./1975/niceC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}.$$

**1.** Étudier la dérivabilité de $f$ en $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.

**2.** Représentation graphique de $f$ en repère orthonormé. On précisera en particulier les asymptotes à la courbe représentative.

# XLI. Orléans Tours, série C

Ex. 963. ./1975/orleansC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\log x}{x}$, où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique $(C)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $a$, le nombre de solutions de l'équation

$$\mathrm{e}^{ax} = x.$$

**3.** Calculer l'aire comprise entre l'axe $(0,\ \vec{\imath})$, la courbe $(C)$ et les droites d'équation respectives $x = 2$, $x = 3$. Donner de cette aire une valeur approchée, en utilisant uen table de logarithmes.

Ex. 964. ./1975/orleansC/exo-2/texte.tex

On désigne par $\alpha$ et $\alpha'$ les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

**1.** Calculer le module et l'argument de $\alpha$ et $\alpha'$ (on prendra $\alpha = a + \mathrm{i}b$, avec $b > 0$).

**2.** $n$ désignant un entier naturel, dans la plan complexe, on considère, les points $M_n$ (d'affixes $\alpha^n$) et $M'_n$ (d'affixe $\alpha'^n$).

Construire ces points pour $0 \leqslant n \leqslant 4$. Montrer que l'ensemble $E'$ des points $M'_n$ se déduit de l'ensemble $E$ des points $M_n$ par une application simple. Quel est l'ensemble $E \cap E'$ ?

Soit $k$ un entier positif donné. Comment peut-on par une transformation du plan, obtenir $M'_{n+k}$ à partir de $M_n$ ?

# XLII. Paris, série C

Ex. 965. ./1975/parisC/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $F$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \,\mathrm{d}t.$$

Calculer la dérivée $F'(x)$ de $F$ au point $x$, en considérant $F$ comme la fonction composée de la fonction

$$g : x \longrightarrow 1 + x^2$$

et le la fonction $h : X \longrightarrow \displaystyle\int_1^X \ln t \,\mathrm{d}t \quad (X > 0)$.

**2.** Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale

$$\int_1^X \ln t \, \mathrm{d}t \quad (X > 0).$$

Exprimer alors $F(x)$, sans utiliser le signe d'intégration et retrouver l'expression $F'(x)$.

**Ex. 966.** ./1975/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine P rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A$ et $B$ définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$. Tout point $M$ du plan P a deux coordonnées, notées $x$ et $y$, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Comment choisir le point $M$ pour que les points $A$, $B$, $M$, affectés respectivement des coefficients $x$, $y$, $xy$, admettent un barycentre ?
Dessiner l'ensemble $(H)$ des points $M$ qui ne conviennent pas.

**2.** Trouver et dessiner l'ensemble $(K)$ des points $M$ pour lesquels le point $O$ est le barycentre des points $A$, $B$, $M$, affectés respectivement des coefficients $x$, $y$, $xy$.

## Problème 299

./1975/parisC/pb/texte

A) On donne un entier naturel $a$, supérieur ou égal à 1.

1. Trouver l'ensemble $\mathscr{J}$ des solutions du système suivant d'inéquations, où l'inconnue est le nombre réel $x$ :

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{-x^{3a} + 2x^a - 1}{1 - x^{3a}} < 0 \end{cases}$$

(on pourra poser $x^a = X$).

2. Calcul numérique (on pourra utiliser une table de logarithmes).
Trouver la plus petite valeur de l'entier $a$ pour laquelle le nombre $\dfrac{49}{51}$ appartient à $\mathscr{J}$.

B) On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les suites réelles $u$, applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \longmapsto u_n$.
La somme $u + u'$ de deux suites $u$ et $u'$ de $\mathscr{E}$ est la suite $n \longmapsto u_n + u'_n$.
Le produit $\gamma u$ d'une suite $u$ par un réel $\gamma$ est la suite $n \longmapsto \gamma u_n$.
La suite $O$ est la suite $n \longmapsto 0$ (réel nul).
L'ensemble $\mathscr{E}$, muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $p$ un réel donné, appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.
On désigne par E l'ensemble des suites $u$ de $\mathscr{E}$ qui satisfont la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p) u_n = 0. \tag{1}$$

   a) Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ et par la relation 1.

   b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

   c) Soit $v$ et $w$ les deux suites de E définies par $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_0 = 0$, $w_1 = 1$.
   Montrer que $\{v,\ w\}$ est un système libre.
   Montrer que, si $u$ est une suite quelconque de E, $u$ est égale à $u_0 v + u_1 w$.
   Que peut-on dire alors de $\{v,\ w\}$ ? Quelle est la dimension de E ?

2. a) Vérifier que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les suites de E sont des suites arithmétiques.
   On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $n \longmapsto t^n$ ($t$ réel non nul) appartient à E, si, et seulement si, $t$ est tel que $pt^2 - t + 1 - p = 0$.
   Vérifier que l'on obtient ainsi deux suites formant une base de E. Écrire alors une expression générale du terme $u_n$ d'une suite quelconque de E, en désignant par $\lambda$ et $\mu$ les coordonnées de $u$ dans cette base.



Retour page 1

b) Soit $\alpha$ un entier donné, supérieur où égal à 1. On désigne par $u$ une suite de E telle que $u_0 = 1$ et $u_\alpha = 0$.

On prend $p = \dfrac{1}{2}$, exprimer alors $u_n$ en fonction de $\alpha$ et de $n$.

On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$ et l'on pose $x = \dfrac{1-p}{p}$ ; exprimer $u_n$ en fonction de $x$, $\alpha$ et $n$.

C) Un jeu oppose deux joueurs A et A', auxquels on attribue respectivement, au début du jeu, un « avoir » de $a$ jetons et un « avoir » de $2a$ jetons ($a$ entier donné, supérieur ou égal à 1).

La rencontre comporte des parties successives et indépendantes, numérotées $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

La probabilité que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, et égale à $p$ $(0 < p < 1)$.

Après chaque partie le joueur perdant donne un jeton au gagnant.

le jeu s'arrête lorsqu'un joueur est « ruiné », c'est à dire qu'il ne dispose plus de jetons, et le joueur « ruiné » perd le match.

1° a) $k$ désignant un entier naturel, on considère la variable aléatoire $X_k$ égale à l'avoir du joueur A après la partie de rang $k$ (si $k \neq 0$) et avant la partie de rang $k+1$ (si celle-ci a lieu).

Ainsi $X_0 = a$ et $0 \leqslant X_k \leqslant 3a$.

Quelles sont les valeurs « possibles » de $X_1$ ; de $X_2$ ; de $X_{2k}$ et $X_{2k+1}$ ?

b) Si $X_K = 0$ le joueur A est ruiné ; si $X_k = 3a$ el joueur A' est ruiné ; dans chacun de ces cas le match ne se poursuit pas au delà de la $k^{\text{ième}}$ partie.

Si $X_k$ est différent de $0$ et $3a$, on admet[1] que le probabilité de ruine ultérieure du joueur A ne dépend pas de $k$, mais seulement de la valeur $n$ de $X_k$.

On désigne par $r_n$ la probabilité de ruine de A, connaissant $n$. On a ainsi $r_0 = 1$ et $r_{3a} = 0$.

En considérant les deux valeurs que peut prendre $X_{k+1}$ sachant $X_k = n$, montrer[2] que

$$r_n = (1-p)r_{n-1} + pr_{n+1}$$

et constater que la suite $n \longmapsto r_n$ vérifie la relation de récurrence (1) du B).

Exprimer alors, à l'aide de B(2)b, le terme $r_n$ en fonction de $n$ et de $a$ (lorsque $p = \dfrac{1}{2}$) ou en fonction de $n$, $a$ et de $x = \dfrac{1-p}{p}$ (lorsque $p \neq \dfrac{1}{2}$).

c) On désigne par $r'_m$ la probabilité de ruine du joueur A', connaissant son avoir $m$.

Montrer qu'on obtient $r'_m$ en remplaçant, dans l'expression de $r_n$, $n$ par $m$ et $p$ par $1-p$ (c'est à dire $x$ par $\dfrac{1}{x}$).

Écrire cette expression de $r'_m$ (pour $p = \dfrac{1}{2}$ et pour $p \neq \dfrac{1}{2}$).

Vérifier la relation

$$r_a + r'_{2a} = 1. \qquad (2)$$

2° En notant que $r_a$ et $r'_{2a}$ sont les probabilités de ruine de A et de A' au début de match, on voit que le jeu est favorable au joueur A si $r_a < r'_{2a}$, c'est à dire, d'après la relation (2) précédente, si $2r_a < 1$.

Que vaut $r_a$ lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ ?

On prend $p \neq \dfrac{1}{2}$. Exprimer la différence $D_a = 2r_a - 1$ en fonction de $x$ et de $a$.

Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $D_a < 0$ ? (cf. A1).

$p$ étant fixé supérieur à $\dfrac{1}{2}$, comment choisir $a$ pour que le jeu soit favorable au joueur A ?

*Application numérique :* $p = 0{,}51$ ; utiliser A2 pour donner la plus petite valeur convenable de l'entier $a$.

1. On ne cherchera pas à définir l'espace probabilisé relatif à ce jeu et l'on se bornera à faire le raisonnement suggéré
2. On pourra admettre ce résultat



Retour page 1

# XLIII. Paris remplacement, série C

**Ex. 967.** ./1975/parisCrem/exo-1/texte.tex

On désigne par $n$ un entier naturel non nul, par $n!$ le produit des $n$ premiers entiers naturels non nuls, et par $a_n$ le produit $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ des $n$ premiers entiers naturels impairs.
Démontrer l'égalité

$$a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$$

En déduire que le produit $(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n$ est divisible par $2^n$ et que, pour tout entier naturel $p$ tel que ce produit soit divisible par $2^p$, on a $p \leqslant n$.

**Ex. 968.** ./1975/parisCrem/exo-2/texte.tex

Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'axe $(Ox)$ et $(Oy)$.
On considère l'application $f$ du plan $P$ dans lui-même qui associe à un point $m$ de $P$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ le point $M$ dont l'affixe $Z$ est égale à $z^2$.
Exprimer en fonction des coordonnées $x$, $y$ de $m$ les coordonnées de $X$, $Y$ de $M$.
Trouver et dessiner l'image $f(d)$ de la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ ; préciser les éléments caractéristiques de la courbe $f(d)$ permerrant d'en donner une définition géométrique simple.
Montrer qu'il existe une autre droite, notée $d'$, telle que $f(d') = f(d)$.

# XLIV. Paris, série E

**Ex. 969.** ./1975/parie/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $\Delta$ la droite de E dont un vecteur directeur est $\vec{i}$ et qui passe par le point $H$ de coordonnées $(0~;~0~;~2)$.
On désigne par $r$ la rotation d'axe $\Delta$ dans laquelle le point $O$ a pour image le point $A$ de coordonnées $(0~;~-2~;~2)$, et par $t$ la translation de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Quelle est la nature géométrique de la transformation $t \circ r$ composée de $r$ et $t$ ? Préciser ces éléments caractéristiques (éléments de « réduction »).

**Ex. 970.** ./1975/parie/exo-2/texte.tex

Trois urnes $U_1$, $U_2$, $U_3$, contiennent respectivement :

— $U_1$ : 2 boules rouges, 3 boules bleues, 5 boules vertes,

— $U_2$ : 4 boules rouges, 5 boules bleues,

— $U_3$ : 3 boules bleues, 6 boules vertes.

On tire de l'urne $U_1$, sans la regarder, une boule que l'on met dans l'urne $U_2$, puis on tire de $U_2$ une boule que l'on met dans $U_3$, puis on tire de $U_3$ une boule que l'on met dans l'urne $U_1$.
On suppose que, dans chaque tirage, chaque boule a la même probabilité de sortie.
Calculer la probabilité pour que la répartition des couleurs de l'urne $U_1$ soit inchangée à l'issue des trois tirages.
(Il en est ainsi, *par exemple*, si les trois tirages donnent successivement une boule bleue, une boule rouge, une boule bleu, ce que l'on représentera par l'écriture $(B,~R,~B)$ ; il est conseillé au candidat d'énumérer les divers cas possibles et de calculer la probabilité de chacun d'eux.)

## Problème 300

./1975/parie/pb/texte

1. a) Étudier la variation de la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $[-1\,;+1]$ de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x + \sqrt{2(1-x^2)}$$

$\left(\text{on trouvera que la dérivée de } f \text{ change de signe au point} \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) Le plan $(\Pi)$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,~\vec{u},~\vec{v})$, d'axes $Ox$, $Oy$, on appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans ce repère.



Retour page 1

Préciser les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $-1$ et $+1$, au point $A$ d'abscisse nulle, et au point $B$ d'ordonnée nulle.
Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, en prenant pour unité de longueur 5 cm.

2. a) Soit $f_1$ la fonction numérique définie sur $[-1\,;+1]$ par $f_1(x) = -x - \sqrt{2(1-x^2)}$ et soit $(\mathscr{C}_1)$ la courbe représentative de $f_1$ dans le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ du plan $(\Pi)$.
Comparer, pour $x$ quelconque, $f_1(x)$ et $f(-x)$ et interpréter géométriquement le résultat. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
   b) On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $P$ situés entre $D$ et $D'$, ou sur $D$ ou $D'$, et tels que $PK^2 = PH.PH'$.
Calculer $PK^2$ et $PH.PH'$ en fonction des coordonnées $x,\ y$ du point $P$, et montrer que $\mathscr{E} = (\mathscr{C}) \cup (\mathscr{C}_1)$.
Vérifier qu'une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ est

$$3x^2 + y^2 + 2xy - 2 = 0. \tag{e}$$

3. Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les images resxpectives de
   a)
   b)
4. Á tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels tels que $a \neq 0$ et $a+b \neq 0$, l'on associe l'application $\varphi_{a,\ b}$ du plan $\Pi$ dans lui-même par laquelle un point $P\,(x\ ;\ y)$ a pour image le point $P'\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + (a+b)y. \end{cases}$$

$(x,\ y,\ x',\ y')$ sont des coordonnées relatives au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$).
Soit $\Phi$ l'ensemble des applications $\varphi_{a,\ b}$.
Montrer que la composée de deux applications $\varphi_{a,\ b}$ et $\varphi_{a',\ b'}$, de $\Phi$ est une application de $\Phi$, et que $\Phi$ est un groupe pour la composition des applications.
5. On se propose de trouver, parmi les applications $\varphi_{a,\ b}$, celles qui laissent invariante l'ellipse $\mathscr{E}$ du **??**
   a)
   b)
   c) Prouver sans calculs que ces quatre transformations forment un groupe (sous-groupe du groupe $\Phi$).

## XLV. Poitiers, série C

**Ex. 971.** ./1975/poitiersC/exo-1/texte.tex

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne suivante, notée $\star$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a,\ b) &\longmapsto a \star b = \log(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b). \end{aligned}$$

($\mathrm{e}$ est la base des logarithmes népériens et $\log x$ désigne le logarithme népérien du réel $x > 0$.)

a) Cette loi est-elle associative ?
Résoudre l'équation : $x \star (x \star x) = 0$.

b) Montrer qu'il existe un réel $x$ solution de l'équation $a = b \star x$ si, et seulement si, $a > b$. Lorsqu'elle existe, la solution est-elle unique ?

c) Vérifier l'égalité suivante :

$$a + (b \star c) = (a+b) \star (a+c)$$

quels que soient les réels $a,\ b$ et $c$.
L'addition des réels est-elle distributive par rapport à la loi $\star$ ?

Retour page 1

**Ex. 972.** ./1975/poitiersC/exo-2/texte.tex

D'une urne contenant $n$ boules blanches et $n$ boules noires, un joueur tire successivement 6 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
S'il tire une boule blanche, il marque 2 points, dans le cas contraire il perd 3 points.
Soit $S$ la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le joueur en une partie.

1. a) Dresser le tableau définissant la loi de probabilité de la variable aléatoire $S$.
   b) Calculer l'espérance mathématique de $S$, $E(S)$, ainsi que la variance de $S$, soit $V(S)$.
2. a) Á l'aide de ce tableau, calculer la probabilité de l'événement
$$\{|S-E(S)| \geqslant 9\}.$$
   b) En déduire la probabilité de l'événement
$$\{|S-E(S)| < 9\}.$$

## Problème 301

./1975/poitiersC/pb/texte

*Les parties A et Bpeuvent être traitées indépendamment ; les numéros B1 et B2 du B sont indépendants l'un de l'autre.*

Á toute fonction numérique $f$, définie et continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction $\varphi$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On désigne par $\mathbf{Im}f$ (resp. $\mathbf{Im}\varphi$) l'ensemble des réels ayant un antécédent par $f$ (resp. $\varphi$).

A- 1. a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exists y \in [x\,;x+1], \qquad \varphi(x) = f(y).$$
   b) En déduire que : $\mathbf{Im}\varphi \subset \mathbf{Im}f$.
   c) Montrer que si $f$ est bornée, $\varphi$ est bornée.
2. On définit une nouvelle fonction numérique $F$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   a) Exprimer $\varphi$ à l'aide de $F$. En déduire que $\varphi$ est dérivable et que
$$\varphi'(x) = f(x+1) - f(x).$$
   b) Montrer que, si $f$ est monotone, $\varphi$ est monotone.
   c) Montrer que, si $f$ est périodique de période 1, $\varphi$ est constante.

B- On se propose d'étudier les fonctions $f$ et $\varphi$ dans des cas particuliers.
1. On donne $f$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}.$$
   a) Représenter graphiquement $f$ et montrer que la courbe obtenue admet une centre de symétrie.
   b) Monter qu'il existe deux réels fixes, $A$ et $B$, tels que
$$f(x) = A + \frac{Bx}{x^2+1}.$$
   En déduire $\varphi(x)$.
   c) Calculer $\varphi(x-1)+\varphi(x)$ ; pouvait-on prévoir le résultat ?
   d) Étudier et représenter graphiquement la fonction $\varphi$.
2. Si $a$ est un réel fixé, on donne $f(x) = \sin ax$.
   a) Calculer $\varphi(x)$.
   b) Que peut-on dire de $\varphi$ si $a = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ?

# XLVI. Poitiers, série E

**Ex. 973.** ./1975/poitiersE/exo-1/texte.tex

On se propose d'étudier la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n = \frac{2u_{n-1} - 1}{2u_{n-1} + 5},$$

et la suite $(v_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

1. En supposant que $(u_n)$ existe, montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique, calculer sa raison ; étudier sa limite.
2. Calculer $u_n$ en fonction de $n$. étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**Ex. 974.** ./1975/poitiersE/exo-2/texte.tex

Calculer, en fonction du paramètre réel strictement positif $\lambda$, le nombre

$$S_\lambda = \int_{\sqrt{e}}^{\lambda} \left( x^2 \log x - \frac{1}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Étudier $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} S_\lambda$.

## Problème 302

./1975/poitiersE/pb/texte

Soit P le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e}_2)$.
On pose

$$\mathrm{P}^\star = \mathrm{P} - \{O\}.$$

A partir de la seconde question, on identifie le plan P au plan complexe en associant au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

1. $M$ et $M'$ sont deux points de $\mathrm{P}^\star$, de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :
$$\begin{cases} xx' + yy' = 4\ ; \\ xy' - x'y = 0\ ; \end{cases} \tag{1}$$
$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 4\ ; \\ O,\ M,\ M' \text{ sont alignés.} \end{cases} \tag{2}$$
Résoudre le système (**??**), les inconnues étant $x'$ et $y'$.
2. Soit $f$ l'application de $\mathrm{P}^\star$ dans $\mathrm{P}^\star$ qui à tout point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z' = x' + \mathrm{i}y'$ tel que $z'.\overline{z} = 4$.
Montrer que l'ensemble des points de $\mathrm{P}^\star$ invariants par $f$ est le cercle $(\Gamma)$ de centre $O$ et de rayon 2.
3. Montrer que $f$ est involutive. Donner les expressions de $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$, puis celles de $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$.
4. Soit $\Omega$ le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$, $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ ; et soit $(C)$ le cercle de centre $\Omega$ passant par $O$.
   a) Écrire une équation de $(C)$.
   b) Soit $(D)$ l'image de $(C) - \{O\}$ par $f$ ; déterminer l'équation et la nature de $(D)$.
   c) Construire $(D)$ dans les deux cas suivants :
      $\alpha$ $(C)$ et $(\Gamma)$ se coupent en deux points distincts,
      $\beta$ $(C)$ et $(\Gamma)$ son tangents.
   d) Quelle est l'image par $f$ de l'une droite $(\Delta)$ ne passant pas par $O$ ?



Retour page 1

5. a) On considère le point $A$ d'affixe $1+\mathrm{i}$ et $B$ d'affixe $4$.
   Déterminer l'image par $f$ du cercle de diamètre $[A,\ B]$.
   Comparer la propriété obtenue pour ce cercle et celle obtenue pour le cercle $(\Gamma)$ à la seconde question.
   b) Soit $(\gamma)$ le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R$ ne passant pas par $O$. Quelle relation doivent vérifier $a$, $b$ et $R$ pour que $(\gamma)$ soit globalement invariant par $f$ ?
   Déduire de cette relation une propriété géométrique des tangentes à $(\Gamma)$ et $(\gamma)$ en leurs points communs.

# XLVII. Poitiers remplacement, série C

**Ex. 975.** ./1975/poitiersCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer pour $p=1,2,3,4$ les restes de la divisions euclidienne de $5^p$ par $13$.

**2.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par $13$.

**Ex. 976.** ./1975/poitiersCrem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-|x|}.$$

**1.** Étudier cette fonction ; est-elle dérivable en $0$ ?
Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans un repère orthonormé ; préciser l'allure de la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage du point d'abscisse $0$.

**2.** Déterminer une primitive de la restriction de $f$ à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Déterminer une primitive de la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

**3.** Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses $x'x$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\lambda$, $\lambda$ étant un réel positif.
L'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ admet-elle une limite finie quand $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

## Problème 303

./1975/poitiersCrem/pb/texte

On considère un plan affine euclidien E orienté, de base orthonormée directe $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) La fonction vectorielle $f$ de $\mathbb{R}$ dans E est définie par $f(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, avec

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2^t}\cos\dfrac{\pi}{2}t, \\ y(t) = \dfrac{1}{2^t}\sin\dfrac{\pi}{2}t.; \end{cases}$$

1. Cette fonction est-elle définie sur $\mathbb{R}$ ? Préciser les limites, si elles existent, de $x(t)$ et de $y(y)$ quand $t \to +\infty$ et quand $t \to -\infty$.
2. Dans le suite du problème, on se restreint à $t \in \mathbb{R}^+$ et l'on considère le mouvement d'un point $M(t)$ défini par $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$.
   a) Représenter $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$.

# XLVIII. Poitiers remplacement, série E

**Ex. 977.** ./1975/poitiersErem/exo-1/texte.tex

Résoudre l'équation suivante :

$$\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15).$$



Retour page 1

**Ex. 978.** ./1975/poitiersErem/exo-2/texte.tex

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t$ ; on pourra utiliser le théorème d'intégration par parties.

## Problème 304

./1975/poitiersErem/pb/texte

A. Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
On considère l'homothétie vectorielle $h$ de rapport 2 et l'endomorphisme $s$ défini par

$$\begin{cases} s(\vec{i}) = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}, \\ s(\vec{j}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}\ ; \end{cases}$$

(le mot endomorphisme désigne ici une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$).

1. Déterminer les matrices associées dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ aux endomorphismes $h$, $s$ et $\sigma = s \circ h$.
Caractériser l'endomorphisme $s$ en précisant l'ensemble des vecteurs invariants.
2. On note $Z = X + \mathrm{i}Y$ l'affixe du vecteur $\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, quelconque du plan $\mathscr{P}$, $Z_1 = X_1 + \mathrm{i}Y_1$ l'affixe du vecteur $\vec{u}_1 = h(\vec{u})$ et $Z' = X' + \mathrm{i}Y'$ l'affixe du vecteur $\vec{u}' = s(\vec{u}_1)$.
Exprimer $Z_1$ en fonction de $Z$ puis $Z'$ en fonction de $\overline{Z}_1$ (conjugué de $Z_1$) et montrer que $Z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{Z}$.

B. Soit $P$ le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application affine $\Sigma$ de $P$ dans $P$ qui laisse invariant le point $A$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ et dont l'endomorphisme associé est $\sigma$.

1. Soit $(D)$ la droite d'équation $x - y\sqrt{3} - 1 = 0$. Après avoir vérifié que le point $A$ appartient à $(D)$, déterminer l'image par $\Sigma$ de la droite $(D)$.
2. $S$ désignant la symétrie orthogonale par rapport à $(D)$ et $(H)$ l'homothétie de centre $A$ et de rapprt 2, comparer $H \circ S$, $S \circ H$ et $\Sigma$.
3. Soit $M'$ le point d'affixe $z' = x' + \mathrm{i}y'$ image, par $\Sigma$, du point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Démontrer que
$$z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\overline{z} - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$
Donner les expressions analytiques de $\Sigma$ et de $\Sigma^{-1}$, application réciproque de $\Sigma$.
4. Soit $(C)$ le cercle de centre le point $O$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Caractériser l'image $(C')$ de $(C)$ par l'application affine $\Sigma$. Démontrer que la droite $(\Delta)$ est tangente au cercle $(C)$. En déduire sa position par rapport à $(C')$.

# XLIX. Reims, série C

**Ex. 979.** ./1975/reimsC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne par 9 de $4^n$.

**2.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

**Ex. 980.** ./1975/reimsC/exo-2/texte.tex

On désigne par P un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $S_\alpha$ la transformation qui, à tout point $M$ de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M_1$ dont les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ sont données par

$$(x_1 \quad y_1) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $\alpha$ est un paramètre réel.

**1.** Trouver les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $S_\alpha$ n'est pas bijectif, et déterminer, pour chacune de ses valeurs, l'image de $S_\alpha$ ainsi que l'ensemble des points $M$ pour lesquels $S_\alpha(M) = O$.

**2.** $M$ étant fixé, distinct de $O$, déterminer l'ensemble (E) des points $M_1$, transformés de $M$ par $S_\alpha$, lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$.
Comment faut-il choisir le point $M$ pour que (E) contienne le point $O$ ?

## Problème 305

./1975/reimsC/pb/texte

A) Soit $f$ la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{\ln x}, \end{cases}$$

pour $x$ strictement positif différent de 1.

1° Étudier $f$ : continuité, dérivabilité, sens de variation, représentation dans un repère orthonormé. (On précisera la demi-tangente à l'origine $O$ du repère, en étudiant la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs positives.)

2° On pose, pour $0 \leqslant x < 1$,

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour $x > 1$,

$$G(x) = \int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Que vaut $F'(x)$ ? Que vaut $G'(x)$ ?
(On ne cherchera pas à calculer des expressions de $F(x)$ et $G(x)$.)
Dire pourquoi on n'a pas le droit d'écrire $F'(x) = G'(x)$.

B) On pose, pour $x$ strictement positif et distinct de 1,

$$H(x) = \int_{x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$f$ étant la fonction définie au (A).

1° a) Montrer que $H(x)$ est toujours positif ou nul.

b) Montrer que $H(x)$ s'exprime, suivant les cas, à l'aide de la fonction $F$ ou à l'aide de la fonction $G$.
En déduire l'expression de $H'(x)$ pour $0 < x < 1$, puis pour $x > 1$.
Soit $\varphi$ la fonction numérique définie et continue sur $[0\,;1[$.
Établir que $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives. (On pourra désigner par $\Phi$ une primitive de $\varphi$.)
En déduire la limite de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives.

2° On pose, pour $x$ strictement positif et distinct de 1,

$$K(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer la dérivée de la fonction,

b)

c)

3° a)

b)

c)

d)

## L. Rennes, série C

**Ex. 981.** ./1975/rennesC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0.$$

**Ex. 982.** ./1975/rennesC/exo-2/texte.tex

Dans une épreuve, l'espace des éventualités $\Omega$ comprend 8 éléments notés $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h$.
Les ensembles $A = \{a,\ c,\ f,\ h\}$ et $B = \{b,\ c\ f,\ h\}$ sont des événements.

**1.** Trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ de 4 événements $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ incompatibles (ou disjoints) deux à deux tels que :

$$A = E_1 \cup E_2 \qquad B = E_1 \cup E_3 \qquad \Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

On notera désormais $[\![1,4]\!]$ l'ensemble des entiers $\{1,\ 2\ ,\ 3,\ 4\}$.

**2.** Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de $\Omega$ tel que :

$$\emptyset \in \mathscr{B} \qquad , \qquad \Omega \in \mathscr{B} \qquad , \qquad \mathscr{E} \in \mathscr{B}$$

$$i \in [\![1,4]\!] \complement_{E_i} \in \mathscr{B}$$

$$\text{et} \quad \forall i \in [\![1,4]\!], \quad \forall j \in [\![1,4]\!], \quad i \neq j, \quad E_i \cup E_j \in \mathscr{B}.$$

Montrer que $(\Omega,\ \mathscr{B})$ est un espace probabilisable.

**3.** On pose $p(A) = \dfrac{1}{2}, \qquad p(B) = \dfrac{1}{3}, \qquad p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
Calculer $p(E_1), \qquad p(E_2), \qquad p(E_3), \qquad p(E_4)$.
Montrer que la probabilité $p$ est parfaitement définie sur $(\Omega,\ \mathscr{B})$.

**4.** Soit $X$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega,\ \mathscr{P},\ p)$ telle que :

$$X(a) = 2, \quad X(b) = 3, \quad X(c) = -1, \quad X(d) = 0.$$

Quelles sont les valeurs de $X(e), \quad X(f), \quad X(g), \quad X(h)$ ?
Quelle est la loi de $X$ ? Quelle est sa fonction de répartition ?
Trouver l'espérance mathématique et la variance de $X$.

### PROBLÈME 306

./1975/rennesC/pb/texte

*Les parties A- et B- sont indépendantes.*

A- Dans cette première partie, $E_2$ est un plan vectoriel, $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

1. a)

b)

c)

2. a)

b)

Retour page 1

3. a)
   b)
   c) Si $f_0$ est l'application affine
   d) Appliquer ce qui précède à l'étude des deux suites de réels $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par leurs premiers termes, $x_0$, $y_0$, et par les relations de récurrence :

$$n \geqslant 1 \begin{cases} x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1} + 1 \\ y_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} - 2. \end{cases}$$

B- 1. a)
   b)
2. a)
   b) Montrer que
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \log u_{n-1} + 2$$

$u_0$ étant un réel supérieur ou égal à $a$, $a \in ]1\,; x_0[$.

   a) Montrer que si $u_0 > x_0$, tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $x_0$, et la suite $(u_n)$ est décroissante.
   Cas où $u_0 = x_0$.
   b) Montrer que, dans tous les cas, on a :

$$(\forall n \geqslant 1) \qquad \left(|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{a}|u_{n-1} - x_0|\right)$$

   en déduire la limite de la suite $(u_n)$ quand $n$ tend vers l'infini.

## LI. Rennes remplacement, série C

**Ex. 983.** ./1975/rennesCrem/exo-1/texte.tex

Déterminer toutes les solutions de l'équation $7x + 11y = 1$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

## LII. Rennes remplacement, série E

### PROBLÈME 307

./1975/renneserem/pb/texte

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est orienté et rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Tout point $M$ de $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère, est l'image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ;($\mathrm{i}^2 = -1$).
On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble dont les éléments sont les droites de $\mathscr{P}$, les cercles de $\mathscr{P}$ et $\emptyset$.

A) Soit $\alpha$, $\beta$, $gamma$, $\delta$ quatre nombres réels tels que

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \neq (0,\ 0,\ 0)$$

et (1) la relation

$$\alpha(x2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0. \tag{1}$$

a) Pour $\alpha = 0$, montrer que la relation (1) est une droite de $\mathscr{F}$.

b) Pour $\alpha \neq 0$ et $\beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha\delta \geqslant 0$, montrer que la relation (1) définit un cercle de $\mathscr{F}$ de centre $\omega\,(a\ ;\ b)$ et de rayon $R$. Calculer $a$, $b$ et $R$ en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$.

c) Montrer que tout élément de $\mathscr{F}$ est défini par la relation (1).

d) Soit $z$ un nombre complexe, $|z|$ son module, $\overline{z}$ son conjugué.



Retour page 1

a) Établir les relations

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}, \qquad x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \qquad y = \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{z}-z).$$

b) En utilisant ces relations, montrer que tout élément de l'ensemble $\mathscr{F}$ est défini par une relation de la forme (2)

$$Az.\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + D = 0 \tag{2}$$

dans laquelle $A$ et $D$ sont des réels et $B$ un nombre complexe.
Exprimer $A,\ B,\ D$ en fonction de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ puis $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ en fonction de $A,\ B,\ D$.
En déduire que cette relation (2) dans laquelle $(A,\ B) \neq (0,\ 0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ définit un élément de $\mathscr{F}$.

c) Montrer que, pour $A = 0$, la relation (2) définit une droite de $\mathscr{F}$ et, pour $A \neq 0$ et $B\overline{B} - AD \geqslant 0$, l'équation d'un cercle de $\mathscr{F}$ dont les coordonnées $(a\ ;\ b)$ du centre et le rayon $R$ sont

$$a = -\frac{B+\overline{B}}{2A}; \qquad b = \frac{\overline{B}-B}{2A}\mathrm{i}; \qquad R = \sqrt{\frac{B\overline{B}-AD}{A^2}}. \tag{3}$$

B) Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui, au point $M$ d'affixe, $z$ associe le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est donné par

$$z' = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})z - \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}).$$

a) Montrer que $f$ est une similitude directe plane. Déterminer son centre, son rapport et son angle. Définir, par une relation dans $\mathbb{C}$, l'application $f^{-1}$.

b) Soit $C$ un élément de $\mathscr{F}$ dont l'équation est donnée sous la forme (2). Déterminer, par une équation de même type, son image, $f(C) = C'$. En déduire que, si $C$ est une droite, $C'$ est une droite, si $C$ est un cercle, $C'$ est un cercle.

C) On désigne par $\mathscr{P}^{s}tar$ le plan $\mathscr{P}$ privé du point $O$ et $\mathscr{F}^{\star}$ l'ensemble dont les éléments sont ceux de $\mathscr{F}$ mais éventuellement privé du point $O$, c'est-à-dire

— si $C \in \mathscr{F}$ et $O \in C$, $\mathscr{C}^{\star} = C - \{O\}$ ;

— si $C \in \mathscr{F}$ et $O \notin C$, $\mathscr{C}^{\star} = C$.

Soit $I$ l'application de $\mathscr{P}^{s}tar$ vers $\mathscr{P}^{\star}$ qui, au point $M$ d'affixe, $z$ associe le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est donné par

$$z' = \frac{2}{\overline{z}}.$$

a) Montrer que $I$ est bijective et déterminer $I^{-1}$.
Que peut-on en conclure ?
Démontrer que, pour tout point $M$ de $\mathscr{P}^{\star}$, $O,\ M,\ M'$ sont alignés.
Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{om'}$.
Quel est l'ensemble des points invariants par $I$ ?
$I$ est-elle une application affine ? Justifier la réponse.

b) Soit $(\Gamma)$ le cercle de $\mathscr{F}$ de centre $\omega(0\ ;\ 1)$ et de rayon 1. Déterminer, en utilisant les relations (3), l'équation de $(\Gamma)$ sous la forme (2).
Déterminer alors l'ensemble $(\Gamma'^{\star})$ image de $(\Gamma\star)$ par $I$. Donner la nature de $(\Gamma')$.

c) Soit $(\mathscr{D})$ la droite affine, élément de $\mathscr{F}$, qui contient les points d'affixes $z_1 = 2$ et $z_2 = 2\mathrm{i}$. Déterminer son équations sous la forme (2), puis $\mathscr{D}'^{\star} = I(\mathscr{D}^{\star})$. Donner la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$ et les éléments caractéristiques qui le définissent.

Retour page 1

# LIII. Rouen, série C

Ex. 984. ./1975/rouenC/exo-1/texte.tex

Soit $p$ un entier naturel premier.

**1.** Démontrer que si $k$ est un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, le nombre $\mathrm{C}_p^k$ est divisible par $p$.

**2.** En déduire que, quel que soit l'entier $n$, le nombre $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par $p$.

**3.** Démontrer alors le petit théorème de FERMAT, c'est à dire que $n^p \equiv n$ $(modulo\ p)$.

Ex. 985. ./1975/rouenC/exo-2/texte.tex

Soit $p$ un entier naturel premier.

1. Démontrer que si $k$ est un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

le nombre $\mathrm{C}_p^k$ est divisible par $p$.

En déduire que, quel que soit l'entier $n$,

le nombre $(n+1)^p - n^p - 1$ est divisible par $p$.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel $n$,

$$n^p \equiv n\ [p].$$

(On pourra faire un raisonnement par récurrence sur $n$.)
Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$ ?

# LIV. Rouen remplacement, série C

Ex. 986. ./1975/rouencrem/exo-1/texte.tex

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x \cos x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 987. ./1975/rouencrem/exo-2/texte.tex

**1.** Donner la factorisation du polynôme

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91}$$

dans l'un ou l'autre des anneaux $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$.

**2.** Résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}.$$

**3.** Résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{6}x - \dot{91} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}.$$

# LV. Strasbourg, série C

Ex. 988. ./1975/strasbourgC/exo-1/texte.tex

**1.** $x$ et $y$ étant deux entiers relatifs, déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par $4$ du nombre $x^2 - 3y^2$.

**2.** Existe-t-il trois entiers relatifs $x, y, z$ tels que $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$ ?

Retour page 1

**Ex. 989.** ./1975/strasbourgC/exo-2/texte.tex

**1.** $x$ et $y$ étant deux entiers relatifs, déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne par 4 du nombre $x^2 - 3y^2$.

**2.** Existe-t-il trois entiers relatifs $x$, $y$, $z$ tels que :

$$x^2 - 3y^2 + 4z = 3 \ ?$$

## LVI. Tel Aviv, série C

**Ex. 990.** ./1975/telavivC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan 4x + \tan x = 0$, $x$ étant l'inconnue.

**2.** Donner l'expression de $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$, puis celle de $\tan 4x$ en fonction de $\tan x$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y^4 - 10y^2 + 5 = 0$.

**4.** En utilisant les trois questions précédentes, donner les valeurs numériques approchées de $\tan\left(k\dfrac{\pi}{5}\right)$, pour $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

**Ex. 991.** ./1975/telavivC/exo-2/texte.tex

**1.** Donner la définition de la fonction logarithme népérien.

**2.** Montrer que, quels que soient les réels $a$ et $b$ tels que $0 < a < b$, on a

$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{a}(b-a).$$

**3.** Montrer que pour tout entier naturel positif $n$ on a :

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

(Le symbole $\log$ désigne la logarithme népérien.)

**4.** Déduire de ce qui précède que

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

**5.** Donner une valeur de $n$ pour laquelle :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 10.$$

## LVII. Togo, série C

**Ex. 992.** ./1975/togoC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, on considère l'application $S$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ fait coorewspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par

$$z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z}\mathrm{i},$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$.
Démontrer que $S$ est un similitude inverse, dont on précisera le rapport $k$, le centre $C$ et l'axe $(D)$.

Ex. 993. ./1975/togoC/exo-2/texte.tex

1. Déterminer une primitive de la fonction numérique de la variable réelle $f$ définie par

$$f(x) = x\log\frac{1}{x},$$

où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^star}$ définie par

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout entier naturel non nul $n$.

Déterminer $u_n$ pour tout entier naturel non nul $n$ et la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Problème 308

./1975/togoC/pb/texte

Soit $P$ le plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormé directe $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $f$ et $g$ les endomorphismes de $P$ ayant pour matrices respectives dans cette base

$$M_f = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_g = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A) 1. Donner dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ les matrices des endomorphismes $f^2$, $f^3$ et $f^n$ pour tout entier naturel non nul $n$.

2. Démontrer que $f$ est bijectif et déterminer la matrice de $f^{-1}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

3. Reprendre les questions précédentes avec $g$.

4. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls $(p,\ q)$ tels que l'endomorphisme $f^p + g^q$ ne soit pas bijectif. Donner pour l'un des couples trouvés, le noyau et l'image de $f^p + g^q$.

B) Soit $E$ l'ensemble des endomorphismes de $P$ de la forme $af + bg$ ($a$ et $b$ réels).

1. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathscr{L}(P),\ +,\ .)$ des endomorphismes de $P$. Donner une base de $E$.

2. Démontrer que tout endomorphisme non nul de $E$ est bijectif.

3. Reconnaître les rotations vectorielles de $E$.

4. Y a-t-il des symétries vectorielles dans $E$ ? Justifier la réponse.

5. Donner la matrice de $h = f + g$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Donner les matrices de $h^2$, de $h^3$ et en déduire par récurrence celle de $h^n$, pour tout entier naturel $n$ non nul.

C) Soit $F$ l'ensemble des matrices $M$ obtenues comme produit des matrices $A$ ou $B$, $A$ et $B$ étant définies au début du problème.
(Exemple : $M = AABBBAB$ est un élément de $F$.)
Une matrice $M$ appartient donc à $F$ si, et seulement si, $M$ peut s'écrire sous la forme

$$M = C_1C_2 \dots C_i \dots C_n,$$

avec $n$, élément de $\mathbb{N}^\star$, et $C_i = A$ ou $C_i = B$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $F$.

On admettra que $a,\ b,\ c$ et $d$ sont des entiers naturels.

1. Calculer le déterminant de $M$.
Démontrer que, si $a,\ b,\ c$ et $d$ sont tous non nuls, $a$ et $b$ d'une part et $c$ et $d$ d'autre part sont premiers entre eux.
*Application :* $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ est-elle un élément de $F$ ?

2. Démontrer par récurrence sur le nombre de facteurs de $M$ que :
   - Si $C_1 = A$, alors $M$ est telle que $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$ ;
   - Si $C_1 = B$, alors $M$ est telle que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.

   *Application :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle un élément de $F$ ?
3. Déduire de la question précédente que la décomposition de $M$ en produit de $C_i$ est unique.

   *Application :* Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer en décomposant $M$en produit de $C_i$ que $M$ est un élément de $F$.

## LVIII. Toulouse, série C

Ex. 994. ./1975/toulouseC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de $400$.

**2.** Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels strictement positifs, d leur pgcd.

Trouver une condition nécessaire et suffisante liant les nombres $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ pour que $d$ soit égal à $a - b$.

**3.** Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs dont le pgcd est égal à la différence de deux entiers et dont le ppcm est $400$.

## LIX. Vietnam remplacement, série C

Ex. 995. ./1975/vietnamCrem/exo-1/texte.tex

1. Déterminer les trois nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que l'on ait, quel que soit le réel $x$ :

$$8x^4 + 6x^2 + 2 = (2x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

2. En déduire, qu'en base neuf, $\overline{80602}_{(9)}$ est divisible par $\overline{211}_{(9)}$ et écrire, dans cette base, le quotient du premier nombre par le second.



Retour page 1

# Chapitre XVIII

# 1976.

## Sommaire

# I. Aix-Marseille, série C

Ex. 996. ./1976/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ par 7 (on pourra remarquer que $851 \equiv 4\,[7]$).
3. On considère le nombre $B$ qui s'écrit $B = \overline{2103211}^4$. déterminer dans le système décimal le reste de la division euclidienne de $B$ par 7.

Ex. 997. ./1976/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.
Montrer que $(C)$ admet un centre de symétrie.
$x$ étant un réel strictement négatif, déterminer

$$\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

et étudier sa limite quand $x$ tend vers $-\infty$.

## Problème 309

./1976/aixmarseilleC/pb/texte

Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- 1. On considère la courbe $(H)$ d'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1. \qquad (1)$$

Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.

Retour page 1

2. On considère dans le plan (P) le mouvement du point $M(x\ ;\ y)$ tel que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cos(2t)} \\ & \qquad \text{où} \quad t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[ \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(2t) \end{aligned}$$

a) Montrer que la trajectoire (T) est une partie de $(H)$ que l'on précisera.

b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Vérifier que le mouvement est accéléré, c'est à dire que la fonction $t \longmapsto \left\|\vec{V}(t)\right\|$ est croissante.

B- On appelle E l'ensemble des applications affines F de (P) dans (P) telles que $F(O) = O$ et $F(H) = H$. cette dernière condition exprimant que la courbe (H) est globalement invariante par F.

On appelle $f$ l'application linéaire associée à F de matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. a) Quelle peut-être, par une application affine non bijective, l'image du plan (P) ?
   En déduire que tout élément de E est une bijection.
   b) Montrer que (E, $\circ$) est un groupe.
2. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ tels que $M' = F(M)$. On aura

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy. \end{cases}$$

Sachant que F$\in$ E si et seulement si $\mathrm{F}^{-1} \in$E, écrire l'équation de $\mathrm{F}^{-1}(H)$ en fonction de $(a,\ b,\ c,\ d)$. En déduire que

$$\mathrm{F}^{-1}(H) = H \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ c^2 - 2d^2 = 1 \\ ac - 2bd = 0. \end{cases}$$

On pourra utiliser les points $A(1\ ;\ 0)$, $B\left(\sqrt{3}\ ;\ 1\right)$, $C\left(-\sqrt{3}\ ;\ 1\right)$ points appartenant à la courbe $(H)$.

3. En déduire que F est élément de E si et seulement si la matrice de $f$ est de la forme $\begin{bmatrix} a & 2\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{bmatrix}$ avec $\epsilon \in \{-1,\ +1\}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$.

C- Soit E' le sous-ensemble des applications F de E telles que $\epsilon = +1$.

1. Montrer que E' est stable pour $\circ$.
2. Soit (L) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad \text{avec} \quad (x,\ y) \in \mathbb{N}^2.$$

Vérifier que $M_0(1\ ;\ 0)$ et $M_1(3\ ;\ 2)$ appartiennent à (L).
Soit $\mathrm{F}_1$ l'application affine de E' telle que $a = 3$ et $b = 2$.
On considère la suite de points $M_n(x_n\ ;\ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad M_{n+1} = \mathrm{F}_1(M_n).$$

Montrer que $M_n = \mathrm{F}_1^n(M_0)$ où $\mathrm{F}_1^2 = \mathrm{F}_1 \circ \mathrm{F}_1$ et $\mathrm{F}_1^n = \mathrm{F}_1^{n-1} \circ \mathrm{F}_1$.
Vérifier que $M_n$ est un élément de (L).

3. Établir par récurrence que

$$\begin{aligned} (3 + 2\sqrt{2})^n &= x_n + y_n\sqrt{2} \\ (3 - 2\sqrt{2})^n &= x_n - y_n\sqrt{2} \end{aligned}$$

quel que soit $n$ élément de $\mathbb{N}$.
En déduire $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.



Retour page 1

4. On appelle (T) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ de $(H)$ pour lesquels $x$ et $y$ appartiennent à $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $A_n$ l'ensemble défini par :

$$A_n = \{M\ /\ M \in (\mathrm{T}),\ x_n \leqslant x < x_{n+1}\}.$$

Montrer que $A_{n+1}$ est l'image par $\mathrm{F}_1$ de $A_n$.
En déduire

$$M \in A_n \Rightarrow \left[\mathrm{F}_1^{-1}\right]^n (M) \in A_0.$$

Montrer que

$$M \in (\mathrm{L}) \cap A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{F}_1^{-1}(M) \in (\mathrm{L}).$$

En déduire que tout point de (L) est un élément de la suite $(M_n)$.

## II. Aix-Marseille remplacement, série C

**Ex. 998.** ./1976/aixmarseillecrem/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$. Étudier les variations de la fonction et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé.

**2.** Soit la fonction numérique $F$ définie par $F(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.
Calculer $F'(x)$ et en déduire l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$ (avec $\alpha > 2$).

**Ex. 999.** ./1976/aixmarseillecrem/exo-2/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes l'équation :

$$Z^2 - (3\mathrm{i} - 1)Z - 4 = 0.$$

On désigne par $Z'$ et $Z''$ les racines de cette équation. On pose $Z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec $x' > 0$ et $Z'' = x'' + \mathrm{i}y''$ avec $x'' < 0$.
Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de sens positif, on désigne par $M'$ et $M'$ les images respectives des nombres $Z'$ et $Z''$. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $S$ de centre $O$ telle que $S(M') = M''$.

### Problème 310

./1976/aixmarseillecrem/pb/texte

Soit E un plan vectoriel euclidien réel dont $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
On désigne par $\mathscr{E}$ un plan affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que

$$\begin{cases} 1.\ f(A) = A_1 \quad \text{avec } A(1\ ;\ -2) \quad \text{et} \quad A_1(2\ ;\ 4). \\ 2.\ \text{L'application linéaire } \varphi \text{ associée à } f \text{ a pour matrice dans la base } (\vec{\imath},\ \vec{\jmath}) \\ \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de $\mathscr{E}$ ; $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ son image par $f$ ; et $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ l'image de $M_1$ par $f$.

A- 1. Établir les relations

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y_1 = 3x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

2. a) Montrer que $f$ est bijective.

b) Soit $D$ une droite quelconque de $\mathscr{E}$ ; $f(D)$ est la droite transformée de $D$ par $f$. $D$ et $f(D$ peuvent-elles être parallèles ?

c) En déduire que pour point $M \in \mathscr{E}$ tel que $f(M) \neq M$, les points $M$, $M_1$ et $M_2$ ne sont pas alignés.



Retour page 1

d) Déterminer par son équation l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{E}$ tels que $K(1\ ;\ 0)$, $M$ et $M_1$ soient alignés. Donner la nature de la courbe $(\mathscr{C})$ et la construire.

3. Calculer les coordonnées $x'$ et $y'$ du centre de gravité $G$ des points $M,\ M_1,\ M_2$ affectés d'un même coefficient non nul ($G$ est isobarycentre des points $M,\ M_1,\ M_2$).
Vérifier que $G$ est indépendant de $M$ et montrer que $G$ est le seul point invariant par $f$.
En déduire que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application identique de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire : $f^3 = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$.

B- Soit $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications linéaires de E vers E. On pose

$$(\mathscr{J}) = \{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) | \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}\}$$

$\mathrm{I}_{\mathrm{E}}$ désignant l'application identique de E. On posera de même $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. a) Montrer que $\mathrm{I}_{\mathrm{E}} \in (\mathscr{J})$.
   b) Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que $\varphi^2 = -\varphi - \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$. Montrer que $\varphi \in (\mathscr{J})$. La réciproque est-elle vraie ?
   c) Démontrer que toute application de $(\mathscr{J})$ est bijective.
2. On considère une application $\varphi$ telle que $\varphi^2 = -\varphi - \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$.
   a) Montrer que $(\varphi\ ;\ \mathrm{I}_{\mathrm{E}})$ est une partie libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   b) On pose $\theta = \alpha\varphi + \beta\mathrm{I}_{\mathrm{E}}$, $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que $\theta^2 = \theta \circ \theta$ est une combinaison linéaire de $\varphi$ et $\mathrm{I}_{\mathrm{E}}$. Calculer $\theta^3$.
   En déduire que $\theta$ appartient à $(\mathscr{J})$ si, et seulement si

$$\theta = \mathrm{I}_{\mathrm{E}} \qquad \text{ou} \qquad \theta = \varphi \qquad \text{ou} \qquad \theta = \varphi^2.$$

3. Soit $\varphi$ un élément de $(\mathscr{J})$ tel qu'il existe un vecteur non nul $\vec{V} \in$E tel que $\varphi(\vec{V}) = \vec{V}$. Soit $\vec{V'}$ non colinéaire à $\vec{V}$, $\vec{V'} \in$E.
   a) Justifier que la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{V},\ \vec{V'})$est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
   b) Calculer la matrice de $\varphi^3$ dans cette base, en déduire que $\varphi = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$.
4. *Application :* soit $f$ une application affine quelconque avec $f \neq \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$ et $f^3 = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$. Soit $\varphi$ l'application linéaire associée à $f$.
   a) Montrer que $\varphi \in (\mathscr{J})$ et $\varphi \neq \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$.
   b) Montrer que $\Omega$ (isobarycentre de $M,\ f(M),\ f^2(M)$) est un point invariant par $f$.
   c) Montrer que $\Omega$ est le seul point invariant par $f$.

## III. Aix-Marseille & Nice, série E

**Ex. 1000.** ./1976/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

**2.** Construire sa courbe représentative $(C)$ dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**3.** Calculer l'aire du domaine $E$, ensemble des points $M(x,\ y)$ défini par :

$$E = \{\ (x,\ y)\ |\ 1 \leq x \leq \alpha \quad 0 \leq y \leq f(x)\ \} \qquad \alpha \geq 1$$

Calculer la limite de cette aire lorsque $\alpha$ augmente indéfiniment.

Retour page 1

**Ex. 1001.** ./1976/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes $Ox, Oy$ et $Oz$. Le plan $xOy$ est le plan horizontal et le plan $yOz$ est le plan frontal. On prend $1cm$ comme unité de longueur. Soit le point $A(6;2;3)$ et la droite $D$ définie par les équations :

$$x=1+3\rho \qquad y=7+3\rho \qquad z=3+2\rho \qquad \rho\in\mathbb{R}$$

**1.** Faire l'épure de la droite $(\Delta)$ verticale passant par $A$ et de la droite $(D)$.

**2.** Représenter la perpendiculaire commune à la droite $(\Delta)$ et à la droite $(D)$.

**3.** Indiquer la plus courte distance de $(\Delta)$ à $(D)$. La calculer.

## Problème 311

./1976/aixmarseilleE/pb/texte

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $f$ l'application affine de ce plan dans lui-même qui, à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x'-a = x\ (1+\cos\theta)\ -y \quad \sin\theta \\ y'-b = x \quad \sin\theta \quad +y\ (1+\cos\theta) \end{cases}$$

$\theta$ est un nombre réel tel que $-\pi<\theta\leq+\pi$, et $a$ et $b$ sont des nombres réels donnés.

I- 1° Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$ est le composé d'une rotation vectorielle d'angle $\theta/2$ et d'une homothétie vectorielle.

2° Calculer les coordonnées du point invariant $I$ par $f$. Quelle est la nature de $f$ ? Caractériser cette application.

3° Montrer que : $\left\|\overrightarrow{MI}||\right\| = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$.

4° $f$ peut-elle être une rotation ?

5° Si $\theta$ varie, $a$ et $b$ étant fixés, quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ?

II- 1° On supposer $a=b=0$ et $\theta\neq0$, $\theta$ fixé. Quel est l'ensemble des points $M$ tels que la droite $(MM')$ contienne le point $A(2\ ;0)$ ? Quel est l'ensemble des points $M'$ ?

2° Faire une figure et retrouver les résultats de la question 1. en utilisant les propriétés géométriques de l'application $f$.

III- Á tout point $M(x,\ y)$ on associe dans le plan complexe son affixe $z=x+iy$. Soit deux cercles $(C)$ et $(C')$ passant par $O$ et $A(2\ ;\ 0)$, $\lambda$ et $\mu$ les ordonnées de leurs centres respectifs . $\lambda\in\mathbb{R}, \mu\in\mathbb{R}$ et $\lambda\neq\mu$.

1° Écrire les équations de ces cercles. Calculer leurs rayons.

2° Une droite de coefficient directeur $m$ ($m\in\mathbb{R}$) contenant $A$ coupe $(C)$ en $M$ et $(C')$ en $M'$, $M$ et $M'$ distincts de $A$ en général.

Déterminer les couples de coordonnées $(x,\ y)$ et $(x',\ y')$ de $M$ et $M'$. $z$ et $z'$ étant les affixes respectives de $M$ et $M'$, calculer $z'/z$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$. En déduire que $(C')$ est l'image de $(C)$ par une similitude que l'on caractérisera en fonction de $\lambda$ et de $\mu$.

# IV. Aix-Marseille, Montpellier & Nice remplacement, série E

**Ex. 1002.** ./1976/aixmarseilleErem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$, définie par :

$$f\ :\ x\longmapsto\frac{\text{Log}\ x}{x}$$

(où Log $x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

1) Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Déterminer les fonctions primitives de $f$ et calculer l'aire du domaine plan ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$1\leqslant x\leqslant4 \qquad \text{et} \qquad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$



Retour page 1

**Ex. 1003.** ./1976/aixmarseilleErem/exo-2/texte.tex

L'espace affine orienté est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.
Les plans $(x'Ox,\ y'Oy)$ et $(y'Oy,\ z'Oz)$ sont respectivement : le plan horizontal et le plan frontal de projection.
Sur l'épure, le point $O$ sera placé au centre de la feuille, l'axe $y'Oy$ sera parallèle au petit côté de la feuille.
On donne les points :

$$A(6,4,2) \quad B(4,3,1) \quad C(2,7,5).$$

Soit $(\mathcal{P})$ le plan contenant ces trois points.

1) Déterminer les projections frontales et horizontales des points $A$, $B$ et $C$. Déterminer les traces du plan $(\mathcal{P})$. Que peut-on en conclure ?
2) Représenter à l'aide d'un rabattement, le triangle $ABC$ en « vraie grandeur ».

## Problème 312

./1976/aixmarseilleErem/pb/texte

Le plan affine euclidien orienté $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
On considère la droite $(\Delta)$ de $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x+1$ et le point $A$ de $(\mathcal{P})$ de coordonnées $(0,3)$.
Soit $s_\Delta$ la symétrie orthogonale de $(\mathcal{P})$ d'axe $(\Delta)$ et $\Sigma$ la similitude de $(\mathcal{P})$ de centre $A$, d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $k = 2$.

**Partie A-**

1) Exprimer en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $M$ :
   a) Les coordonnées $x_1$ $y_1$ du point $M_1 = s_\Delta(M)$.
   b) Les coordonnées $x_2$ $y_2$ du point $M_2 = \Sigma(M)$.

2) On considère l'application $f = \Sigma \circ s_\Delta(M)$.
   Montrer que les coordonnées $x'$ $y'$ de $f(M)$ sont liées à celles de $M$ par la relation :

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3}x + y + (2\sqrt{3}-1) \\ y' = x + \sqrt{3}y - (\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

3) Soit $g$ l'application définie par $g = s_\Delta \circ \Sigma$.
   a) Comparer $f$ et $g$.
   b) Reconnaitre les applications $v = f \circ g$ et $w = v \circ v \circ v$ (On évitera une démonstration analytique).
4) Soit $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $k = 2$.
   a) Déterminer analytiquement l'application $u$ telle que $f = u \circ h$.
   b) Montrer que $u$ peut être considérée comme la composée d'une symétrie d'axe $(D)$ contenant $A$ et d'une translation que l'on déterminera.
   c) Retrouver géométriquement le résultat de 4b.

**Partie B-**

À tout point $M(x,y)$ de $(\mathcal{P})$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ($z$ affixe du point $M$).

1) Déterminer les applications $\varphi_1, \varphi_2$ et $\varphi$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telles que :
   a) $z \xmapsto{\varphi_1} z_1$ (affixe de $M_1 = s_\Delta(M)$)
   b) $z \xmapsto{\varphi_2} z_2$ (affixe de $M_2 = \Sigma(M)$)
   c) $z \xmapsto{\varphi} z'$ (affixe de $M' = f(M)$).
2) Retrouver les résultats de Ⓐ 1 et 2.
3) Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points $M$ de $(\mathcal{P})$ d'affixe $z$ tels que :

$$\left[\frac{z-3}{z-3i}\right] \qquad \text{soit un imaginaire pur non nul.}$$

   Caractériser $(\mathcal{C})$ et déterminer $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par $f$.

Retour page 1

# V. Amiens, série C

**Ex. 1004.** ./1976/amiensC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ si } x \leqslant 0 \qquad \text{et} \quad f(x) = x^2 \ln x \text{ si } x > 0.$$

**1.** Etudier la continuité de $f$.

**2.** Etudier la dérivabilité de $f$.

**3.** Etudier le sens de variation de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**4.** Calculer l'aire $A_\alpha$ du domaine plan délimité par la courbe $(C)$ et les droites respectives : $y = -1$, $x = \alpha$ et $x = 1$ avec $0 < \alpha < 1$.
Quelle est la limite $A$ de $A_\alpha$ lorsque $\alpha$ tend vers $0$ ?

**Ex. 1005.** ./1976/amiensC/exo-2/texte.tex

Un paquet de treize cartes à jouer comprend six as, trois rois et quatre dames.
Les valeurs des cartes sont les suivantes :

— un as quelconque : +5

— un roi quelconque : +2

— une dame quelconque : -1

L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On suppose les tirages équiprobables.

**1.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**2.** On considère la variable aléatoire $X$ qui à tout tirage fait correspondre la somme des valeurs des cartes tirées.

a) Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

b) Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

## Problème 313

./1976/amiensC/pb/texte

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
On note $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\left[\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2\right] \quad \left[\forall (a',\ b') \in \mathbb{R}^2\right]$$

$$(a,\ b) \star (a',\ b') = (aa' + \alpha bb',\ ab' + a'b)$$

où $\alpha$ est un réel donné.
On pose $\overline{\gamma} = (1,\ 0)$, $\quad \overline{w} = (0,\ 1)$, $\quad \overline{0} = (0,\ 0)$.
$\mathbb{N}^\star$ désigne $\mathbb{N} - \{0\}$.

**1.** a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former $A^2$. Montrer que $A^2 - 2aA + a^2 I = O$. Pour tout $n$, exprimer $A^n$ en fonction de $a$, $b$ et $n$. Montrer qu'il existe $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ tel que $A^2 = O$. Que confirme ce dernier résultat ?

b) Soit $u = (a, b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a) pour exprimer $u^n$ en fonction de $a, b$, et $n$.

c) Résoudre dans $(\mathbb{R}^2,\ +\star)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \overline{0} \qquad u^2 + u + \overline{\gamma} = \overline{0}$$

A- 1. Montrer que, pour tout $\alpha$ réel, $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star)$ est un anneau commutatif unitaire.

2. Préciser l'ensemble des réels $\alpha$ tels que pour chacun d'eux $(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star)$ soit un corps.

Retour page 1

3. Soit $\mathcal{M}_\alpha$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha \text{ est un réel donné}$$

On note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\mathcal{M}_\alpha, +, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +, \star)$.

4. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 0$.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former $A^2$. Montrer que $A^2 - 2aA + a^2 I = O$. Pour tout $n$, exprimer $A^n$ en fonction de $a, b$ et $n$. Montrer qu'il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $A^2 = O$. Que confirme ce dernier résultat ?

b) Soit $u = (a, b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a) pour exprimer $u^n$ en fonction de $a, b$, et $n$.

c) Résoudre dans $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \overline{0} \qquad u^2 + u + \overline{\gamma} = \overline{0}$$

d) Résoudre dans $(\mathcal{M}_0, +, \star)$ les équations :

$$A^2 + 2A = 0$$

$$A^2 + A + I = 0.$$

5. On suppose $\alpha = \dfrac{4}{9}$. Déterminer les éléments $(a, b)$ de $\mathbb{R}^2 - \{\overline{0}\}$ pour lesquels l'équation :

$$(a, b) \star (x, y) = \overline{0}$$

admet, dans $\mathbb{R}^2$, des solutions $(x, y)$ différentes de $\overline{0}$.

B- Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée B= $(\vec{i}, \vec{j})$. On appelle $F_\alpha$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{E}$ dont la matrice dans B appartient à $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha$ étant donné.

1. Dans cette question on considère le cas où $\alpha = 1$.

a) Déterminer l'ensemble P des éléments de $F_1$ qui sont des projections vectorielles de $\mathscr{E}$ sur des droites vectorielles.
Caractériser avec précision chacun des éléments de P. Déterminer l'ensemble J des éléments de $F_1$ qui sont des involutions de $\mathscr{E}$.
Caractériser avec précision chaque élément de J.

b) Montrer que l'ensemble J muni de la loi $\circ$ de compositions des applications est un groupe commutatif. (On pourra établir la table de Pythagore de la loi ).

2. On considère maintenant le cas $\alpha = -1$.

a) Quels sont les éléments de $F_{-1}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ ?

b) Soit $\varphi$ un élément de $F_{-1}$ défini par $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On désigne par E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathscr{E}$, et par $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de E.
Soit $f$ l'application affine de E dans e associé à $\varphi$ telle que $f(0) = 0$ et $(\Gamma)$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient l'équation :

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0.$$

Déterminer une équation de $f(\Gamma)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
En déduire la nature de $f(\Gamma)$ et représenter graphiquement cet ensemble.

c) En utilisant la définition bifocale d'une conique à centre, montrer que $(\Gamma)$ est une ellipse que l'on tracera dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Retour page 1

d) On considère dans le plan E rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le mouvement du point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ définies par l'application suivnate de $\mathbb{R}$ vers E :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2\cos 2t + \sin 2t) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t - 2\cos 2t) \end{cases}$$

Montrer que le mouvement est périodique.
Trouver une relation, indépendante de $t$, liant $x$ et $y$. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
Préciser sur une période les intervalles de temps où le mouvement est accéléré ou retardé.

## VI. Amiens remplacement, série C

**Ex. 1006.** ./1976/amiensCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre l'équation $X^2 + X = 0$

a) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

b) dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**2.** Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on considère l'équation $X^2 + X - \dot{m} = \dot{0}$. Discuter suivant les valeurs de $\dot{m}$, élément de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, le nombre de solutions de cette équation.

**Ex. 1007.** ./1976/amiensCrem/exo-2/texte.tex

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ directe.
Soit $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \vec{k}$.

**1.** Déterminer la nature de l'isométrie vectorielle $\varphi$ telle que $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ ait pour image $(\vec{i},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
En déduire que $(\vec{i},\ \vec{u},\ \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

**2.** On considère la rotation vectorielle $r$ d'axe $\Delta$, orienté par $\vec{v}$ et d'angle de mesure $\theta$.

a) Déterminer $r(\vec{i})$, $r(\vec{u})$, $r(\vec{u})$ dans la base $(\vec{i},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

b) Déterminer $r(\vec{i})$, $r(\vec{\jmath})$, $r(\vec{k})$ dans la base $(\vec{i},\ \vec{u},\ \vec{v})$ puis dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

c) En déduire les composantes $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ de $\vec{w}' = r(\vec{w})$ en fonction des composantes $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $\vec{w}$ dans cette même base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

**Problème 314** ./1976/amiensCrem/pb/texte

Dans tout le problème, le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le plan vectoriel euclidien de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est désigné par $\pi$.
Les parties I et II sont totalement indépendantes.
Une table de valeurs de la fonction exponentielle de base e est donnée en annexe pour faciliter les calculs.

I- Soit $f$ l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \text{ est différent de 0 et de 1.} \end{cases}$$

1. Étudier si les restrictions de $f$ aux intervalles $]-\infty\,;0[$, $]]0\,;1[$, $]1\,;+\infty[$ admettent des limites aux bornes de ces intervalles.
Étudier la variation de $f$ (on pourra utiliser le tableau annexe pour calculer des valeurs approchées de $f$ aux points où la fonction dérivée s'annule).

2. Montrer que, pour tout réel $u$ non nul, on a :

$$\mathrm{e}^u - 1 > u.$$

En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.



Retour page 1

3. Soient les applications $g$ et $h$ de $\mathbb{R}-\{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = f(x) - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
$$h(x) = x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1).$$

a) Montrer que les fonctions $g$, $h$, $g+h$ admettent des limites que l'on calculera quand $x$ tend vers $+\infty$ ou quand $x$ tend vers $-\infty$. En déduire que la courbe C représentative de $f$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet la droite $\Delta$, dont une équation est $y = x+2$ comme asymptote.

b) Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llll} (\forall x \in ]1\,;+\infty[), & g(x) > 1 & \text{et} & h(x) > 1, \\ (\forall x \in ]-\infty\,;0[), & g(x) < 1 & \text{et} & h(x) < 1. \end{array}$$

En déduire la position de C par rapport à $\Delta$.

4. Tracer C. Préciser la tangente à C au point $A$ d'abscisse $0{,}5$.

II- $a$ est un réel donné.
$K_a$, $T_a$ désignent des applications affines de P dans P.
$k_a$, $t_a$ sont les endomorphismes de $\pi$ associés respectivement aux applications affines précédentes.
L'application $K_a$ fait correspondre à tout point $M(x\ ;\ y)$ de P le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ de P tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + a \\ y' - ax + (3-a)y + 2. \end{cases}$$

$S_a$ est la symétrie centrale de P, de centre $I_a$ point défini ci-dessous en II1 .

1. Montrer que l'application $K_a$ admet toujours au moins un point invariant. Quel est l'ensemble E des valeurs de $a$ pour lesquelles $K_a$ admet un seul point invariant $I_a$ ?
2. On suppose $a \in E$. Montrer que $K_a \circ S_a = S_a \circ K_a$. On désignera par $T_a$ la transformation composée précédente.
   Dans la cas où $a = 0$, déterminer $t_0(\vec{i})$, $t_0(\vec{j})$. Exprimer, dans le repère $(I_0,\ \vec{i},\ \vec{j})$, les coordonnées $(X_0\ ;\ Y_0)$ de $M_0 = T_0(M)$ en fonction des coordonnées $(x0\ ;\ y0)$ de $M$ dans ce même repère. En déduire une construction simple de l'image $M'$ de $M$ par $K_0$.
3. On suppose $a = 3$. Montrer que $T_3$ est une projection que l'on définira avec précision.
4. On suppose $a = 2$. $K_2$ est alors une symétrie par rapport à une droite D suivant une direction S. Préciser la droite D et la direction S. $m$ étant un réel donné, déterminer $k_2(\vec{i} + m\vec{j})$.

III- Soit$\Gamma$ l'ensemble des transformés des points de C par la symétrie $K_2$.

1. Montre rque $\Gamma$ est la courbe représentative de l'application $\psi$ de $\mathbb{R} - \{1\rangle$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(x) = 2x - 2 + f(2-x).$$

2. Soit $m$ le coefficient directeur de la tangente à C en l'un de ses points $M(x\ ;\ f(x))$, $x \in \mathbb{R} - \langle 1\rangle$. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\Gamma$ en $M' = K_2(M)$ ?
3. Préciser les asymptotes de $\Gamma$. Sans étudier la variation de $\psi$, tracer la courbe $\Gamma$ ; $\Gamma$ et C seront dessinées dans le même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

*Annexe :* Tableau donnant des valeurs approchées de $\mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^{-x}$ pour différentes valeurs de $x$.

| $x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^{-x}$ |
|---|---|---|
| 0,100 | 1,1052 | 0,9048 |
| 0,200 | 1,2214 | 0,8187 |
| 0,250 | 1,2840 | 0,7788 |
| 0,382 | 1,4652 | 0,6825 |
| 0,500 | 1,6487 | 0,6065 |
| 1,000 | 2,7183 | 0,3679 |
| 2,000 | 7,2891 | 0,1353 |
| 2,500 | 12,182 | 0,0821 |
| 2,618 | 13,962 | 0,0716 |



Retour page 1

# VII. Amiens, série E

**Ex. 1008.** ./1976/amiensE/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ l'application de l'intervalle $]1;5[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \log_5 \frac{1-x}{x-5}$$

où $\log_5$ désigne la fonction logarithmique de base 5. 'Etudier $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé (on ne démontrera ni l'existence d'un point d'inflexion, ni l'existence d'un centre de symétrie).

**2.** Montrer que $f$ est bijective. Étudier les propriétés de l'application $g$ réciproque de $f$ : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, sens de variation.

**3.** Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

**4.** Définir $g$ et tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le même repère que celui où $a$ été tracée $(C)$.

**Ex. 1009.** ./1976/amiensE/exo-2/texte.tex

Voir exercice 1005 série C Amiens.

**Problème 315** ./1976/amiensE/pb/texte

Voir problème 313 série C Amiens.

# VIII. Amiens remplacement, série E

**Ex. 1010.** ./1976/amienserem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans le corps des complexes les équations :

a) $Z^2 + 4Z + 16 = ;$

b) $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.

**Ex. 1011.** ./1976/amienserem/exo-2/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère un point mobile $M$ dont les coordonnées s'expriment en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos t \end{cases}$$

**1.** Soient $B$ et $C$ les positions respectives de $M$ aux dates $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.
Calculer les coordonnées de $B$ et $C$.
Soit $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{I} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{J} = \overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Montrer que $(A,\ \vec{I},\ \vec{J})$ est un repère orthonormé du plan défini par les trois points $A$, $B$, $C$.

**2.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$.
En déduire que le mouvement de $M$ est un mouvement circulaire uniforme.
Préciser :

a) la plan de la trajectoire $(\mathscr{C})$ : en donner une équation cartésienne.

b) le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$.

c) la vitesse angulaire $\omega$ du mouvement.

## PROBLÈME 316

./1976/amienserem/pb/texte

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le plan vectoriel euclidien de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est désigné par $\pi$.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Une table des valeurs de la fonction exponentielle de base e est donnée en annexe pour faciliter les calculs.

I- Soit $f$ l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \text{ est différent de 0 et 1.} \end{cases}$$

.

a) Étudier si les restrictions de $f$ aux intervalles $]-\infty\,; 0[$, $]0\,; 1[$ et $]1\,; +\infty[$ admettent des limites aux bornes de ces intervalles.
Étudier la variation de $f$ (on pourra utiliser un tableau annexe pour calculer des valeurs approchées de $f$ aux points où la dérivée s'annule).

b) Montrer que, pour tout réel $u$ non nul, on a :

$$\mathrm{e}^u - 1 > u.$$

En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u} - 1$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,; 0[$ et $]0\,; +\infty[$.

c) Soient les applications $g$ et $h$ de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = f(x) - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$
$$h(x) = x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

a) Montrer que les fonctions $g$ $h$, $g + h$ admettent des limites que l'on calculera quand $x$ tend vers $+\infty$ ou quand $x$ tend vers $-\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet la droite $\Delta$ dont une équation est $y = x + 2$ comme asymptote.

b) Montrer les propriétés suivantes :

$$(\forall x \in\, ]1\,; +\infty[),\ g(x) > 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) > 1$$
$$(\forall x \in\, ]-\infty\,; 0[),\ g(x) < 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) < 1.$$

En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. Préciser la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A$ d'abscisse 0,5.

II- $a$ est un réel donné. $K_a$ et $T_a$ désignent des applications affines de P dans P.
$k_a$ et $t_a$ sont les endomorphismes de $\pi$ associées aux applications affines précédentes.
L'application $K_a$ fait correspondre à tout point $M(x\ ;\ y)$ de P le point $M'(x'\ ;\ y')$ de P tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = -ax + (3-a)y + 2 \end{cases}$$

$S_a$ est la symétrie centrale de P, de centre $I_A$, point défini ci-dessous en IIa.

a) Montrer que l'application $K_a$ admet toujours au moins un point invariant.
Quel est l'ensemble $E$ des valeurs de $a$ pour lesquelles $K_a$ admet un seul point invariant $I_a$ ?

b) On suppose que $a \in E$. Montrer que $K_a \circ S_a = S_a \circ K_a$. On désignera par $T_a$ la transformation composée précédente.
Dans le cas $a = 0$, déterminer $t_0(\vec{i})$ et $t_0(\vec{j})$.
Exprimer, dans le repère $(I_0,\ \vec{i},\ \vec{j})$, les coordonnées $(X_0\ ;\ Y_0)$ de $M_0 = T_0(M)$ en fonction des coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ de $M$ dans ce même repère. En déduire une construction simple de $M'$ image de $M$ par $K_0$.

c) On suppose $a = 3$. Montrer que $T_3$ est une projection que l'on définira avec précision.

d) On suppose $a = 2$. $K_2$ est alors une symétrie par rapport à une droite $D$ suivant une direction $S$. Préciser la droite $D$ et la direction $S$. $m$ étant un réel donné, déterminer $k_2(\vec{i} + m\vec{j})$.



Retour page 1

# IX. Besançon , série C

**Ex. 1012.** ./1976/besanconC/exo-1/texte.tex

$r$ est un nombre réel strictement positif et $\alpha$ un réel de $]-\pi\,;\pi]$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2r\cos\alpha z + r^2 = 0.$$

On appellera $z_1$ et $z_2$ les solutions et on précisera le module et l'argument de chacune.

**2.** Calculer $z_1^n$ et $z_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.

Cas particulier : $r = \dfrac{1}{2}, \qquad \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

Trouver une relation indépendante de $n$ entre $P_n$ et $P_{n+3}$ dans ce cas ; quelle est alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ ?

**Ex. 1013.** ./1976/besanconC/exo-2/texte.tex

$n$ est un nombre entier strictement positif. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, où e est la base du logarithme népérien.

**1.** Démontrer que le nombre $I_n$ existe pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ et qu'il est strictement positif.

Calculer $I_1$.

**2.** Démontrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

Calculer alors $I_2$ et $I_3$.

**3.** Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

## Problème 317

./1976/besanconC/pb/texte

A- Soit un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n \leq 3$. On se propose de déterminer la dimension de $E$ pour qu'il existe un endomorphisme $\varphi$ de $E$ tel que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$ (1) où $Id_E$ désigne l'application identique de $E$.

1° Montrer que l'image par $\varphi$ d'une droite vectorielle $D$ est une droite vectorielle $\varphi(D)$, et que l'intersection de $D$ et de $\varphi(D)$ est le vecteur nul (on pourra vérifier, $\vec{u}$ étant un vecteur définissant $D$, que les réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha\vec{u} = \beta\varphi(\vec{u})$ sont nécessairement nuls compte-tenu de (1) ). En déduire, si un tel endomorphisme existe, que $n \geq 2$.

2° $D$ étant une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ non nul, quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F_D$ engendré par $\vec{u}$ et $\varphi(\vec{u})$ ? Quelle est l'image de $F_D$ par $\varphi$ ?

3° Soit $n = 2$. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul de $E$, montrer, si $\varphi$ existe et vérifie (1), que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est une base de $E$ ; quelle est la matrice de $\varphi$ dans cette base ? Existe t-il des endomorphismes de $E$, de dimension 2, vérifiant la condition (1) ?

4° Soit $n = 3$. On suppose qu'il existe un endomorphisme $\varphi$ de $E$ vérifiant (1). $\vec{u}$ étant un vecteur non-nul, montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \vec{v})$ soit une base de $E$. Compte-tenu de l'expression de $\varphi(\vec{v})$ dans cette base, quelle est la matrice de $\varphi$ dans cette base ? En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure ?

B- $\mathcal{P}$ étant un espace affine associé à $E$ espace vectoriel euclidien de dimension 2, on note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

1° Déterminer, à l'aide des matrices, les endomorphismes $\varphi$ de $E$ tels que $\varphi \circ \varphi = -Id_E$. Préciser ceux qui sont orthogonaux.

2° Soit $f_1$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$x' = -y + 1 \qquad y' = x - 1$$

*i.* Démontrer que $f_1$ est une rotation affine dont l'endomorphisme associé $\varphi$ est tel que $\varphi\circ\varphi = -Id_E$. Préciser le centre $A$ et l'angle de $f_1$.

*ii.* Soit $(\Gamma)$ le cercle de centre $B(0,1)$ et de rayon $1$. Déterminer l'image $(\Gamma')$ de $(\Gamma)$ par $f_1$.

*iii.* Soit $I$ le milieu du segment $[M,M']$. Déterminer l'ensemble décrit par $I$ lorsque $M$ décrit $(\Gamma)$. (On pourra calculer les coordonnées de $I$ ou définir géométriquement une application par la quelle $I$ est image de $M$).

3° Soit $f_2$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ telle que :

$$x' = -x+2y+1 \qquad y' = -x+y+1$$

1° Démontrer que $f_2$ est une application affine dont l'endomorphisme associé $\varphi$ est tel que $\varphi\circ\varphi = -Id_E$.

2° Quel est l'ensemble des points invariants ?

3° Par quelle transformation passe-t-on de $M$ à $M'' = f_2\circ f_2(M)$ ?

4° Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ fait correspondre :

$$y = \frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+4}}{3}$$

Etudier cette fonction et la représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $(C)$ la représentation graphique.

5° Déterminer l'image $(C')$ de $(C)$ par $f_2$. Tracer la dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ après avoir reconnu cette courbe $(C')$.

N.B.- Les parties A,B,C peuvent être traitées de façon indépendante.

## X. Besançon, Nancy, Reims & Strasbourg remplacement, série C

**Ex. 1014.** ./1976/besanconCrem/exo-1/texte.tex

Déterminer les paires $\{a,\ b\}$ d'entiers naturels tels que $2m+3d = 111$ $m$ désignant le plus commun multiple, $d$ désignant le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$.

**Ex. 1015.** ./1976/besanconCrem/exo-2/texte.tex

$f$ est la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction.
2. Déduire de la question précédente l'étude des variations des fonctions :
   a) $g : x \in [0\,;2\pi[,\ g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}}{\cos x}$.
   b) $h : x \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\},\ h(x) = \dfrac{x}{\log x}$. ($\log$ désigne le logarithme népérien.)

**PROBLÈME 318** ./1976/besanconCrem/pb/texte

Soit $(P)$ un plan affine euclidien orienté, $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct de $(P)$. Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels, le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ est appelé affixe du point $M$ de $(P)$ de coordonnées $x$ et $y$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.
On appelle $A$ le point d'affixe $2$ et $B$ le point d'affixe $\mathrm{i}$.
Soit $F$ l'application de $(P)$ dans $(P)$ qui associe à tout point $M$ d'affixe $z$ le point $M' = F(M)$ d'affixe$z'$ tel que $z' = 2-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\overline{z}-2)$ ($\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$).

A- 1. Déterminer le nombre réel strictement positif $k$ et la droite $(\Delta)$ passant par $A$ tels que $F$ soit égale à la composée commutative de l'homothétie $H$ de centre $A$, de rapport $k$ et de la symétrie orthogonale $S_\Delta$ par rapport à la droite $(\Delta)$.

2. a) Quelles sont les droites globalement invariantes par $F$ ?

   b) Quelles sont les droites orthogonales à leurs images par $F$ ?

3. Soit $(y'y)$ la droite contenant le point $O$, de vecteur directeur $\vec{e}_2$.

   a) Quel est l'ensemble des affixes des points de $(y'y)$ ; en déduire l'image de $(y'y)$ par $F$.

   b) En utilisant les nombres complexes, démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule $\Sigma$ telle que pour tout point $M$ de $(y'y)$ on ait :

$$\Sigma(M) = F(M).$$

   Si $z$ est l'affixe d'un point quelconque $M$ de $(P)$, quelle est l'affixe du point $\Sigma(M)$ ? Donner les coordonnées du centre $C$ de la similitude $\Sigma$ , ainsi que le rapport et l'angle de $\Sigma$. Démontrer que, pour tout point $M$ de $(y'y)$, le cercle de diamètre $MM'$ ($M' = F(M)$) contient les points $B$ et $C$.

4. Soient $a$ et b deux nombres réels strictement positifs tels que $b < a$ et $(\Gamma)$ la courbe d'équation $\dfrac{(x-2)^2)}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   a) Déterminer la nature de $(\Gamma)$ et ses éléments de symétrie.

   b) Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma')$ image de$(\Gamma)$ par $F$. Quelle est la nature de $(\Gamma')$ ? Préciser ses éléments de symétrie.

   c) Tracer $(\Gamma)$ et( $(\Gamma')$ lorsque $a = 2$ et $b = 1$.

B- On pose $F^1 = F$, $F^2 = F \circ F$ et pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $F^{n+1} = F \circ F^n$.

1. Déterminer l'ensemble $E$ des valeurs de l'entier naturel non nul $n$ pour lesquelles $F^n$ est une homothétie. Pour tout élément $n$ de $E$, déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $F^n$. Montrer que, pour toute valeur $n$ de $\mathbb{N}^\star - E$ , $F^n$ est la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.

2. $O$ étant l'origine du repère, on pose $O_1 = F(O)$ et pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $O - n + 1 = F(O_n)$. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, le point $O_n$ appartient à la réunion de deux demi-droites d'origine $A$.

3. Pour tout entier naturel non nul $n$, on appelle $z_n$ l'affixe du point $O_n$ et on pose $u_n = z_n?2$ et $v_n = |u_n|$. Calculer $u_n$ en fonction de $n$ et du rapport $k$ de l'homothétie $H$, montrer que $v_n$ est terme général d'une suite géométrique.

   On pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer $\sigma_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.

C- En utilisant les nombres complexes, déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des similitudes directes $S$ permutant avec $F$ ($S$ vérifie $S \circ F = F \circ S$). Quelle est la structure de $\mathscr{H}$ munie de la loi notée $\circ$ de composition des applications ?

# XI. Besançon, Dijon, Nancy & Strasbourg, série E

**Ex. 1016.** ./1976/besanconE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = z^2 + z + 1$$

**1.** L'application $f$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?
Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ invariants par $f$ ? Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ dont l'image par $f$ est un réel ?

**2.** Dans le plan affine euclidien, on note $A$ le point d'affixe 1, et au point $M$ d'affixe $z$, on associe le point $M'$ d'affixe $f(z) = 1 + z + z^2$.
Pour quels points $M$ les trois points $A$, $M$, $M'$ sont-ils alignés ?

Ex. 1017. ./1976/besanconE/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$.

**2.** Montrer que $f$ est la fonction dérivée de la fonction $F$ :

$$F(x)=\log(e^x+e^{-x}+2)$$

En déduire l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer à l'aide des tables une valeur approchée de cette intégrale.

## Problème 319

./1976/besanconE/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées, d'ordre 2, à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de leur multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire.

On notera $I$ la matrice unité $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\Omega$ la matrice nulle $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Soient alors les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

On considère la matrice $m=aA+bB$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$, $m$ décrit un ensemble $\mathcal{A}$ de matrices.

I- Dans le plan vectoriel euclidien, on associe à la matrice $m$, relative à la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, l'endomorphisme $\varphi$.

1° Montrer que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\{A,\ B\}$ en est une base.

2° Calculer les matrices $A^2, B^2, AB, BA, A+B, A-B$.

Montrer que les endomorphismes $\varphi$ associés aux matrices $A$ et $B$ sont des projections vectorielles orthogonales ; préciser celles-ci. Quels sont les endomorphismes associés aux matrices $A+B$ et $A-B$ ?

3° Soit deux matrices de $\mathcal{A}$ :

$$m=aA+bB\qquad m'=a'A+b'B$$

Calculer $mm'$ et montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire. A quelle condition une matrice $m$ est-elle inversible ?

II- Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application affine $f$ associée à l'endomorphisme $\varphi$, dont la matrices relative à la base $(\vec{i},\vec{j})$ est : $m=aA+B$, $a$ étant un réel non nul, et telle que le point $O$ soit invariant par $f$.

1° Montrer que $f$ est une bijection.

2° Montrer que si $a\neq1$, l'ensemble des points $M$ invariants par $f$ est une droite $\Delta$ qu'on définira par une équation.

3° Montrer que si $M\neq M'$, $M'=f(M)$, la droite $(MM')$ est orthogonale à la droite $\Delta$.

4° Soit $H$ la projection orthogonale du point $M$ sur $\Delta$. Montrer que $\overrightarrow{HM'}$ s'exprime aisément à l'aide de $\overrightarrow{HM}$.

III- 1° Etudier les variations de la fonction $g$ définie par :

$$g(x)=\frac{3}{2}x+\sqrt{16-x^2}$$

2° Soit $E$ sa courbe représentative dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $f$ l'application affine définie à la deuxième partie et correspondant à la valeur $a=-4$.

Si $M'$ est le point de coordonnées $x'$ et $y'=g(x')$, ce point est l'image par $f$ du point $M$ de coordonnées $(x,\ y)$. Montrer que le point $M$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon. De quelle partie $C$ de ce cercle la courbe $E$ est-elle l'image ?



Retour page 1

3° Vérifier que les tangentes aux courbes $C$ et $E$ en leurs extrémités homologues par $f$ se coupent sur la droite $\Delta$. (définie au **??**. de III.).

Montre que les courbes $C$ et $E$ ont un seul point commun, que ce point appartient à $\Delta$ et que les deux courbes admettent la même tangente en ce point.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'unité sera le centimètre, tracer soigneusement les courbes $C$ et $E$, la droite $\Delta$ ainsi que les tangentes signalées. (on pourra prendre $\sqrt{13} \simeq 3,61$ et $\sqrt{5} \simeq 2,24$).

## XII. Besançon, Dijon, Nancy & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 1018.** ./1976/besanconErem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{2x+2} + x - 1, & x \in ]-\infty\,;-1] \\ f(x) = x^2 + 2x, & x \in ]0\,;+\infty] \\ f(x) = \log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|. & \end{cases}$$

**1.** Trouver son ensemble de définition $\mathscr{D}$. $f$ est-elle continue sur $\mathscr{D}$ ? Étudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathscr{D}$.

**2.** Étudier $f$ et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

**3.** Calculer l'aire (arithmétique) $\mathscr{A}_\alpha$ du domaine $\alpha$ ($\alpha$ étant un réel inférieur ou égal à -1)

$$\Delta = \{M(x\ ;\ y) \quad /\alpha \leqslant x \leqslant -1 \qquad \text{et} \qquad x-1 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \mathscr{A}_\alpha$.

**Ex. 1019.** ./1976/besanconErem/exo-2/texte.tex

Soit la nombre complexe $b = a(a+1)$ où $a = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ avec $0 \leqslant \varphi < \pi$.

**1.** Calculer le module de $b$ en fonction de $\dfrac{\varphi}{2}$.

Calculer un argument de $b$ en fonction de $\varphi$.

**2.** Résoudre l'équation dans le corps des complexes : $z^2 - 2az - a = 0$.

**Problème 320** ./1976/besanconErem/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et soit P un plan affine euclidien associé à $\mathscr{P}$ et de repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- Étant donné un nombre réel quelconque $a$, on considère l'endomorphisme $\varphi_a$ de $\mathscr{P}$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. Pour quelles valeurs de $a$ l'endomorphisme $\varphi_a$ est-il bijectif ?
2. L'endomorphisme $\varphi_a$ peut-il être un projecteur ($\varphi_a \circ \varphi_a = \varphi_a$) ?
   Déterminer alors l'image ($\mathbf{Im}\ \varphi_a$) et le noyau ($\ker\varphi_a$) de $\varphi_a$.
   Donner une base de $\mathbf{Im}\ \varphi_a$ et de $\ker\varphi_a$.
3. L'endomorphisme $\varphi_a$ peut-il être un involutif ($\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$) ?
   Définir dans ce cas analytiquement $\varphi_a$. Préciser la nature de $\varphi_a$ et donner ses éléments remarquables.

B- $b$ est un nombre réel quelconque.

Soit $f_b$ l'application affine ayant pour application linéaire associée $\varphi_{-1}$ et telle que l'image de $O$ par cette application soit le point $O'$ de coordonnées $(-b\ ;\ +b)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$..

1. Définir analytiquement $f_b$.



Retour page 1

2. Montrer que $f_b$ est une symétrie affine dont on déterminera les éléments caractéristiques remarquables.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $ux+vy+h=0$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer en fonction de $u$, $v$, $h$ et $b$, l'équation de $\mathscr{D}'$ image de $\mathscr{D}$ par $f_b$.
4. Déterminer l'ensemble des droites de P transformées par $f_b$ en des droites de même direction quel que soit $b$.
   Déterminer l'ensemble des droites de P globalement invariantes par $f_b$ quel que soit $b$.

C- Soit la fonction numérique $g$ de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2-2$.

1. Construire la courbe $(\Gamma)$ représentative de $g$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2 cm).
2. Montrer que pour une valeur $\beta$ de $b$ que l'on déterminera, la courbe $(\Gamma)$ est globalement invariante par $f_b$.
3. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ le spoints de $(\Gamma)$ d'abscisses respectives $0$, $1$, $-2$ et $-2$.
   Vérifier que $D=f_\beta(A)$ et $C=f_\beta(B)$.
   Déterminer le barycentre $G$ des points $A$, $B$ et $C$ affectés du même coefficient (isobarycentre).
   Déterminer de même l'isobarycentre $G'$ des points $D$, $B$ et $C$.
   Vérifier que $G'=f_\beta(G)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
4. Soit $(\Gamma')$ la courbe transformée de $(\Gamma)$ par $f_4$.
   Déterminer l'équation de $(\Gamma')$. Préciser sa nature, et construire $(\Gamma')$ sur la même figure que $(\Gamma)$ ;
   Construire géométriquement sur la figure les points $A'$, $B'$, $C'$ et $D'$ images respectives des points $A$, $B$, $C$ et $D$ par $f_4$.
   Calculer en cm$^2$ l'aire de la portion du plan limitée par le segment $B'C'$ et l'arc de $(\Gamma')$ : $B'A'D'C'$.

## XIII. Bordeaux , série C

**Ex. 1020.** ./1976/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Rechercher tous les couples $(z_1,\ z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$z_1z_2=1/2 \qquad z_1+2z_2=\sqrt{3}$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

**Ex. 1021.** ./1976/bordeauxC/exo-2/texte.tex

**1.** a) Montrer que la fonction numérique : $f: x\mapsto x\log x - x$ est dérivables sur $]0;+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Soit $t$ un élément quelconque de l'intervalle réel $]0;1]$. Montrer que la fonction : $x\mapsto \log x$ est intégrable sur $[t\,;1]$. Calculer :

$$I(t)=\int_t^1 \log x\,dx$$

Montrer que la fonction : $t\mapsto I(t)$ admet une limite finie quand $t$ tend vers zéro par valeurs positives. Que vaut cette limite ?

**2.** Soit $T$ un élément quelconque de l'intervalle réel $[1;+\infty[$. Montrer que la fonction : $x\mapsto \log x/x^2$ est intégrable sur $[1\,;T]$. Calculer :

$$J(T)=\int_1^T \frac{\log x}{x^2}dx$$

(On peut faire une intégration par parties).

Montrer que la fonction : $T\mapsto J(T)$ admet une limite finie quand $T$ tend vers $+\infty$, que vaut cette limite ?



Retour page 1

## PROBLÈME 321



-I- Soit $a$ un nombre réel donné non nul. Soit $A$ l'ensemble des applications $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables en tout point, et satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$ à la condition :

$$\varphi'(t) = a\varphi(t)$$

a) Montrer que la fonction $\varphi_a : t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ appartient à $A$.

b) Soit $\varphi$ un élément quelconque de $A$. Quelle est l'application dérivée de la fonction $h = \varphi/\varphi_a$ ? En déduire que $\varphi$ est de la forme $k\varphi_a$ où $k$ est un nombre réel.

-II- Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension trois. Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base fixée de $E$. Soit $\vec{u}$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ telle que :

$$u(\vec{i}) = -\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{k} \qquad u(\vec{j}) = \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k} \qquad u(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$$

a) Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de $E$. Soit $x_1, x_2, x_3$ les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $B$. Quelles sont les coordonnées dans $B$ du vecteur $u(\vec{v})$ ?

b) Montrer que le noyau de $u$, noté $\ker(u)$, est le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par le vecteur

$$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}$$

c) Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $E$ tels que $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$ est le sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\vec{v}_2 = (2-\sqrt{2})\,\vec{i} + (2+\sqrt{j})\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

d) On note $Im(u)$ l'image de $E$ par $u$. Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $E$. Montrer que $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $Im(u)$. En déduire que $\ker(u)$ et $Im(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$.

*Dans III et IV, en plus des hypothèses de II, on suppose que $E$ est un espace vectoriel euclidien, et que $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en est une base orthonormée.*

-III- a) Montrer que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont deux à deux orthogonaux.

b) En utilisant la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, donner une interprétation géométrique de l'application linéaire $u$.

-IV- On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $E$. Si $\vec{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\vec{F}(t)$ est donc un vecteur de $E$. On note $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base $B$, et $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

On rappelle que dire que la fonction vectorielle $\vec{F}$ est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ revient à dire que chaque fonction numérique $f_1, f_2, f_3$ est dérivable en $t_0$, ou encore que chaque fonction numérique $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ est dérivable en $t_0$. On a alors :

$$\vec{F}'(t_0) = f_1'(t_0)\,\vec{i} + f_2'(t_0)\,\vec{j} + f_3'(t_0)\,\vec{k} = \varphi_1'(t_0)\,\vec{v}_1 + \varphi_2'(t_0)\,\vec{v}_2 + \varphi_3'(t_0)\,\vec{v}_3$$

a) Soit $\mathcal{F}_u$ l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles $\vec{F} \in \mathcal{F}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation $(\star)$ :

$$\vec{F}'(t) = u[\vec{F}(t)]$$

*i.* Soit $\vec{F} \in \mathcal{F}_u$. Comment se traduit la relation $(\star)$ sur les coordonnées $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ de $\vec{F}(t)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ?

*ii.* En déduire, en utilisant I, la forme des fonctions numériques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

b) Rechercher toutes les fonctions numériques $f_1, f_2, f_3$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f_1'(t) = & -\sqrt{2}f_1(t) & +0 & +f_3(t) \\ f_2'(t) = & 0 & +\sqrt{2}f_2(t) & +f_3(t) \\ f_3'(t) = & f_1(t) & +0 & +f_3(t) \end{cases}$$

$$f_1(0) = 5 \qquad f_2(0) = 3 \qquad f_3(0) = \sqrt{2}$$



Retour page 1

# XIV. Bordeaux remplacement , série C

**Ex. 1022.** ./1976/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

Soient $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que ces relations permettent de définir une suite de réels, $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$ dont chaque terme est positif.
   Montrer que pour tout entier naturel $n$, $x_n^2 < 3$.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On admettra qu'elle est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ex. 1023.** ./1976/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Déterminer les chiffres $x$ et $y$ pour que l'entier naturel $A$, s'écrivant $\overline{356\ y\ 2x}$ dans le système décimal, soit divisible par 5 et par 7.

## Problème 322

./1976/bordeauxCrem/pb/texte

On désigne par $\mathscr{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension et par E un espace affine euclidien associé à $\mathscr{V}$ et rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est donc une base orthonormée de $\mathscr{V}$.

A- Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x - 2 + \sqrt{2x^2 - 4x - 6}.$$

1. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$ dans le repère $\mathscr{R}$ admet deux asymptotes dont on établira les équations. On vérifiera que le point $O'$ tel que $\overrightarrow{OO'} = \vec{i} - \vec{j}$ est commun aux deux asymptotes. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à ces deux droites.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ et préciser les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
3. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ en utilisant le repère $\mathscr{R}$ et montrer qu'elle coupe l'axe $(O; \vec{\imath})$ en un seul point dont on calculera l?abscisse négative.
4. $(\mathscr{C}')$ désignant la courbe représentant dans le repère $(O',\ \vec{i},\ \vec{j})$ la fonction définie par $G(X) = X - \sqrt{2X^2 - 8}$, montrer que $(\mathscr{C})$ et $(C')$ sont symétriques par rapport à $O'$.
   En déduire l'ensemble $\mathscr{H}$ des points du plan E dont les coordonnées par rapport au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient l'équation $X^2 - Y^2 + 2XY - 8 = 0$.

B- On donne dans le plan E l'application affine $S$ définie analytiquement dans le repère par $M(x\ ;\ y) \longmapsto M'(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + 1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' - (1 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

1. $s$ désignant l'homomorphisme de $\mathscr{V}$ dans lui-même associé à $S$, écrire sa matrice $M$ relativement à la base $B$ ; en déduire que $s$ est un automorphisme involutif de $\mathscr{V}$.
2. Montrer que :
   a) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ invariants par $s$ est une droite vectorielle $D_1$ sur laquelle on fixera la base $\vec{I} = \vec{i} + \beta\vec{j}$ ; calculer $\beta$.
   b) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ transformés en leurs opposés par $s$ est une droite vectorielle $D_2$ sur laquelle on fixera la base $\vec{I} = \alpha\vec{i} + \vec{j}$ ; calculer $\alpha$.
   c) les deux droites vectorielles $D_1$ et $D_2$ sont orthogonales. Quelle est la nature de $s$ ? É?crire sa matrice $M'$ relativement à la base $(\vec{I},\ \vec{J})$.
3. Montrer que $O'$ (voirA1) appartient à l'ensemble $D$, que l'on précisera, des points de E invariants par $S$. Tracer $D$ sur la figure réalisée à la partie A du problème.
   Montrer que $S$ est une involution affine dont on précisera la nature.

C- 1. Écrire les équations de $S$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ ; on désignera par $(X, Y)$ les coordonnées du point $M$ dans le repère et par $(X', Y')$ les coordonnées de $M' = S(M)$.

2. Vérifier que la courbe $\mathscr{H}$ est globalement invariante par $S$.

3. Écrire l'équation de $\mathscr{H}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Reconnaître $\mathscr{H}$ ; préciser ses foyers dans ce repère.

## XV. Bordeaux & Poitiers remplacement , série E

**Ex. 1024.** ./1976/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Soit le polynôme à coefficients complexes

$$P(z) = z^3 + (3 - 2\mathrm{i})z^2 + (2 + 2\mathrm{i})z - 6.$$

**1.** Trouver ses racines sachant que l'une d'elles $z_1$ est réelle. On appelle $z_2$ et $z_3$ les deux racines complexes non réelles.

**2.** Soit le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$. Représenter les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ d'affixes $z_1$, $z_2$ et $z_3$ ; montrer que les droites $(OM_2)$ et $(OM_3)$ sont orthogonales.

**Ex. 1025.** ./1976/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier et représenter graphisuement dans un repère orthonormé ($\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$) la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + x + 3.$$

(Pour étudier les variations de $f'$, on utilisera la dérivée seconde $f''$.)

On montrera que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique.

**2.** Calculer en cm$^2$ l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0)$ et $x = 2$. Cette aire a-t-elle une limite lorsque $\lambda$ tend vers $(--\infty)$ ?

### Problème 323

./1976/bordeauxErem/pb/texte

A Dans l'espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 2, rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la rotation vectorielle $\rho$ d'angle de mesure $\dfrac{3\pi}{2}$ etc la symétrie vectorielle orthogonale $\rho$ par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}_1 = (2-\sqrt{3})\vec{i} + \vec{j}$.

1. Déterminer les matrices $R$ et $S$ de $\rho$ et $\sigma$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de E : $\varphi = \dfrac{1}{2}(\rho + \sigma)$.

   a) Montrer que $\varphi$ n'est pas injective et déterminer son noyau et son image. Que remarque-t-on ?

   b) Déterminer $\varphi \circ \varphi$.

   c) En utilisant le résultat précédent, montrer que $(\rho \circ \varphi) = -(\varphi \circ \rho)$.

3. Déterminer les bases orthonormées de E dans lesquelles la matrice de $\sigma$ s'écrit :

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Préciser l'orientation de chacune de ces bases.

B Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la rotation affine $r$ associée à $\rho$ et telle que $r(O) = O_1$ de coordonnées $(1\ ;\ 2)$ et la symétrie orthogonale $s$ associée à $\sigma$ et telle que $s(O) = O_2$ de coordonnées $\left(1\ ;\ -2+\sqrt{3}\right)$.

1. a) Déterminer analytiquement les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ et $(x_2\ ;\ y_2)$ des points $M_1 = r(M)$ et $M_2 = s(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point quelconque $M$ de $\mathscr{E}$.

   b) Déterminer le centre $\Omega$ de la rotation $r$ et l'axe $(\Delta)$ de la symétrie $s$.

2. On considère l'application affine $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point $M$ de $\mathscr{E}$ fait correspondre le milieu $M'$ du segment $[M_1, M_2]$.
   a) Montrer que $f$ associe à tout point $M(x\ ;\ y)$, le point $M'(x'\ ;\ y')$ défini par

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{3}{4}y + 1 \\ y' = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

   Déterminer les coordonnées du point $O' = f(O)$.
   b) Quelle est l'application linéaire associée à $f$ ?
   c) Montrer que $f$ admet un point invariant unique $S$ dont on calculera les coordonnées.
   d) Établir la nature de $f \circ f$.
3. a) Montrer que l'application $f$ transforme le plan $\mathscr{E}$ tout entier en une droite $(\Delta')$ dont on donnera l'équation.
   b) Déterminer l'ensemble de tous les points de $\mathscr{E}$ dont l'image par $f$ est le point $S$.
4. En considérant $\mathscr{E}$ comme le plan complexe, exprimer l'affixe $z'$ de $M' = f(M)$ en fonction de l'affixe $z$ d'un point quelconque $M$ de $\mathscr{E}$.
   Retrouver les coordonnées de $S$ et de l'affixe de $(f \circ f)(M)$ pour tout point $M$.

# XVI. Caen, série C

**Ex. 1026.** ./1976/caenC/exo-1/texte.tex

On considère l'équation :

$$324x - 245y = 7 \qquad (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \tag{1}$$

**1.** Montrer que pour toute solution $(x,\ y)$, $x$ est multiple de 7.

**2.** Déterminer une solution $(x_0,\ y_0)$ et en déduire toutes les solutions.

**3.** Soit $\delta$ le PGCD des éléments d'un couple $(x,\ y)$ solution de (1). Quelles sont les valeurs possibles de $\delta$ ? Déterminer les solutions de (1) telles que $x$ et $y$ soient premiers entre eux.

**Ex. 1027.** ./1976/caenC/exo-2/texte.tex

Le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé. Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x,\ y)$ de ce plan.

**1.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$|(1-i)z + 2i| = 2$$

**2.** Étudier la transformation de $\mathcal{P}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z' = (1-i)z + 2i$.

**3.** En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat de **??**.

## Problème 324

./1976/caenC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de ce plan.

-I- Construire la courbe $\Gamma$ d'équation :

$$4y^2 - x^2 = 4$$

-II- On donne les points :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \qquad A'\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \qquad B'\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

Retour page 1

1° Montrer qu'il existe une bijection affine unique $g$ telle que :

$$g(O) = B \qquad g(A) = A' \qquad g(B) = B'$$

Soit $C$ le symétrique de $B$ par rapport à $A$. Définir sans calcul le point $C' = g(C)$ et les images de $g$ des droites $OB$ et $OC$.

2° Déterminer les coordonnées de $A'$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire un système de coefficients réels $(\alpha, \beta, \gamma)$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et que $A'$ soit barycentre des points $(O, A, B)$ affectés des coefficients respectifs $(\alpha, \beta, \gamma)$.

3° Donner la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de l'endomorphisme $f$ associé à $g$ et l'expression analytique de $g$. Donner les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du barycentre des points $B, A', B'$ affectés respectivement des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma)$.

4° Montrer que l'équation cartésienne de la courbe $\Gamma'$ image de $\Gamma$ par $g$ est :

$$y = \frac{3}{2}x + 4 + \frac{1}{2(x+2)}$$

Construire cette courbe, montrer que $B'C'$ est tangente à $\Gamma'$ et préciser le point de contact.

-III- Soit $D$ la droite d'équation $x = -2$ et $D'$ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x + 4$.

1° Définir analytiquement la symétrie $S$ par rapport à $D$ suivant $D'$.

2° Montrer que l'application $g^{-1} \circ S \circ g$ est une involution affine. Trouver $g^{-1} \circ S \circ g(O), g^{-1} \circ S \circ g(B), g^{-1} \circ S \circ g(C)$ et en déduire la nature de $g^{-1} \circ S \circ g$.

-IV- On considère la partie de $\mathcal{P}$ limitée par la courbe $\Gamma'$, la droite $D'$, les droites d'équation $x = -3$ et $x = m$, $m$ étant un paramètre réel inférieur strictement à $-2$.

1° Calculer l'aire arithmétique $\Sigma(m)$ de ce domaine.

2° Étudier la fonction $\Sigma : ]-\infty; -2[ \to \mathbb{R}$ qui à $m$ associe $\Sigma(m)$ et construire sa courbe représentative.

3° Soit $h$ l'application $[-3; -2[ \to \mathbb{R}^+$ qui à $x$ associe :

$$h(x) = -\frac{1}{2}\log(-x-2).$$

Montrer que c'est une bijection et définir la bijection réciproque $h^{-1}$. En tracer la courbe représentative sur le même dessin que la courbe de $\Sigma$.

4° Définir la fonction $h^{-1} \circ \Sigma$.

# XVII. Caen remplacement, série C

**Ex. 1028.** ./1976/caenCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -x^2 + x^2 \log x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f$.
2. Étudier la fonction et construire la graphe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.
3. Trouver l'aire de la partie du plan, comprise entre l'axe $x'x$, le graphe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \mathrm{e}$.

**Ex. 1029.** ./1976/caenCrem/exo-2/texte.tex

1. Trouver les diviseurs de 3 108 (ce nombre est écrit en base 10).
2. On considère le nombre qui s'écrit 3 114 en base dix. Existe-t-il une base dans laquelle il s'écrit $\overline{1976}$ ? Déterminer cette base.

## PROBLÈME 325



A- Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. Comment doit-on choisir les réels a et b pour que M soit inversible ?
2. On appelle $\mathscr{B}$ le sous-ensemble des matrices inversibles de A. Montrer que B est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles.

B- On pose dans la suite du problème $a = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, $b = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ avec $\alpha \in [0\,;\pi]$.

Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On désigne par $\varphi_\alpha$ l'application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ de matrice

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha & 1-\cos\alpha \\ 1-\cos\alpha & 1+\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Quelle valeur faut-il donner à $\alpha$ pour que $\varphi_\alpha$ ne soit pas bijective ? Déterminer, dans ce cas, le noyau N et l'image I de cet endomorphisme.
2. Quelles valeurs faut-il donner à $\alpha$ pour que $\varphi_\alpha$ soit involutive ? Identifier $\varphi_a$. pour chaque valeur trouvée

C- Soit un plan affine euclidien E associé à E et muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . On appelle $f_\pi$ l'application affine de E associée à $\varphi_\pi$ telle que $f_\pi(O) = O'$ avec $O'$ de coordonnées $(-1\ ;\ 1)$.

1. Tout point $m$ de E de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour image par $f_\pi$ le point $m'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ . Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de x et y. Déterminer l'ensemble des points de E invariants par $f_\pi$. En déduire la nature géométrique de $f_\pi$.
2. Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle définie par : $g(x) = x - 2 + \dfrac{9}{x-3}$.

   Étudier les variations de $g$. On appelle $(\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Trouver l'équation de la transformée $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par $f_\pi$. Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. Déterminer l'aire du domaine plan fermé limité par les deux courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations respectives $x = 4$ et $y = 5$.

D- Dans le plan affine euclidien E associé à E et de repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les points $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$, $O'(-1\ ;\ 1)$, $A'\left(-\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{5}{4}\right)$ , $B'\left(-\dfrac{3}{4}\ ;\ \dfrac{7}{4}\right)$.

1. Soit $m$ un point de E de coordonnées $(x\ ;\ y)$. Déterminer, en fonction de $x$ et $y$, les trois réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ vérifiant $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et tels que $m$ soit le barycentre des trois points $O$, $A$ et $B$ affectés respectivement des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

   Soit $f'$ l'application qui, à tout point $m(x\ ;\ y)$, associe le point $m'\left(x'\ ;\ y'\right)$ barycentre des points $O'$, $A'$, $B'$ affectés respectivement des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Montrer que $f'$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est de la forme $\varphi_\alpha$. On notera $\alpha_0$ la valeur de $\alpha$ ainsi obtenue.
2. Démontrer que, pour deux valeurs de nombre réel $\lambda$, il existe des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{E}$, distincts du vecteur nul, vérifiant $\varphi_{\alpha_0}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Montrer que l'ensemble de ces vecteurs est la réunion de deux droites vectorielles.

   Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mm'}$ est élément de l'une de ces droites vectorielles pour tout $m \in \mathscr{E}$. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f'$. En déduire la construction de l'image par $f'$ de la droite d'équation $x = 2$.



Retour page 1

# XVIII. Caen, série E

**Ex. 1030.** ./1976/caenE/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe $Z$ défini par :

$$Z = \frac{z^2}{z+\mathrm{i}} \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

(i désigne le nombre complexe de carré $-1$).

**1.** On note $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $(X,\ Y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

**2.** Au complexe $z$, on associe le point $M$ de coordonnées $(x,\ y)$ d'un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tels que $Z$ soit un imaginaire pur.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = 0.$$

Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble $(\Gamma)$.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

**Ex. 1031.** ./1976/caenE/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{|\mathrm{e}^x - 1|}$$

**1.** Étudier les variations de $f$. Tracer sa courbe représentative dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On indiquera les asymptotes éventuelles).

**2.** Prouver que la restriction $f_1$ de $f$ à l'intervalle $]0\,; +\infty[$ admet une application réciproque que l'on déterminera.

**3.** a) Calculer le réel $I(\alpha)$ défini par :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

($\alpha$ réel strictement positif).

b) Étudier la limite de $I(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$.

## Problème 326

./1976/caenE/pb/texte

Soit $E$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels. On rappelle que $E$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On rappelle aussi que $E$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices, est un anneau.

A- On considère l'ensemble $F$ des matrices de la forme :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} b & b-a \\ -a-b & -b \end{pmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont deux réels.

1° Calculer $U^2$, $V^2$, $UV$, et $VU$ où :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2° Prouver que $F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(U,\ V)$ en est une base.

3° Calculer $M_{a,b}^2$. En déduire le calcul de $M_{a,b}^n$. (on distinguera les cas où l'entier naturel $n$ est pair ou impair).

B- Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit $P$ un plan affine associé à $\mathcal{P}$. On munit $P$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ de matrice $M_{a,b}$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1° Quelle condition doit vérifier $(a,b)$ pour que $\varphi_{a,b}$ soit un automorphisme de $\mathcal{P}$ ?

2° Discuter, selon les valeurs de $a$ et $b$, la nature du noyau et de l'image de $\varphi_{a,b}$.

3° Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ involutifs ?

4° On considère l'endomorphisme $\varphi_{1,b}$ ($b \in \mathbb{R}$).

*i.* Prouver que l'ensemble des vecteurs invariants et que l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés sont deux droites vectorielles de bases respectives $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = (1-b)\overrightarrow{i} + (b+1)\overrightarrow{j}$.

*ii.* Déterminer la matrice de $\varphi_{1,b}$ dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. En déduire la nature de $\varphi_{1,b}$.

5° Soit $f$ l'application affine de $P$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{-1,2}$ et qui, à l'origine $O$ du repère, associe le point $A$ de coordonnées $(1,\ 1)$.

a) Démontrer que $f \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$.

b) Soit $g = f \circ t$ où $t$ est la translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.
Démontrer que $g$ est une application involutive possédant une droite de points invariants. Indiquer de façon précise la nature de $g$. Définir et construire l'image par $f$ de la droite $(D)$ d'équation $Y = X + 1$.

C- Dans cette partie, $P$ désigne un plan affine euclidien et le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est supposé orthonormé.

1° Déterminer les isométries planes d'endomorphisme associé $\varphi_{a,b}$ pour lesquelles le point $B$ de coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est invariant.

2° Parmi ces isométries, on désigne par $s$ la symétrie d'axe parallèle à la droite d'équation $y = x$. Soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \log|x+1| + 1$$

Déterminer l'image $s(C)$ de la courbe $(C)$ par l'application $s$. Tracer $s(C)$ et $(C)$ relativement au même repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

N.B.- $\log$ désigne le logarithme népérien. Les parties A, B, C sont indépendantes.

## XIX. Caen, Orléans & Rouen remplacement, série E

Ex. 1032. ./1976/caenErem/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe $Z$ défini par :

$$Z = \frac{z^2}{z + \mathrm{i}} \quad \text{où} \quad z = x + \mathrm{i}y \quad \text{avec} \quad (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i désigne le nombre complexe de carré $-1$.)

**1.** On note $Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $(X\ ;\ Y) \in \mathbb{R}^2$.
Ecrire $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

**2.** Au nombre complexe $z$, on associe le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tels que $Z$ soit imaginaire pur.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 = 0.$$

Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble $(\Gamma)$.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Retour page 1

**Ex. 1033.** ./1976/caenErem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{|\mathrm{e}^x-1|}.$$

**1.** Étudier les variations de $f$.
Tracer sa courbe représentative dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
(On indiquera les asymptotes éventuelles.)

**2.** Prouver que la restriction $f_1$ de $f$ à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ admet une application réciproque que l'on déterminera.

**3.** a) Calculer le réel $I(\alpha)$ défini par :

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha \text{ est un réel strictement positif}).$$

b) Étudier la limite de $I(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$.

## Problème 327

./1976/caenErem/pb/texte

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels.

A- On considère l'ensemble F des matrices de la forme

$$M_{a,\,b}=\begin{pmatrix} b & b-a \\ -a-b & -b\end{pmatrix} \qquad \text{où } a,\ b \text{ sont deux réels.}$$

1. Calculer $U^2$, $V^2$, $U$ et $VU$ où $U=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$.
2. Prouver que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(U,\ V)$ en est une base.
3. Calculer $M_{a,\,b}^2$. En déduire le calcul de $M_{a,\,b}^n$. (On distinguera les cas où l'entier naturel $n$ est pair ou impair.)

B- Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et soit P un plan affine associé à $\mathscr{P}$ ; on munit P d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ de matrice $M_{a,\,b}$ relatievment à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. Quelle condition doit vérifier $(a,\ b)$ pour que $\varphi_{a,\,b}$ soit un automorphisme de $\mathscr{P}$ ?
2. Discuter, selon les valeurs de $a$ et $b$, la nature du noyau et de l'image de $\varphi_{a,\,b}$.
3. Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,\,b}$ involutifs ?
4. On considère l'endomorphisme $\varphi_{1,\,b}$ ($b\in\mathbb{R}$).
   a) Prouver que l'ensemble des vecteurs invariants et que l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés sont deux droites vectorielles de bases respectives $\vec{I}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{J}=(1-b)\,\vec{\imath}+(b+1)\,\vec{\jmath}$.
   b) Déterminer la matrice de $\varphi_{1,\,b}$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$.
   En déduire la nature de $\varphi_{1,\,b}$.

C- Dans cette partie P désigne un plan affine euclidien et le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est supposé orthonormé.

1. Déterminer les isométries planes d'endomorphisme associé $\varphi_{a,\,b}$ pour lesquelles le point $B$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ est invariant.
2. Parmi ces isométries, on désigne par $s$ la symétrie d'axe parallèle à la droite d'équation $y=x$.
   Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\log|x+1|+1$.
   Déterminer l'image $s(\mathscr{C})$ de la courbe $(\mathscr{C})$ par l'application $s$.
   Tracer $s(\ C)$ et $(\mathscr{C})$ relativement au même repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$\log$ désigne le logarithme népérien. les parties A, B et C sont indépendantes.

Retour page 1

# XX. Clermont, série C

**Ex. 1034.** ./1976/clermontC/exo-1/texte.tex

Un couple souhaite avoir $n$ enfants ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$). On considère qu'à chaque naissance, l'ensemble des réalisations possibles est $\Omega = \{G, F\}$, $G$ étant l'évènement "avoir un garçon" et $F$ étant l'évènement "avoir une fille", ces deux évènements étant équiprobables. On considère que les naissances sont indépendantes les unes des autres. Pour la $i$-ème naissance, on construit la variable aléatoire réelle $X_i : \Omega \to \{0,1\}$ telle que $X_i(G) = 1$ et $X_i(F) = 0$.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

**1.** Dans cette question, $n = 3$.

a) Déterminer la probabilité que, parmi ses 3 enfants, le couple ait exactement 3 garçons. Même question avec : exactement 2 garçons, exactement 1 garçon, exactement 0 garçon.

b) Construire la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $X$.

**2.** Déterminer $n$ pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $1/100$.

**Ex. 1035.** ./1976/clermontC/exo-2/texte.tex

A chaque nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x, y)$ dans un plan affine euclidien orienté $P$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

**1.** Déterminer l'ensemble $D$ des points $M$ de $P$ d'affixe $z = x + iy$ tels que :

$$|z-1| = |z - (1+\sqrt{3}) + i|$$

Représenter graphiquement $D$.

**2.** Soit l'application $f$ de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = -iz + (3-i)$. Déterminer géométriquement $f$. Déterminer l'ensemble $D'$ image de $D$ par $f$. Représenter graphiquement $D'$.

## Problème 328

./1976/clermontC/pb/texte

-A- Soient $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels fixés, non-nuls. Pour chaque couple $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, on définit la fonction $f_{a,b}$ par :

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f_{a,b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(a\cos\mu x + b\sin\mu x)$$

Soit $E = \{f_{a,b} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

I- 1° Soit $F$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si l'on note $+$ l'addition des fonctions et $\bullet$ la multiplication d'une fonction par un nombre réel, on sait que $(F, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $(E, +, \bullet)$ en est un sous-espace vectoriel.

2° Démontrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base $B$ de $E$.

II- a) Démontrer que $f_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée $f'_{a,b}$ appartient à $E$. Démontrer que l'application $D$ définie sur $E$ par $D(f_{a,b}) = f'_{a,b}$ est un endomorphisme de $E$.

b) Déterminer la matrice $M$ de $D$ dans la base $B$. En déduire que $D$ est un isomorphisme de $E$. Déterminer la matrice $M^{-1}$ de $D^{-1}$ dans la base $B$ (on note $D^{-1}$ l'application réciproque de $D$).

a) Si l'on pose $F = D^{-1}(f_{a,b})$, montrer que $F$ est une primitive de $f_{a,b}$.

b) En déduire une primitive de la fonction $f$ définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{x}(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)$$

c) Soit $C$ la représentation graphique de $f$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant le centimètre. L'unité d'aire étant le centimètre carré, déterminer l'aire géométrique $S$ de la partie du plan comprise entre la courbe $C$ et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \pi/4$ et $y = 0$, c'est à dire de la partie formée des points dont les coordonnées $x, y$ vérifient :

$$0 \leq x \leq \pi/4 \qquad |y| \leq |f(x)| \qquad \text{et} \qquad y \bullet f(x) \geq 0$$

On tracera succinctement l'arc de $C$ obtenu pour $0 \leq x \leq \pi/4$.

Retour page 1

-B- Cette partie est indépendant de la question (AII). Soit deux nombres réels strictement positifs fixés $\alpha$ et $\beta$. On considère l'application

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R} \qquad (f_{a,b}, f_{a',b'}) \mapsto \alpha aa' + \beta bb'$$

1° Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $\beta$, $B$ est-elle une base orthonormée de $E$ muni de $\varphi$ ?

Dans la suite, on choisit ces valeurs pour $\alpha$ et $\beta$ et on oriente $E$ de façon que $B$ soit une base directe.

2° On fixe maintenant $\lambda = \mu = 1$.

a) Démontrer que $D$ est le produit d'une homothétie vectorielle par une rotation vectorielle. On déterminera ces deux applications linéaires.

b) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à $E$ et rapporté à un repère $(O, B)$. Soit $d$ l'application affine dont l'application linéaire associée est $D$, et qui transforme $A(1,2)$ en $A'(1,0)$. Quelle est la nature de $d$ ? Déterminer analytiquement $d$. Donner les éléments caractéristiques de $d$.

## XXI. Clermont remplacement, série C

**Ex. 1036.** ./1976/clermontCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \log(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

(log désigne le logarithme népérien.)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x^2-1) = \log(x+1) + \log(x-1)$.

   Même question pour l'équation $\log(x^2-1) = 2\log(x) + \log\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log(x^2-1)}{x}$.
2. Étudier les variations de $f$ et la représenter graphiquement.

**Ex. 1037.** ./1976/clermontCrem/exo-2/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x - 5y = 3$.
2. Trouver le ou les nombres $N$ s'écrivant $\overline{xy}$ en base 6, les chiffres $x$ et $y$ vérifiant $4x - 5y = 3$.

   Même question en base dix.

### Problème 329

./1976/clermontCrem/pb/texte

A- Soit la loi de composition interne $\star$ définie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$(z,\ z') \longmapsto z \star z' = z\overline{z'} \quad \text{où } \overline{z'} \text{ désigne le conjugué de } z'.$$

1. Cette loi est-elle commutative ? associative ? Existe-t-il dans $\mathbb{C}$ un élément neutre pour cette loi ?
2. Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$, suivant les valeurs des paramètres complexes $m$ et $k$, l'équation $m \star z = k$.
3. Existe-t-il $z$ complexe tel que $z \star (z \star z) = \mathrm{i}$ ?

B- Dans le suite du problème, à chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On désigne par P* le plan P privé de l'origine $O$.

Pour chaque réel non nul $k$, on définit l'application $T_k$ de P* dans lui-même, qui au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z \star z' = k.$$



Retour page 1

1. Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction de celles de $M$. Que peut-on en déduire pour les points $O$, $M$, $M'$ ?
2. Quelle est la nature de l'application composée $T_m \circ T_k$ où $k$ et $m$ sont réels non nuls ? Pour quelles valeurs de $k$, $T_k$ est-elle involutive ?

C- 1. Soient $(C)$ le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ ; $(C')$ le cercle de rayon $2$ et de centre d'affixe $1+2\text{i}$ ; $(D)$ la droite d'équation $y=x$, privée du point $O$ ; $(D')$ la droite d'équation $y-2x+1=0$.
Trouver les transformés de $(C)$, $(C')$, $(D)$ et $(D')$ par $T_1$.
On tracera sur un même dessin $(C)$, $(C')$, $(D)$, $(D')$ et leurs transformés.
2. Soit $T'$ la transformation ponctuelle qui, au point $M$ d'affixe $z$ associe lorsque cela est possible, le point $M''$ d'affixe $z'' = \dfrac{1}{2\text{i}\overline{z}-1}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T_1 \circ T'$.

D- On note $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des réels non nuls. Pour chaque couple $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^{\star 2}$, on définit une transformation ponctuelle de $\mathrm{P}^\star$ par :

$$t_{(\alpha,\ \beta)}: \begin{array}{rcl} \mathrm{P}^\star & \longrightarrow & \mathrm{P}^\star \\ M(x\ ;\ y) & \longmapsto & N(\alpha x\ ;\ \beta y). \end{array}$$

1. Reconnaître et donner la nature des applications :

$$t_{(1,\ 1)}\ ,\ t_{(-1,\ 1)}\ ,\ t_{(1,\ -1)}\ ,\ t_{(-1,\ -1)}.$$

2. Soit $\mathscr{T} = \left\{t_{\alpha,\ \beta}\ ;\ (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^{\star 2}\right\}$. Étudier la structure de $\mathscr{T}$ muni de la loi de composition habituelle des applications.
3. Soit $t = \left[T_1 \circ t_{(2,\ 1)}\right]^{-1}$, application réciproque de $T_1 \circ t_{(2,\ 1)}$
Exprimer $t$ en fonction de $T_1$ et d'un élément de $\mathscr{T}$. Quelle est l'image $(E)$ par $t$ de la droite $(\Delta)$ d'équation $4x+2y-1=0$ ?
Construire $(E)$ et en donner les éléments caractéristiques.

# XXII. Clermont& Grenoble remplacement, série E

**Ex. 1038.** ./1976/clermontErem/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^4-(5-14\text{i})z^2-2(5\text{i}+12)=0.$$

**Ex. 1039.** ./1976/clermontErem/exo-2/texte.tex

Un sac renferme 8 jetons de forme et de matière identiques dont 3 sont blancs et 56 sont noirs.
On extrait du sac, au hasard, un par un, quatre jetons que l'on dépose, dans l'ordre où ils sont tirés, dans quatre cases numérotées de 1 à 4 (le premier jeton est placé dans la case numéro 1, le deuxième dans la case numérotée 2, etc ...)

**1.** On veut calculer la probabilité que l'on ait :
A : « les quatre cases sont occupées par des jetons noirs ».
B : « les cases 1 et 3 sont occupées par des jetons blancs, les cases 2 et 4 par des jetons noirs ».
Donner un espace probabilisé fini dans lequel A et B sont des événements et calculer leurs probabilités respectives.

**2.** Sur cet espace probabilisé, on définit une variable aléatoire $X$ qui prend pour valeurs le plus petit des numéros de cases contenant un jeton noir.
Déterminer la loi de $X$, son espérance mathématique et sa variance.



Retour page 1

## Problème 330

./1976/clermontErem/pb/texte

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante. Étant donné deux réels $a$ et $b$, on désigne par $f_{a,\,b}$ la fonction numérique de de la variable réelle $x$ définie par :

$$f_{a,\,b}(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x}.$$

A- On étudie dans cette partie le cas où $a = 1$ et $b = -3$ ; on désigne par $g$ la fonction $f_{1,\,-3}$.

1. Étudier la fonction $g$ et la représenter graphiquement dans une repère orthonormé.
2. Montrer que $g$ admet une fonction réciproque que l'on explicitera et que l'on représentera dans le même repère.

B- Dans le plan affine euclidien, on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point $M$ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On suppose $x$ et $y$ fonctions de $t$ qui décrit $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{t} + 3\mathrm{e}^{-t} \\ y = \mathrm{e}^{t} - 3\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

1. Calculer les composantes du vecteur accélération du point $M$ à l'instant $t$. Que remarque-t-on ?
2. Déterminer la trajectoire du point $M$, en préciser la nature et la tracer.
3. Pour quelles valeurs de $t$ le mouvement est-il accéléré ? retardé ? Préciser les portion de trajectoire correspondantes.

On désigne par E l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b}$ où $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

C- 1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même muni de l'addition et de la multiplication par un réel.

2. On désigne par $u$ la fonction $f_{1,\,0}$ et par $v$ la fonction $f_{0,\,1}$. Montrer que $(u,\ v)$ est une base de E.
3. Étant donné un réel $p$, on désigne par $h_{a,\,b}$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$h_{a,\,b}(x) = f_{a,\,b}(x+p).$$

   Vérifier que $h_{a,\,b}$ est un élément de E.
4. Soit l'application $\begin{aligned} \varphi_p : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{E} \\ f_{a,\,b} &\longmapsto h_{a,\,b}. \end{aligned}$
   a) Montrer que $\varphi_p$ est linéaire. Quelle est sa matrice $M_p$ relativement à la base $(u,\ v)$ ? $\varphi_p$ est-elle injective ?
   b) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $\varphi_p$ où $p$ décrit $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\varphi_q \circ \varphi_p$ est un élément de $\mathscr{F}$. En déduire la structure de $\mathscr{F}$ muni de la loi de composition des applications.

# XXIII. Dijon, série C

**Ex. 1040.**

./1976/dijonC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer en fonction de $n$ la somme des $n$ premiers entiers naturels non-nuls.

**2.** Démontrer que, pour tout entier naturel non-nul $n$ :

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{p=n} p\right)^2$$

(Le candidat pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

Soit $s$ la suite de terme général :

$$s_n = \sum_{p=1}^{p=n} p^3$$

Exprimer $s_n$ en fonction de $n$.

**3.** Soit $D_n$ le plus grand diviseur commun des nombres $s_n$ et $s_{n+1}$. Calculer $D_n$ lorsque : (a) $n = 2k$ (b) $n = 2k+1$.

En déduire que pour $n > 1$, $D_n$ est différent de 1 et que trois termes consécutifs $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$ de la suite $s$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.



Retour page 1

**Ex. 1041.** ./1976/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit $P$ un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. soit $\mathscr{C}$ le corps des nombres complexes. A tout point $M$ de coordonnées $(x,\ y)$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$. On rappelle que $i$ est un nombre complexe dont le carré vaut $-1$. Soit $A$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $B$ le point de coordonnées $(0;1)$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

**1.** Soit $S_1$ la similitude directe de centre $O$, de rapport $\sqrt{2}$, et dont une détermination de l'angle est $\pi/4$. Déterminer l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui, à tout nombre complexe $z$ d'image $M$, associe le nombre complexe $z'$ d'image $M' = S_1(M)$.

**2.** Soit $A'$ et $B'$ les images de $A$ et $B$ par $S_1$. Démontrer qu'il existe une similitude directe $S_2$ et une seule qui transforme $A$ en $B'$ et $B$ en $A'$. Préciser son centre, son rapport, et donner une détermination de son angle. (Le candidat devra faire une figure soignée).

**3.** De l'étude du produit $S_2^{-1} \circ S_1$, où $\circ$ représente le produit de composition des applications, déduire une expression de $S_2$ sous la forme $S_2 = S_1 \circ S$, l'application $S$ étant une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

## PROBLÈME 331

./1976/dijonC/pb/texte

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle $x$, définies sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^\star$ des nombres réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle $t$, définies et continues sur $[0\,;\pi]$, ainsi que leur fonction dérivée première $f'$. On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

-I- 1° Calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

$x$ étant un paramètre réel strictement positif, $\mathrm{e}$ la base des logarithmes népériens.

2° a) Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ donnée par

$$g(x) = \mathrm{e}^{\pi x} - 1 - \pi x$$

.

Etudier le sens de variation de $g$. En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

b) Etudier les variations de la fonction numérique $I$ de la variable réelle $x$, définie pour tout réel $x$ strictement positif par :

$$I(x) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

. On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

-II- 1° a) Soit $f$ une fonction, élément de $\mathcal{E}$. Justifier l'existence, pour tout nombre réel $x$ strictement positif, de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Soit $L$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui, à tout élément $f$ de $\mathcal{E}$, associe la fonction $F$ définie pour tout réel $x$ strictement positif par :

$$F(x) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que $L$ est une application linéaire.



Retour page 1

2° Pour toute fonction $f$ de $\mathcal{E}$, on pose :

$$L(f) = F \qquad L(f') = F^*.$$

Démontrer que la fonction $F^*$ est définie, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$F^*(x) = \mathrm{e}^{-\pi x} f(\pi) - f(0) + xF(x)$$

-III- Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les trois fonctions numériques définies sur $[0\,;\pi]$ par $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = \cos 2t$ et $f_3(t) = \sin 2t$. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions numériques $af_1 + bf_2 + cf_3$ pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de nombres réels.

1∘ Démontrer que $\mathcal{E}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base $B$ est $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.

2∘ On note $L_1$ la restriction de $L$ à $\mathcal{E}_1$, c'est à dire l'application de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{E}_1 \qquad L_1(f) = L(f) = F$$

a) Déterminer les fonctions $F_1 = L_1(f_1)$, $F_2 = L_1(f_2)$ et $F_3 = L_1(f_3)$.

b) Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}_1$ exprimé dans la base $B$. Calculer $F(x)$ pour tout nombres réel $x$ strictement positif.

c) Démontrer que $L_1$ est une application injective.

3∘ a) Soit $f$ un élément de $\mathcal{E}_1$. Justifier le fait que $f([0\,;\pi])$ est un intervalle fermé $[m\,;M]$ avec $m \leq M$.

b) Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$m\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x} \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x}$$

c) $x$ étant donné égal à $x_0$, démontrer quil existe au moins un réel $t_0$ de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que :

$$F(x_0) = f(t_0)\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}{x_0}.$$

Calculer $t_0$ dans le cas particulier $f = f_1 + f_2 + f_3$ et $x_0 = 2$.

## XXIV. Dijon remplacement, série C

Ex. 1042. ./1976/dijonCrem/exo-1/texte.tex

1. D'montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit P un plan affine rapport' a? un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note J l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ des $n$ premiers entiers naturels non nuls. On appelle $M_{(m,p)}$ le point de coordonnées $(m\ ;\ p)$ dans le repère $(m\ ;\ p)$ appartenant a? J × J. On affecte chaque point $M_{(m,p)}$ du coefficient $m$ ; on note $(M_{(m,p)},\ m)$ le point pondéré obtenu.

   a) Déterminer, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les coordonnées du barycentre $G_1$ du système $\left\{\left(M_{(1,p)},\ 1\ ;\ p \in \mathrm{J}\right)\right\}$, obtenu pour $m = 1$. Déterminer, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les coordonnées du barycentre $G_{m_0}$ du système $\left\{\left(M_{(m_0,p)},\ 1\ ;\ p \in \mathrm{J}\right)\right\}$, obtenu pour $m = m_0$.

   b) En déduire les coordonnées du barycentre $G$ du système

$$\left\{\left(M_{(m,p)},\ 1\ ;\ (m,p) \in \mathrm{J} \times \mathrm{J}\right)\right\}.$$

   c) Quel est l'ensemble des valeurs de $n$ pour lesquelles les coordonnées de $G$ sont entières ?



Retour page 1

**Ex. 1043.** ./1976/dijonCrem/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien, rapporté a? un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. Á tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on fait correspondre son affixe $z = x + \mathrm{i}y$, où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. On appelle $s$ la suite, application de $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels, dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes, définie par :

$$z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})\ z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{2} z_n + 1.$$

1. Montrer que $z_n$ s'exprime comme somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique. Calculer $z_n$ en fonction de $n$.
2. Soit $M_n$ l'image du nombre complexe $z_n$ , $n \in \mathbb{N}$. Par quelle transformation affine simple passe-t-on de $M_n$ a? $M_{n+1}$ ?
3. Soit $A$ le point de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\ ;\ \frac{2}{5}\right)$. Calculer en fonction de $n$, la norme du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$. Trouver la limite de cette norme quand $n$ tend vers $+\infty$
   Représenter les points $A_0,\ M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

## Problème 332

./1976/dijonCrem/pb/texte

I- Soient $f$ et $g$ les fonctions numériques de la variable réelle $t$ définie par :

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(t) == \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

1. Étudier les variations de la fonction $g$.
   Étudier les variations de la fonction $f$ .
   Tracer les courbes représentatives dans un même repère orthonormé.
2. Démontrer que $g$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g^{-1}$, fonction réciproque de $g$.
3. É?tablir les identités suivantes :

$$(\forall t \in GR) \qquad f^2(t) - g^2(t) = 1$$

où $f^2(t) = f(t) \times f(t)$

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad (\forall t' \in \mathbb{R}) \qquad f(t) \times f(t') + g(t) \times g(t') = f(t + t')$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad (\forall t' \in \mathbb{R}) \qquad g(t) \times f(t') + f(t) \times g(t') = g(t + t')$$

II- Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et B $= (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base orthonormée de E . On note L (E ) l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même(endomorphismes de E).
On note GL(E) l'ensemble des applications linéaires bijectives de E sur lui-même (transformations linéaires de E ou automorphismes de E). On appelle $\psi$ l'application de E $\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall(\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}) \qquad (\psi(\vec{u}, \vec{v}) = 4xx' - yy')$$

$(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ étant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base B.
On définit l'application $N$ de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall \vec{u} \in \mathbf{E}) \qquad (N(\vec{u}) = \psi(\vec{u}, \vec{u})).$$

On note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ 2b & a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\psi$ est une application bilinéaire symétrique. Quel est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $N(\vec{u}) = 0$ ?



Retour page 1

2. On dit que $\varphi_{a,b}$ conserve $N$ si et seulement si : $(\forall \vec{u} \in \mathrm{E})\ (N(\varphi_{a,b}(\vec{u}) = N(\vec{u}))$.
   Démontrer que $\varphi_{a,b}$ conserve $N$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 1$.
   Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications linéaires $\varphi_{a,b}$ qui conservent $N$ est un groupe commutatif pour la loi de composition des applications (notée $\circ$).
3. On note $\Phi_t$ l'application $\varphi_{f(t),g(t)}$ $f$ et $g$ étant les fonctions étudiées dans la partie I.
   Démontrer que $\varphi_{f(t),g(t)}$ est élément de $\mathscr{F}$ et que l'application $m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{F}$ définie par

$$m : t \longmapsto \Phi_t$$

   est un homomorphisme injectif du groupe $(\mathbb{R},\ +)$ dans le groupe $(\mathscr{F},\ \circ)$. Démontrer que l'ensemble $m(\mathbb{R})$ est formé des éléments $\varphi_{a,b}$ de $\mathscr{F}$ pour lesquels $a$ est strictement positif.

III- Soit P le plan affine euclidien associé à l'espace vectoriel E, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $A$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans ce repère. On considère le point mobile $M$ du plan P dont la position est définie à l'instant $t$ par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \Phi_t(\overrightarrow{OA}).$$

1. Exprimer à l'instant $t$ les coordonnées de $M$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Démontrer que le support de la trajectoire de $M$ est une hyperbole dont on précisera les asymptotes, les foyers, les sommets.
   Préciser la trajectoire de $M$ quand $t$ décrit $\mathbb{R}$.
3. Calculer en fonction de $t$ les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$. De l'étude du produit scalaire $\vec{V}.\vec{\Gamma}$, déduire les valeurs de $t$ pour lesquelles le mouvement est accéléré, retardé.

# XXV. Gabon, série C & E

**Ex. 1044.** ./1976/gabonC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x)^{-1/x} \ \text{ si } \ x \in ]-\infty; -1] \qquad f(x) = ax + b \ \text{ si } \ x \in ]-1; +\infty[$$

Comment peut-on choisir les réels $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ soit :

**1.** continue en $-1$ ?

**2.** -2- dérivable en $-1$ ?

Pour les valeurs trouvées en 2., on étudiera la fonction $f$ et l'on tracera la courbe représentative $(c)$ de $f$ dans un repère orthonormé du plan affine.

**Ex. 1045.** ./1976/gabonC/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère l'application $f$ qui au point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\overline{z} + i$$

Démontrer que $f$ est une similitude inverse dont on précisera le rapport $k$, le centre $C$ et l'axe $D$.

**Problème 333** ./1976/gabonC/pb/texte

On désigne par $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et par $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien sur $E$ rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Pour tout couple $(u,b)$ de nombres réels, on considère l'application $f_{(u,b)}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x,y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x',y')$ dans le même repère, $x'$ et $y'$ vérifiant les relations :

$$x' = x + u \qquad y' = -y + 2b$$

1. Montrer que $f_{(u,b)}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}$.

Retour page 1

2. Caractériser l'application $f_{(0,b)}$.
3. On se place dans le cas où $u$ est un réel non nul. $f_{(u,b)}$ possède t-elle des points invariants ? Montrer que $f_{(u,b)}$ peut se décomposer en le produit d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $D$ et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à $D$. (On déterminera l'équation de $D$ et les coordonnées de $\vec{V}$ en fonction de $u$ et $b$). Cette décomposition est-elle unique ? Le produit est-il commutatif ?
4. $(u, b)$ et $(u', b')$ étant deux couples de nombres réels quelconques, déterminer l'application $f_{(u',b')} \circ f_{(u,b)}$. Ce produit est-il commutatif ? Déterminer l'application réciproque de $f_{(u,b)}$.
5. On considère l'ensemble $P$ de toutes les applications $f_{(u,b)}$ quand $(u, b)$ décrit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'ensemble $Q$ de toutes les translations de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble $F = P \cup Q$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

B) Pour tout nombre réel $\varphi$ appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout couple $(u, b)$ de nombres réels, on considère l'application $f_{(\varphi,u,b)}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x', y')$ dans le même repère, $x'$ et $y'$ vérifiant les relations :

$$x' = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi + u - b\sin 2\varphi$$

$$y' = x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi + 2b\cos^2\varphi + u\tan\varphi$$

1. Que peut-on dire de l'application $f_{(0,u,b)}$ ?
2. Pour $\varphi$ différent de zéro, caractériser l'endomorphisme associé à l'application affine $f_{(\varphi,u,b)}$ en montrant que l'ensemble des vecteurs invariants par cet endomorphisme est la droite vectorielle $\mathcal{D}$ d'équation $y = x\tan\varphi$.
3. Pour $\varphi = \pi/4$, caractériser l'application $f_{(\pi/4,u,b)}$.
4. Revenant au cas général, en posant $a = \tan\varphi$, exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $a, b, u$. Montrer que si $u = 0$ tout point de la droite $D$ d'équation $y = ax+b$ est invariant. En déduire la nature de l'application affine $f_{(\varphi,0,b)}$. Enfin, si $u$ est différent de 0, montrer que $f_{(\varphi,u,b)}$ est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $D$ d'équation $y = ax + b$ (avec $a = \tan\varphi$) et d'une translation de vecteur $\vec{V}$ colinéaire à $D$.

# XXVI. Grenoble, série C

**Ex. 1046.** ./1976/grenobleC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - 1.$$

**1.** Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Préciser l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'axe $(O, \vec{i})$.

**2.** Montrer que la fonction $f$ admet une bijection réciproque $g$. Préciser le domaine de définition et l'ensemble des valeurs de $g$ ; expliciter cette fonction.

**Ex. 1047.** ./1976/grenobleC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E.
On considère l'application linéaire $f$ de E dans lui-même définie par

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) &= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{aligned}$$

**1.** Déterminer le noyau de $f$ et en donner une base.

**2.** Déterminer l'image $P$ de $f$. On en donnera une équation cartésienne et une base.



Retour page 1

**3.** On considère l'application linéaire $f_1$ de $P$ dans lui-même définie par

$$\forall \vec{u} \in P, \quad f_1(\vec{u}) = f(\vec{u}).$$

Quelle est la nature de $f_1$ ?

## Problème 334

./1976/grenobleC/pb/texte

Soit $A$ et $B$ les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

I- On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices $\lambda A + \mu B$ où $(\lambda,\ \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux et que $(A,\ B)$ en est une base.

2° Calculer $A^2$, $B^2$, $A \times B$ et $B \times A$ et en déduire que la produit de deux matrices quelconques de $\mathscr{M}$.

3° Montrer que $\mathscr{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif et unitaire. Quels en sont les éléments inversibles ?

II- Soit $P$ un plan affine euclidien et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de ce plan. Pour toute valeur réelle de $\lambda$, on considère l'application $f_\lambda$ de $P$ dans lui-même définie de la façon suivante :

— l'application linéaire associée à $f_\lambda$ a pour matrice :

$$M_\lambda = \lambda A + B$$

relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ;

— l'image de $O$ par $f_\lambda$ est le point $O'$ de coordonnées

$$\begin{cases} x_\lambda = \dfrac{1}{3}(\lambda + 1) \\ y_\lambda = \dfrac{2}{9}(\lambda + 1)^2 \end{cases}$$

relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Pour quelle valeur de $\lambda$, l'application $f_\lambda$ est-elle bijective ? Quelle est alors l'image de $P$ par $f_\lambda$.

2° Montrer que l'application $f_\lambda$ admet une droite de points invariants uniquement pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$.

Écrire une équation cartésienne de cette droite dans chacun de ces cas.

3° Soit $s$ l'application $f_\lambda$ correspondant à $\lambda = -1$. Montrer que $s$ est une isométrie affine que l'on précisera.

4° Soit $g$ l'application $f_\lambda$ correspondant à $\lambda = 2$. On désigne par $M'$ l'image par $g$ d'un point $M$ de $P$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction indépendante de $M$.

b) Soit $H$ le symétrique de $M'$ par rapport à $M$. Quel est l'ensemble des points $H$ ? En déduire une construction géométrique de $M'$ à partir de $M$.

III- Soit $M_0$ le point de coordonnées $(3\ ;\ 1)$ relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $P$ définis par

$$M_{n+1} = g(M_n).$$

On appelle $x_n$ et $y_n$ les coordonnées de $M_n$.

1° Montrer que les points $M_n$ appartiennent tous à un même droite dont on écrira une équation cartésienne. En déduire une relation liant $x_{n+1}$ et $x_n$ pour tout entier naturel $n$.

2° Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $x_n$ et $y_n$ sont :

— soit tous deux divisibles par $5$ ;

— soit premiers entre eux.

3° Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = 2^{n+1} + 1.$$

Établir que $x_n$ est divisible par $5$ si et seulement si $x_{n+4}$ est divisible par $5$.
En déduire les valeurs de $n$ pour lesquelles $x_n$ et $y_n$ sont tous deux divisibles par $5$.

## XXVII. Grenoble & Clermont, série E

**Ex. 1048.** ./1976/grenobleE/exo-1/texte.tex

Voir exercice 1046 série C Grenoble.

**Ex. 1049.** ./1976/grenobleE/exo-2/texte.tex

Voir exercice 1047 série C Grenoble.

### Problème 335 ./1976/grenobleE/pb/texte

Voir problème 334 série C - Grenoble :
Partie I : identique. Partie II : ajouter à la question 4 :
c) quelle est l'image par $g$ d'une droite de $P$ ?
Préciser les images des droites $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.
Partie III : supprimer la question 2 et la deuxième partie de la question 3.

## XXVIII. Grenoble remplacement, série C

**Ex. 1050.** ./1976/grenobleCrem/exo-1/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - \left[2 + \mathrm{i}(m - \sqrt{3})\right] z + 1 + m\sqrt{3} + \mathrm{i}(m - \sqrt{3}) = 0 \tag{1}$$

où $m$ est un paramètre réel.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par $M'$ et $M''$ les points dont les affixes $z'$ et $z''$ sont les solutions de l'équations (1).

a) Déterminer $m$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ soient orthogonaux.

b) Déterminer $m$ pour que la distance de $M'$ à$M''$ soit égale à un nombre réel positif ou nul $\ell$ donné.

**Ex. 1051.** ./1976/grenobleC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de E.
On considère l'application linéaire $f$ de E dans lui-même définie par

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) &= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{aligned}$$

**1.** Déterminer le noyau de $f$ et en donner une base.

**2.** Déterminer l'image $P$ de $f$. On en donnera une équation cartésienne et une base.

**3.** On considère l'application linéaire $f_1$ de $P$ dans lui-même définie par

$$\forall \vec{u} \in P, \quad f_1(\vec{u}) = f(\vec{u}).$$

Quelle est la nature de $f_1$ ?



Retour page 1

## Problème 336

./1976/grenobleC/pb/texte

Soit $A$ et $B$ les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

I- On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices $\lambda A + \mu B$ où $(\lambda,\ \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux et que $(A,\ B)$ en est une base.

2° Calculer $A^2$, $B^2$, $A \times B$ et $B \times A$ et en déduire que la produit de deux matrices quelconques de $\mathscr{M}$.

3° Montrer que $\mathscr{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif et unitaire. Quels en sont les éléments inversibles ?

II- Soit $P$ un plan affine euclidien et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de ce plan. Pour toute valeur réelle de $\lambda$, on considère l'application $f_\lambda$ de $P$ dans lui-même définie de la façon suivante :

— l'application linéaire associée à $f_\lambda$ a pour matrice :

$$M_\lambda = \lambda A + B$$

relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ;

— l'image de $O$ par $f_\lambda$ est le point $O'$ de coordonnées

$$\begin{cases} x_\lambda = \dfrac{1}{3}(\lambda+1) \\[2ex] y_\lambda = \dfrac{2}{9}(\lambda+1)^2 \end{cases}$$

relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Pour quelle valeur de $\lambda$, l'application $f_\lambda$ est-elle bijective ? Quelle est alors l'image de $P$ par $f_\lambda$.

2° Montrer que l'application $f_\lambda$ admet une droite de points invariants uniquement pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$.

Écrire une équation cartésienne de cette droite dans chacun de ces cas.

3° Soit $s$ l'application $f_\lambda$ correspondant à $\lambda = -1$. Montrer que $s$ est une isométrie affine que l'on précisera.

4° Soit $g$ l'application $f_\lambda$ correspondant à $\lambda = 2$. On désigne par $M'$ l'image par $g$ d'un point $M$ de $P$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction indépendante de $M$.

b) Soit $H$ le symétrique de $M'$ par rapport à $M$. Quel est l'ensemble des points $H$ ? En déduire une construction géométrique de $M'$ à partir de $M$.

III- Soit $M_0$ le point de coordonnées $(3\ ;\ 1)$ relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $P$ définis par

$$M_{n+1} = g(M_n).$$

On appelle $x_n$ et $y_n$ les coordonnées de $M_n$.

1° Montrer que les points $M_n$ appartiennent tous à un même droite dont on écrira une équation cartésienne. En déduire une relation liant $x_{n+1}$ et $x_n$ pour tout entier naturel $n$.

2° Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $x_n$ et $y_n$ sont :

— soit tous deux divisibles par $5$ ;

— soit premiers entre eux.

3° Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = 2^{n+1} + 1.$$

Établir que $x_n$ est divisible par $5$ si et seulement si $x_{n+4}$ est divisible par $5$.

En déduire les valeurs de $n$ pour lesquelles $x_n$ et $y_n$ sont tous deux divisibles par $5$.



Retour page 1

# XXIX. Lille, série C

**Ex. 1052.** ./1976/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère l'application de l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ dans lui-même qui, à $z$, associe

$$f(z) = \mathrm{i}z^3 + (2\mathrm{i}-1)z^2 - (\mathrm{i}+4)z + 3(2\mathrm{i}-1).$$

**1.** Dans le cas où $z$ est un réel, écrire $f(z)$ sous la forme $\alpha + \mathrm{i}\beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels exprimés en fonction de $z$.
En déduire que l'équation $f(z) = 0$, admet une racine réelle $z_0$ que l'on calculera.

**2.** Démontrer que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - z_0)(Az^2 + Bz + C)$$

et résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

**Ex. 1053.** ./1976/lilleC/exo-2/texte.tex

Soit $\varphi$ la fonction numérique à variable réelle définie par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** Démontrer que la fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**2.** Démontrer que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**3.** Étudier les variations de $\varphi$ est construire la courbe représentative de $\varphi$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**4.** Démontrer que $\varphi$ est intégrable sur $[0\,;x]$, $x$ étant un réel quelconque.
(On ne demande pas de calculer l'intégrale de $\varphi$ sur $[0\,;x]$).

## Problème 337

./1976/lilleC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathscr{M}_2'$ l'ensemble des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{a-b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{a+b}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$$

et $\mathscr{P}$ le plan affine associé au plan vectoriel P. On munit P de la base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et $\mathscr{P}$ du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I- 1° Démontrer que $\mathscr{M}_2'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$.

2° Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $(U,\ V)$ est une base de $\mathscr{M}_2'$.

b) Calculer $U^2$, $V^2$, $UV$, $VU$.

3° Démontrer que la multiplication des matrices est une loi interne de $\mathscr{M}_2$.

II- Soit $f_{a,\ b}$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par les formules

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a+b}{2}x + \dfrac{a-b}{2}y \\ y' = \dfrac{a-b}{2}x + \dfrac{a+b}{2}y \end{cases}$$

$x$ et $y$ désignent les coordonnées d'un point $M$ et $x'$, $y'$ celles de $M' = f_{a,\ b}(M)$, $a$ et $b$ étant deux nombres réels.
Soit F la famille des applications $f_{a,\ b}$, quand $(a,\ b)$ parcourt $\mathbb{R}^2$.



Retour page 1

1° Démontrer que la composée de deux applications de F est une application de F; calculer $c$ et $d$ lorsque $f_{c,\,d} = f_{a,\,b} \circ f_{a',\,b'}$.

2° Pour quelles valeurs de $a$ et $b$, $f_{a,\,b}$ a-t-elle une réciproque? Vérifier que celle-ci appartient à F.

3° $n$ étant un entier strictement positif, calculer $\alpha_n$ et $\beta_n$ définis par

$$f_{\alpha_n,\,\beta_n} = f_{\alpha_{n-1},\,\beta_{n-1}} \circ f_{a,\,b}$$

et la donnée de $\alpha_0$ et $\beta_0$.

4° Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan, tels que les points $O$, $M$ et $M'$ soient alignés.

5° En général, $f_{a,\,b}$ transforme une droite en une droite. Dans quels cas sont-elles parallèles?

III- On pose $g_b = f_{1,\,b}$.
Le point $M_0$ de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ a pour image par $g_b$ $M_1 = g_b(M_0)$ et on pose plus généralement $M_n = g_b(M_{n-1})$ pour tout entier $n$ strictement positif.

1° a) Montrer que pour $|b| < 1$, les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de $M_n$ ont des limites finies, les calculer.

b) On suppose toujours $|b| < 1$. On désigne par $A$ le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, et on considère le point $P_n$ de coordonnées $(X_n\ ;\ Y_n)$ défini par

$$\overrightarrow{AP_n} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} + \cdots + \overrightarrow{AM_n}.$$

Comment faut-il choisir le point $M_0$ pour que $X_n$ et $Y_n$ aient des limites finies? Quelles sont ses limites?
A quel ensemble appartiennent, alors, les points $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n,\ \ldots$?

2° Dans cette question on considère $b = 3$.

a) Déterminer, par une équation dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la transformée $(C')$ du cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon 1 par l'application $g_3$.

b) Soit la courbe $(E)$ dont une équation par rapport au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$$

On considère le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ défini de la façon suivante :

- $r$ est une rotation vectorielle de P¨dont une détermination de l'angle est $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$.
- $\vec{I} = r(\vec{\imath})$ et $\vec{J} = r(\vec{\jmath})$.

Déterminer $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2})$ pour que l'équation de $(E)$ dans le nouveau repère soit de la forme :

$$AX^2 + BY^2 + C = 0.$$

En déduire la nature de $(E)$ et en donner ses éléments caractéristiques.

## XXX. Lille, série E

Ex. 1054. ./1976/lilleE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. Soit $P$ l'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui à $z$ associe :

$$P(z) = 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** $x$ étant un réel, exprimer le complexe $P(x)$ sous la forme $u + vi$, $u$ et $v$ étant des réels dépendant de $x$.
En déduire l'existence d'un réel $a$ unique tel que $P(a) = 0$.
Montrer que pour tout complexe $z$, $P(z)$ s'écrit $(z-a)(pz^2 + qz + r)$ où $p, q, r$ sont trois complexes à déterminer.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
On appelle $b$ et $c$ les racines autres que $a$, $b$ étant celle dont la partie réelle est positive.

**3.** Soit $A$, $B$, $C$ les points du plan complexe d'affixes respectives $a, b, c$. Déterminer les nombres réels $\beta$ et $\gamma$ tels que $O$ soit le barycentre de $A$, $B$, $C$ affectés des coefficients respectifs $10$, $\beta$, $\gamma$.



Retour page 1

**Ex. 1055.** ./1976/lilleE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$. L'unité de longueur est le centimètre. $O$ est au centre de la feuille, on choisit le plan $XOY$ pour plan horizontal de projection et le plan $YOZ$ pour plan frontal de projection.
L'axe $\overrightarrow{OY}$ est orienté positivement de gauche à droite. $\overrightarrow{OX}$ est dirigé vers le bas de la feuille et $\overrightarrow{OZ}$ vers le haut.
On donne le plan $(P)$ d'équation $x+y+2z=6$ et le plan $(Q)$ d'équation $2x-y+z=6$.

**1.** Construire les traces du plan $(P)$ et celles du plan $(Q)$.

**2.** Déterminer l'épure de la droite $(D)$ intersection des plans $(P)$ et $(Q)$.

**3.** Soit A et B les traces de la droite $(D)$. Á l'aide d'une rotation faire apparaître la vraie grandeur du segment AB.

## Problème 338

./1976/lilleE/pb/texte

I- On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 1,$$

et sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de la fonction $g$.
2. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation cartésienne $y = 2x-1$ est asymptote àa la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions $0$ et $x_0$, et que $x_0 \in ]-1{,}26\,; -1{,}25[$.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$.
5. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la portion du plan ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que

$$x_0 \leqslant x \leqslant 0$$

$$g(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

   Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de $x_0$.
   Déduire du I3 un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude $0{,}1$.

II- Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$.
Pour tout nombre réel $\alpha$, on considère l'application linéaire $\varphi_\alpha$ de $\mathscr{P}$ dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2} & \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2} \\ \dfrac{1-2\alpha}{2} & \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'application $\varphi_\alpha$ est-elle bijective ?
2. Déterminer selon les valeurs de $\alpha$ le noyau et l'image de $\varphi_\alpha$.

III- Soit P le plan affine euclidien de repère orthonormé $(\omega,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ et $f_\alpha$ l'application affine dont l'application linéaire associée est $\varphi_\alpha$, laissant invariant le point $A$ de coordonnées $(2\,;\,1)$. Á tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$, $f_\alpha$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$.

1. Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$, de $y$ et de $\alpha$.
2. Démontrer que $f_0$ est la projection orthogonale sur la droite $(\Delta)$ d'équation cartésienne $x-y-1=0$.
3. $x_0$ étant le réel non nul solution de l'équation $g(x)=0$ dans I3, démontrer que $f_{x_0} = h \circ f_0$, $h$ étant une homothétie ponctuelle de P que l'on définira.



Retour page 1

# XXXI. Lille remplacement, série C

**Ex. 1056.** ./1976/lilleCrem/exo-1/texte.tex

On note $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ..., $\overline{11}$ les éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ les diviseurs de $0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \qquad x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = \overline{0},$$

où $\overline{4}$, $\overline{3}$, $\overline{0}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. (On pourra éventuellement essayer de mettre l'expression : $x^2 - \overline{4}x + \overline{3}$ sous forme d'un produit de facteurs.)

**Ex. 1057.** ./1976/lilleCrem/exo-2/texte.tex

1. Résoudre l'équation :

$$(1+\mathrm{i})z^2 - 2\mathrm{i}(1+m)z + (\mathrm{i}-1)(m^2+1) = 0 \tag{1}$$

$z$ étant l'inconnue complexe et $m$ un paramètre complexe.

2. Dans un plan affine euclidien E, rapporté à un repère orthonormé, on associe au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ on dit que $M$ est l'image de $z$, $z$ l'affixe du point $M$. Soit $M_1$ et $M_2$ les images de $z_1$ et $z_2$ solutions de l'équation (1), montrer que $M_2$ est l'image de $M_1$ dans une rotation (indépendante du paramètre $m$) dont on précisera le centre et l'angle.

# XXXII. Lille remplacement, série E

**Ex. 1058.** ./1976/lilleErem/exo-1/texte.tex

Résoudre sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$$U^2 - (3-2\mathrm{i})U + (2-2\mathrm{i}) = 0 \tag{1}$$

$$Z^6 - (3-2\mathrm{i})Z^6 + (2-2\mathrm{i}) = 0. \tag{2}$$

Pour l'équation 1, on donnera les solutions sous la forme algébrique.
Pour l'équation 2, on calculera le module et l'argument de chaque solution.

**Ex. 1059.** ./1976/lilleErem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;2]$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0\,;1[, & f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}, \\ \forall x \in [1\,;2], & f(x) = 2\sin\dfrac{\pi}{2}x. \end{cases}$$

**1.** Étudier la continuité de $f$ sur $[0\,;2]$.

**2.** La fonction $f$ est-elle dérivable en $x=1$ ?

**3.** Étudier la fonction $f$ et construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$.

**4.** Calculer l'aire algébrique du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$ d'une part et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$ d'autre part. (On pourra écrire $\dfrac{1-3x}{x-2} = a + \dfrac{b}{x-2}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.)

## PROBLÈME 339

./1976/lilleErem/pb/texte

On notera que, dans ce problème, II et III sont indépendantes.

I- Le plan vectoriel P est rapporté à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

A tout couple $(a,\ b)$ de réels vérifiant la condition $a^2-4b^2 \neq 0$, on associe l'application linéaire $F_{a,\ b}$ de P dans P définie par :

$$F_{a,\ b}(\vec{i}) = a\vec{i}+4b\vec{j} \qquad \text{et} \qquad F_{a,\ b}(\vec{j}) = b\vec{i}+a\vec{j}.$$

Cette application est caractérisée par sa matrice relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}.$$

On appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble des ces applications $F_{a,\ b}$.

1. Démontrer que la loi de compositions des applications linéaires, notée $\circ$, confère à $\mathscr{F}$ la structure de groupe commutatif.
2. Soient les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{u}_2 = \vec{i}-2\vec{j}$.

   a) Vérifier que la droite vectorielle $\mathscr{D}_1$ (engendrée par $\vec{u}_1$) et la droite vectorielle $\mathscr{D}_2$ (engendrée par $\vec{u}_2$) sont globalement invariantes par tout élément de $\mathscr{F}$.

   b) Déterminer la matrice de l'application $F_{a,\ b}$, relativement à la base $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$.

3. On suppose cette fois que la couple $(a,\ b)$ vérifie la relation $(a-1)^2-4b^2=0$, c'est-à-dire que l'on a $a+2b=1$ ou $a-2b=-1$.

   Vérifier qu'alors $F_{a,\ b}$ laisse invariant les vecteurs de l'une ou l'autre des deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ ou $\mathscr{D}_2$.

Le plan affine $\mathscr{P}$ étant rapporté au repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application affine $f$, qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax+by-\alpha \\ y' = 4bx+ay-2\alpha. \end{cases}$$

$\alpha$ étant un réel donné, et l'on rappelle que l'on a toujours $a^2-4b^2 \neq 0$.

II- 1. On suppose d'abord que $(a,\ b)$ vérifie aussi la relation $(a-1)^2-4b^2 \neq 0$.

Démontrer que l'application $f$ a un point invariant unique $\Omega$. Que peut-on dire des droites affines de direction $\mathscr{D}_1$, $CaligD_2$ issues de $\Omega$ ?

2. On suppose cette fois que $a-2b=1$ et $a+2b \neq -1$.

   Démontrer que $f$ laisse invariant tous les points d'une droite affine $\Delta$ à déterminer. Existe-t-il des droites globalement invariantes par $f$ ?

3. On suppose cette fois que $a+2b=1$ et $a-2b \neq -1$. Existe-t-il une droite affine $\Delta'$ dont tous les points sont invariants par $f$ ? Existe-t-il des droites globalement invariantes par $f$ ?

III- Dans le plan affine $\mathscr{P}$, rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point mobile $M$ a pour coordonnées à l'instant $t$ :

$$\begin{cases} x = \cos t + cos 2t \\ y = 2(\cos t - \cos 2t). \end{cases}$$

a) Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ et mettre $x\vec{i}+y\vec{j}$ sous la forme $X\vec{u}_1+Y\vec{u}_2$. Calculer $X$ et $Y$ en fonction de $t$. En déduire que la trajectoire de $M$ est une partie d'une courbe $(\mathscr{C})$, dont on donnera une équation dans le repère $(O,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$.

Construire cette trajectoire.

b) On considère l'application affine $f$ correspondant à $a=2$ et $b=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=0$. Construire par $f$ l'image de la trajectoire de $M$.



Retour page 1

# XXXIII. Limoges, série C

**Ex. 1060.** ./1976/limogesC/exo-1/texte.tex

Une urne contient 5 boules numérotées $10,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.
On tire deux boules simultanément et on fait la somme $X$ des nombres inscrits sur les boules tirées.

**1.** Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

**2.** Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

**3.** Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire $X$.

**Ex. 1061.** ./1976/limogesC/exo-2/texte.tex

**1.** Montrer que tout réel $x$ différent de $(-1)$ vérifie l'égalité :

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-x)^n}{1+x}.$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

**2.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ différent de zéro et pour tout $x$ élément de $[0\,;1]$ on a la double inégalité :

$$(-x^n)\leqslant\frac{(-x)}{1+n}\leqslant x^n.$$

En déduire les inégalités

$$-\frac{1}{1+n}\leqslant\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1+n}$$

et la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$ de la suite

$$U_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

## Problème 340

./1976/limogesC/pb/texte

A- On considère dans le plan affine euclidien $\pi$ rapporté au repère orthonormé $(\omega,\ \vec{u},\ \vec{v})$, l'application affine $g$ qui, à tout point $H$ de coordonnées $(p,\ q)$ associe la point $H'$ de coordonnées $(p',\ q')$ vérifiant :

$$\begin{cases}p'=p\log x-q\log y\\ q'=p\log y+q\log x\end{cases}$$

$x$ et $y$ étant des paramètres réels strictement positifs, le symbole $\log$ désignant la logarithme népérien.

1° Pour quelle valeur du couple $(x,\ y)$, l'application $g$ n'est-elle pas bijective sur $\pi$ ?

2° Dans cette question, on considère les couples $(x,\ y)$ comme les coordonnées d'un point $M$ d'un plan affine euclidien $P$ rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $g$ soit une homothétie.

b) Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $g$ soit involutive.
On trouvera deux points et on précisera, pour chacun, la nature du $g$.

c) Déterminer l'ensemble $(K)$ des points $M$ tels que $g$ soit une isométrie affine. On se bornera à donner une équation de $(K)$.



Retour page 1

B- label110220111553 On appelle $P$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $P^+$ l'ensemble des points de $P$ sont les coordonnées sont strictement positives.

On considère l'application $\varphi : P \to P^+$ telle que l'image par $\varphi$ d'un point de coordonnées $(x,\ y)$ soit le point $M'$ de coordonnées $(x',\ y')$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^x \\ y' = \mathrm{e}^y \end{cases}$$

(e désignant la base des logarithmes népériens).

1° Montrer que $\varphi$ est bijective de $P$ sur $P^+$. Existe-t-il des points de $P$ invariants par $\varphi$ ?

2° Donner l'équation de $\varphi(D)$, image par $\varphi$, de la droite $(D)$ d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

On précisera la nature et la position de $\varphi(D)$ dans les cas particuliers suivants :

a) $a$ (ou $b$) est nul.

b) $a = b$.

C- 1° Montrer que l'image par $\varphi$ du cercle de centre $O$ et de rayon 1 est l'ensemble $(K)$ défini au A(2)c

2° Étudier les fonctions numériques :

$$y_1 = \mathrm{e}^{\sqrt{1-\log^2 x}}$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\log^2 x}}.$$

Déduire de leurs représentations graphiques le tracé de $(K)$.
Montrer que $(K)$ admet la première bissectrice comme axe de symétrie.
Calculer les coordonnées des intersections $A$ et $B$ de cette bissectrice et de $(K)$.
Déterminer les points de contact $A'$ et $B'$ de $(K)$ avec les tangentes à $(K)$ issues de $O$. Nature du quadrilatère $AA'BB'$.

N.B. Les parties **??**- et **??**- sont entièrement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque, la partie C -dépend partiellement de **??**- et de **??**- .

## XXXIV. Limoges & Poitiers , série E

Ex. 1062. ./1976/limogesE/exo-1/texte.tex

Un point $M$ mobile se déplace sur un axe orienté d'origine $O$ et de vecteur unitaire $\vec{i}$ entre les instants $t = 0$ et $t = 10$.
Á l'instant $t = 0$, $M$ a pour abscisse $+8$.
La vitesse à chaque instant $t$ est définie par la relation vectorielle

$$\vec{V}(t) = v(t)\,\vec{i} = \frac{5-t}{1+t}\,\vec{i} \qquad t \in [0\,;10].$$

**1.** Indiquer selon les valeurs de $t$ le sens du mouvement ainsi que son allure (accélérée ou retardée).

**2.** Calculer $f(t) = 8 + \displaystyle\int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x$. Que représente $f(t)$ ?

**3.** Quelle est la distance parcourue par le point $M$ entre les instants $t = 0$ et $t = 10$ ? En donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

Ex. 1063. ./1976/limogesE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. L'unité de longueur est le centimètre. $O$ est placé à 5 cm du bord gauche de la feuille et à 10 cm du bas de la feuille ; $\vec{i}$ est dirigé vers le bas, $\vec{\jmath}$ vers la droite et $\vec{k}$ vers le haut de la feuille.
Une pyramide $SABCD$ a pour base un carré $ABCD$ situé dans le plan horizontal de projection et dont la longueur du côté est 5 cm.

**1.** Construire $SABCD$ sachant que :
- — $A$ a pour coordonnées $(4~;~0~;~0)$.
- — $B$ est sur la ligne de terre et son ordonnée est positive.
- — L'abscisse de $C$ est positive.
- — Le cote de $S$ est 5 et la projection orthogonale de $S$ sur le plan horizontal ext le centre du carré $ABCD$.

**2.** Construire les traces du plan $SCD$.

**3.** Déterminer la distance du point $O$ au plan $SCD$. Expliquer brièvement la méthode utilisée.

## Problème 341 ./1976/limogesE/pb/texte

Les parties A1 et B sont dans une large mesure indépendantes.

A- Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel rapporté à une base $\mathscr{B}(\vec{\imath},~\vec{\jmath})$. On désigne par $e$ l'endomorphisme identique de $\mathscr{P}$ et par $f_0$ l'endomorphisme nul de $\mathscr{P}$ (neutre pour l'addition des endomorphismes).
On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathscr{P}$ ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$ :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}$$

On se propose de calculer de différentes façons la matrice $A^n$ $(n\in\mathbb{N}^\star)$.

1. Trouver les réels $\lambda$ tels qu'il existe $\vec{u}$ non nuls vérifiant $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.
   On trouvera deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ($\lambda_1<\lambda_2$). Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_1$ (respectivement $\mathscr{D}_2$) des vecteurs vérifiant $f(\vec{u})=\lambda_1\vec{u}$ (respectivement $f(\vec{u})=\lambda_2\vec{u}$) et en préciser une base $\vec{u}_1$ (respectivement $\vec{u}_2$).
2. Après avoir vérifié que $(\vec{u}_1,~\vec{u}_2)$ est une base de $\mathscr{P}$, déterminer la matrice $A_1$ de $f$ dans cette base.
   Calculer par récurrence sur $n$, la matrice $A_1^n$ $(n\in\mathbb{N}^\star)$.
3. Sachant que $A_1^n$ et $A^n$ désignent respectivement les matrices de $f^n$ dans la base $(\vec{u}_1,~\vec{u}_2)$ et dans la base $\mathscr{B}$, calculer la matrice $A^n$.
   : $f^n$ désigne l'endomorphisme composé de $n$ endomorphismes égaux à $f$.

B- On considère dans cette question un endomorphisme $\varphi$ satisfaisant à la relation

$$\varphi^2-7\varphi+12e=f_0 \qquad (1)$$

1. En déduire $(\varphi-3e)\circ(\varphi-4e)=f_0$.
2. Vérifier que $p=\varphi-3e$ est un projecteur de $\mathscr{P}$ (on rappelle qu'un projecteur est un endomorphisme vérifiant $p^2=p$).
   Déterminer, de même, le nombre $a$ non nul tel que $q=a(\varphi-4e)$ soit un projecteur de $\mathscr{P}$.
   Que peut-on dire de $(p\circ q)$ de $(q\circ p)$, et de $p+q$ ?
3. Vérifier que $\varphi=4p+3q$.
   Déduire des propriétés de $q$ et $q$ l'expression de $\varphi$ en fonction de $q$ et $q$, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^\star$.
4. Vérifier que $f$ satisfait à la relation (1) et déterminer les matrices de $p$ et de $q$ correspondant à $f$ dans la base $\mathscr{B}$.
   retrouver alors l'expression de $A^n$ $(n\in\mathbb{N}^\star)$ en utilisant la relation trouvée en B3.

C- Le plan P désigne le plan rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, de plan vectoriel associé $\mathscr{P}$.
Soit $g$ l'application qui à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ définie par :

$$\begin{cases}x'=x+2y-2\\y'=-3x+6y-2.\end{cases}$$



Retour page 1

1. Vérifier que $g$ est une application affine ayant pour endomorphisme associé $f$ étudié au A1.
2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par $g$ est érdsuit à un point unique $A$ à préciser. En déduire à l'aide de la question A1 l'existence de deux droites globalement invariantes par $g$.
3. Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de P, calculer les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point $g^n(M)$ ; $g^n$ désignant la composée de $n$ applications égales à $g$ ($n \in \mathbb{N}^\star$).
4. Soit $g_1$ l'application de P dans P qui à $M$ associe $M_1$ tel que

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM'} - 3\overrightarrow{OM}$$

avec $M' = g(M)$.

a) Déterminer l'expression analytique de $g_1$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Montrer que $g_1$ est une projection sur une droite $\mathscr{D}$ sur un droite $\Delta$ (droites à déterminer).

# XXXV. Lyon, série C

**Ex. 1064.** ./1976/lyonC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

**1.** Étudier et représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé.

**2.** Calculer l'aire du domaine plan délimité par les axes de coordonnées, la courbe représentative de $f$ et de la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Cette aire admet-elle une limite lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 1065.** ./1976/lyonC/exo-2/texte.tex

On considère l'ensemble $\mathbb{R}/4\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3}\}$.

**1.** Dresser la table de multiplication de l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x = \dot{2}$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{2} \\ \dot{2}x + \dot{1}y = \dot{2}. \end{cases}$

**4.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x^2 + \dot{2}x = \dot{0}$.

**PROBLÈME 342** ./1976/lyonC/pb/texte

N.B. Les parties A B et C sont indépendantes.

A- On considère l'ensemble $K$ des matrices $M(a,\ b)$ de la forme

$$M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \qquad \text{où } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

1° a) Démontrer que $K$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

b) Démontrer que $K$ est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.

2° Soit $f$ l'application de $K$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes définie par

$$M(a,\ b) \longmapsto z = (a-b) + \mathrm{i}b\sqrt{2}.$$

a) Démontrer que $f$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $K$ sur la $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En déduire la dimension de $K$.

b) Démontrer que $f$ est un isomorphisme du corps $K$ sur le corps $\mathbb{C}$.

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 0$. Utiliser $f$ pour trouver les matrices $M$ de $K$ telles que $M^3 = A'$ où $A'$ est la matrice antécédent de i par $f$.

B- Une urne contient 3 jetons numérotés $0,\ 1,\ -1$. Un premier tirage donne un numéro noté $a$ ; on remet le jeton et un second tirage donne un numéro noté $b$. Les tirages sont équiprobables. On obtient ainsi un couple $(a,\ b)$ et on lui associe la matrice $M(a,\ b)$.

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On note $\varphi_{(a,\ b)}$ l'endomorphisme de $\overrightarrow{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est $M(a,\ b)$.

Quelles sont les probabilités pour que cet endomorphisme soit :

1° une rotation vectorielle ?

2° une symétrie vectorielle orthogonale ?

C- Soit $P$ un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$, muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $E$ le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et $F$ le milieu de $(O,\ E)$.

Soit $h$ l'application affine associée à l'endomorphisme $\varphi_{(0\ ;\ \frac{1}{4})}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est $M(0,\ \dfrac{1}{4})$ et telle que $h(E) = O$.

1° Soit $s$ orthogonale de $P$ par rapport à la droite affine contenant $F$ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$.
Démontrer que $g = h \circ s$ admet comme expression analytique dans $\mathscr{R}$ :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}y \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

2° Soit $M_0$ le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0) = (2\ ;\ 2)$ dans $\mathscr{R}$. On pose :

$$M_1 = g(M_0),\ \ldots,\ M_n = g(M_{n-1}) = g^n(M_0)$$

pour $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$.

On se propose de déterminer la position limite de $M_n$ quand $n$ augmente indéfiniment en cherchant les valeurs limites des suites réelles :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (y_n)_{\in\mathbb{N}}.$$

a) Démontrer que la suite définie par $v_n = x_n + y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique. Est-ce que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est-à-dire que $v_n$ a une limite finie lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

b) Démontrer par récurrence sur $n$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0 \qquad \text{et} \qquad y_n > 0.$

c) On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Démontrer qu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3u_n + 2}.$$

Soit $W_n = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n + 1}$. Démontrer que $(W_n)$ est une suite géométrique.

Donner l'expression de $W_n$, puis de $u_n$ en fonction de $n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) En utilisant les valeurs de $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ etr $v_n = x_n + y_n$, donner les expressions de $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

En déduire les limites des suites $(x_n)$ et $(y_n)$ et la position limite des points $M_n$ quand $n$ augmente indéfiniment.

Retour page 1

# XXXVI. Lyon remplacement, série C

**Ex. 1066.** ./1976/lyonCrem/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
On appelle affixe du point $M$ le couple de coordonnées (($x$ ; $y$) le nombre complexe $z$ égal à $x+\text{i}y$.
$T$ désigne l'application du plan dans lui-même qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $T(M)$ d'affixe $z^3$.

**1.** Calculer les coordonnées de $T(M)$ en fonction de $x$ et de $y$.

**2.** Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ et $T(M)$ aient même abscisse est que $M$ appartienne à $(O,\ \vec{v})$ ou à une hyperbole $(\mathscr{H})$ d'axe transverse (($O,\ \vec{u}$). Préciser les sommets et les asymptotes de cette conique et la représenter dans le plan.
Démontrer que tout point $M$ appartenant à l'une des asymptotes de $(\mathscr{H})$ est tel que $T(M)$ appartient à $(O,\ \vec{v})$.

**Ex. 1067.** ./1976/lyonCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère :

— la rotation $\mathscr{R}_1$ de centre $A_1\,(0\ ;\ 2)$ et dont l'angle a pour mesure $+\dfrac{\pi}{2}$.

— la rotation $\mathscr{R}_2$ de centre $A_2\,(-2\ ;\ 0)$ et dont l'angle a pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

— la symétrie orthogonale $S$ par rapport à la droite $A_1A_2$.

1. Déterminer, sans calcul, en utilisant le groupe des isométries de P la nature et les éléments caractéristiques des applications $f_1 = \mathscr{R}_1 \circ S$ et $f_2 = \mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$.
2. Confirmer ces résultats à l'aide des expressions analytiques de $f_1$ et de $f_2$.

## Problème 343

./1976/lyonCrem/pb/texte

A- On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions $f$ numériques d'une variable réelle définies sur $]-1\,;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle vérifiant :

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad (1+x)f'(x)+f(x) = 1+\log(1+x)$$

($\log(1+x)$ est le logarithme népérien de $(1+x)$).

1. Soit$f\in$F et soit $g$ définie par :

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad g(x) = (1+x)f(x).$$

Démontrer que $g$ est dérivable sur$]-1\,;+\infty[$ et que $g$ est une primitive de la fonction $h$ définie par :

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad h(x) = 1+\log(1+x).$$

Réciproquement, soit $g_1$ une primitive de la fonction $h$. Démontrer que la fonction $f_1$ définie par :

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$$

est un élément de F.

2. a) Déterminer les réels $A$ et $B$ tels que

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad \frac{x}{1+x} = A+\frac{B}{1+x}.$$

b) Á l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $h$.

3. En déduire l'ensemble F.

B- On considère l'ensemble des fonctions $f_k$ de $]-1\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in\, ]-1\,;+\infty[,\qquad f_k(x) = \log(1+x)+\frac{k}{1+x},\qquad k\in\mathbb{R}.$$

Retour page 1

1. Discuter suivant les valeurs de $k$,le sens de variation des fonctions $f_k$.
2. Tracer, avec soin, dans un même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les représentations graphiques des fonctions $f_1$, $f_0$, $f_{-1}$.
3. Soient $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$ les points d'abscisse $t$ sur les représentations graphiques respectives des fonctions $f_{k_1}$, $f_{k_2}$, $f_{k_3}$. Démontrer que le rapport :

$$\frac{\overline{M_1(t)M_2(t)}}{\overline{M_1(t)M_3(t)}}$$

est indépendant de $t$.

C- 1. Soit $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n-1}(-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{2n-1}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$ et pour tout réel $x$, $x\in\,]-1\,;+\infty[$

$$f_0'(x)=P_n(x)+\frac{x^{2n}}{1+x}.$$

2. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0\,;1],\qquad \dfrac{x^{2n}}{1+x}\leqslant x^{2n}$.

En déduire pour tout entier $n\geqslant 1$, la double inégalité

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2n+1}.$$

3. On considère la suite $(w_n)$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad w_n=\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad f_0(1)=w_n+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que la suite $(w_n)$ admet, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera. Trouver un entier $n_0$ tel que $\log 2-w_{n_0}<0{,}1$.

# XXXVII. Lyon, série E

**Ex. 1068.** ./1976/lyonE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation

$$p(z)=2z^3-5z^2+(5-2\mathrm{i})z+3(\mathrm{i}-1)=0$$

où $z$ appartient au corps des complexes.

**1.** Soit $x$ un nombre réel. Quelles sont les parties réelles et imaginaires de $p(x)$ ?
Démontrer que l'équation proposée admet une et une seule solution réelle que l'on précisera.

**2.** Transformer $p(z)$ en produit de deux facteurs l'un du premier degré, l'autre du second degré.

**3.** Trouver les solutions de l'équation $p(z)=0$.



Retour page 1

Ex. 1069. ./1976/lyonE/exo-2/texte.tex

On considère le fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3.$$

**1.** Mettre $f(x)$ sous la forme $\dfrac{P(x)}{1-x}$ où $P$ est une fonction polynôme.

Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative, le plan affine euclidien étant rapporté au repère orthogonal $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ($\|\vec{i}\|$ = 2 cm, $\|\vec{j}\|$ = 1 cm).

**2.** Soit $x \in [0\,;1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$.

En déduire que pour tout $x \in [0\,;1[$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**3.** Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1[$, il existe $c \in [0\,;x]$ tel que :

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x f(c).$$

**4.** Démontrer que pour tout $x \in ]0\,;1[$ et tout $c \in [0\,;x]$, la quantité $\epsilon(x) = \dfrac{f(c)}{x^4}$ vérifie $0 \leqslant \epsilon(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.

En déduire :

$$\forall x \in ]0\,;1[, \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x^4\epsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

## Problème 344

./1976/lyonE/pb/texte

*Les parties A et B sont indépendantes.*

A- soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application affine $f_m$ de P dans P qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ définies par les formules

$$2x' = (-m-1)x + (1-m)y + 8,$$

$$2y' = (m-1)x + (m+1)y,$$

où $m$ est un nombre réel.

1. Pour quelles valeurs de $m$ $f_m$ est-elle une isométrie ? Préciser pour chaque valeur ainsi trouvée la nature de $f_m$ et ses éléments caractéristiques.
2. a) Pour quelle valeur de $m$, $f_m$ n'est-elle pas bijective ? Soit $m_0$ cette valeur.

   b) Quelle est l'image du plan P par $f_{m_0}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $f_{m_0}(M)$ morsque $M$ décrit P ?

   c) Démontrer que $f_1 \circ f_{m_0}$ est une projection ponctuelle orthogonale sur une droite affine que l'on demande de déterminer.
3. Soit $\Delta$ la droite $x + y = 0$. On définit une application $g_m$ de P dans P de la manière suivante : si $M$ appartient à P, soit $H$ sa projection orthogonale sur $\Delta$. Le point $g_m(M) = N$ est défini par $\overrightarrow{HN} = m\overrightarrow{HM}$.

   a) Quelle est l'expression des coordonnées $(u\,;\,v)$ de $N$ en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de $M$ ?

   b) Si $s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta'$ d'équation $x = 2$, démontrer :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad s \circ g_m = f_m.$$



Retour page 1

c) Retrouver la nature de $f_1$, $f_{-1}$ et $f_1 \circ f_0$ (ces applications ont été étudiées d'une autre manière dans les questions précédentes.)

B- On considère dans cette partie l'application $f_{\frac{1}{2}}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}y + 4, \\ y' = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}y. \end{cases}$$

1. Un point $M$ de P a ses coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui varient en fonction de $t$. Son mouvement est défini par les formules :

$$x = \sqrt{2}\cos t + 2$$

$$y = \sqrt{2}\sin t \qquad t \in [0\,; 2\pi].$$

a) Démontrer que $M$ est animé d'un mouvement circulaire uniforme. Soit $(\mathscr{C})$ sa trajectoire.

b) On note $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ les points de $(\mathscr{C})$ qui correspondent aux positions de $M$ aux instants respectifs $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, $t_3 = \dfrac{5\pi}{4}$ et $t_4 = \dfrac{7\pi}{4}$. Trouver les équations cartésiennes des tangentes $D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4$ à $(\mathscr{C})$ aux points $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ respectivement.

2. a) Exprimer en fonction de $t$ les coordonnées du point $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$. On note $(\mathscr{C}')$ la trajectoire de $M'$.

b) Quels sont à l'instant $t$ les coordonnées du vecteur vitesse de $M'$ ?

3. Soit $\vec{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$.

En fin soit $\Omega$ le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le repère $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$ est un nouveau repère orthonormé de P.

a) Démontrer que si un point $K$ a pour couple de coordonnées $/xy$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, il admet, dans le repère $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$, le couple de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que :

$$X = (x + y - 2)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Y = (x - y - 2)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les coordonnées de $M' = f_{\frac{1}{2}}(M)$ dans $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$ en fonction du temps.

b) Démontrer que $(\mathscr{C}')$ est une ellipse ; préciser son centre et les longueurs des axes.

c) Quelle propriété remarquable vis à vis de la courbe $(\mathscr{C}')$ possède la transformée $D_1'$ de la droite $D_1$ par l'application $f_{\frac{1}{2}}$ ? Justifier.

## XXXVIII. Maroc, série C

Ex. 1070. ./1976/marocC/exo-1/texte.tex

**1.** Vérifier que le couple $(2\ ;\ 3)$ est solution de :

$$41x - 27y = 1 \qquad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

**2.** En déduire une solution particulière de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

**3.** Donner toutes les solutions de :

$$41x - 27y = 5 \qquad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

Ex. 1071. ./1976/marocC/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que :

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}$$

Calculer alors :

$$J=\int_1^2\frac{dt}{t(1+t)}$$

**2.** Calculer l'intégrale :

$$I=\int_1^2\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$$

## Problème 345

./1976/marocC/pb/texte

*Les parties I et II peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.*

I- 1° Soit $E$ un espace vectoriel et soit $\varphi$ une application linéaire de $E$ dans $E$ telle que $\varphi\circ\varphi=Id$. ($Id$ désignant l'application identique de $E$ dans $E$). Montrer que $\varphi$ est bijective. Soit :

$$E^+=\{V\in E\quad\varphi(V)=+V\}\qquad E^-=\{V\in E\quad\varphi(V)=-V\}$$

Montrer que $E^+$ et $E^-$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, et que $E^+\cap E^-=\{0\}$.
Pour chaque $V\in E$, on pose :

$$V^+=\frac{1}{2}(V+\varphi(V))\qquad V^-=\frac{1}{2}(V-\varphi(V))$$

Montrer que $V^+\in E^+$ et que $V^-\in E^-$, et que $V=V^++V^-$. En déduire que $E$ est somme directe des deux sous-espaces vectoriels $E^+$ et $E^-$.

2° A chaque triplet $(\alpha,\beta,\gamma)$ de nombres réels, on associe l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\alpha x+\beta\mathrm{e}^x+\gamma\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les applications $f$ obtenues quand $\alpha,\beta,\gamma$ parcourent $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'ensemble des trois applications :

$$x\mapsto x\qquad x\mapsto\mathrm{e}^x\qquad x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$$

constitue une base de $\mathcal{F}$.

3° Soit $A$ l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui à tout $f\in\mathcal{F}$ associe $g=A(f)$ définie par $g(x)=f(-x)$. Montrer que $A\circ A=Id$. ($Id$ désignant l'application identique de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$). On considère l'application $f_0$ de $\mathcal{F}$ définie par :

$$f_0(x)=\mathrm{e}^x$$

$f_0^+$ et $f_0^-$ sont définies comme dans I-1. ($E$ remplacé par $\mathcal{F}$, et $\varphi$ remplacé par $A$). Déterminer $f_0^+$ et $f_0^-$. Montrer que pour tout réel $x$, on a :

$$\left(f_0^+(x)\right)^2-\left(f_0^-(x)\right)^2=1$$

4° Soit $t\in\mathbb{R}$ et soit $z(t)\in\mathbb{C}$ le nombre complexe sont les parties réelle et imaginaire sont respectivement $af_0^+(t)$ et $bf_0^-(t)$, où $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs. Trouver une relation indépendante de $t$ entre $\mathbf{Re}(z(t))$, la partie réelle de $z(t)$ et $\mathbf{Im}(z(t))$, la partie imaginaire de $z(t)$.
Soit $M_t$ le point d'affixe $z(t)$. Démontrer que $M_t$ appartient à une conique, indépendante de $t$, dont on donnera une équation.

II- Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $H$ l'hyperbole admettant comme équation dans ce repère :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$a$ et $b$ désignent des nombres réels strictement positifs donnés.
On désigne par $S$ le groupe des similitudes du plan $\mathcal{P}$. On chercher dans cette partie à caractériser la partie $\mathcal{E}$ de $S$ formée des similitudes $s$ qui laissent $H$ invariante (c'est à dire telles que $s(H)=H$).
On rappelle qu'une similitude est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même, qu'elle transforme une droite en une droite, et qu'elle multiplie les longueurs par une constante positive (rapport de similitude).

1° Faire une représentation graphique de $H$ en plaçant ses asymptotes.

2° Soit $s \in S$. Montrer que $O$ est point double pour $s$ (c'est à dire que $s(O) = O$).
On pourra pour cela se servir de la caractérisation suivante du centre d'une hyperbole :

— Toute droite passant par le centre rencontre l'hyperbole en zéro ou deux points.

— Par tout point autre que le centre, il passe au moins une droite rencontrant l'hyperbole en un seul point.

3° Soit $A$ et $A'$ les sommets de $H$ (c'est à dire les deux points de $H$ situés sur la droite $Ox$). On pose $B = s(A)$. Montrer que la distance des deux points $O$ et $B$ (notée $||\overrightarrow{OB}||$ ) est au moins égale à celle de $O$ et $A$ (notée $||\overrightarrow{OA}||$). En déduire que $k$, le rapport de similitude de $s$, est au moins égal à $1$.

4° Montrer que $k = 1$, et montrer que $s(A)$ est soit $A$, soit $A'$.

5° En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué par quatre éléments, qui sont :

— $Id$, l'application identique

— $S_O$, la symétrie par rapport à l'origine

— $S_1$, la symétrie orthogonale par rapport à $Ox$

— $S_2$ la symétrie orthogonale par rapport à $Oy$.

Vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $S$.

# XXXIX. Maroc, série E

**Ex. 1072.** ./1976/marocE/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 - (1 - \mathrm{i})z^3 - \mathrm{i} = 0.$$

Représenter graphiquement les solutions dans le plan complexe.

**Ex. 1073.** ./1976/marocE/exo-2/texte.tex

Montrer que l'expression

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

est une somme de Riemann relative à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ pour la subdivision de l'intervalle $[1\,;2]$ en $n$ parties égales.
Déterminer la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

## Problème 346

./1976/marocE/pb/texte

Les parties , et sont indépendantes.
Soit $P$ un plan affine orienté de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.
On considère le triangle équilatéral $OAB$ tel que

$$B\,(0\ ;\ 3) \qquad \text{et} \qquad \text{mes}(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{6}.$$

On nomme $\omega$ le centre du cercle $(\Gamma)$ passant par $O$, $A$ et $B$.

I. 346

1. Soit $f$ l'application affine de $P$ dans $P$ telle que $f(O) = B_1$ et $f(A) = O_1$, $f(B) = A_1$ $B_1$ étant le milieu de $[OA]$, $O_1$ le milieu de $[AB]$ et $A_1$ le milieu de $[BO]$.
Définir analytiquement $f$ et donner la matrice de l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$.
2. Montrer que $\varphi$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation vectorielle qu'o,n précisera.
Déterminer l'ensemble $E$ des points invariants par $f$ et vérifier que $E = \{\omega\}$. Définir géométriquement $f$.
3. Soit les points $N$ et $N'$ tels que $\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AN'} = t\overrightarrow{AB}$ ($t \in \mathbb{R}$).
Soit $I$ le milieu de $[NN']$. Montrer que $f(N) = I$.

Retour page 1

4. Soit $m$ un point quelconque du cercle $(\Gamma)$. Soit $\beta$ le symétrique de $m$ par rapport à la droite $(BO)$ et $\gamma$ le symétrique du point $m$ par rapport à la droite $(OA)$ (symétries orthogonales).
   a) Montrer que $\beta$ est l'image de $\gamma$ par une isométrie $r$ que l'o,n précisera.
   b) Quels sont les ensembles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ des points $\alpha$ et $\beta$ lorsque $m$ décrit $(\Gamma)$ ?
   c) Montrer que $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ passent par $\omega$.

II. 346 Soit $N$ et $M$ tels que

$$\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{BO} \qquad t \in \mathbb{R}$$

et soit $S$ le système de points pondérés

$$\left\{(M,\ T),\ \left(N,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$$

a) Exprimer en fonction de $t$ les coordonnées $x$ et $y$ du barycentre $G$ du système $S$.

b) Calculer $t$ en fonction de $\dfrac{y}{x}$ et montrer que les coordonnées de $G$ vérifient l'équation

$$y = \sqrt{3}\frac{x^2 - x}{x - 3}.$$

III. 346

Soit $g$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x^2 - x}{x - 3}.$$

a) Écrire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de $g$ ; étudier $g$ et tracer sa courbe représentative.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$4 \leqslant x \leqslant \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) \leqslant y \leqslant g(x).$$

c) Calculer $\alpha$ pour que

$$\mathscr{A}(\alpha) = 3\sqrt{3}\,[\log 6 - \log(\alpha - 4)]$$

?

## XL. Montpellier, série C

**Ex. 1074.** ./1976/montpellierC/exo-1/texte.tex

$a$ et $b$ sont deux entiers naturels non nuls. On note $M$ leur plus petit commun multiple et $\Delta$ leur plus grand diviseur commun.
Déterminer $a$ et $b$ pour qu'ils vérifient les trois conditions suivantes :

$$a \leqslant b, \qquad a + b = 105 \qquad \text{et} \qquad M = 12\Delta.$$

(On pourra utiliser les entiers $a'$ et $b'$ tels que $a = \Delta a'$ et $b = \Delta b'$.)

**Ex. 1075.** ./1976/montpellierC/exo-2/texte.tex

Jean possède, dans le tiroir de son armoire, 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges, mais ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.
Lorsque Jean est en train de s'habiller survient une panne de lumière. Jean, qui est pressé et qui n'a pas de lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

**1.** Calculer,à $0{,}01$ près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes noires.

**2.** Calculer, à $0{,}01$ près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes de même couleur.

**3.** En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouges restent inchangés, calculer quel devrait être le nombre $n$ de chaussettes noires $n \in \mathbb{N}^\star$ contenues dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\dfrac{2}{7}$.

## PROBLÈME 347

./1976/montpellierC/pb/texte

A- .

1. Etudier l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Variation, Représentation graphique.

2. a) Montrer, sans chercher a? calculer l'intégrale, que :

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

détermine une application $u$ de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$. Quel est le sens de variations de $u$?

b) Montrer que, pour tout réel $t$ de l'intervalle $[1\,;+\infty[$,

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

En déduire que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1-\frac{1}{x}.$$

c) Montrer que, pour tout réel $t$ de l'intervalle $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

En déduire :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad u(x) \leqslant 1.$$

d) Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $u(x) \leqslant 2$.

e) Montrer que l'ensemble $u\,([0\,;+\infty[)$ possède une borne supérieure $\ell$ telle que $0 \leqslant \ell \leqslant 2$, et que $u$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

B- 1. a) Montrer que $x \longmapsto \tan x$ détermine une bijection $v$ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\,;+\infty[$. On note $v^{-1}$ sa bijection réciproque.

b) On dispose ainsi d'une application $w = u \circ v$ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $[0\,;+\infty[$. Montrer que $w$ est dérivable en tout point $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $w'(x)$.

En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $w(w) = x+k$.

c) Calculer $w(0)$. Montrer que $w$ tend vers $0$ lorsque $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures. On pourra commencer par montrer que :

pour tout $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad 0 \leqslant w(x) \leqslant \tan x.$

d) Déduire de cette étude :

pour tout $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad (u \circ v)(x) = x.$

En résulte-t-il que les applications $u$ et $v^{-1}$ sont égales?

Quelle est la valeur du réel $\ell$ introduit au A(2)e?

2. Tracer les représentations graphiques des applications $u$ et $v$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.



Retour page 1

# XLI. Montpellier remplacement, série C

**Ex. 1076.** ./1976/montpellierCrem/exo-1/texte.tex

Résoudre successivement, dans l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, les équations :

$$\dot{2}x = \dot{1}$$

$$x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = \dot{0}$$

$$x^4 + \dot{4}x^2 + \dot{3} = \dot{0}.$$

**Ex. 1077.** ./1976/montpellierCrem/exo-2/texte.tex

On considère, dans le plan complexe, un point $M$, d'affixe $u$ et les points $M'$ et $M''$ qui ont respectivement pour affixes les racines $Z'$ et $Z''$ de l'équation :

$$Z^2 - 2(u+1)Z + 2u^2 + 2u + 1 = 0$$

où $Z$ est l'inconnue.

1. Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. Trouver l'ensemble des points $M$ tels que la distance de $M'$ a?$M''$ soit égale à 2. Quel est alors l'ensemble des points $M'$ et $M''$ ?

## Problème 348

./1976/montpellierCrem/pb/texte

Les parties A et B sont indépendantes.

A- 1. Soit E un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère l'application linéaire $\varphi$ de E dans E , définie par :

$$\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \qquad \varphi(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 2\vec{k} \qquad \varphi(\vec{k}) = \vec{k}.$$

a) Déterminer le noyau de $\varphi$, son image et l'ensemble des vecteurs invariants.

b) Préciser la nature de $\varphi$.

2. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E,de repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On appelle $f$ l'application affine de E dans E , associée à l'application linéaire $\varphi$ et telle que $f(O) = O$.

a) Montrer que tout point $M$ de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ a pour image par $f$ le point $M'$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 0 \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Définir géométriquement $f$ .

b) Soit P le plan de repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la droite (D) d'équations : $x = 2$ et $z = 0$ et la droite $(\Delta)$ d'équations : $x?2y?2 = 0$ et $z = 0$.
(Ces droites sont donc contenues dans P).
Déterminer les images de (D) et $(/Delta)$ par l'application $f$.

B- 1. On suppose maintenant E euclidien et le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé.
Construire, par rapport au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan P, la courbe H d'équation :

$$y = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}.$$

2. Déterminer la courbe H? image de H par l'application $f$ étudiée dans la partie A2.
Préciser sa nature et ses éléments remarquables.



Retour page 1

3. On considère un point mobile $M$ dont les coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ sont définies, à l'instant $t$, par les relations :

$$\begin{cases} x = 2+\dfrac{1+\sin t}{\cos t} \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \qquad \text{avec} \quad t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;+\dfrac{\pi}{2}\right[ \\ z = 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que la trajectoire de $M$ est une partie de H.

   b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de $M$ à l'instant$t$.

   c) Le point $M'$, image de $M$ par $f$, est aussi un point mobile. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de $M'$ à l'instant $t$. La vitesse de $M'$ peut-elle être, à un instant $t$, double de celle de $M$ ? Montrer que le vecteur vitesse de $M'$ est le transformé par $\varphi$ du vecteur vitesse de $M$.

# XLII. Nancy, série C

**Ex. 1078.** ./1976/nancyC/exo-1/texte.tex

On définit la suite de terme général $u_n$ par

$$u_0 \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \geqslant 4$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

1. On pose $v_n = u_n - 3$. Montrer que la suite $(v_n)$ ainsi définie est une suite géométrique. En déduire l'expression de $v_n$, puis de $u_n$ en fonction de $u_0$ et de $n$.
2. Quels sont les nombres entiers $u_0$ $(u_0 \geqslant 4)$ tels que, pour tout $n$, $3^{u_n}$ soit le cube d'un entier naturel ?
3. On suppose $u_0 = 4$ ; déterminer toutes les valeurs de $n$ telles que $3^{u_n} - 1$ soit un multiple de 11.

**Ex. 1079.** ./1976/nancyC/exo-2/texte.tex

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 - 4\mathrm{i}z^2 - (7+2\mathrm{i})z - 6 + 12\mathrm{i}.$$

**1.** Trouver une racine réelle $\alpha$ de l'équation $P(z) = 0$.

**2.** Calculer les nombres complexes $a$ et $b$, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z-\alpha)(z^2 + az + b).$$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**Problème 349** ./1976/nancyC/pb/texte

On désigne par $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2, rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- Soit $(\mathscr{H})$ la courbe représentative dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

1. É ?tudier la fonction f et tracer $\mathscr{H}$.
2. On appelle $(D)$ celle des asymptotes de $(\mathscr{H})$ qui n'est parallèle a ? aucun des axes, et $(\Delta)$ celle des bissectrices des droites $(D)$ et $(O;\vec{\jmath})$ qui rencontre $(\mathscr{H})$. Déterminer une mesure des angles $\left(\widehat{(O;\vec{\imath}),\,(D)}\right)$ et $\left(\widehat{(O;\vec{\imath}),\,(\Delta)}\right)$.
3. Soit $a$ un nombre réel supérieur ou égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ; on désigne par $(D_a)$ la droite d'équation $x = a$. Calculer l'aire de la partie du plan, située dans le demi-plan $x > 0$, limitée par les droites $(D)$, $(\Delta)$, la courbe $(\mathscr{H})$ et la droite $(D_a)$. Trouver $a$ tel que cette aire soit égale a ? $\sqrt{3}$.

B- Soit $\vec{I}$ un vecteur unitaire de $(\Delta)$.

1. Déterminer un vecteur $\vec{J}$, tel que $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ soit un repère orthonormé.
2. Donner l'équation de $(\mathscr{H})$ dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$.
3. Quelle est la nature de la conique $(\mathscr{H})$? On précisera ses éléments dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ : sommets, foyers, directrices, excentricité.

On considère l'ensemble $G$ des isométries du plan euclidien $\mathscr{E}$ laissant la courbe $(\mathscr{H})$ *globalement* invariante.

C- 1. Montrer que la loi de composition des applications est une loi interne sur $G$, et que $G$ muni de cette loi a une structure de groupe.

2. Montrer qu'une isométrie $g$ est élément de $G$ si et seulement si $g$ conserve l'ensemble des foyers de $(\mathscr{H})$.
3. En déduire tous les éléments de $G$.
4. Donner la table de composition du groupe $G$ ; ce groupe est-il commutatif ?

D- Soit $M$ un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, animé d'un mouvement déterminé par

$$\begin{cases} x(t)=\sqrt{3}\mathrm{e}^t \\ y(t)=\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

1. Déterminer la trajectoire du point $M$ et le sens de parcours.
2. Calculer les vecteurs vitesse et accélération du point $M$.
   Préciser a? quels instants et sur quelles parties de la trajectoire le mouvement est accéléré ou retardé.

## XLIII. Nantes, série C

**Ex. 1080.** ./1976/nantesC/exo-1/texte.tex

Soit $A$ l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

**1.** Résoudre dans $A\times A$ le système d'équations :

$$\begin{cases} \overline{6}x+\overline{4}y=\overline{4} \\ \overline{5}x+y=\overline{4}. \end{cases}$$

**2.** Résoudre dans $A$ l'équation :

$$x^2+\overline{4}x+\overline{3}=\overline{0}.$$

**Ex. 1081.** ./1976/nantesC/exo-2/texte.tex

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a une structure d'espace vectoriel réel dont une base est $\mathscr{B}=(1,\ \mathrm{i})$.
Soit $p$ un complexe donné : $p=a+\mathrm{i}b$ ($a$ et $b$ sont réels).
On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe $z$, associe $Z$ défini par :

$$Z=z+p\overline{z}. \tag{E}$$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
2. a) Trouver, en fonction de $a$ et $b$ la matrice $M$ de $f$ par rapport à la base $\mathscr{B}=(1,\ \mathrm{i})$.
   b) Démontrer que $f$ est une bijection, si, et seulement si, $a^2+b^2$ est différent de 1.
3. A partir de la relation (E), trouver une relation entre $z$, $Z$ et $\overline{Z}$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question 2b.

## PROBLÈME 350

./1976/nantesC/pb/texte

Le plan affine euclidien P est rapporté a ? un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Chaque point $M$ du plan peut être repéré par ses coordonnées réelles $(x\ ;\ y)$ ou par son affixe complexe $z = x + \mathrm{i}y$

A- Soit $f$ la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x + 1.$$

1. E ?tudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans le repère $\mathscr{R}$. (On étudiera avec soin les branches infinies de $(C)$ : on pourra étudier le comportement de $\dfrac{f(x)}{x}$ pour les valeurs de $x$ négatives et de « grande » valeur absolue. On indiquera les valeurs exactes des coordonnées du point correspondant au minimum de $f$. Pour dessiner $(C)$, on utilisera l'approximation $\log 2 \approx 0{,}7$).
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}(m)$ de la surface plane finie limitée par la courbe (C), l'axe $(O; \vec{\jmath})$ des ordonnées, l'asymptote oblique de $(C)$ et la droite d'équation $x = m$, $m$ étant un réel positif donné.
   Étudier $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathscr{A}(m)$.

B- $\mathscr{P}$ étant le plan vectoriel associé au plan affine P, on considère l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathscr{P}$ (application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ ) défini par sa matrice $A$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\varphi$ est-il un automorphisme ? Démontrer qu'il existe trois réels $k$, $a$, $b$ avec $k > 0$ et $a^2 + b^2 = 1$ qui vérifient :
   $$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$
   En déduire qu'il existe une homothétie vectorielle $h$ et une symétrie vectorielle orthogonale $s$ par rapport a ? une droite vectorielle (que l'on déterminera avec précision) qui vérifient :
   $$\varphi = h \circ s = s \circ h.$$
2. Soit $F$ celle des applications affines du plan P associée a ? l'endomorphisme $\varphi$ qui transforme le point $O$ en le point $O'(-1\ ;\ 1)$.
   a) Le point $M$ ayant pour coordonnées (($x\ ;\ y$), calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de son image $M'$ par $F$.
   Calculer l'affixe $z'$ de $M'$ en fonction de $\overline{z}$ (on rappelle que $z$ désigne l'affixe de $M$ et que $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$).
   b) Déterminer les coordonnées du point $\Omega$ invariant par $F$. Si $H$ est l'homothétie de centre $\Omega$, et de rapport $k$, déterminer la transformation $S$ définie par :
   $$F = H \circ S = S \circ H.$$
   Quelle est la nature de $F$ ?

C- 1. Démontrer que la courbe $(C')$ transformée de $(C)$ par $F$ admet pour équation :

$$y = g(x) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = x - \log x.$$

   ($|og$ désigne la fonction logarithme népérien.)

2. Étudier les variations de la fonction $g$ et construire la courbe $(C')$.
3. $n$ étant un entier naturel donné, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(C')$ et de la droite $(\Delta_n)$ d'équation :
   $$y = x + n.$$
4. Soit $(U_n)$ la suite numérique dont le terme général $U_n$ est égal a ? l'aire de la surface plane finie limitée par la courbe $(C')$ , l'axe $(O; \vec{\jmath})$ des ordonnées et les droites $(\Delta_n)$ et $(\Delta_{n+1})$.
   a) Calculer $U_n$ et montrer que la suite $(U_n$ ) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

Retour page 1

b) Calculer la somme $S_p$ des $(p+1)$ premiers termes de cette suite, soit

$$S_p = \sum_{n=0}^{n=p} U_n.$$

c) Étudier $\lim_{p\to+\infty} S_p$.

Justifier le résultat obtenu en utilisant la limite de l'aire calculée en A2 et l'application $F$ définie dans B2.

# XLIV. Nantes, série E

**Ex. 1082.** ./1976/nantesE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes, on considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par :

$$(z \in \mathbb{C}) \qquad \forall z : \quad f(z) = z^3 + z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2(1-\mathrm{i}).$$

**1.** Calculer $f(i)$. Déterminer un couple $(a,\ b)$ d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$(z \in \mathbb{C}) \qquad \forall z \ : \quad f(z) = (z-\mathrm{i})(z^2+az+b).$$

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $f(z) = 0$.

**Ex. 1083.** ./1976/nantesE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On désigne par $x'Ox,\ y'Oy,\ z'Oz$ les axes ayant pour vecteurs directeurs respectivement $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$.
On placera $O$ au centre de la feuille ; $(Ox,\ Oy)$ est le plan horizontal de projection ; $(Oy,\ Oz)$ est le plan frontal de projection : la ligne de terre est $y'Oy$ ; $Ox$ est dirigé vers le bas de la feuille et $Oz$ vers le haut ; l'unité est le centimètre.
On considère le plan $(\pi)$ dont l'équation, relativement au repère $\mathscr{R}$ est :

$$2x - y + z - 4 = 0.$$

1. Déterminer les traces du plan $(\pi)$ et les construire sur l'épure.
2. Déterminer la projection frontale $a'$ du point $A$ appartenant au plan $(\pi)$ dont la projection horizontale est le point $a\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   a) par un procédé de géométrie descriptive que l'on décrira succintement ;
   b) par le calcul.
3. Soit $B$ le point de coordonnées $(4\ ;\ 2\ ;\ 4)$ relativement au repère $\mathscr{R}$.
   Démontrer analytiquement que la projection orthogonale de $B$ sur le plan $(\pi)$ est le point $A$ et interpréter ce résultat sur l'épure.
4. Déterminer la distance du point $B$ au plan $(\pi)$ :
   a) sur l'épure, à l'aide d'un rabattement.
   b) par le calcul.

## Problème 351

./1976/nantesE/pb/texte

A- On considère l'application $A$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$A(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $A$ dans un plan affine (P) muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $(x'Ox)$, $(y'Oy)$ : on ne demande pas, pour l'instant la construction de $(\mathscr{C})$.

1. Démontrer :

$$(x \in \mathbb{R}) \quad \forall x : -\mathrm{e}^{-x} \leqslant A(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

2. Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite $(O;\vec{\imath})$.
3. On désigne par $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ les courbes dont les équations relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont respectivement $y=\mathrm{e}^{-x}$ et $y=-\mathrm{e}^{-x}$.

   a) Calculer les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$. Démontrer qu'en chacun des ces points les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ on même tangente.

   b) Reprendre cette étude pour al courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
4. Étudier les variations de $A$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Esquisser l'arc de la courbe $(\mathscr{C})$ correspondant à cet intervalle. (On donne $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\simeq 0{,}46$.)
   On prendra pour unités de longueur 20 cm pour $(O;\vec{\jmath})$ et 2 cm pour $(O;\vec{\imath})$ ; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont physiquement orthogonaux.

B- On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni de l'addition, et de la multiplication par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On considère les deux applications $A$ et $B$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$A(x)=\mathrm{e}^{x}\sin x \qquad \text{et} \qquad B(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Soit E l'ensemble des combinaisons linéaires de $A$ et $B$ :

$$E=\left\{f\,\middle|\,\exists(a,\ b)\ :\ (a,\ b)\in\mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad f=aA+bB\right\}.$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ et que $(A,\ B)$ est une base de E, notée désormais $\mathscr{B}$.
2. Démontrer que tout élément $f$ de E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, si l'on désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$, $f'$ est élément de E.
3. On considère l'application $d$ de E vers E qui, à tout élément $f$ de E, associe $f'$.

   a) Démontrer que que est un endomorphisme de E (application linéaire de E dans lui-même.)

   b) Écrire la matrice de $d$ relativement à la base $\mathscr{B}$. En déduire que $d$ est un automorphisme de E.

   c) Déterminer, relativement à la base $\mathscr{B}$, la matrice de $d^{-1}$, bijection réciproque de $d$.

C- On considère l'application $\varphi$ de E×E vers $\mathbb{R}$ qui, au couple $(f,\ g)$, associe le réel :

$$\varphi(f,\ g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2x}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra définie $f$ par les constantes $a$ et $b$, et $g$, par les constantes $a'$ et $b'$.

1. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E et que $\mathscr{B}$ est alors, une base orthonormée.
2. Démontrer que $d$ s'écrit, de façon unique, comme la composée, dans un ordre arbitraire d'une homothétie vectorielle $h$, de rapport positif, et d'une rotation vectorielle, $r$.
3. E étant orienté par la base $\mathscr{B}$ supposée directe, déterminer une mesure de l'angle de la rotation vectorielle $r$.

## XLV. Nice , série C

Ex. 1084. *./1976/niceC/exo-1/texte.tex*

1. On considère l'entier naturel $n$ qui s'écrit $\overline{53x4}$ dans le système de numération de base huit.
   Déterminer $x$ de telle sorte que :

   a) $n$ soit divisible par 7 ;

   b) $n$ soit divisible par 6.

   En déduire qu'il existe $x$ tel que $n$ soit divisible par 6 et par 7.
2. On prend $x=2$. Déterminer l'écriture décimale de $n$. Quel est le nombre de diviseurs de $n$ dans $\mathbb{N}$ ? Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier $n$ pour que le produit soit un carré.



Retour page 1

**Ex. 1085.** ./1976/niceC/exo-2/texte.tex

On considère l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 + (-6+\mathrm{i})z + 7 + 3\mathrm{i} = 0.$$

**1.** Résoudre l'équation.

**2.** On appelle $z_1$ la solution dont une détermination de l'argument est $\dfrac{\pi}{4}$ et $z_2$ l'autre solution.

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit $\tilde{s}$ la similitude directe de P qui, au point d'affixe -2, associe le point d'affixe 1 et, au point d'affixe $z_1$, associe le point d'affixe $z_2$. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de $\tilde{s}$.

## Problème 352

./1976/niceC/pb/texte

A- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux. On donne un vecteur non nul $\vec{u}$ de E, et une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (forme linéaire) $\varphi$ telle que $\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0}$.

1. Démontrer que le noyau de $\varphi$ est de dimension un.
2. On définit l'application $f$ de E dans E par

$$\begin{aligned} f : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{E} \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{v} + \varphi(\vec{v}).\vec{u}. \end{aligned}$$

   Montrer que $f$ est un application linéaire et que l'ensemble des vecteurs de E invariants par $f$ est une droite vectorielle. Soit $D$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. Montrer que $f(D) \subset D$.
3. Démontrer que $f$ admet une application réciproque, si, et seulement si, $\varphi(\vec{u}) \neq -1$ et que $f$ est involutive si, et seulement si, $\varphi(\vec{u}) = -2$.
4. On suppose que E est euclidien et que $\|\vec{u}\| = 1$. On considère $(\vec{u},\ \vec{u'})$ une base orthonormée de E. On suppose que $\varphi$ vérifie $\varphi(\vec{u}) = -2$ et $\varphi(\vec{u'}) = 0$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{u'})$. En déduire la nature de $f$.
5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur l'espace vectoriel E et $A$ un point de $\mathscr{E}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} F : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathscr{E} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

   où $M'$ est défini par $\overrightarrow{MM'} = \varphi(\overrightarrow{AM}).\vec{u}$.
   Démontrer que $F$ est une application affine. Quelle est l'application linéaire associée à $F$ ?

B- On rappelle que l'ensemble des fonction numériques définies sur $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, muni des lois habituelles (addition et multiplication par un réel), est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit E l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ appartenant à $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $(a,\ b)$ parcourt $\mathbb{R}^2$, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{a,b}(x) = ax\mathrm{e}^{-x} + \frac{b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
2. Soit P un plan affine euclidien et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de P. Étudier $f_{0,1}$ et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Démontrer que $f_{0,1}$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera, continue et strictement croissante sur cet intervalle. Exprimer cette fonction réciproque $f_{0,1}^{-1}$.
3. Démontrer que, pour tout entier $n$ positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{1,0}^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}(x-n)$$

   $f_{1,0}^{(n)}$ désignant la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f_{1,0}$.
4. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f_{a,b} &\longmapsto \int_0^{\log 2} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Soit $f_{\alpha,\beta}$ une fonction appartenant à E telle que

$$(\alpha,\beta) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad \varphi(f_{\alpha,\beta}) \neq 0.$$

On considère $\quad f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$

$\quad f_{a,b} \longmapsto f_{a,b} + \varphi(f_{a,b}) \cdot f_{\alpha,\beta}$.

Démontrer que $f$ est involutive si, et seulement si :

$$\frac{\alpha}{2}(1-\log 2) + \beta \log \frac{3}{2} + 2 = 0.$$

# XLVI. Nice remplacement, série C

**Ex. 1086.** ./1976/niceCrem/exo-1/texte.tex

Un joueur dispose de trois dés qu'il lance simultanément. Leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Il ne les lance qu'une fois.
Son gain est ainsi attribué :

- si les trois chiffres sortis sont égaux, il gagne 5 F ;
- si parmi les trois chiffres il y a deux « 1 » et deux seulement, il gagne 2 F ;
- si les trois chiffres sont consécutifs, alors il gagne 1 F ;
- dans tout autre cas, son gain est nul.

On appelle $X$ la variable aléatoire correspondant à son gain.

1. Établir la loi de probabilité, ou distribution, de $X$.
2. Établir la fonction de répartition. En donner une représentation graphique.
3. Calculer $E(X)$ (espérance mathématique de $X$).

**Ex. 1087.** ./1976/niceCrem/exo-2/texte.tex

Le plan affine P est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application $f$ de P dans P qui, à tout point $M(x\ ;\ y)$, associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3} \\ y' = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une application affine non bijective. Déterminer l'ensemble D des points de P invariants par $f$.

**2.** Étudier l'ensemble des antécédents par $f$ d'un point $M'(a'\ ;\ b')$ de P, en distinguant deux cas, suivant que $M'$ appartient, ou n'appartient pas, à D.

**3.** Reconnaître l'application $f$ est préciser ses éléments.

## Problème 353 ./1976/niceCrem/pb/texte

A- dans toute la suite, on note $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des réels positifs, et l'ensemble des entiers naturels privés de zéro.

1. Étudier la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

En déduire que, pour tout réel $t$ supérieur à 1, on a l'inégalité

$$\int_1^t x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant \int_1^t \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$



Retour page 1

2. Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Calculer $g'(x)$ ; en déduire sur $\mathbb{R}_+^\star$ une primitive de $f$.
Calculer l'aire $G$ du domaine du plan limité par la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'axe des abscisses de ce repère, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = \beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels données vérifiant $0 < \alpha < \beta$, puis étudier la limite de cette aire lorsque $\beta$ tend vers $+\infty$ et $\alpha$ tend vers $0$.

3. Vérifier que la fonction numérique $h$ définie par $h(x) = \log g(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Utiliser la fonction en escalier $k$ définie sur $[1\,;n[$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ par

$$k(x) = p\log\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \in [p-1\,;p[$$

$p$ prenant successivement toutes les valeurs entières de 1 à $n$, pour démontrer l'inégalité

$$\sum_{p=1}^{n} p\left(1+\frac{1}{p}\right) \geqslant \int_1^n x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

B- 1. Démontrer que : $\forall \alpha > 0,\ \log\alpha \leqslant \alpha - 1$.
(On pourra étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \log x - x + 1$.)

2. Soient $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n$, $n$ nombres réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité précédente à chacun des réels

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

démontrer que

$$\frac{1}{n}\left[\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n\right] \leqslant \log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{3}$$

3. Démontrer que l'inégalité (3) est équivalente à

$$x_1x_2\dots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

C- On considère les suites $(u)$ et $(v)$ de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}.$$

1. Démontrer que les suites de terme général $u_n$ et $\log u_n$ sont croissantes, convergentes et que leurs limites respectives sont $\mathrm{e}$ et $1$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n \leqslant \mathrm{e}$.

2. En utilisant les inégalités (1), (2) et (3), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \log v_n \geqslant \frac{1}{n}\int_1^n \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

3. Calculer $w_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$ (on remarquera que $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$), puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{w_n}{n}$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n}w_n \leqslant \log v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(v)$ est convergente. Quelle est sa limite ?

Retour page 1

# XLVII. Orléans Tours, série C

**Ex. 1088.** ./1976/orleansC/exo-1/texte.tex

**1.** Montrer que si deux nombres sont premiers entre eux, il en est de même pour leur somme et leur produit.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système :

$$\begin{cases} x+y & = 56 \\ \text{ppcm}(x,y) & = 105 \end{cases}$$

**Ex. 1089.** ./1976/orleansC/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble $E_1$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant :

$$z^2 - (1+i)^2 = \overline{z}^2 - (1-i)^2$$

**1.** Déterminer et construire l'ensemble $E_1$.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble $E_2$ des points $M$ vérifiant :

$$[x-(1+i)]\ [\overline{z}-(1-i)] = 8$$

**3.** Vérifier qu'il existe un point de $E_1 \cap E_2$ où les deux courbes ont même tangente.

## Problème 354

./1976/orleansC/pb/texte

I- Soit $E$ un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 2 et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée directe de $E$. Pour tout réel $t$, on appelle $\varphi_t$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

a) Reconnaître $\varphi_0$ et $\varphi_\pi$. Montrer que $\varphi_t$ est une similitude, composée de deux endomorphismes simples de $E$.

b) Soit $f$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_t$. Montrer que $F$, muni de la composition des applications est isomorphe au groupe additif des réels.

II- A l'espace vectoriel euclidien orienté $E$, on associe un espace affine $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout nombre réel $t$, on définit le point de coordonnées $(x,y)$ telles que :

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

a) *i.* Etudier, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations de la fonction $f$ qui, à $t$ réel, associe l'abscisse de $M$ :

$$f(t) = e^{-t}\cos t$$

*ii.* Comparer $f(t)$ et $f(t+2k\pi)$. $\quad k \in \mathbb{Z} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

*iii.* Soient $u$ et $v$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(t) = e^{-t} \qquad v(t) = -e^{-t}$$

$(C_1)$ et $(C_2)$ leur courbe représentative dans un repère $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.
Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Déterminer $(C) \cap (C_1)$ et $(C) \cap (C_2)$ et en déduire que la fonction $f$ n'admet pas de limite en $-\infty$.

*iv.* Comparer aux points de $(C) \cap (C_1)$ les tangentes à $(C)$ et $(C_1)$ (de même pour $(C)$ et $(C_2)$).

*v.* La fonction $f$ admet-elle une limite en $+\infty$.

*vi.* Utiliser ce qui précède pour représenter graphiquement $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes :

$$\mathrm{e}^{\frac{-\pi}{4}} = 0{,}455\ ; \quad \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = 2{,}193\ ; \quad \mathrm{e}^{-\pi} = 0{,}043\ ; \quad \mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}} = 0{,}094.$$



Retour page 1

b) Pour tout entier naturel $k$ on pose :

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+k\pi} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer cette intégrale (on pourra utiliser deux intégrations par parties).

b) Montrer que la suite $b$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = |a_k|$$

est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} b_k$ a une limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

III- Un point matériel $M$ de $\mathscr{E}$ est en mouvement pendant l'intervalle de temps $[0\,;+\infty[$. Sa position à la date $t$ est définie par ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t \\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t. \end{cases}$$

1° Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ de $M$ et le vecteur accélération $\Gamma$ de $M$ à la date $t$.
Le mouvement est-il accéléré, retardé ?

2° Démontrer que l'angle $(\overrightarrow{OM},\,\vec{V})$ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ avec le vecteur vitesse $\vec{V}$ de $M$ à la date $t$ est constant et ne donner une mesure.

3° Exprimer $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ en fonction de $t$.

4° Utiliser ce qui précède pour indiquer l'allure de la trajectoire de $M$.

# XLVIII. Orléans Tours remplacement, série C

**Ex. 1090.** ./1976/orleansCrem/exo-1/texte.tex

$f$ est la fonction réelle de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4}\,;+\frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = |x| + \tan x.$$

**1.** Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**2.** Montrer qu'il existe un réel unique $x_0$ appartenant à $I$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{\pi}{8}.$$

**3.** Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Quelle est la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $I$ ?

**Ex. 1091.** ./1976/orleansCrem/exo-2/texte.tex

On dispose de deux urnes dont l'une contient deux boules marquées 1, deux boules marquées 2 et deux boules marquées 3 et l'autre contient trois boules marquées 1, deux boules marquées 2 et une boule marquée 3. On tire une boule dans chaque urne et on suppose que chaque couple de boules a la même probabilité d'être tiré.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 3 comme somme des nombres écrits est $\frac{5}{18}$.
2. On considère la variable aléatoire $X$qui, à chaque couple de boules, associe la somme des nombres écrits sur ces boules. Donner la loi de probabilité de $X$.
Calculer l'espérance mathématique et l'écart- type de $X$.

## 🏛Problème 355

./1976/orleansCrem/pb/texte

$\mathscr{V}$ étant un espace vectoriel réel, et $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{V}''$ deux sous-espaces vectoriels donnés de $\mathscr{V}$, on se propose d'étudier l'ensemble E des endomorphismes de $\mathscr{V}$ de noyau $\mathscr{V}'$ et d'image $\mathscr{V}''$.

I- $\mathscr{V}$ un plan vectoriel de base $B=(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, $\mathscr{V}'$ est la droite vectorielle de base $\vec{v}'=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\mathscr{V}''$ est la droite vectorielle de base $\vec{v}''=a\,\vec{\imath}+b\,\vec{\jmath}$ ; où $a$ et $b$ sont deux réels différents de 0.

A) On suppose $a\neq b$.

1. Montrer que $(\vec{v}',\ \vec{v}'')$ est une base de $\mathscr{V}$.
2. Soit $p$ la projection vectorielle sur $\mathscr{V}''$ parallèlement à $\mathscr{V}'$. Est-ce que $p$ est un élément de E ?
3. Soit $f$ un élément de E. Écrire sa matrice dans le base $B'=(\vec{v}',\ \vec{v}'')$. En déduire que $f$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle que l'on déterminera. Y a-t-il commutativité de la composition ?
4. Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h\circ p$, où $h$ décrit l'ensemble $\mathscr{H}$ des homothéties vectorielles de $\mathscr{V}$.
5. E est-il stable pour la loi de compositions des applications ? Même question pour l'addition des applications ?
6. Montrer que $\begin{array}{rl} :\mathscr{H} & \longrightarrow \mathrm{E} \\ h & \longmapsto h\circ p\end{array}$ est un isomorphisme de groupes, les ensembles $\mathscr{H}$ et E étant muni de la loi de compositions des applications de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$. Préciser l'élément neutre de (E, $\circ$) et l'élément symétrique d'un élément donné de E.

B) On suppose $a=b$.

1. Peut-on définir la projection vectorielle $p$ de la partie IA ?
2. Soit $f_1$ l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ dont la matrice dans la base $B$ est :
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
Vérifier que $f_1$ est un élément de E.
3. Soit $f$ un endomorphisme de E, de matrice $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ dans la base $B$.
Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ pour que $f$ soit un élément de E.
4. En déduire que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h\circ f_1$, où $h$ décrit $\mathscr{H}$. E est-il stable pour la loi de compositions des applications ?

II- $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3. Si $f$ est un élément de E, on notera $\operatorname{Ker} f=\mathscr{V}'$ et $\mathbf{Im} f=\mathscr{V}''$.

1. Donner un exemple de sous-espaces $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{V}''$ tels que E soit l'ensemble vide.
On supposera dans la suite du problème que E n'est pas l'ensemble vide.
2. $f$ et $g$ étant deux éléments de E :
   a) Montrer que $\mathscr{V}'\subset\operatorname{Ker}(g\circ f)$ et $\mathbf{Im}(g\circ f)\subset\mathscr{V}''$.
   b) Si $\mathscr{V}'=\mathscr{V}''$, montrer que $\forall\vec{v}\in\mathscr{V},\qquad g\circ f(\vec{v})=\vec{0}$.
   E est-il stable pour la loi de composition des applications ?
   Rapprocher ce résultat de celui trouvé en I(B)4.
   c) Si $\mathscr{V}'$et $\mathscr{V}''$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{V}$, montrer que quel que soit $\vec{v}$ appartenant à $\operatorname{Ker}(g\circ f)$, $f(\vec{v})=\vec{0}$ et montrer que $\mathbf{Im}(g-\circ f)=\mathscr{V}''$. E est-il stable pour la loi de composition des applications ?
3. $\mathscr{V}''$ est une droite vectorielle de $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ un sous-espace supplémentaire de $\mathscr{V}''$ dans $\mathscr{V}$.
   a) Montrer que pour tout élément $f$de E , $f(\mathscr{V}'')\subset\mathscr{V}''$. En déduire que pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathscr{V}''$ , $f(\vec{v})$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   b) Démontrer que la restriction de $f$ à $\mathscr{V}''$ est une homothétie vectorielle.
   c) Démontrer que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h\circ p$, où $h$ décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de $\mathscr{V}$ , $p$ étant la projection vectorielle sur $\mathscr{V}''$ parallèlement à $\mathscr{V}'$

ℹDire que E est stable pour la loi de composition des applications signifie : $\forall(f,\ g)\in$E, $\qquad g\circ f\in$E.



Retour page 1

# XLIX. Paris, série C

**Ex. 1092.** ./1976/parisC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{pour } x \neq 0, \\ f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. On examinera en particulier le point $x = 0$.

**2.** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa fonction dérivée $f'$ est continue.

**Ex. 1093.** ./1976/parisC/exo-2/texte.tex

Une urne contient $n$ boules ; deux boules blanches, les autres sont noires. Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages qui sont effectués donnent à chaque boule la même probabilité. On épuise l'urne en tirant les $n$ boules, une à une, sans les remettre. On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au rang de le première boule blanche tirée.

1. Calculer la loi de $X$, c'est à dire, en fonction de $n$ les diverses probabilités

$$p_k = P\{X = k\} \qquad k = 1,\ 2,\ \dots, n.$$

2. a) Calculer le rang moyen ou espérance $E(X)$ pour la loi obtenue.
   On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   b) Sachant que $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$, en déduire, par une considération de symétrie, l'espérance $E(Y)$ du rang $Y$ de la seconde boule blanche tirée.

## Problème 356 ./1976/parisC/pb/texte

Le P désigne, dan stout le problème, un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans tout le problème, $\lambda$ désigne un réel quelconque et $k$ un réel strictement positif. A tout couple de réels $(\lambda,\ k)$, ainsi constitué, on associe la courbe $\mathscr{C}_{\lambda,\ k}$ dont une équation dans le repère $\mathscr{R}$ est :

$$(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 = k.$$

A- 1° Etudier les courbes $\mathscr{C}_{0,\ k}$, $\mathscr{C}_{1,\ k}$ et $\mathscr{C}_{-1,\ k}$.

2° a) Montrer que les deux coniques admettant respectivement pour équation :

$$3x^2 + y^2 = 12$$
$$3x^2 - y^2 = 6$$

sont des courbes $\mathscr{C}_{\lambda,\ k}$.

b) Déterminer les éléments géométriques des ces coniques : foyers, sommets, asymptotes et les représenter sur deux figures distinctes.

3° On suppose $\lambda$ différent de -1, 0 et 1. Le réel $k$ étant fixé, discuter, suivant la valeur de $\lambda$, la nature (ellipse ou hyperbole) de la conique $\mathscr{C}_{\lambda,\ k}$.

B- 1° On considère l'application affine$f_\lambda$, de P dans P, qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = (1+\lambda)x - \lambda y \\ y' = \lambda x + (1-\lambda)y. \end{cases}$$

a) Montrer que $f_\lambda$ est bijective de P sur P. Comparer $f_{-\lambda}$ et l'application réciproque de $f_\lambda$, notée $f_\lambda^{-1}$.

b) On considère l'application $\theta_\lambda$ de P dans $\mathbb{R}$, qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le réel :

$$(1+\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2.$$

Démontrer que, pour tout réel $\lambda$,

$$\theta_{-\lambda}\circ f_\lambda=\theta_\lambda$$

en déduire

$$\theta_\lambda\circ f_{-\lambda}=\theta_{-\lambda}$$

2° a) On note $f_\lambda(\mathscr{C}_{\lambda,\ k})$ l'ensemble des images par $f_\lambda$ des points de $\mathscr{C}_{\lambda,\ k}$. Démontrer que

$$f_\lambda(\mathscr{C}_{\lambda,\ k})=\mathscr{C}_{-\lambda,\ k}.$$

b) Représenter sur une même figure la courbe $\mathscr{C}_{\frac{1}{2},\ 6}$ et sa transformé par $f_{\frac{1}{2}}$ (on conseille de prendre pour unité 2 cm).

3° A chaque réel $\lambda$, on associe la droite $(D_\lambda)$ d'équation :

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y=0.$$

a) Montrer que, quel que soit $\lambda$, la droite $(D_\lambda)$ n'a jamais la direction $(\delta)$ définie par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}$.

b) Soit $s_\lambda$ la symétrie oblique d'axe $(D_\lambda)$ et de direction $(\delta)$. Montrer que $s_\lambda$ conserve globalement $\mathscr{C}_{\lambda,\ k}$.
Montrer que l'égalité : $f_\lambda=h\circ s_\lambda$ définit une transformation indépendante de $\lambda$. Préciser la nature de cette transformation.

c) A l'aide de la question B(3)b). précédente, retrouver le résultat de B(2)a).

C- Dans cette partie, on désigne par E la courbe $\mathscr{C}_{\frac{1}{2},\ 6}$ et par E' sa transformée par $f_{\frac{1}{2}}$. Les représentations graphiques ont été effectuées au B(2)b).

1° $N$ désigne un point arbitraire de E. Placer sur le figure les points :

$$N,\quad s_{\frac{1}{2}}(N),\quad h(N)\qquad \text{et}\qquad f_{\frac{1}{2}}(N)=N'.$$

Montrer qu'ils sont alignés.

2° a) On considère un point $M$ de P, mobile, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ s'expriment en fonction du temps $t$ ($t$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right[$) par :

$$x=2\sin t\qquad ;\qquad y=2\sqrt{3}\cos t.$$

Montrer que la trajectoire de $M$ est la courbe E.

b) Soit $M'$ le point de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$x'=2\sqrt{3}\cos\beta\qquad ;\qquad y=2\sin\beta.$$

Montrer qu'il existe un réel unique $\beta$ de l'intervalle $\left]-\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right]$ tel que $M'=f_{\frac{1}{2}}(M)$. Exprimer $\beta$ en fonction de $t$.

3° a) Calculer les coordonnées, à l'instant $t$, du vecteur vitesse du point $M$ et du vecteur vitesse du point $M'=f_{\frac{1}{2}}(M)$.

b) Soit $M_0$ la position du mobile à l'instant $t_0=0$. Montrer que $M'_0=f_{\frac{1}{2}}(M_0)$ est associé à $\beta=\frac{2\pi}{3}$.
Montrer que les tangentes respectives en $M_0$ à E, en $M'_0$ à E' se coupent en un point de la droite $\Delta$ d'équation $x-y=0$.

c) Plus généralement, la propriété « l'intersection des tangentes aux points $M$ et $M'=f_{\frac{1}{2}}(M)$, respectivement à E et à E', appartient à $\Delta$ » est-elle vraie à tout instant ?

Retour page 1

# L. Paris remplacement, série C

**Ex. 1094.** ./1976/parisCrem/exo-1/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel, non nul,. On considère les entiers $A$ et $B$ :

$$A = 3n^2 \qquad \text{et} \qquad B = n(2n+1).$$

Déterminer suivant les valeurs de $n$, le plus grand commun diviseur de $A$ et $B$.

**Ex. 1095.** ./1976/parisCrem/exo-2/texte.tex

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$mz^4 + (m-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i} = 0 \tag{1}$$

où $z$ désigne l'inconnue et i le nombre complexe de module 1 et d ?argument $\frac{\pi}{2}$, et où $m$ désigne un paramètre.

**1.** On suppose ici $m$ réel ; résoudre l'équation.

**2.** Trouver l'ensemble E des valeurs du paramètre (réelles ou complexes) pour lesquelles toutes les solutions de (1) sont de même module.

## Problème 357

./1976/parisCrem/pb/texte

A- On désigne par log la fonction logarithme népérien.

1. On considère la fonction $f$ qui, à $x$ réel, associe

$$f(x) = \log(|\log x|).$$

Préciser son domaine de définition puis calculer, $k$ étant un réel arbitraire, $f(\mathrm{e}^k)$.
Étudier la fonction $f$ et construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm). Donner, s'il y en a, les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et des axes de coordonnées, les tangentes à $(\mathscr{C})$ en ces points.

2. Soient $g$ et $h$ les fonctions de la variable réelle $x$ définies respectivement par

$$g(x) = \log(\log x)$$

$$h(x) = \log(\log(|x|)).$$

Préciser leurs domaines de définition et, en utilisant la question précédente, indiquer leurs représentations graphiques dans le plan P.

B- On considère la fonction $\varphi$, de la variable réelle $x$, définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x\log(|x|)}.$$

1. Préciser son domaine de définition ; étudier cette fonction et construire sa représentation graphique $(\Gamma)$dans un plan (P') rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).
Calculer, $k$ étant un réel non nul, $\varphi(\mathrm{e}^k)$.

2. Soit $a$ un réel strictement supérieur à un. On désigne par D(?) la partie du plan (P ?) ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :
   - $x$ est compris entre $a$ et $\mathrm{e}$
   - $0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)$.

   Calculer l'aire A $(a)$ de D$(a)$. Étudier les limites de A $(a)$ lorsque $a$ tend vers un, et lorsque $a$ tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout élément $x$ du domaine de définition de $\varphi$ : $\psi(x) = \varphi(x) - x$.

   a) Montrer que l'équation :

$$\psi(x) = 0 \tag{1}$$

   admet dans $\mathbb{R}^+$ une racine unique, que l'on notera $\alpha$. Montrer que $\alpha > 1$



Retour page 1

b) Exprimer, au moyen de $\alpha$, les racines de l'équation (1) dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire l'ensemble E des points d'intersection de $(\Gamma)$ et de la première bissectrice des axes de coordonnées.

d) En s'aidant du dessin, trouver un encadrement de $\alpha$ par deux réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ distants de $0{,}1$.
On pourra commencer par localiser approximativement $\alpha$ sur un intervalle I, puis on comparera $x^{-2}$ et $\log x$ pour des valeurs de $x$ appartenant à I et formant une progression arithmétique de raison $0{,}1$.

4. En étudiant le signe de la fonction $\psi_2$ définie par

$$\psi_2(x) = \varphi(x) + x$$

montrer que $(\Gamma)$ et la seconde bissectrice des axes de coordonnées n'ont aucun point commun.

C- On considère la fonction $t$ , définie sur une partie de $\mathbb{C}$, telle que :

$$t(z) = \frac{1}{z(\log|z|)}.$$

1. a) a. Déterminer le domaine $D_t$de définition de $t$.

   b) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $x+\mathrm{i}y$ est représenté à l'aide des points $M(x\ ;\ y)$ d'un plan $\mathrm{P}_1$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   Déterminer lorsque $z$ décrit $D_t$ l'ensemble $\mathrm{E}_1$ des points $M$ d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$.
   On associe à $t$ l'application $T$ de $\mathrm{E}_1$ dans $\mathrm{P}_1$ qui, au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M' = T(M)$ d'affixe $z' = t(z)$.
2. Exprimer le module et l'argument de $z' = t(z)$ au moyen de ceux de $z$.
3. En utilisant le résultat de B3 déterminer les points de $\mathrm{P}_1$ invariants par $T$.
4. Déterminer l'ensemble des points $M$ du domaine de définition de $T$, qui sont tels que l'origine $O$, le point $M$ et son image $M' = T(M)$ soient alignés.
5. Quel est le transformé par $T$ d'un cercle de centre O et de rayon $R$ strictement positif et différent de l'unité ?

| $x$ | 0,5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^x$ | 1,649 | 2,718 | 7,389 |
| $\mathrm{e}^{-x}$ | 0,607 | 0,368 | 0,135 |

# LI. Paris, série E

**Ex. 1096.** ./1976/parisE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$\log$ désigne le logoarithme népérien de base $\mathrm{e}$. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

**1.** Déterminer les ensembles de définition et de continuité des fonctions $f$ et $f'$. Montrer que $f$ est une fonction impaire.
Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de $f'$, montrer que pour tout $x$ appartenant à $\mathscr{D}$ :

$$x^2 f'(x) = -1 + f'(x). \tag{1}$$

**2.** $x$ est ici un nombre réel compris entre 0 et 1.

a) On pose :

$$I(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

calculer $I(x)$. On pourra utiliser une intégration par parties et la relation (1).

Retour page 1

b) On pose :

$$J(x) = \int_{-x}^{x} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il une relation simple entre $I(x)$ et $J(x)$ ?

c) Calculer, si elles existent, les limites suivantes lorsque $x$ tend vers 1, par valeurs inférieurs à 1 :

$$\lim_{x\to 1^-} I(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} J(x).$$

**Ex. 1097.** ./1976/parisE/exo-2/texte.tex

Un espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$. L'unité de longueur est le centimètre.
La ligne de terre de support $Y'OY$ est située à 10 centimètres du bord inférieur de la feuille.
Le point $O$ est situé à 2 centimètres du bord gauche de la feuille. On choisit le plan $XOY$ pour plan horizontal de projection, et le plan $YOZ$ pour plan frontal de projection.
L'axe $\overrightarrow{OY}$ est orienté positivement de gauche à droite. $\overrightarrow{OX}$ est dirigé vers le bas de la feuille et $\overrightarrow{OZ}$ vers le haut.
L'axe d'une rotation $\mathscr{R}$ est la verticale $\Delta$ passant par le point $I(X=2\ ;\ Y=4\ ;\ Z=0)$ et l'image par $\mathscr{R}$ du point $A(X=0\ ;\ Y=4\ ;\ Z=0)$ est le point $B(X=2\ ;\ Y=2\ ;\ Z=0)$.

**1.** Construire les traces du plan $(\Pi)$ d'équation :

$$2X-3Y+2Z=0.$$

**2.** a) Les traces du plan $\Pi_1 = \mathscr{R}(\Pi)$.

b) Construire la droite $D$ d'intersection des plans $\Pi_1$ et $\Pi$.

c) Expliquer pourquoi $D$ et l'axe $\Delta$ de la rotation $\mathscr{R}$ sont deux droites coplanaires.

## Problème 358

./1976/parisE/pb/texte

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des deux premières questions.

**1.** Étudier les variations de l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Tracer la courbe représentative de $f$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé.

**2.** Montrer que $f$ admet une application réciproque $f^{-1}$ dont on étudiera les variations. Tracer la courbe représentative de $f^{-1}$ dans le plan P.

Calculer $x-\sqrt{1+x^2}$ en fonction de $f(x)$. En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de $x$.

**3.** Étudier les variations de l'application $g$ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$g(u) = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

(on ne demande pas de représentation graphique de $g$).

**4.** Soit $n$ un entier naturel. On pose :

$$P_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{1+x^2})^n + (x-\sqrt{1+x^2})^n\right].$$

Montrer, sans le calculer explicitement, que $P_n(x)$ est un polynôme dont on précisera le degré en fonction de $n$.
Comparer $P_n(x)$ et $P_n(-x)$.

**5.** En notant $\varphi$ la fonction telle que $\varphi(x) = x^n$, montrer que suivant la parité de $n$ on a :

$$P_n = g\circ\varphi\circ f \qquad \text{ou} \qquad P_n = f^{-1}\circ\varphi\circ f.$$

déduire de ce qui précède le tableau de variations de $P_n$.
*On supposera dans ce qui suit que $n$ est un entier pair non nul.*



Retour page 1

**6.** $a$ étant un paramètre réel, étudier le nombre de racines réelles de l'équation

$$P_n(x) = a.$$

**7.** $\lambda$ étant un réel strictement compris entre $0$ et $\dfrac{\pi}{2}$, déterminer les racines complexes de l'équation :

$$g(z) = \cos\lambda.$$

En déduire les solutions complexes de

$$(g \circ \varphi)(z) = \cos\lambda.$$

Pour chacune des racines $z$ de cette équation calculer

$$x = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

puis $P_n(x)$.

## LII. Paris remplacement, série E

**Ex. 1098.** ./1976/parisErem/exo-1/texte.tex

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $z$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

$$z^3 - (4 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^2 + (3 + 4\mathrm{i}\sqrt{3})z - 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 0. \tag{1}$$

**1.** Montrer que cette équation admet deux racines réelles (on les notera $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$) et une imaginaire pure notée $\omega$.

**2.** Soit $f$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(z) = az + b \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad b \in \mathbb{C}.$$

a) Calculer les nombres complexes $a$ et $b$ te telle sorte que :

$$f(\omega) = \omega \qquad \text{et} \qquad f(\alpha) = \beta.$$

b) Calculer le module et l'argument de $a$ et caractériser géométriquement la transformation ponctuelle $\varphi$ du plan complexe associée à $f$.

**Ex. 1099.** ./1976/parisErem/exo-2/texte.tex

Un espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$. L'unité de longueur est le centimètre.
On choisit le plan $XOY$ pour plan horizontal de projection et le plan $YOZ$ pour plan frontal de projection. La ligne de terre, de support $Y'OY$, est située à 10 cm du bord inférieur de la feuille. $O$ est à 5 cm du bord gauche.
L'axe $\overrightarrow{OY}$ est orienté positivement de gauche à droite.
$\overrightarrow{OX}$ est dirigé vers le bas de la feuille et $\overrightarrow{OZ}$ vers le haut.
On donne :

— le plan (P) d'équation : $4X - 2Y + Z + 2 = 0$ ;

— le point A $(X = 9,\ Y = 1,\ Z = 6)$.

**1.** Construire les traces du plan (P).

**2.** Construire la droite D (notée $(d,\ d')$ sur l'épure) perpendiculaire au plan (P) passant par le point A, et construire son intersection I avec le plan (P).

**3.** Construire, sur l'épure, en vraie grandeur, la distance $AI$. On explicitera les constructions effectuées dans une brève notice.

Retour page 1

## PROBLÈME 359

./1976/parisErem/pb/texte

Dans tout le problème, (P) désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. $m$ étant un réel donné, on considère l'application numérique $f_m$, définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_m(x) = \mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - m)$$
et on désigne par $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans le plan (P).
   a) Indiquer, suivant les valeurs de $m$, la variation de $f_m$ (on distinguera deux cas). En particulier, étudier la variation de $f_{-1}$ et tracer $\mathscr{C}_{-1}$.
   b) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un même point.
   Pour quelles valeurs de $m$ existe-t-il sur $\mathscr{C}_m$ un point $P_m$ d'ordonnée minimale ? Déterminer une équation de l'ensemble des points $P_m$.
2. a) Étudier la variation de $f_3$ et tracer $\mathscr{C}_3$. En déduire le nombre de solutions de l'équation, où $x$ réel désigne l'inconnue :
$$\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - m) = h$$
   selon les valeurs du paramètre $h$.
   b) On considère un point mobile $M$ du plan (P) dont les coordonnées sont données en fonction de la date $t$, $t$ étant strictement positif :
$$x = \log t, \qquad y = t^2 - 4t + 3$$
   où $\log$ désigne le logarithme népérien.
   Quelle est la trajectoire de $M$ ? A quel instant, les vecteurs vitesse et accélération sont-ils colinéaires ? Les représenter dans ce cas.
3. On désigne par $M$ et $M'$ le sdeux points ayant la même abscisse $x$ et appartenant à $\mathscr{C}_{-1}$ et $\mathscr{C}_3$. Soit $\mu$ le milieu de $MM'$.
   Déterminer l'ensemble des points $\mu$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$. Montrer que cet ensemble est l'une des courbes $\mathscr{C}_m$.
4. Calculer, $m$ étant fixé, pour $\alpha$ strictement négatif :
$$S_\alpha = \int_\alpha^0 [m - f_m(x)]\,\mathrm{d}x$$
   et déterminer la limite $A_m$, si elle existe, de $S_\alpha$ lorsque $\alpha$ tend vers $-\infty$.
5. Soit $g$ la fonction numérique définie par :
$$g(x) = log\left[(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3)\right].$$
   a) Indiquer son domaine de définition $\mathscr{D}_g$ et sa variation sur $\mathscr{D}_g$.
   b) Tracer la courbe représentative $\Gamma$ de $g$ ainsi que ses asymptotes.
   On pourra noter que $\Gamma$ admet une asymptote oblique en écrivant :
$$(\forall x \in \mathscr{D}_g) \qquad g(x) = 2x + g_1(x).$$

# LIII. Poitiers, série C

Ex. 1100.

./1976/poitiersC/exo-1/texte.tex

L'ensemble référentiel est l'ensemble $\mathbb{N}^\star$ des entiers naturels non nuls ; $x$ est un élément de $\mathbb{N}^\star$, différent de $1$ ; $p$ et $q$ sont des éléments de $\mathbb{N}^\star$.

**1.** Montrer que si $d$ est un diviseur de $p$, alors $x^d - 1$ est un diviseur de $x^p - 1$.

**2.** Montrer qu si $d$ est le PGCD de $p$ et de $q$, alors il existe $m$ et $n$ tels que $mp - nq = d$. En déduire que si $d$ est le PGCD de $p$ et de $q$, on peut trouver $m$ et $n$ vérifiant :
$$(x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1)x^d = x^d - 1$$

**3.** De l'égalité précédente, déduire que $x^d - 1$ est le PGCD de $x^{mp} - 1$ et de $x^{nq} - 1$.

Retour page 1

**Ex. 1101.** ./1976/poitiersC/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on fait correspondre le complexe $z = x + iy$, appelé affixe de $M$ et $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ est l'imaginaire conjugué de $z$.

**1.** Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est :
$$z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z} + 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$$
Quelle est l'image $f(\omega)$ du point $\omega$ d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ ?
Montrer que $f$ est une similitude inverse dont on précisera les éléments remarquables.

**2.** Soit $g$ la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite affine d'équation $y = x\sqrt{3}$. Calculer en fonction de $x$ et $y$, coordonnées d'un point $M$, les coordonnées $(x',\ y')$ de $M' = g(M)$.

**3.** Déterminer $g \circ f$ et donner ses éléments remarquables.

## Problème 360

./1976/poitiersC/pb/texte

**A-** Pour tout couple de réels $(a_1, b_1)$, on considère la fonction $\varphi_1$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs de la façon suivante :
$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ \ , \ \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$

**1.** On suppose dans cette question $\quad a_1 = -b_1 = 1$.

a) Montrer que la fonction $\varphi_1$ correspondante est continue sur $\mathbb{R}^+$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$ ? Déterminer la fonction dérivée $\varphi_1'$ et la limite de cette fonction quand $x$ tend vers $0$ par valeurs positives.

b) Étudier les variations de $\varphi_1$. Construire sa courbe représentative $(C_1)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé ; on précisera la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère et les points d'ordonnée nulle.

c) Montrer que la fonction $\varphi_2$ :
$$x \mapsto \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t)dt$$
est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $\varphi_2(x)$. (on trouvera, pour $x$ non nul, $\varphi_2(x) = \dfrac{x^2}{4}(3 - 2\log x)$).
Construire la courbe représentative $(C_2)$ de $\varphi_2$ dans le même plan que $(C_1)$ en précisant la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère, les points d'ordonnée nulle.

**2.** On suppose maintenant $a_1$ et $b_1$ réels quelconques.

a) Etudier brièvement la continuité et la dérivabilité de la fonction $\varphi_1$ associée.
$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ \ , \ \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$

b) Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble des entiers naturels non nuls une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :
$$\varphi_1(0) = 0 \qquad \forall x > 0 \ \ , \ \ \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \log x)$$
$$\forall n > 1 \ \ , \ \ \forall x \geq 0 \ \ , \ \ \varphi_n(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}(t)dt$$
Vérifier qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ telles que :
$$\forall x > 0 \ \ , \ \ \varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \log x)$$
Former des relations de récurrence concernant les couples $(a_n,\ b_n)$ et $(a_{n-1},\ b_{n-1})$. Étudier la suite $b$.
On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $t_n = n! a_n$. Former une relation de récurrence satisfaite par $t_n$ et $t_{n-1}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs $A$ et $B$ tels que :
$$\forall n \geq 1 \ \ , \ \ |t_n| \leq A + B \log n$$
(on pourra montrer que, pour tout entier naturel $n$ strictement supérieur à $1$ ; on a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leq \log n$). Étudier alors la convergence de la suite $a$.



Retour page 1

**B-** A tout couple $(a,\ b)$ de réels, à tout entier naturel non nul $p$, on associe l'application $\varphi$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(0)=0 \qquad \forall x>0 \quad , \quad \varphi(x)=x^p(a+b\log x)$$

Pour tout entier naturel non nul $p$, on note $E_p$ l'ensemble décrit par $\varphi$ lorsque $(a,b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

**1.** Montrer que si $p$ est différent de $1$, $E_p$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$. Examiner le cas de $p=1$.
On supposera dans la suite du problème $p\neq 1$.

**2.** Montrer que les éléments de $E_p$, notée $u$ et $v$, obtenus respectivement en donnant à $(a,b)$ les valeurs $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $E_p$.

**3.** Soit $f$ l'application qui, à tout élément $\varphi$ de $E_p$, associe la fonction numérique $f(\varphi)$, notée $g$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=x.\varphi'(x)$. Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E_p$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(u,v)$. L'application $f$ est-elle un automorphisme de $E_p$ ?

**4.** $k$ étant un réel donné, on appelle $F_k$ l'ensemble des éléments $\varphi$ de $E_p$ tels que $f(\varphi)=k.\varphi$. Déterminer $F_k$ et discuter suivant les valeurs de $k$.

**5.** Démontrer qu'il existe deux constantes réelles $\lambda$ et $\mu$ telles que, pour tout élément $\varphi$ de $E_p$,

$$(f\circ f)(\varphi)+\lambda f(\varphi)+\mu.\varphi$$

soit l'application nulle.

## LIV. Poitiers remplacement, série C

**Ex. 1102.** ./1976/poitiersCrem/exo-1/texte.tex

1. Montrer que si $a'$ et $b'$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $(a'+b')$ est premier avec $a'b'$.
2. Déterminer les couples d'entiers naturels $(a,\ b)$, admettant $m$ pour plus petit commun multiple et tels que :

$$5(a+b)^2=147m.$$

**Ex. 1103.** ./1976/poitiersCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, à tout point $M$ d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$, on associe le point $M'$ d'affixe $z'=x'+\mathrm{i}y'$ tel que :

$$z'=(3+2\mathrm{i})z+3\mathrm{i}\overline{z}-1.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points $M$ tels que $O,\ M,\ M'$ soient alignés.
2. Montrer que cet ensemble des points $M$ est une conique dont on précisera les foyers sommets, directrices et excentricité. Dessiner cet ensemble.

### PROBLÈME 361

./1976/poitiersCrem/pb/texte

-I- Á tout réel m, on associe l'application $f_m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_m(x)=x+m\sin x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $O$ est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_m$.
2. Soit $\Gamma_k$ l'ensemble des points de $\mathscr{C}_m$ qui satisfont à

$$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Montrer que $\Gamma_k$ se déduit de $\Gamma_0$ par une translation que l'on précisera.

3. a) Étudier, suivant les valeurs de $m$, le sens de variation de l'application $f_m$.
   b) Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ?

c) Construire les courbes représentatives des restrictions à $[-\pi\,;+\pi]$ de $f_{-1},\ f_{1/2},\ f_1,\ f_2$.

4. On suppose $m<-1$.

   a) Montrer que, lorsque $x$ décrit l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble des valeurs de $f_m$ possède un minimum $y_0$ pour $x_0\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Soit $N_m$ le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ de $\mathscr{C}_m$. Montrer que ses coordonnées sont liées pour la relation :

   $$y_0=x_0-\tan x_0.$$

   Construire l'ensemble des points $N_m$, lorsque $m$ décrit l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

   b) Montrer que : $\forall x\in[0\,;x_0]$, $\qquad f_m(x)\leqslant x-\tan x$.
   Montrer que l'aire du domaine, ensemble des points $M\,(x\ ;\ y)$ tels que :

   $$0\leqslant x\leqslant x_0,\qquad x+m\sin x\leqslant y\leqslant x-\tan x,$$

   s'exprime à l'aide de $m$ seul.

-II- Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application $T$ de P dans P qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases}x'=x+\dfrac{1}{2}\sin x\\ y'=y+\dfrac{1}{2}\sin y.\end{cases}$$

1. Montrer que $T$ est une bijection de P sur P. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T$.
2. Soit Q l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $|x|<\pi$ et $|y|<\pi$
   Montrer que la restriction de T à Q est une bijection de Q sur Q.
   Préciser les points invariants de Q.

-III- Soit S l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases}x'=x-y\\ y'=x+y.\end{cases}$$

1. Montrer que S est une similitude dont on précisera les éléments (centre,angle, rapport). Définir $S^{-1}$.
2. Soit K l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées vérifient :
   ou bien $|x|=\pi$ et $|y|\leqslant\pi$ ou bien $|x|\leqslant\pi$ et $|y|=\pi$.
   Construire sur une même figure : K, S(K) et $S^{-1}$(K), en justifiant cette construction.

-IV- On note F l'application de P dans P définie par F = $S^{-1}\circ T\circ S$ .

1. 1. Démontrer que si $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ est l'image de $M\,(x\ ;\ y)$ par F, on a :

   $$x'=x+\frac{1}{2}\sin x\cos y\qquad\text{et}\qquad y'=y+\frac{1}{2}\sin y\cos x.$$

2. Déduire des questions précédentes que F est une bijection de P sur P et que $S^{-1}$(Q) est globalement invariant par F.
3. Démontrer que la restriction de F au domaine Q a cinq points invariants que l'on précisera.



Retour page 1

# LV. Reims, série C

**Ex. 1104.** ./1976/reimsC/exo-1/texte.tex

On pose :

$$I(a,n)=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx \qquad a\in\mathbb{N}^\star \qquad n\in\mathbb{N}^\star \qquad I(a,0)=\int_0^1 x^n dx$$

**1.** En intégrant par parties, montrer que :

$$I(a+1,n)=\frac{a+1}{n+1}I(a,n+1)$$

**2.** Établir que $I(a,n)-I(a,n+1)=I(a+1,n)$. En déduire que :

$$I(a,n+1)=\frac{n+1}{n+a+2}I(a,n)$$

**3.** $a$ étant fixé ($a\in\mathbb{N}^\star$), calculer $I(a,0)$ et démontrer par récurrence sur $n$, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ :

$$I(a,n)=\frac{1.2.3.\dots.(n-1).n}{(a+1).(a+2).\dots.(a+n+1)}$$

**Ex. 1105.** ./1976/reimsC/exo-2/texte.tex

En base 9, trouver tous les couples de chiffres $(x,\ y)$ pour lesquels le nombre $\overline{7x6y4}$ est divisible par 7 et par 8.
(On pourra utiliser le système décimal comme intermédiaire).

## Problème 362

./1976/reimsC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

**I-** On donne un point $\Omega$ de $\mathcal{P}$ et un nombre réel $k$ strictement positif. Soit $f$ l'application de $\mathcal{P}-\{\Omega\}$ dans $\mathcal{P}-\{\Omega\}$ définie par :

$$m\mapsto M=f(m) \qquad \text{tel que } \overrightarrow{\Omega M}=\frac{k}{||\overrightarrow{\Omega m}||^2}.\overrightarrow{\Omega M}$$

**1.** Etablir que $||\overrightarrow{\Omega M}||=\dfrac{k}{||\overrightarrow{\Omega m}||}$ et que $f$ est une application involutive de $\mathcal{P}-\{\Omega\}$ dans $\mathcal{P}-\{\Omega\}$.

**2.** a) Quelle est l'image par $f$ du cercle $\Gamma$ de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{k}$ ?

b) Quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ? $f$ est-elle une application affine ?

**3.** $\mathcal{P}$ est considéré comme plan complexe. Tout point $m(x,\ y)$ de $\mathcal{P}$ a pour affixe $z=x+iy$ ; on note $\alpha$ l'affixe de $\Omega$ et $Z$ l'affixe de $M$, image de $m$ par $f$. Établir la relation :

$$Z=\alpha+\frac{k}{\overline{\overline{z-\alpha}}}. \tag{1}$$

**II-** On appelle $f'$ l'application associée à la relation $Z-1=\dfrac{k}{\overline{z}-1}$

et $f_1$ celle associée à la relation $Z-1-b=\dfrac{b\overline{b}}{\overline{\overline{z-1-b}}}$ où $b$ et $\overline{b}$ sont deux nombres complexes conjugués ($b\neq 0$).

**1.** a) Sur quel ensemble $E_1$ la composée $\varphi_1=f'\circ(f_1\circ f')$ est-elle définie ?

b) Établir la relation entre les affixes de $m$ et de son image par $f_1\circ f'$, en déduire que la relation entre les affixes de $m$ et de son image $M_1$ par $\varphi_1$ est :

$$Z_1=\frac{b+\overline{b}+k}{\overline{b}}-\frac{b}{\overline{\overline{b}}}z. \tag{2}$$

**2.** On pose désormais $k=\sin^2\theta$ et $b=\dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta+i\cos\theta)$



Retour page 1

a) En utilisant la relation (2), montrer que $\varphi_1$ est alors la restriction à $E_1$ d'une symétrie orthogonale $S_1$ par rapport à une droite $\Delta_1$ passant par $O$. On appelle $D$ la droite $(O,\vec{u})$, déterminer l'angle $(D,\Delta_1)$.

b) On appelle $f_2$ l'application associée à la relation :

$$Z-1-\overline{b}=\frac{b\overline{b}}{\overline{z-1-\overline{b}}}$$

et $\varphi_2$ la composée $\varphi_2 = f' \circ (f_2 \circ f')$. Montrer sans nouveaux calculs que $\varphi_2$ est aussi la restriction à un ensemble $E_2$ d'une symétrie orthogonale $S_2$ par rapport à une droite $\Delta_2$ que l'on précisera.

c) Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de $R$ où $R$ désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application $R$.

Quelles valeurs doit-on donner à $\theta$ pour que $R$ soit associée à la relation $Z = z(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)$ ?

**3.** Soit les applications définies dans $E' = \mathcal{P}-\{O\}$ par :

$$f_1' \quad : \quad z \mapsto \frac{1}{z} \qquad f_2' \quad : \quad z \mapsto \frac{1-k}{\overline{z}}$$

a) Montrer que la composée $h = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à $E'$ d'une homothétie que l'on précisera.

b) Quel est l'ensemble de définition de $h \circ R$?
Montrer que l'application $h \circ R$ est associée à la relation :

$$Z = (1-k)(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)z \tag{3}$$

pour un choix convenable de $R$.

**4.** On appelle $\sigma$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (3). Déterminer la nature de $\sigma$ et ses éléments remarquables ; discuter selon les valeurs de $\theta$.

## LVI. Rennes, série C

**Ex. 1106.** ./1976/rennesC/exo-1/texte.tex

Le symbole log désignant la fonction logarithme népérien, soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x - 1 - (e^x-1)\log|e^x-1| \text{ si } x \neq 0 \qquad f(0)=0$$

**1.** Montrer que $f$ est continue en $0$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $C$ relativement à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Préciser la tangente à cette courbe en son point d'abscisse $0$.

**Ex. 1107.** ./1976/rennesC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $143x-100y=1$ en remarquant que $(7;10)$ est solution.

**2.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels $p$ tels que

$$10^{6p}+10^{3p}-2 \equiv 0 \pmod{143}$$

### Problème 363

./1976/rennesC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère de $\mathcal{P}$.
$D_1$ et $D_1'$ les droites passant par $O$ et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
$D_2$ et $D_2'$ les droites passant par $O$ et dont les coefficients directeurs respectifs sont les réels distincts $m$ et $m'$.
On dit qu'une application affine $f$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ échange deux droites $D$ et $D'$ si et seulement si

$$f(D)=D' \text{ et } f(D')=D$$

**I-** On désigne par :

— $S_1$ la symétrie affine par rapport à $D_1$ parallèlement à $D'_1$
— $S'_1$ la symétrie affine par rapport à $D'_1$ parallèlement à $D_1$
— $S_2$ la symétrie affine par rapport à $D_2$ parallèlement à $D'_2$
— $S'_2$ la symétrie affine par rapport à $D'_2$ parallèlement à $D_2$
— $S_O$ la symétrie de centre $O$
— $Id$ l'application identique dans $\mathcal{P}$.

**1.** Soit $E$ l'ensemble ayant pour éléments $Id, S_O, S_1, S'_1$. Démontrer que $E$ muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

**2.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $m$ et $m'$ pour que la transformée de $D_2$ par $S_1$ soit $D'_2$. Montrer qu'alors $D_1$ et $S'_1$ échangent $D_2$ et $D'_2$ et vérifier (par exemple par un calcul) que $S_2$ et $S'_2$ échangent $D_1$ et $D'_1$.

**II-**

**1.** Soit $S$ une symétrie affine échangeant $D_1$ et $D'_1$. Quelle est l'image de $O$ par $S$ ? Démontrer qu'il existe un réel $a$ non nul tel que pour tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{P}$, son image $M'(x',y')$ soit définie par :

$$x' = \frac{1}{a}y \qquad y' = ax$$

Démontrer que $S$ échange $D_2$ et $D'_2$ si et seulement si : $mm' = a^2$.

**2.** Montrer que si $m$ et $m'$ sont non nuls et de même signe, il existe deux symétries affines et deux seulement, $L$ et $L'$, qui échangent $D_1$ et $D'_1$ d'une part, $D_2$ et $D'_2$ d'autre part. Montrer que :

$$L \circ L' = L' \circ L = S_O$$

**III-** On suppose dans cette partie que : $m' > m > 0$.
On désigne toujours par $L$ et $L'$ les symétries échangeant $D_1$ et $D'_1$ d'une part, $D_2$ et $D'_2$ d'autre part.

**1.** En utilisant II-2. et un repère convenable, démontrer qu'il existe deux symétries affines et deux seulement, $\Sigma$ et $\Sigma'$, qui échangent $D_1$ et $D_2$ d'une part, $D'_1$ et $D'_2$ d'autre part.
On appellera $\Delta$ l'axe de $\Sigma$, et $\Delta'$ l'axe de $\Sigma'$.

**2.** On pose :

$$T = L \circ \Sigma \circ L$$

a) Démontrer que $T$ est la symétrie par rapport à la droite $L(\Delta)$ (transformée de $\Delta$ par $L$) parallèlement à la droite $L(\Delta')$ (transformée de $\Delta'$ par $L$).

b) Quelles sont les images par $T$ des droites $D_1$ et $D'_1$ ?

c) Démontrer que $L$ échange $\Delta$ et $\Delta'$.

## LVII. Rennes remplacement, série C

Ex. 1108. ./1976/rennesCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Étudier les variations de l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

**2.** Montrer que $f$ admet une réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire l'expression de $f^{-1}$ (on pourra effectuer la changement de variable défini par $\mathrm{e}^x = X$).

**3.** Déterminer la fonction dérivée de $f^{-1}$ et calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+4}}.$$

Retour page 1

**Ex. 1109.** ./1976/rennesCrem/exo-2/texte.tex

Soit $A$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $[0\,;2[$ dans $\mathbb{R}$.
$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ les éléments de $A$ définis par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1-x \\ f_2(x) &= |1-x| \\ f_3(x) &= \mathrm{E}(x) \\ f_4(x) &= x.\mathrm{E}(x) \end{aligned}$$

$\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de $x$.

**1.** Montrer que $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est un système libre.

**2.** Montrer que $f_4$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$ et calculer les composantes de $f_4$ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.

## Problème 364

./1976/rennesCrem/pb/texte

Le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe la nombre complexe $z$ affixe de $M$.

I- 1. Soient (On pourra par exemple écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.)

2. En déduire que trois points $M_1$ d'affixe $z_1$, $M_2$ d'affixe $z_2$ et $M_3$ d'affixe $z_3$ ; sont sur la même demi-droite d'origine $O$ si, et seulement si :

$$|z_1+z_2+z_3| = |z_1|+|z_2|+|z_3|.$$

II- Soient trois points $A_1,\ A_2$ et $A_3$ dont les affixes $a_1,\ a_2,\ a_3$ vérifient :

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1.$$

Montrer que $A_1,\ A_2$ et $A_3$ sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre $O$ si, et seulement si, $a_1+a_2+a_3 = 0$. (On pourra considérer l'isobarycentre des points $A_1,\ A_2,\ A_3$.)

III- Soient trois points $B_1,\ B_2$ et $B_3$ dont les affixes $b_1,\ b_2,\ b_3$ vérifient :

$$\frac{|b_1|}{b_1}+\frac{|b_2|}{b_2}+\frac{|b_3|}{b_3} = 0.$$

On pose $\alpha_1 = \dfrac{|b_1|}{b_1}$, $\alpha_2 = \dfrac{|b_2|}{b_2}$ et $\alpha_3 = \dfrac{|b_3|}{b_3}$.

1. Montrer que le nombre : $S = \overline{\alpha_1}(z-b_1)+\overline{\alpha_2}(z-b_2)+\overline{\alpha_3}(z-b_3)$ est indépendant de $z$.
Calculer $|S|$ et en déduire que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad |b_1|+|b_2|+|b_3| \leqslant |z-b_1|+|z-b_2|+|z-b_3|.$$

2. Montrer que pour l'affixe $z$ d'un point $M$ vérifie la relation :

$$|z-b_1|+|z-b_2|+|z-b_3| = |b_1|+|b_2|+|b_3| \tag{1}$$

il faut, et il suffit, que les trois angles de vecteurs

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB_1};\overrightarrow{B_1M}}\right) \quad , \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OB_2};\overrightarrow{B_2M}}\right) \quad , \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OB_3};\overrightarrow{B_3M}}\right)$$

soient égaux.
Quel est l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie (**??**) ?

3. Soient $MB_1,\ MB_2$ et $MB_3$ les distances respectives de $M$ aux points $B_1,\ B_2$ et $B_3$. On pose $S(M) = MB_1+MB_2+MB_3$.
Démontrer que l'ensemble des réels $S(M)$ pour $M$ appartenant à $\mathscr{E}$ a un plus petit élément.

IV- Soit $ABC$ un triangle dont chaque angle a une mesure en radians inférieure à $\dfrac{2\pi}{3}$.
Déterminer par une construction géométrique simple le point $M$ qui réalise le minimum de $MA+MB+MC$.



Retour page 1

# LVIII. Rennes, série E

**Ex. 1110.** ./1976/rennesE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = x\log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**1.** $f$ est-elle continue en 0 ? (On pourra poser $\dfrac{1}{x} = -t$)

$f$ est-elle dérivable en 0 ?

$f$ est-elle intégrable sur $[-1\,;+1]$ ?

**2.** Étudier les variations de $f$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
Montrer que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. Préciser les tangentes à $(\mathscr{C})$ au point $O(0\ ;\ 0)$ et au point $A(1\ ;\ 0)$. Construire $(\mathscr{C})$.

**Ex. 1111.** ./1976/rennesE/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(3\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 2)$. $t$ décrivant $\mathbb{R}$, on désigne par (E) l'ensemble des barycentres $M$ des points $O$, $A$ et $B$ affectés respectivement des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ avec

$$\begin{cases} \alpha = -\cos t - \sin t + 1 \\ \beta = +\cos t - 2\sin t + 1 \\ \gamma = 3\sin t. \end{cases}$$

**1.** Calculer les coordonnées de $M$ en fonction de $t$.

**2.** Déterminer une équation cartésienne de (E). Construire cet ensemble.

## Problème 365

./1976/rennesE/pb/texte

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
dans le plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de sens direct, on considère l'application qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par :

$$\begin{cases} x' = mx + y \\ y' = x + my - 1 \end{cases} \qquad \text{où } m \text{ est un réel donné.}$$

A- 1. Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ n'est-elle pas bijective ?

2. Étudier, suivant les valeurs de $m$, l'existence de points invariants par $f_m$. Lorsqu'il existe un point invariant, calculer ses coordonnées en fonction de $m$.
Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points invariants quand $m$ varie.Trouver une équation de $\mathscr{H}$. Construire $\mathscr{H}$. Indiquer la nature de $\mathscr{H}$ et ses éléments caractéristiques.

3. $f_m$ peut-elle être involutive ?

B- On suppose dans cette partie $m = 2$. On pose $g = t \circ f_2$ où $t$ désigne la translation de vecteur $\vec{\jmath}$.

1. Déterminer l'ensemble $D$ des points invariants par $g$.

2. Soit $M_1 = g(M)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ appartient à une droite vectorielle fixe. $H$ désignant la projection orthogonale de $M$ sur $D$, montrer qu'il existe un réel $\lambda$ tel que, pour tout point $M$ : $\overrightarrow{HM_1} = \lambda\overrightarrow{HM}$.
En déduire une construction simple de $M'$ connaissant $M$.

C- On suppose dans cette partie $m = 0$. Montrer que $f_0$ est un anti-déplacement plan sans point invariant.
Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $s$ par rapport à une droite et une translation $\ell$ telles que $f = s \circ \ell = \ell \circ s$. Expliciter $s$ et $\ell$.

D- Dans cette partie $m = 1$.



Retour page 1

1. Déterminer $f_1(\mathrm{P}) = \Delta$.
2. Montrer que l'on peut décomposer $f_1$ sous la forme $f_1 = h \circ p$ où $p$ est la projection orthogonale sur $\Delta$ et $h$ une homothétie de centre $A_1$, seul point invariant par $f_1$ et de rapport $k$ que l'on déterminera.

## LIX. Rennes remplacement, série E

**Ex. 1112.** ./1976/rennesErem/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on désigne par $f$ l'application définie par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad f(z) = z^2 + (1+2\mathrm{i})z + 1 - 5\mathrm{i}.$$

**1.** Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

**2.** Le plan affine euclidien étant muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit $M$ le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer, par son équation, l'ensemble des points $M$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Préciser la nature de cet ensemble. le construire.

**Ex. 1113.** ./1976/rennesErem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} - x\log x \quad \text{si } x > 0$$
$$f(0) = 1.$$

**1.** Étudier la continuité de $f$.

**2.** $f$ est-elle dérivable en $0$ ? $a$ étant un réel strictement positif, $f$ est-elle intégrable sur $[0\,;a]$ ?

**3.** Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

### Problème 366

./1976/rennesErem/pb/texte

La plan affine euclidien orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On note $M(x\ ;\ y)$ pour indiquer que les réels $(x,\ y)$ sont les coordonnées de $M$ dans ce repère.
On désigne par $a$ et $b$ deux réels quelconques et par $\lambda$ un réel non nul.
Soient les points $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$, $C(a\ ;\ b)$ et $O'(0\ ;\ 1+\lambda)$.

**1.** Montrer que, pour tout élément $(a,\ b,\ \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, il existe une application affine $f$ de P dans lui-même, et une seule, telle que :

$$f(O) = O', \quad f(A) = B \qquad \text{et} \qquad f(B) = C.$$

Si $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ est l'image de $M(x\ ;\ y)$ par $f$, exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x,\ y,\ a,\ b,\ \lambda$. On désigne par F l'ensemble des applications $f$.

**2.** a) Montrer que $f$ est bijective si, et seulement si, $a \neq 0$.

b) Lorsque $a = 0$, quelle est l'image de P par $f$ ?

**3.** Écrire les relations nécessaires et suffisantes que doivent satisfaire $a$, $b$ et $\lambda$ pour que $f$ soit une similitude plane.

**4.** Montrer que les relations $a = \lambda$ et $b = 1 + \lambda$ caractérisent les similitudes planes directes de l'ensemble F. Montrer que leur angle est l'angle droit direct ou l'angle droit indirect.

**5.** Montrer qu'il existe dans F quatre isométries et quatre seulement :

— deux rotations $r_1$ et $r_2$ dont on précisera le centre et l'angle

— une symétrie $s$ dont on précisera l'axe

— un antidéplacement plan $s'$ sans point invariant.

Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $\sigma$ et une translation $t$ telles que $s' = \sigma \circ t = t \circ \sigma$. Expliciter $\sigma$ et $t$.



Retour page 1

**6.** a) Déterminer l'ensemble des centres des similitudes directes de F.

b) Lorsqu'un élément de F est une similitude directe non réduite à une isométrie, calculer les coordonnées de son centre puis déterminer l'ensemble décrit par ce point lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}^\star$.

# LX. Rouen, série C

**Ex. 1114.** ./1976/rouenC/exo-1/texte.tex

$k$ étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k-1 \qquad y = 9k+4$$

Montrer que tout diviseur commun à $x$ et à $y$ divise 17. En déduire, suivant les valeurs de $k$, le plus grand diviseur commun de $x$ et $y$.

**Ex. 1115.** ./1976/rouenC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système :

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 = 1-6i \\ z_1 + 2iz_2 = \quad i \end{cases}$$

**2.** Dans un plan affine euclidien orienté identifié au plan complexe, déterminer les rotations de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ transformant le point $m_1$ d'affixe $z_1$ en le point $m_2$ d'affixe $z_2$.

## Problème 367

./1976/rouenC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications $f \in \mathcal{A}$ admettant, pour tout entier naturel non nul $n$, une dérive d'ordre $n$ notée $f^{(n)}$ (ou $f'$ pour $n=1$, et $f''$ pour $n=2$, ...).

I- 1° a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) On considère l'ensemble $E$ des applications de $\mathcal{A}$ définies par :

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Établir que $E$ est un espace vectoriel de base $(f_{1,0}; f_{0,1})$ tel que :

$$\forall f_{a,b} \in E \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$$

2° Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, l'application $\phi_n$ dans $\mathcal{A}$ qui à $f_{a,b} \in E$ associe $f^{(n)}_{a,b}$ est un endomorphisme de $E$ ; en donner la matrice dans la base $(f_{1,0}; f_{0,1})$. En déduire que :

a) Pour $n$ pair, $\phi_n$ est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.

b) Pour $n$ impair, $\phi_n$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle qu'on précisera.

3° a) Montrer que $P$, ensemble des fonctions paires de $E$, et $J$, ensemble des fonctions impaires de $E$, sont deux droites vectorielles de $E$ de base respective $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$ telles que $E = P \oplus J$. ($P$ et $J$ supplémentaires dans $E$).

b) Etudier les variations des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$. Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé. Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ; définir sa bijection réciproque.

On pose, pour $f$ et $g$ de $\mathcal{D}$ :

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

II- 1° a) Établir que :

$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{D}^3 \qquad (f+g)*h = (f*h)+(g*h)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \forall (f,g) \in \mathcal{D}^2 \qquad (\alpha f)*g = \alpha(f*g)$$



Retour page 1

b) $A$ étant l'élément de $\mathcal{D}$ défini par $A(x) = 2x^2 - 1$, calculer $(f_(1,0 * A)(x)$ et $(f_{0,1} * A)(x)$. (on pourra intégrer par parties).

2° Déduire du II1. que l'application $\phi \ : \ f \in \mathcal{D} \mapsto f * A \in \mathcal{A}$ est linéaire et que l'image $\phi(E)$ de $E$ par $\phi$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

# LXI. Rouen remplacement, série C

Ex. 1116. ./1976/rouenCrem/exo-1/texte.tex

On dispose d'un sac contenant 4 boules noires et 4 boules blanches, toutes identiques au toucher. On tire au hasard et sans remise, et l'on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule blanche. Le nombre de boules noires que l'on a du tirer est une variable aléatoire $X$.
On demande d'établir la loi de probabilité de $X$.
Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules noires que l'on a du tirer soit inférieur ou égal à 2 ? Calculer l'espérance et la variance de $X$.

Ex. 1117. ./1976/rouenCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine $\mathscr{P}$ rapporté a ? un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne l'application affine $f$ , qui au point $M\,(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = -x - y - 2 \end{cases}$$

**1.** Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ associé a ? $f$ est involutif et dé terminer cet endomorphisme.

**2.** $f$ est-elle bijective ?$f$ est-elle involutive ? $f$ admet-elle des points invariants ?

**3.** Montrer qu'il existe une droite du plan affine globalement invariante par $f$.

## Problème 368

./1976/rouenCrem/pb/texte

A- Une suite numérique $(U_n)$ est définie par son premier terme $U_1$ et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n}.$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs $a$ et $b$ de $U_1$ ($a < b$) pour lesquelles la suite est constante.
2. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de $U_n$. Dans ces conditions, calculer :

$$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n - a}{U_n - b}.$$

3. En déduire que la suite $(V_n)$ définie par $V_n = \dfrac{U_n - a}{U_n - b}$ est une suite géométrique. Calculer la limite de $|Vn|$ quand $n$ tend vers plus l'infini ; en déduire celle de $U_n$.

B- On désigne par $f$, la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{c + 6}{x + 2}.$$

1. Variations de $f$ ; courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé (unité le cm).
2. Retrouver a ? l'aide de la fonction $f$ les réels $a$ et $b$ de la question A1.
3. Déterminer l'équation de $(\mathscr{C})$ rapportée a ? ses asymptotes ; préciser la nature de $(\mathscr{C})$, ses sommets, ses foyers, ses directrices ainsi que l'excentricité.
4. Déterminer les points de $(\mathscr{C})$ dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
5. Trouver l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan défini par :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x) \qquad \lambda \text{ satisfaisant à } \quad -2 < \lambda < 0.$$

$\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand $\lambda$ tend vers -2 ?

Retour page 1

C- Á tout nombre complexe $z$, on associe quand cela est possible le nombre complexe $z'$ tel que

$$z' = \frac{z+6}{z+2}.$$

On désigne dans le plan complexe, par $M$ et $M'$ les images de $z$ et de $z'$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x + \mathrm{i}y'$ ($x$, $y$, $x'$, $y'$ réels).

1. Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$. Préciser l'ensemble des points $M$ qui n'ont pas d'image.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan pour lesquels $z'$ est un réel négatif.
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan pour lesquels l'argument de $z'$ est $\frac{\pi}{2}$ (mod 2 $k\pi$).
4. Déterminer l'ensemble $C_k$ des points $M$ du plan pour lesquels $M'$ décrit la droite $D_k$ d'équation $y = k$. Reconnaître $C_k$ . Montrer que lorsque $k$ décrit $\mathbb{R}^\star$, $C_k$ passe par un point fixe et reste tangente a ? une droite fixe.

## LXII. Strasbourg, série C

Ex. 1118. ./1976/strasbourgC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \left|e^{4x} - 2e^{2x}\right|$$

(on désigne par $e$ la base de la fonction logarithme népérien notée $\log$).

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

**2.** Donner la définition de la dérivabilité en $x_0$ d'une fonction numérique d'une variable réelle.

*Application* : la fonction $f$ est-elle dérivable en $x_0 = \frac{1}{2}\log 2$ ?

**3.** Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative.

Ex. 1119. ./1976/strasbourgC/exo-2/texte.tex

Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z + 3\overline{z} = (2 + i\sqrt{3}).|z|$$

Représenter les images des solutions de cette équation dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct.

### Problème 369 ./1976/strasbourgC/pb/texte

Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel, $I$ l'application identique de $\mathcal{P}$ et $\omega$ l'application nulle de $\mathcal{P}$.

$$I : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u} \qquad \omega : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{0}$$

Préliminaires : pour cette seule question $\mathcal{P}$ est euclidien orienté et muni d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $g$ la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\theta$.

(a) Ecrire la matrice de $g$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

(b) Démontrer que $g \circ g - (2\cos\theta)g + I = \omega$.

On se propose d'étudier tous les endomorphismes $f$ de $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$f \circ f - (2\cos\theta)f + I = \omega \tag{1}$$

où $\theta$ est un réel donné de l'intervalle $[0; 2\pi[$. Soit $f$ une solution de (1).

**1.** Chercher le noyau de $f$ et montrer que $f$ est une application bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

**2.** Démontrer que si $f$ est involutive, alors $f = (\cos\theta)I$. En déduire les valeurs de $\theta$ pour lesquelles (1) admet des solutions involutives et donner ces solutions.

**3.** On suppose $\theta$ différent de $0$ et de $\pi$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sin\theta}\left[-(\cos\theta)\overrightarrow{u} + f(\overrightarrow{u})\right] \tag{2}$$

a) Montrer que pour tout réel $k$, le noyau de $f-kI$ est égal à $\{\vec{0}\}$. En déduire qu'il n'existe pas de réel $\lambda$ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ et que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.

b) En utilisant (2) déterminer la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Est-il possible de conclure que $f$ est une rotation vectorielle ?

c) Soit $\varphi$ l'application de $\mathcal{P}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple $(\vec{w},\vec{w}')$ de $\mathcal{P}^2$ tel que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ et $\vec{w}'=x'\vec{u}+y'\vec{v}$, associe le réel $xx'+yy'$.
Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}$. Vérifier que pour ce produit scalaire, la base $(\vec{u},\vec{v})$ est orthonormée. $\mathcal{P}$ étant muni de ce produit scalaire et de la base $(\vec{u},\vec{v})$ supposée directe, quelle est la nature de $f$ ?

**4.** On suppose $\theta=0$.

a) Vérifier que $(1)$ est alors équivalente à :

$$(f-I)\circ(f-I)=\omega \tag{3}$$

$f$ étant une solution de (3), démontrer que le noyau de $f-I$ n'est pas $\{\vec{0}\}$.

b) $\vec{u}$ étant un vecteur non nul du noyau de $f-I$, soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base de $\mathcal{P}$. La matrice de $f$ dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&\mu\end{pmatrix}$ où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels. Montrer que $\mu=1$.

c) Si $f$ est solution de (3) différente de $I$, vérifier que $f-I=s\circ h\circ p$ où $p$ est la projection sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$, de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$, $h$ l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda$ et $s$ une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

d) On définit, pour tout entier naturel $n$, $f^n$ par :

$$f^0=I \qquad \forall n\geq 1 \quad f^n=f^{n-1}\circ f$$

Déterminer la matrice de $f^n$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
N.B : Les questions 1,2,3,4 sont indépendantes entre elles et indépendantes des préliminaires.

## LXIII. Tel Aviv, série C

**Ex. 1120.** ./1976/telavivC/exo-1/texte.tex

$F$ désigne l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\dot{0},\ \dot{1},\ \cdot 2,\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}$.
Déterminer $(\alpha,\ \beta)\in F^2$ de façon qu'il existe $(a,\ b,\ c)\in F^3$ tel que :

$$\forall x\in F \qquad \dot{1}\,x^4+\dot{3}\,x^3+\dot{5}\,x^2+\alpha x+\beta=(ax^2+bx+c)^2.$$

**Ex. 1121.** ./1976/telavivC/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, on donne une droite D et deux points distincts F et A, symétriques par rapport à D. On désigne par $\mathscr{H}$ l(hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et D pour directrice associée à F.

**1.** Montrer que A est un sommet de $\mathscr{H}$. Déterminer l'autre sommet A' et le centre $\Omega$, en calculant $\dfrac{\overline{\text{AA'}}}{\overline{\text{AF}}}$ et $\dfrac{\overline{\text{A}\Omega}}{\overline{\text{AF}}}$. Construire $\mathscr{H}$.

**2.** Soit C le cercle centré en un point O de D, et passant par F. On se propose de montrer que : C$\cap$ H={A, $M_1$, $M_2$, $M_3$} où $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, choisi de façon que $(O;\vec{\imath})$ soit un repère de D. Á chaque point du plan correspond ainsi son affixe $z=x+\mathrm{i}y$ ; on désigne par $a$ l'affixe de F.
Montrer que C et $\mathscr{H}$ sont les ensembles des points du plan dont les affixes vérifient respectivement :

$$(C)\quad z\overline{z}=a\overline{a}\ ;\qquad (\mathscr{H})(z-a)(\overline{z}-\overline{a})+(z-\overline{z})^2=0.$$

En déduire que C$\cap\mathscr{H}$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes vérifient une équation de la forme :

$$(z-\overline{a})(z^3-k)=0$$

où $k$ est un nombre complexe dont on exprimera le module et l'argument en fonction du module $r$ et de l'argument $\varphi$ de $a$. Conclure.

## Problème 370

./1976/telavivC/pb/texte

On note $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Á tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on associe l'ensemble $D_n$ des $d \in \mathbb{N}^\star$ qui divisent $n$, l'ensemble $C_n$ des $(d_1,\ d_2) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tels que $d_1 d_2 = n$, et l'ensemble $\Gamma_n$ des $(d_1,\ d_2,\ d_3) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ tels que $d_1 d_2 d_3 = n$.
Le p.g.c.d. des entiers $m$ et $n$ est noté $m \wedge n$.

### Partie I

Dans tout le problème, on appelle suite une application de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{U}$ l'ensemble des suites. On admet que l'on dispose du groupe $(\mathscr{U},\ +)$, la loi $(+)$ étant définie par :

$$\forall (u,\ v) \in \mathscr{U}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad (u+v)(n) = u(n) + v(n).$$

On définit la loi interne $(T)$ sur $\mathscr{U}$ par :

$$\forall (u,\ v) \in \mathscr{U}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad (uTv) = \sum_{d \in D_n} u(d).v\left(\frac{n}{d}\right)$$

c'est ainsi que : $(uTv)(4) = u(1)v(4) + u(2)v(2) + u(4)v(1)$.

1. Vérifier que, pour tout $(u,\ v,\ w) \in \mathscr{U}^3$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$(uTv)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2) \in C_n} u(d_1).v(d_2)$$

et

$$((uTv)Tw)(n) = \sum_{(d_1,\ d_2,\ d_3) \in \Gamma_n} u(d_1).v(d_2).w(d_3).$$

Quelles propriétés de la loi $(T)$ découlent de ce résultat (que l'on pourra admettre, à défaut de démonstration) ?

2. La loi $(T)$ admet-elle un élément neutre ? Le triplet $(\mathscr{U},\ +,\ T)$ est-il un anneau ?

### Partie II

Une suite $u \in \mathscr{U}$ est dite régulière si et seulement si elle vérifie :
$u(1) = 1$ ; $u(qq') = u(q)u(q')$ pour tout $(q,\ q') \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tel que $q \wedge q' = 1$.

1. Démontrer que sont régulières les suites $\theta$, $\psi$ et $f_m$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \theta(n) = 1\ ; \quad \psi(n) = n\ ; \quad f_m(n) = m \wedge n$$

(où $m \in \mathbb{N}^\star$ est donné).

2. Soit $u$ une suite régulière. Vérifier que $u(q_1, \dots, q_k) = \prod_{i=1}^{k} u(q_i)$, pour tout $(q_1,\ \dots,\ q_k) \in (\mathbb{N}^\star)^k$ tel que $q_1,\ \dots,\ q_k$ soient premiers entre eux deux à deux.

Exprimer $u(n)$ pour $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, avec $(p_1,\ \dots,\ p_k \in (\mathbb{P})^k$ et $(\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_k) \in (\mathbb{N}^\star)^k$.

### Partie III

1. Montrer que si les suites $u$ et $v$ sont régulières, alors la suite $uTv$ est régulière.
2. Á $n \in \mathbb{N}^\star$, on associe le nombre de diviseurs de $n$ dans $\mathbb{N}^\star$ et la somme $\sigma(n)$ de ces diviseurs.
Montrer qu'il existe deux suites régulières $u_1$ et $u_2$ telles que $\nu = \theta T u_1$ et $\sigma = \theta T u_2$.
En déduire que les suites $\nu$ et $\sigma$ sont régulières. Les notations étant celles de 2, donner des expressions de $\nu(n)$ et $\sigma(n)$.
En particulier, calculer $\nu(700)$ et $\sigma(700)$.



Retour page 1

3. Montrer qu'est régulière la suite $\lambda$ définie par :

$$\begin{cases} \lambda(1)=1\ ;\ \lambda(n)=0 \text{ si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \\ \lambda(n)=(-1)^k\ ;\ \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers deux à deux distincts.} \end{cases}$$

Déterminer l'image de $n \in \mathbb{N}^\star$ pour chacune des suites :

$$\lambda T\theta\ ;\ \lambda T\nu\ ;\ \lambda T\sigma\ ;\ \lambda T\lambda.$$

# LXIV. Toulouse, série C

**Ex. 1122.** ./1976/toulouseC/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$x \longmapsto f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}.$$

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire son graphique dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2.** Soit $g$ la restriction de $f$ à $I=\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$.

a) Démontrer que $g$ est une bijection de $I$ sur $g(I)=]0\,;+\infty[$.

b) On désigne par $g^{-1}$ la bijection réciproque de $g$ ; calculer $g(\mathrm{e})$ et la dérivée de $g^{-1}$ au point $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

**Ex. 1123.** ./1976/toulouseC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel de dimension trois et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{V}$. On considère l'application linéaire $\varphi$ de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ telles que

$$\begin{cases} x'=3x+y-z \\ y'=2x+2y-z \\ z'=4x+2y-z \end{cases}$$

**1.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des vecteurs invariants par $\varphi$ et indiquer une base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ de $\mathscr{P}$.

**2.** Soit $\mathscr{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$.

a) Démontrer que la restriction de $\varphi$ à $\mathscr{D}$ est une homothétie vectorielle de $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ peut être décomposé d'une manière unique en $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{u}''$, $\quad \vec{u}' \in \mathscr{P}$, $\quad \vec{u}'' \in \mathscr{D}$.

c) Établir que :

$$(\forall \vec{u} \in \mathscr{V}) \qquad \varphi(\vec{u})=\vec{u}'+2\vec{u}''=\vec{u}+\vec{u}''.$$

**3.** Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à $\mathscr{V}$ et $(O,(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3))$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ étant les vecteurs définis précédemment.
On considère l'application affine $f$ qui laisse le point $O$ invariant et dont l'endomorphisme associé est $\varphi$.
Si $M'$ est l'image par $f$ du point $M$ de $\mathscr{E}$, en utilisant ce qui précède, exprimer dans le repère choisi les coordonnées de $M'$ en fonction de celles de $M$.
Indiquer une construction géométrique de $M'$.

Retour page 1

### Problème 371

./1976/toulouseC/pb/texte

Une suite réelle $f$ application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ donne de $n$ l'image $f(n)$ notée $f_n$.
Soit $a$ et $\alpha$ deux réels fixés vérifiant : $a \neq 0$ et $0 \leq \alpha < \pi$. On considère l'ensemble $F$ des suites $f$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_{n+2} = (2a\cos\alpha)f_{n+1} - a^2 f_n$$

**1.** *On suppose dans cette question que* $\alpha \neq 0$.
Démontrer que les suites $u$ et $v$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n \cos n\alpha \qquad v_n = a^n \sin n\alpha$$

sont deux éléments de $F$. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ : $(u_0, u_1)$ et $(v_0, v_1)$ sont indépendants.

**2.** *On suppose dans cette question que* $\alpha = 0$.
Démontrer que les suites $r$ et $s$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad r_n = a^n \qquad s_n = na^n$$

sont deux éléments de $F$. Démontrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ : $(r_0, r_1)$ et $(s_0, s_1)$ sont indépendants.

**3.** a) Etablir que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, espace vectoriel des suites réelles.

b) Démontrer que $f$ est déterminée par la donnée du couple $(f_0, f_1)$ et en déduire que l'application $\varphi$ de $F$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(f) = (f_0, f_1)$ est bijective.

c) Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire. Quelle est la dimension de $F$ ? On rappelle que, compte-tenu de la notation $f_n$,

$$(f+g)(n) = f_n + g_n \qquad (kf)(n) = kf_n \qquad k \in \mathbb{R}$$

**4.** Soit $\varphi^{-1}$ l'application réciproque de $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $F$. Montrer que si $W_1$ et $W_2$ sont deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^2$, alors $\varphi^{-1}(W_1)$ et $\varphi^{-1}(W_2)$ sont deux vecteurs de $F$ indépendants.
En déduire que si $\alpha \neq 0$, $(u, v)$ est une base de $F$, et que si $\alpha = 0$, $(r, s)$ est une base de $F$. Indiquer dans les deux cas une forme générale des éléments de $F$.

**5.** Soit $b$ un réel fixé non nul. On considère l'ensemble $C$ des suites réelles $c$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_{n+2} - (2a\cos\alpha)c_{n+1} + a^2 c_n = b^n$$

a) Si $\alpha = 0$ et $b = a$, démontrer qu'il existe un réel $\lambda$ tel que la suite $t$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n = \lambda n^2 a^n$$

appartient à $C$.

b) Si $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$, démontrer qu'il existe un réel $\mu$ tel que la suite $t'$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t'_n = \mu b^n$$

appartient à $C$.

c) L'ensemble $C$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ?

**6.** Si $\alpha = 0$ et $b = a$, $c$ appartenant à $C$, démontrer que la suite de terme général $(c_n - t_n)$ est un élément de $F$ ; inversement, si $f$ appartient à $F$, montrer que la suite de terme général $(f_n + t_n)$ appartient à $C$. En déduire une forme générale des élements de $C$.

**7.** Déterminer de même une forme générale des éléments de $C$ lorsque $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$.

## LXV. Toulouse, série E



Retour page 1

**Ex. 1124.** ./1976/toulouseE/exo-1/texte.tex

Soit le plan affine P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application affine $f$ qui, à tout point $M$ de P de coordonnées $(x ; y)$ associe le point $M'$ de P de coordonnées $(x' ; y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{3}{2}y + 3 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}. \end{cases}$$

**1.** Déterminer la matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de l'endomorphisme F associé à $f$. Montrer que $F$ est le produit d'une homothétie vectorielle de rapport positif par une symétrie vectorielle orthogonale relativement à une droite vectorielle que l'on déterminera.

**2.** En déduire la nature de $f$ et préciser ses éléments.

**Ex. 1125.** ./1976/toulouseE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien de repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle $G$ l'isobarycentre des points $A(\alpha ; \beta)$, $B(\beta ; 0)$, $C(0 ; \alpha)$, $\alpha$ et $\beta$ étant deux réels quelconques.

**1.** Déterminer l'ensemble décrit par $G$ lorsque $\alpha$ et $\beta$ varient.

**2.** On suppose dans cette question que $\alpha$ est fixé et que $\beta = 2\alpha$. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que l'on ait :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 10\alpha^2.$$

## Problème 372 ./1976/toulouseE/pb/texte

A- 1. On se propose d'étudier la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = -\mathrm{e}^t + t^2 + 2t + 2.$$

a) Construire la tableau de variation de la fonction $g'$, dérivée de $g$. En déduire que $g'(t)$ est nul pour deux valeurs $\alpha$ et $\beta$ de $t$ ($\alpha$ désignera la plus petite de ces valeurs.)
Montrer que : $-1 < \alpha < 0$ et que $1 < \beta < 2$.
vérifier que : $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta^2$.

2. On associe à la fonction $g$, la fonction $\psi$ définie, pour tout nombre $x$, par

$$\psi(x) = \int_x^{x+2} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer $\psi(x)$.

b) Vérifier que $\psi'(x) = g(x+2) - g(x)$.

B- Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. A tout élément $f$ de E, on associe la fonction $\varphi$ définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(x) = \int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit ainsi une application $U$ de E dans E qui, à tout élément $f$ de E, associe la fonction $\varphi = U(f)$.

1. Démontrer que $U$ est une application linéaire de E dans E.

2. On pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad ;$$

la fonction $F$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. Préciser sa fonction dérivée. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F$ ; en déduire que $\varphi$ est continue et dérivable. Préciser sa fonction dérivée.

Retour page 1

3. Soit la fonction $h$définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall t\in\mathbb{R}),\qquad h(t)=\cos\pi t+\frac{1}{2}\cos 2\pi t.$$

a) Étudier et représenter graphiquement la fonction $h$.

b) Montrer que, quel que soit $x$ appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+2}\left(\cos\pi t+\frac{1}{2}\cos 2\pi t\right)\mathrm{d}t=0.$$

c) $U$ est-elle injective ?

4. Soit $f$ un élément du noyau de $U$. Montrer que $f$ est périodique et de période 2.

## LXVI. Toulouse remplacement, série C

**Ex. 1126.** ./1976/toulousecrem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $m$, les restes dans la division euclidienne par 16 des entiers : $5^m$ et $6^m$.

**2.** Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0=9$, et $(v_p)$ la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0=1$.
Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.

**3.** Soit $(u'_n)$ la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u'_0=8$, et $(v'_p)$ la suite géométrique de raison 6 et de perimer terme $v'_0=9$.
Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme commun que l'on déterminera.

**Ex. 1127.** ./1976/toulousecrem/exo-2/texte.tex

Le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ étant rapporté à la base $(\vec\imath,\ \vec\jmath)$, on considère les endomorphismes $p$ et $q$ $\overrightarrow{P}$ ayant respectivement pour matrices $A$ et $B$ dans la base $(\vec\imath,\ \vec\jmath)$ :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

**1.** Démontrer que $p$ et $q$ sont des projections vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{P}$ qui les caractérisent.

**2.** On considère l'ensemble $F$ des endomorphismes $f_{(a,\ b)}$de $\overrightarrow{P}$ tels que :

$$f_{(a,\ b)}=ap+bq,\qquad (a,\ b)\in\mathbb{R}^2.$$

a) Donner une condition sur $a$ et $b$ pour que $f_{(a,\ b)}$ soit une bijection, et démontrer que le sous-ensemble des bijections de F muni de la composition des applications est un groupe abélien.

b) Démontrer que$f_{(1,\ -1)}$ et $f_{(-1,\ 1)}$ sont des symétries vectorielles et déterminer les sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{P}$ qui les caractérisent.

### Problème 373

./1976/toulousecrem/pb/texte

I Calculer les trois intégrales

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que si $g(x)=x(x+2-\mathrm{e})\mathrm{e}^x$ alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$.



Retour page 1

II Si $t$ est un nombre réel fixé, on considère la fonction de la variable $x$

$$f_t(x) = (x-t)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Soit $E$ l'ensemble des couples $(t_1,\ t_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\int_0^1 f_{t_1}(x) f_{t_2}(x)\ ddx = 0.$$

1. Montrer en utilisant la fonction $g$ de la partie I que $E$ n'est pas vide.
2. Démontrer qu'un élément $(t_1,\ t_2)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à $E$ si et seulement si

$$(\mathrm{e}-1)t_1t_2 - (t_1+t_2) + \mathrm{e} - 2 = 0.$$

Ecrire cette condition sous la forme :

$$(t_1-\alpha)(t_2-\alpha) = -k^2 \qquad (1)$$

où $alpha$ et $k$ sont des réels que l'on calculera (pour établir l'existence de $k^2$, on pourra vérifier l'inégalité $(\mathrm{e}-1)^2 > \mathrm{e}$ en utilisant l'encadrement $2{,}7 < \mathrm{e} < 2{,}8$).
3. En étudiant le signe de $f_{t_1}(x)f_{t_2}(x)$ sur $[0\,;1]$, démontrer que si $(t_1,\ t_2)$ appartient à $E$, l'un au moins des deux réels $t_1$ ou $t_2$ appartient à $[0\,;1]$.

III Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $A_t$ le point de coordonnées $(t\ ;\ 0)$.

1. Démontrer en utilisant (1) qu'il existe deux points du plan, $I$ et $J$ ,tels que $(t_1,\ t_2)$ appartient à $E$ si et seulement si

$$\overrightarrow{IA}_1.\overrightarrow{IA}_2 = \overrightarrow{JA}_1.\overrightarrow{JA}_2 = 0.$$

2. Etablir que $(t_1,\ t_2)$ appartient à $E$ si et seulement si le cercle de diamètre $[A_{t_1}, A_{t_2}]$ passe par $l$ et$J$.
3. Calculer à l?aide d?une remarque géométrique simple le minimum de $|t_2-t_1|$ quand $(t_1,\ t_2)$ décrit $E$.
4. Déduire du III2 par une interprétation géométrique du II2 ou II3 que $l$ et $J$ appartiennent au disque de diamètre $[A_0, A_1]$ .

N.B. Il est conseillé de faire des figures dans ce III.

sectionToulouse remplacement, série E

**Ex. 1128.** ./1976/toulouseErem/exo-1/texte.tex

On considère l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \qquad z^3 - 2(2+3\mathrm{i})z^2 - 12(1-\mathrm{i})z + 32 = 0.$$

Démontrer qu'elle admet une racine réelle que l'on calculera. Résoudre ensuite l'équation dans $\mathbb{C}$.
Représenter dans le plan complexe les points images des solutions et montrer que ce sont les sommets d'un triangle isocèle.

**Ex. 1129.** ./1976/toulouseErem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie pour tout $x \in \mathscr{D} = ]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{|\log x|}{x^2}$$

(où $\log$ désigne le logarithme népérien).

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathscr{D}$.
2. Étudier les variations de $f$ et tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $\alpha \in \mathscr{D}$.

   Calculer ensuite la limite de $I(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.

Retour page 1

## 🏛 Problème 374

./1976/toulouseErem/pb/texte

On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices $M$ carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $(\mathscr{M}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(\mathscr{M}, +, \times)$ est un anneau.

I- $A$ étant un élément *fixé* de $\mathscr{M}$ autre que $I$ et $\theta$, on considère l'application $f$ de $\mathscr{M}$ dans lui-même définie par

$$f : M \longmapsto f(M) = M \times A - A \times M.$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}, +, .)$ et que l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}$ qui commutent avec $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$.
2. Montrer que $I$ et $A$ appartiennent au noyau de $f$.
3. On notera $N(f)$ le noyau de $f$. Montrer que si $B \in N(f)$ et $C \in N(f)$, alors $B \times C \in N(f)$. Montrer que $(N(f), +, \times)$ est un anneau unitaire.

II- On suppose désormais que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}$. Calculer $f(M)$ et exprimer $c$ et $d$ en fonction de $a$ et $b$ pour que $f(M) = \theta$.
   Montrer que $N(f)$ est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bA$.
   Trouver une base de $N(f)$ et préciser la dimension de $N(f)$.
2. $n$ étant un entier naturel non nul, on pose pour $K \in N(f)$

$$K^0 = I \qquad \text{et} \qquad K^n = K^{n-1} \times K.$$

   Montrer que

$$K^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $K^n$ par récurrence.
3. Déterminer les matrices $K \in N(f)$ qui sont involutives (c'est-à-dire qui vérifient $K^2 = I$).

III- Le plan affine euclidien orienté (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $Ox$ et $Oy$.
On désigne par $s$ l'application affine de (P) vers lui-même qui au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $m_1$ de coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ définies par

$$\begin{cases} x_1 = -x + 2y \\ y_1 = y. \end{cases}$$

1. Montrer que $s$ est involutive et la caractériser géométriquement.
2. Soit $H$ l'intersection de la droite $mm_1$ avec l'axe $Oy$.
   Trouver l'équation $y = f(x)$ de l'ensemble des points $m$ du plan vérifiant la relation

$$\overrightarrow{Hm}.\overrightarrow{Hm_1} = 4.$$

   Construire cet ensemble.
3. Soit $\gamma$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1 du plan (P). Déterminer une équation de $s(\gamma)$.
4. Soit $(O;\ \vec{I},\ \vec{J})$ le repère orthonormé tel qu'une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath}\,;\vec{I}}\right)$ soit le réel $\alpha$.
   Exprimer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point $m$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction des coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de ce point dans le repère $(O;\ \vec{I},\ \vec{J})$.
   Trouver une équation de $s(\gamma)$ dans $(O;\ \vec{I},\ \vec{J})$ en fonction de $\cos 2\alpha$ et de $\sin 2\alpha$.
5. On suppose maintenant que $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$, donner une équation de $s(\gamma)$ dans le repère $(O;\ \vec{I},\ \vec{J})$ ; en déduire la nature de $s(\gamma)$.
   On pourra utiliser : $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$ et $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$.



Retour page 1

# Chapitre XIX

# 1977.

## Sommaire

# I. Aix-Marseille, série C

Ex. 1130. ——— *4 points.* *./1977/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

**1.** Établir que : quel que soit $(a,\ b,\ q) \in \mathbb{Z}^3$, $a \wedge b = b \wedge a - bq$.
La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs $a$ et $b$.

**2.** Montrer que :
quelque soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = n + 2 \wedge 38).$$

**3.** Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $n$ tels que $n + 2$ divise $5n^3 - n$.

**4.** Quelles sont les valeurs de possibles de $5n^3 - n \wedge n + 2$ ?
En déduire l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles que

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = 19.$$

**Ex. 1131.** ——— *4 points.* *./1977/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

P désigne dans ce qui suit un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ; et $\vec{P}$ le plan vectoriel associé, rapporté à la base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère l'application $f$ de P dans P qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + 1 \\ \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 2. \end{array}\right.$$

1. Cette application $f$ admet-elle des points invariants ? L'application $f$ est-elle bijective ? Démontrer que l'image du plan P est une droite $D$.
2. Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à cette application. Montrer que $\varphi$ est une projection orthogonale sur une droite vectorielle $\vec{D}$ dont on donnera une équation cartésienne. Que représente $\vec{D}$ pour l'image par $f$ du plan P ?
3. Soit $\Delta$ une droite de P de direction $\vec{D}$ (ce qui est équivalent à : une base de $\vec{D}$ est un vecteur directeur de $\Delta$).
   a) soit $g$ la projection orthogonale sur la droite $\Delta$. Montrer, sans aucun calcul analytique, qu'il existe une translation $t$ et une seule telle que :
   $$f = t \circ g.$$
   b) Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = x$. Donner les expressions analytiques de $g$ et de $t$.

## Problème 375 *12 points* *./1977/aixmarseilleC/pb/texte*

1. Soit la fonction $Q_{n-2}$ de la variable réelle $t$, dépendant de $n$, entier naturel supérieur à 2, donnée par
   $$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2}t^{n-2}.$$
   Montrer que, quel que soit $t \neq -1$,
   $$Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}.$$
   En déduire que
   $$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t}.$$
   en intégrant les deux membres de cette dernière relation sur le segment $[0\,;x]$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, établir la relation
   $$\ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} + \int_0^x \frac{t^{-n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(I)}$$
   en posant : $P_{n-1}(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}$.
2. a) Soit la fonction numérique $\varphi$ définie sur $]0\,;1]$ par
   $$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x}{x}.$$
   Montrer que l'on peut prolonger cette fonction $\varphi$ par continuité pour $x = 0$.
   Soit $f$ le prolongement ainsi obtenu sur $[0\,;1]$, donné par :
   $$f \quad \left\{\begin{array}{ll} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \in ]0\,;1] \\ \text{et} \qquad f(0) = 1. & \end{array}\right.$$



Retour page 1

b) De l'étude des variations de la fonction $\theta$, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\theta(x) = x - \ln(1+x),$$

déduire que :

$$\text{quelque soit } x \in ]0\,;+\infty[, \quad x - \ln(1+x) > 0.$$

En utilisant cette dernière relation, montrer que :

$$\text{quelque soit } x \in [0\,;1], \quad f(x) \leqslant 1.$$

c) Cette fonction $f$ étant continue sur $[0\,;1]$, on rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Soit L sa valeur.

$n$ étant un entier naturel non nul, montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.$

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{L}.$

3. a) Montrer que,

quelque soit $x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t.$

En déduire que, quel que soit $x \in [0\,;1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant \frac{1}{n}.$

En utilisant la relation I de la première question montrer que :

quelque soit $x \in ]0\,;1]$, $\displaystyle -\frac{1}{nx} \leqslant f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}.$

Par intégration sur le segment $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$, établir la relation :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(II)}$$

en posant

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}, \quad (n \geqslant 2).$$

b) Démontrer que, quels que soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0\,;1]$ :

$$\frac{x^p}{p^2} \geqslant \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

En utilisant des égalités de la forme :

$$S_2(x) = x \quad ; \quad S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) \quad ; \quad S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) + \frac{x^3}{3^2} \quad ; \quad \ldots$$

Retour page 1

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\,;1]$ : $0 \leqslant S_n(x)$.
En utilisant des égalités de la forme :

$$x - S_3(x) = \frac{x^2}{2^2} \quad ; x - \quad S_4(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) \quad ; \quad x - S_5(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2} \quad ; \quad \dots$$

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\,;1]$ : $S_n(x) \leqslant x$ ; et en définitive que $0 \leqslant S_n(x) \leqslant x$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Déduire des résultats 3a) et 3b) précédents que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = \int_0^f (x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{L}.$$

4. En regroupant convenablement les termes de la somme :

$$S_n(1) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2},$$

et en raisonnant comme au 3b) montrer que,
quelque soit $n \geqslant 5$,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leqslant S_n(1) \leqslant 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.$$

On admettra alors le théorème suivant :

**Théorème :**
Soit une suite convergente $(u_n)$. S'il existe deux réels $a$ et $b$ $(a \leqslant b)$ et un entier naturel $n_0$ tel que,
quelque soit $n > n_0$, $a \leqslant u_n \leqslant b$, alors $a \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant b$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

## II. Aix-Marseille remplacement, série C

Ex. 1132. ——— *3 points.* *./1977/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer tous les couples $(u,\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant

$$5u - 3v = 0.$$

2. En déduire les couples $(p,\ q)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5p - 3q = 1.$$

3. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Retour page 1

Ex. 1133. ———— *6 points.* ./1977/aixmarseilleCrem/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de P. Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

1. Montrer que $f$ est une fonction impaire. Étudier les variations de $f$ et montrer que $f$ définit une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe représentative de $f$ dans P.
2. Soit $g$ la fonction réciproque de $f$ ; quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction $g$ peut-on déduire de l'étude de la fonction $f$.
   Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g' = 1 - g^2$.
3. Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \quad ; \quad \int_0^{\log\sqrt{3}} \left(1 - g^2(t)\right)\mathrm{d}t.$$

## Problème 376 *12 points* ./1977/aixmarseilleCrem/pb/texte

A- Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère l'application

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^\star &\longrightarrow \mathrm{P} \\ t &\longmapsto m \end{aligned}$$

telle que si $x$ et $y$ désignent les coordonnées de $m$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

$$x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad \text{et} \qquad y = \left(t - \frac{1}{t}\right).$$

1. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Montrer que $F(\mathbb{R}^\star) = \mathscr{H}$ (on pourra poser $X = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$).
   Soient $t$ et $t'$ deux réels non nuls tels que $F(t) = m$ et $F(t') = m$. Calculer en fonction de $t'?t$ et de $tt'$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{F(t)F(t')}$. En déduire que $F$ est bijective.
   On désigne par $\mathscr{H}_1$ l'intersection de $\mathscr{H}$ avec le demi-plan d'équation $x > 0$ ; montrer que $F(\mathbb{R}_+^\star) = \mathscr{H}_1$, où $\mathbb{R}_+^\star = \mathbb{R}^+ - \{0\}$.
2. Déterminer les deux premières dérivées $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ de l'application $F$ ; montrer que $\vec{\Gamma}$ a une direction fixe.
3. Tracer $\mathscr{H}_1$ (on prendra $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2$ cm). Placer les points $A = F(1)$, $m_2 = F(2)$, $m_3 = F(3)$ et $B = F(-1)$.

B- Soient $m\,(x\ ;\ y)$ et $m\,(x'\ ;\ y')$ deux points de $\mathscr{H}$ ; on considère le point $(X\ ;\ Y)$ défini par

$$X = \frac{xx'}{4} + yy' \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{xy' + x'y}{4}.$$

1. Calculer $\left(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4}\right)$ ; montrer que $M$ appartient à $\mathscr{H}$.
   On note $M = m \star m'$. La loi $\star$ est donc une loi de composition interne pour $\mathscr{H}$.
   Montrer que :
   $$\forall (t,\ t') \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}^\star, \qquad F(t) \star F(t') = F(tt').$$
   En déduire que $F$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^\star,\ \times)$ sur $(\mathscr{H},\ \star)$.
2. En déduire que $(\mathscr{H},\ \star)$ est un groupe commutatif.
   Préciser l'élément neutre. Que représente $\overline{m} = F\left(\frac{1}{t}\right)$ ?
3. a) On suppose $m' \neq m$ et $m' \neq \overline{m}$, et $M = m \star m'$. En utilisant A1, montrer que le droite $(mm')$ est parallèle à la droite $(AM)$.



Retour page 1

b) On suppose $m' = \overline{m}$ ; montrer que le droite $(m\overline{m})$ est parallèle à la tangente en $A$ à $\mathscr{H}$.

c) On suppose que $M = m\star m$, $m \neq A$ et $m \neq B$ ; montrer que la droite $(AM)$ est parallèle à la tangente en $m$ à $\mathscr{H}$.

d) On reprend les notations du A3.
De plus, on pose

$$m_4 = F(4),\ \overline{m}_3 = F\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad m_{\frac{4}{3}} = F\left(\frac{4}{3}\right).$$

Montrer que $m_4 = m_2 \star m_2$, et $m_{\frac{4}{3}} = m_4 \times \overline{m}_3$.
Construire géométriquement $m_4$, puis $m_3$, puis $\overline{m}_{\frac{4}{3}}$.

e) Soient trois points $m,\ n,\ p$ de $\mathscr{H}$ tels que $m\star n = q$ et $n\star p = r$. Montrer que, si $p \neq q$ et $m \neq r$, les droites $(mr)$ et $(pq)$ sont parallèles, [Il est conseillé de calculer $(m\star n)\star p$ et $m\star(n\star p)$].

C- Soit $C \in \mathscr{H}$ et soit l'application $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ m & \longmapsto & \overline{m}\star C \end{array}$

On suppose que $m = F(t)$ et $C = F(c)$, $c$ réel différent de 1.

1. Démontrer que $m$ est invariant par $\Phi$ si et seulement si $t^2 = c$.
   En déduire que si $C$ appartient à $\mathscr{H}_1$, $\Phi$ admet deux points invariants $U$ et $V$ (on appellera $U$ celui de ces deux points qui est situé sur $\mathscr{H}_1$).
   Montrer qu'alors $\mathscr{H}$ admet deux tangentes parallèles à la droite $(AC)$ et que pour $m$ distinct de $U$ et $V$,la droite $(m\Phi(m))$ est parallèle à $(AC)$.
2. **Application** : soit $C = F(4) = m_4$.
   Déterminer $U$, $V$ et $\Phi(m_3)$. Vérifier que la tangente en $U$ à $\mathscr{H}$ est parallèle à $(AC)$.

## III. Aix-Marseille, Montpellier, Nice, série E

**Ex. 1134.** ———— *4 points.* *./1977/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

On considère l'équation bicarrée suivante :

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans le corps des nombres complexes ; on déterminera le module et l'argument des quatre racines $z_1,\ z_2,\ z_3$ et $z_4$ qui seront également présentées sous la forme $a + \mathrm{i}b$ ($a$ et $b$ réels). Construire les images de ces racines dans le plan complexe (i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).
2. Écrire le polynôme $z^4 - z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de quatre facteurs du premier degré au moyen des racines calculées au 1. En déduire que le trinôme bicarré $z^4 - z^2 + 1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

**Ex. 1135.** ———— *4 Points.* *./1977/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on considère l'application ponctuelle $(S)$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ au moyen des relations suivantes :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y - 4 \\ y' = 4x - 3y + 4. \end{cases}$$

1. Montrer que la transformation $(S)$ est une similitude indirecte dont on précisera éventuellement les éléments : centre, rapport, axe.
2. Construire la courbe $(C')$ transformée, par $(S)$, du cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon 1. Préciser une équation de la courbe $(C')$. (On prendra 1 cm pour unité de longueur sur les deux axes).
3. Déterminer les coordonnées du centre $\Omega$ de l'homothétie positive associant les deux courbes $(C)$ et $(C')$.



Retour page 1

## 🏛Problème 377 *12 points* ./1977/aixmarseilleE/pb/texte

On considère la fonction de la variable réelle $x$ :

$$x \longmapsto x + a\mathrm{e}^{-|x|}$$

où $a$ est un réel positif non nul, e la base des logarithmes népériens et $|x|$ la valeur absolue de $x$.
Les représentations graphiques demandées dans les parties I et II seront distinctes et réalisées dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ ; on prendra 2 cm pour unité de longueur.

I- Dans cette partie $a = 1$.

1. Étudier la fonction $f$. Citer avec précision les théorèmes utilisés pour justifier les résultats en ce qui concerne la continuité, la dérivation, les limites.
   Construire la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en précisant l'asymptote et les deux demi-tangentes au point d'abscisse $0$.
2. Calculer en cm$^2$, l'aire de l'ensemble des points du plan défini, dans le repère considéré, par :
   $$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ x \leqslant y \leqslant f(x), \end{cases} \qquad \lambda \text{ désignant un réel positif.}$$
   Quelle est la limite de cette aire lorsque $\lambda$ tend vers l'infini ?
3. Sur l'axe des abscisses, on partage l'intervalle $[0\,;1]$ en $n$ parties égales ($n$ entier $\geqslant 2$) ; soit $\dfrac{i}{n}$ l'abscisse de l'un des points de division ($i$ entier naturel $i \in \{0,\ 1,\ 2, \dots,\ n\}$).
   La droite d'équation $x = \dfrac{i}{n}$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point $A_i$ et la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point $B_i$.
   Déterminer les coordonnées du point $M_i$, isobarycentre des points $A_i$ et $B_i$.
   Déterminer par ses coordonnées l'isobarycentre $G$ de tous les points $A_i$ et $B_i$ lorsque $i$ décrit l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2, \dots,\ n\}$.
   Calculer la limite, à $0{,}001$ près, de l'ordonnée de $G$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
   (On rappelle le résultat suivant :
   $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha} - 1}{\alpha} = 1.\ )$$

II- Dans cette partie $a$ (réel strictement positif) n'est plus astreint à prendre la seule valeur 1.

1. Pour quelles valeurs de $a$ la fonction $f(x) = x + a\mathrm{e}^{-|x|}$ présente-t-elle un minimum relatif ? Déterminer et tracer l'ensemble des points des courbes $(\mathscr{C}_a)$ où la tangente est parallèle à $x'Ox$.
2. Construire sur la même figure la courbe $(\mathscr{C}_a\mathrm{e})$ représentant la fonction $f$pour $a = \mathrm{e}$.
3. Une courbe $(\mathscr{C}_a)$ est tracée ($a$ est donc fixé), une droite variable $(\Delta)$ parallèle à la droite d'équation $y = x$ coupe $(\mathscr{C}_a)$ éventuellement en deux points $P$ et $Q$. Déterminer l'abscisse du milieu $I$ du segment $[PQ]$ et en déduire l'ensemble des des points $I$ lorsque $(\Delta)$ varie.

# IV. Aix-Marseille, Montpellier & Nice remplacement, série E

**Ex. 1136.** ———— *4 points.* ./1977/aixmarseilleErem/exo-1/texte.tex

À tout nombre complexe z on associe le nombre complexe

$$f(z) = z^2 + (1 - i)z + 4 + 7i,$$

où $i$ est le nombre complexe de carré $-1$.

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

**2.** Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Construire cet ensemble (unité : 1 cm).



Retour page 1

**Ex. 1137.** ———— *4 Points.* *./1977/aixmarseilleErem/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ donnée par

$$f(x) = (x-3) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

**1.** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Noter dans un même tableau le signe de $f''(x)$ puis le sens de variation de $f'$ et le signe de $f(x)$, enfin le sens de variation de $f$. Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(C)$ de $f$ et donner une équation de son asymptote $(\Delta)$. Construire $(C)$ dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

**2.** $\alpha$ étant un réel positif, calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M$ de coordonnées $(x,y)$ telles que

$$-1 \leqslant x \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad x-3 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Montrer que cette aire admet une limite quand $\alpha$ tend vers $+\infty$ ; calculer cette limite.

e

## Problème 378 *12 points.* *./1977/aixmarseilleErem/pb/texte*

Soit $(P)$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé de sens direct $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel associé. On considère l'application affine $f_m$ qui à tout point $M$ de $(P)$ de coordonnées $(x,y)$ associe le point $M'$ de $(P)$ de coordonnées $(x',y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = -mx + (m-1)y + m + 1, \\ y' = (m-1)x - my - 5m + 1, \end{cases}$$

où $m$ est un réel donné. Les parties I –, II – et III – sont indépendantes.

I – 1. Déterminer suivant les valeurs de $m$ les points invariants par $f_m$.

2. Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ est-elle bijective ?

3. Soit $m_0$ la valeur de $m$ pour laquelle $f_m$ n'est pas bijective.

a. Montrer que $f_{m_0}$ transforme le plan $(P)$ tout entier en une droite $(\Delta)$, dont on donnera une équation.

b. On désigne par $p$ la projection orthogonale sur la droite $(\Delta)$, montrer qu'il existe une homothétie $h$ telle que $f_{m_0} = h \circ p$ et indiquer son centre et son rapport.

II – 1. a. Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ est-elle une isométrie ?

b. Préciser, pour chaque valeur $m'$ et $m''$ ( $m' < m''$ ) ainsi trouvées, la nature de $f_m$ et ses éléments caractéristiques.

c. On pose $g = f_{m'} \circ f_{m''}$, montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $s$ et une translation $t$ telles que $g = s \circ t = t \circ s$. expliciter $s$ et $t$.

III – On suppose, dans cette question, $m = -1$.

1. On désigne par $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ associé à l'application affine $f_{-1}$.

a. Écrire la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, Déterminer les nombres réels $\lambda$ tels qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{u}$ non nuls vérifiant $\varphi(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$. On trouvera deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda 2$ ( $\lambda_1 < \lambda_2$), Montrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\varphi(\overrightarrow{u}) = \lambda_1\overrightarrow{u}$ est la droite vectorielle de base $(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath})$ et que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\varphi(\overrightarrow{u}) = \lambda_2\overrightarrow{u}$ est la droite vectorielle de base $(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$.

b. Écrire la matrice $M'$ de $\varphi$ dans la base

$$\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}).$$

2. $n$ étant un entier naturel non nul, on pose

$$\varphi^1 = \varphi \qquad \text{et} \qquad \varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n.$$

Calculer par récurrence sur $n$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi''$ dans la base $\mathscr{B}'$ et en déduire la matrice de $\varphi''$ dans la base $\mathscr{B}$.



Retour page 1

# V. Amérique du sud, série C

**Ex. 1138.** ./1977/ameriquesudC/exo-1/texte.tex

Une urne contient 20 boules, *indiscernables au toucher*, dont $r$ sont rouges, $b$ bleues, $v$ vertes et $j$ jaunes. Les entiers $r$, $b$, $v$, $j$ sont respectivement proportionnels à 1, 2, 3 et 4.

**1.** On tire une boule au hasard et on la remet. Quelles sont les probabilités des différentes couleurs ?

**2.** On tire une boule, on note sa couleur, on la remet. On fait trois fois cette expérience et l'on s'intéresse au nombre de boules bleues tirées. On définit ainsi une variable aléatoire $X$ sur l'ensemble $\Omega$ des épreuves.

a. Donner les éléments de $X(\Omega)$,

b. Calculer $P(\{\omega, X(\omega) = k\})$ où $k \in X(\Omega)$.

c. Représenter graphiquement la fonction de répartition de $X$.

d. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $X$.

N.B. – La précision des calculs sera $10^{-3}$.

**Ex. 1139.** ./1977/ameriquesudC/exo-2/texte.tex

Soit $p$ un entier positif ; les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont notés $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots$ Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{2}x + \dot{2}y = \dot{0}, \\ \dot{5}x - \dot{1}y = \dot{2}, \end{array}\right.$$

dans les deux cas suivants

**1.** p = 7,

**2.** p = 8.

## Problème 379

./1977/ameriquesudC/pb/texte

Dans le plan affine euclidien, orienté $\mathscr{P}$, rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ on considère pour $\varphi$ réel donné, l'application affine $T_\varphi$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par $T_\varphi(0) = 0$, et la matrice de l'application vectorielle associée à T. écrite dans la base $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin\varphi & -\cos 3\varphi \end{bmatrix}.$$

I – 1. Calculer $\varphi$ pour que $T_\varphi$ soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Préciser, suivant les valeurs de $\varphi$, l'axe de chaque symétrie.

2. Construire la courbe $(C)$ représentative de la fonction numérique $f$ définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}.$$

3. Soit $(C_1)$ la courbe transformée de $(C)$ par $T_{\frac{\pi}{2}}$ et $g$ la fonction numérique de représentation graphique $(C_1)$. Quelle relation existe-t-il entre $f$ et $g$ ?
Calculer $g(x)$.

II – 1. Caractériser $T_{\frac{\pi}{4}}$.

2. Construire la courbe $(\Gamma)$ représentative de la fonction numérique $h$ définie par

$$h(x) = x - 2\sqrt{x}.$$

3. $x$ et $y$ désignant les coordonnées du point $M$, calculer l'aire de

$$S = \{M \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, h(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

4. Montrer que l'image de $(\Gamma)$ par $T_{\frac{\pi}{4}}$ est incluse dans une parabole dont on demande le paramètre, les coordonnées du foyer, l'équation de la directrice.

III – 1. Calculer $\varphi$ pour que $T_\varphi$ soit une rotation ; préciser suivant les valeurs de $\varphi$ le centre et l'angle de chaque rotation.

Retour page 1

2. a. Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
   Au point $M$ de coordonnées $(x, y)$ on associe le point $M' = s(M)$ de coordonnées $(x', y')$. Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

   b. Soit $t = s \circ \left(T_{\frac{\pi}{4}} \circ T_{\frac{\pi}{4}}\right)$. À tout point $M$ de $\mathscr{P}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et à $t(M)$ on associe $z' = x' + iy'$.
   Quelle relation lie $z$ et $z'$ ?

   c. Déterminer la droite $(D)$ et le vecteur $\overrightarrow{V}$ qui dirige $(D)$ tels que $t$ soit la composée commutative de la symétrie orthogonale par rapport à $(D)$ et de la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$.

# VI. Amiens, série C

**Ex. 1140.** *3 points.* *./1977/amiensC/exo-1/texte.tex*

**1.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $n^3 - n$ est divisible par 6.

**2.** Déterminer les entiers naturels tels que $n^2 - n$ soit divisible par 6.

**3.** Déterminer les entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $3x + y - 1$ et $x - y - 3$ soient tous les deux divisibles par 6.

**Ex. 1141.** *5 points.* *./1977/amiensC/exo-2/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, $B = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de E. On considère les applications linéaires $f_i$ ($i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ de E dans E définies par :

$$\begin{array}{rcrcr} f_1(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} & ; & f_1(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3} & ; & f_1(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0} \\ f_2(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} & ; & f_2(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} & ; & f_2(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} \\ f_3(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_1} & ; & f_3(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} & ; & f_3(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_3} \\ f_4(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_2} & ; & f_4(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3} & ; & f_4(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} \end{array}$$

**1.** Indiquer, pour chaque application $f_i$ en justifiant votre affirmation, s'il s'agit ou non d'un endomorphisme orthogonal.

**2.** Pour chaque endomorphisme orthogonal $f_i$ : préciser l'ensemble $F_i$ des vecteurs de E invariants par $f_i$, la nature de $f_i$ ainsi que le nombre minimum de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel en lesquelles on peut décomposer $f_i$.
Indiquer si une telle application $f_i$ est un endomorphisme orthogonal positif ou négatif.

## Problème 380 *12 points* *./1977/amiensC/pb/texte*

A- P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $R = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . (Pour les figures, on représentera l'unité par 4 centimètres).

1. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{\star}, & f(x) = x \log |x| \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

   Étudier $f$ (en particulier la continuité et la dérivabilité).
   Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $R$ ; montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente en 0 que l'on précisera. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère $R$.

2. a) On pose

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

   Justifier le fait que $F(x)$ a un sens pour tout $x$ réel. L'égalité (**??**) définit donc une application $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x t\log t\,\mathrm{d}t$ pour $x$ strictement positif.

3. a) Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}^{\star}, \qquad \varphi(x)=\dfrac{x^2}{2}\log|x|-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4} \\ \varphi(0)=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Montrer que $\varphi$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la fonction $\varphi'$ dérivée de $\varphi$? Justifier le fait que $\varphi=F$.

b) Construire la courbe $\Gamma$ représentant $\varphi$ dans le repère $R$.

B- $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. On définit dans $\mathbb{C}$ une loi interne, notée $\star$, de la manière suivante : si $z=x+\mathrm{i}y,\ z'=x'+\mathrm{i}y',\ (x,\ y,\ x',\ y')\in\mathbb{R}^4$, on pose :

$$z\star z=xx'+\mathrm{i}(xy'+x'y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{C},\ +,\ \star)$ est un anneau commutatif unitaire (+ désigne l'addition des nombres complexes).
2. a) Déterminer l'ensemble $\mathbb{C}'$ des éléments de $\mathbb{C}$ inversibles pour la loi $\star$. Si $z=x+\mathrm{i}y$ ($x,\ y$ réels) est un élément de $\mathbb{C}'$, montrer que son inverse $\tilde{z}$ pour la loi $\star$ est $\tilde{z}=\dfrac{\overline{z}}{z^2}$, $\overline{z}$ désignant le complexe conjugué de $z$.

   En déduire les éléments $z$ de $\mathbb{C}$ tels que l'on ait : $z=\tilde{z}$.

   Montrer que $\mathbb{C}'$ est un groupe abélien pour la loi induite dans $\mathbb{C}$ par la loi $\star$.

   b) Soit $G$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}\mid \exists t\in\mathbb{R}, \qquad z=\mathrm{e}^t+\mathrm{i}t\mathrm{e}^t\right\}$$

   (où $\mathrm{e}$ est la base du logarithme népérien).

   Montrer que $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}',\ \star)$.
3. Le complexe $z=x+\mathrm{i}y$ a pour image$m\,(x\ ;\ y)$ dans le plan P.

   a) Montrer que, dans P, l'ensemble des points images des éléments de $G$ est une partie $\gamma$ de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

   b) Soit $z$ un élément quelconque de $G$, d'image $m$ dans P.

   Soit $\tilde{m}$ l'image de $\tilde{z}$ inverse de $z$ pour la loi $\star$. Que peut-on dire des arguments de $z$ et $\tilde{z}$? En déduire une construction de $\tilde{m}$ connaissant le point $m$ de $\gamma$. (Faire une figure en supposant $m$ distinct de $A$).

   c) Soit $z$ et $z'$ deux éléments de $G$. On pose $Z=z\star z'$, On appelle $m,\ m',\ M,\ A$ les points de P d'affixes respectives $z,\ z',\ Z,\ 1$.

   Soit $Z'$ l'affixe du point $M'$ transformé de $m'$ dans la similitude plane directe de centre $O$ transformant $A$ en $m$. Exprimer $Z'$ en fonction de $z$ et $z'$. Montrer que $M$ et $M'$ ont la même ordonnée.

   En déduire une construction de l'image $M$ de $Z$ connaissant les images $m$ et $m'$ des éléments $z$ et $z'$ de $G$. (Faire une figure : on représentera les points $A,\ m,\ m'$ sur $\gamma$ ; on marquera les points $M$ et $M'$ ; la figure sera faite en supposant $A,\ m,\ m',\ \tilde{m}$ distincts).
4. Soit $z_0$ un élément donné de l'ensemble $\mathbb{C}'$ ; on considère l'application $f_{z_0}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad f_{z_0}(z)=z_0\star z.$$

   a) Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par $f_{z_0}$. Discuter.

   c) Déterminer et caractériser les automorphismes $f_{z_0}$ involutifs.

   d) Soit $F$ l'ensemble des automorphismes $f_{z_0}$ : $F=\left\{f_{z_0}\mid z_0\in\mathbb{C}'\right\}$. Montrer que $(F,\ \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}',\ \star)$, En déduire la structure de $(F,\ \circ)$, $\circ$ étant la loi de composition des applications.

Retour page 1

# VII. Amiens remplacement, série C

**Ex. 1142.** ——— *3 points.* *./1977/amiensCrem/exo-1/texte.tex*

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a,\ b\}$ qui vérifient $m - 16d = 1977$ où $m$ est le P.P.C.M et $d$ le P.G.C.D des nombres $a$ et $b$.

**Ex. 1143.** ——— *5 points.* *./1977/amiensCrem/exo-2/texte.tex*

Soit l'application $f$ de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

1. Étudier cette fonction. (On désignera par $(\gamma)$ la courbe représentative que l'on tracera dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$.)
2. Démontrer que la courbe $(\gamma)$ obtenue est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de l'application $g$ da $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

   $$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

   (On précisera le point de contact.)
3. Évaluer l'aire de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ par rapport au repère $\mathscr{R}$, tels que :

   $$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

## Problème 381 *12 points* *./1977/amiensCrem/pb/texte*

A- Le plan vectoriel euclidien orienté $E$ est rapporté à la base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.
On désigne par $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$ les droites vectorielles de bases respectives $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ ; par $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ les symétries vectorielles par rapport à ces droites ; par $r$ la rotation d'angle droit direct ; par $\mathbf{1}_E$ l'identité dans $E$.
$\mathscr{L}(E,\ E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $E$.
On rappelle que $(\mathscr{L}(E,\ E),\ +,\ \circ)$ est un anneau unitaire non commutatif et que $(\mathscr{L}(E,\ E),\ +,\ .)$ est un espace vectoriel réel.

I- 

1. Écrire les matrices des applications $\mathbf{1}_E,\ r,\ s_1$ et $s_2$ dans la base $B$.
   Déterminer les applications $r\circ r$, ainsi que $r\circ s_i$ et $s_i\circ r$ pour $i \in \{1,\ 2\}$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E,\ E)$. On pose :

   $$\begin{aligned} f(\overrightarrow{i}) &= \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{j}) &= \gamma\overrightarrow{i} + \delta\overrightarrow{j}. \end{aligned}$$

   Montrer qu'il existe un quadruplet unique $(a,\ b,\ c,\ d)$ de $\mathbb{R}^4$ tel que

   $$f = a.\mathbf{1}_E + b.r + c.s_1 + d.s_2. \tag{1}$$

   (On calculera $a,\ b,\ c,\ d$ en fonction de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$.)
   En déduire que $(\mathbf{1}_E,\ r,\ s_1\ ,\ s_2)$ constitue une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(E,\ E),\ +,\ .)$. Quelles sont les coordonnées de $s_3$ et $s_4$ dans cette base ?
3. On considère les 2 applications de $\mathscr{L}(E,\ E)$ :

   $$f = a.\mathbf{1}_E + b.r + c.s_1 + d.s_2$$

   $$g = a.\mathbf{1}_E - b.r - c.s_1 - d.s_2.$$

   Montrer que $g\circ f = K.\mathbf{1}_E$ où $K$ est un réel que l'on calculera en fonction de $a,\ b,\ c,\ d$. (On pourra, si on le désire, exprimer les matrices de $f,\ g,\ g\circ f$ dans la base $B$).
   Montrer que $f$ est bijective si, et seulement si : $a^2 + b^2 \neq c^2 + d^2$.
   Déterminer alors $f^{-1}$ par ses coordonnées dans la base $(\mathbf{1}_E,\ r,\ s_1\ ,\ s_2)$.
4. Comment faut-il choisir $a,\ b,\ c,\ d$ pour que $f$ soit involutive ?
5. On se place dans le cas où $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Montrer que l'on a alors $f\circ f = \lambda f$ où $\lambda$ est un réel.

II- 1. On pose

$$\varphi = a.\mathbf{1}_E + b.r$$
$$\psi = c.s_1 + d.s_2.$$

Lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$, $\varphi$ décrit une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(E,\ E)$.
Lorsque $(c,\ d)$ décrit $\mathbb{R}^2$, $\psi$ décrit une partie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{L}(E,\ E)$.
Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{L}(E,\ E)$.

2. Á quelle condition $\varphi$ est-elle bijective ? Montrer que $\varphi$ est alors le composée d'une homothétie et d'une rotation vectorielles.
Á quelle condition $\psi$ est-elle bijective ? Comment peut-on alors la décomposer en deux applications simples ?

B- Le plan affine euclidien $P$, de direction $E$, est rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout point $M(x\ ;\ y)$ de $P$ peut être considéré comme image d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
$a,\ b,\ c,\ d$ étant 4 réels, on pose : $u = a + \mathrm{i}b$, $v = c + \mathrm{i}d$ et on considère l'application $\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto uz + v\overline{z} \end{aligned}$ et l'application $\mathscr{T}$ de $P$ dans $P$ qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $F(z)$.
On désigne par $U$ et $V$ les images, dans $P$, des complexes $u$ et $v$.

1. Montrer que l'application linéaire associée à $\mathscr{T}$ est l'application $f$ définie par l'égalité (1) en I2.
2. On suppose $u = \mathrm{i}$ et $|v| = 1$. Vérifier que $F \circ F$ est l'application nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Calculer $F(1)$. En déduire $F(\mathrm{i} + v)$.
Donner, à partir de la connaissance des points $U$ et $V$, une construction des points $M$ de $P$ tels que l'on ait $\mathscr{T}(M) = 0$.
On fera une figure représentant l'ensemble de ces points $M$ dans chacun des deux cas : $v \neq -\mathrm{i}$, $v = -\mathrm{i}$.
3. On suppose $u = \mathrm{i}$ et $|v| = \sqrt{2}$. Vérifier que $F$ est involutive.
On désigne par $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.
Rechercher, sous forme trigonométrique, les éléments $z$ de $\mathbb{C}$ pour lesquels $F(z) = z$, puis ceux pour lesquels $F(z) = -z$.
En déduire que $\mathscr{T}$ est une symétrie par rapport à la bissectrice $(\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OV})$ parallèlement à la bissectrice de $(\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OV})$.
4. On considère de façon plus particulière l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{i}z + (\mathrm{i} - 1)\overline{z} \end{aligned}$$

Préciser les éléments de la symétrie $\mathscr{T}$ associée à $F$.

## VIII. Amiens, série E

**Ex. 1144.** ——— *3 points.* *./1977/amiensE/exo-1/texte.tex*

**1.** Démontrer, par récurrence

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*) \quad \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**2.** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, où

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

a. Déduire, de la question 1, que cette suite est majorée par le nombre 3.

b. Montrer qu'elle est convergente.

**Ex. 1145.** ——— *5 points.* *./1977/amiensC/exo-2/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, $B = (\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ une base orthonormée de E. On considère les applications linéaires $f_i$ ($i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ de E dans E définies par :

$$\begin{array}{rcccl} f_1(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3} & ; & f_1(\vec{e_2}) = \vec{e_3} & ; & f_1(\vec{e_3}) = \vec{0} \\ f_2(\vec{e_1}) = \vec{e_1} & ; & f_2(\vec{e_2}) = -\vec{e_2} & ; & f_2(\vec{e_3}) = \vec{e_3} \\ f_3(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} & ; & f_3(\vec{e_2}) = -\vec{e_2} & ; & f_3(\vec{e_3}) = -\vec{e_3} \\ f_4(\vec{e_1}) = \vec{e_2} & ; & f_4(\vec{e_2}) = \vec{e_3} & ; & f_4(\vec{e_3}) = \vec{e_1} \end{array}$$

**1.** Indiquer, pour chaque application $f_i$ en justifiant votre affirmation, s'il s'agit ou non d'un endomorphisme orthogonal.

**2.** Pour chaque endomorphisme orthogonal $f_i$ : préciser l'ensemble $F_i$ des vecteurs de E invariants par $f_i$, la nature de $f_i$ ainsi que le nombre minimum de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel en lesquelles on peut décomposer $f_i$.

Indiquer si une telle application $f_i$ est un endomorphisme orthogonal positif ou négatif.

## Problème 382 *12 points* *./1977/amiensC/pb/texte*

A- P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $R = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . (Pour les figures, on représentera l'unité par 4 centimètres).

1. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & f(x) = x\log|x| \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier $f$ (en particulier la continuité et la dérivabilité).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $R$ ; montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente en 0 que l'on précisera. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère $R$.

2. a) On pose

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Justifier le fait que $F(x)$ a un sens pour tout $x$ réel. L'égalité (**??**) définit donc une application $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x t\log t\,\mathrm{d}t$ pour $x$ strictement positif.

3. a) Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) = \dfrac{x^2}{2}\log|x| - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4} \\ \varphi(0) = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Montrer que $\varphi$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la fonction $\varphi'$ dérivée de $\varphi$ ? Justifier le fait que $\varphi = F$.

b) Construire la courbe $\Gamma$ représentant $\varphi$ dans le repère $R$.

B- $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. On définit dans $\mathbb{C}$ une loi interne, notée $\star$, de la manière suivante : si $z = x + \mathrm{i}y,\ z' = x' + \mathrm{i}y',\ (x,\ y,\ x',\ y') \in \mathbb{R}^4$, on pose :

$$z \star z = xx' + \mathrm{i}(xy' + x'y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{C},\ +,\ \star)$ est un anneau commutatif unitaire (+ désigne l'addition des nombres complexes).



Retour page 1

2. a) Déterminer l'ensemble $\mathbb{C}'$ des éléments de $\mathbb{C}$ inversibles pour la loi $\star$. Si $z = x+\text{i}y$ ($x$, $y$ réels) est un élément de $\mathbb{C}'$, montrer que son inverse $\tilde{z}$ pour la loi $\star$ est $\tilde{z} = \dfrac{\overline{z}}{z^2}$, $\overline{z}$ désignant le complexe conjugué de $z$.
   En déduire les éléments $z$ de $\mathbb{C}$ tels que l'on ait : $z = \tilde{z}$.
   Montrer que $\mathbb{C}'$ est un groupe abélien pour la loi induite dans $\mathbb{C}$ par la loi $\star$.
   b) Soit $G$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :
   $$G = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists t \in \mathbb{R}, \qquad z = \text{e}^t + \text{i}t\text{e}^t\right\}$$
   (où e est la base du logarithme népérien).
   Montrer que $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}', \star)$.
3. Le complexe $z = x+\text{i}y$ a pour image$m(x\ ;\ y)$ dans le plan P.
   a) Montrer que, dans P, l'ensemble des points images des éléments de $G$ est une partie $\gamma$ de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
   b) Soit $z$ un élément quelconque de $G$, d'image $m$ dans P.
   Soit $\tilde{m}$ l'image de $\tilde{z}$ inverse de $z$ pour la loi $\star$. Que peut-on dire des arguments de $z$ et $\tilde{z}$? En déduire une construction de $\tilde{m}$ connaissant le point $m$ de $\gamma$. (Faire une figure en supposant $m$ distinct de $A$).
   c) Soit $z$ et $z'$ deux éléments de $G$. On pose $Z = z \star z'$, On appelle $m$, $m'$, $M$, $A$ les points de P d'affixes respectives $z$, $z'$, $Z$, 1.
   Soit $Z'$ l'affixe du point $M'$ transformé de $m'$ dans la similitude plane directe de centre $O$ transformant $A$ en $m$. Exprimer $Z'$ en fonction de $z$ et $z'$. Montrer que $M$ et $M'$ ont la même ordonnée.
   En déduire une construction de l'image $M$ de $Z$ connaissant les images $m$ et $m'$ des éléments $z$ et $z'$ de $G$. (Faire une figure : on représentera les points $A$, $m$, $m'$ sur $\gamma$ ; on marquera les points $M$ et $M'$ ; la figure sera faite en supposant $A$, $m$, $m'$, $\tilde{m}$ distincts).
4. Soit $z_0$ un élément donné de l'ensemble $\mathbb{C}'$ ; on considère l'application $f_{z_0}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_{z_0}(z) = z_0 \star z.$$
   a) Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par $f_{z_0}$. Discuter.
   c) Déterminer et caractériser les automorphismes $f_{z_0}$ involutifs.
   d) Soit $F$ l'ensemble des automorphismes $f_{z_0}$ : $F = \left\{f_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}'\right\}$. Montrer que $(F, \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}', \star)$, En déduire la structure de $(F, \circ)$, $\circ$ étant la loi de composition des applications.

## IX. Besançon, série C

**Ex. 1146.** ______ *3 points.* *./1977/besanconC/exo-1/texte.tex*

On considère la fonction polynôme $P$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :
$$P(z) = z^3 + 2(3-2\text{i})z^2 + (8-15\text{i})z + 3 - 11\text{i}.$$
1. $z$ étant réel, calculer, en fonction de $z$, la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$.
   En déduire l'existence d'un réel unique $z_0$ tel que $P(z_0) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des racines (réelles ou complexes) de l'équation $P(z) = 0$.

**Ex. 1147.** ______ *5 Points.* *./1977/besanconC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $\text{E}_3$ rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le plan P d'équation : $2x + y - z + 3 = 0$.
Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport au plan P.

**1.** $M$ étant un point de $\text{E}_3$ de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, déterminer les coordonnées $\left(a'\ ;\ b'\ ;\ c'\right)$ du point $M'$ image par $s$ du point $M$.

**2.** On considère la droite $D$ passant par $O$ de vecteur directeur $\vec{u}$ :
$$\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}.$$
Déterminer des équations paramétriques de la droite $D'$ ensemble des images par $s$ des points de $D$.

**Problème 383** *12 points.* *./1977/besanconC/pb/texte*

– Les fonctions considérées dans ce problème sont des fonctions numériques d'une variable réelle.

A- 1. Soit $f$ la fonction de $[-\pi\,;+\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \tan x.$$

a) Étudier la variation de $f$.

b) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet, sur $[-\pi\,;+\pi]$, trois racines distinctes. Soit $x_1$ la racine strictement positive. Démontrer que : $\dfrac{7\pi}{12} < x_1 < \dfrac{2\pi}{3}$ (on vérifiera que : $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$).

2. Soit $g$ la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par : $g(x) = x\sin x$.

a) Étudier la variation de $g$, et tracer la représentation graphique de $g$ dans la plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points de coordonnées$(x\,;\,y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -\pi \leqslant\leqslant x \leqslant +\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x). \end{cases}$$

B- 1. Soit $h$ la fonction définie sur $[-\pi\,;+\pi]$ par :

$$h(x) = x\sin\frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad \text{et} \qquad h(0) = 0.$$

a) $h$ est elle continue sur $[-\pi\,;+\pi]$ ?

b) $h$ est-elle dérivable sur $[-\pi\,;+\pi]$ ?

2. Soit $k$ la fonction définie sur $[-\pi\,;+\pi]$ par :

$$k(x) = x\sin x\sin\frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad \text{et} \qquad k(0) = 0.$$

a) $k$ est elle continue sur $[-\pi\,;+\pi]$ ?

b) $k$ est-elle dérivable sur $[-\pi\,;+\pi]$ ?

3. On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par :

$$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p}{n^2}\sin\frac{p}{n}\sin\frac{n}{p}.$$

Démontrer qu'elle est convergente, en faisant intervenir la valeur moyenne de $k$ sur $[0\,;1]$, (on ne calculera pas explicitement la valeur de cette limite).

C- Soit $\varphi$ la fonction dé finie sur$[-\pi\,;+\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \cos x\cos\frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 0.$$

1. Montrer que $\varphi$ est majorée et minorée sur $[-\pi\,;+\pi]$ (on ne demande pas d'étudier la continuité de $\varphi$ en 0).

Soit $t \in ]0\,;\pi]$ : montrer que $\varphi$ est intégrable sur $[t\,;\pi]$.

On pose alors $\Phi(t) = \displaystyle\int_t^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Soit $\psi$ la fonction définie sur $]0\,;\pi]$ par :

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2}\sin x\sin\frac{1}{x}.$$

Démontrer qu'il existe une fonction $\Psi$, définie sur $]0\,;\pi]$ par :

$$\Psi(t) = \int_t^\pi \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$



Retour page 1

3. Préciser la fonction $\Omega$ dé finie sur $]0\,;\pi]$ par :

$$\Omega(t) = \Phi(t) + \Psi(t)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties portant sur $\Phi(t)$).

4. On admet que $\Phi(t)$ tend vers une limite quand $t$ tend vers 0. Démontrer l'existence d'une fonction $\Psi_1$ définie et continue sur $[0\,;\pi]$ et qui coïncide sur $]0\,;\pi]$ avec la fonction $\Psi$.

## X. Besançon, Dijon, Nancy, Reims & Strasbourg remplacement, série C

**Ex. 1148.** ——— *4 points.* *./1977/besanconCrem/exo-1/texte.tex*

**1.** Trouver deux constantes $a$ et $b$ telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad 9k+4 = a(2k-1)+k+8 \qquad \text{(XIX.1)}$$

$$\text{et} \qquad 2k-1 = b(k+8)-17 \qquad \text{(XIX.2)}$$

**2.** En déduire que :

a) si $k \equiv 9\,[17]$ alors $\text{pgcd}(9k+4,\ 2k-1) = 17$.

b) si $k \not\equiv 9 (\text{mod } 17)$ alors $\text{pgcd}(9k+4,\ 2k-1) = 1$.

**Ex. 1149.** ——— *4 Points.* *./1977/besanconCrem/exo-2/texte.tex*

**1.** $x$ étant un réel supérieur à $\text{e}^2$, calculer

$$\int_1^x \frac{\text{d}t}{t}, \qquad \int_{\text{e}}^x \frac{\text{d}t}{t\log t}, \qquad \int_{\text{e}^2}^x \frac{\text{d}t}{t\log t \log(\log t)}.$$

Étudier leur comportement quand $x$ tend vers $+\infty$.

**2.** $\alpha$ étant un réel strictement positif, et $x$ un réel supérieur à $\text{e}$, on pose :

$$I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{\text{d}t}{t^\alpha} \qquad , \qquad J_\alpha(x) = \int_1^x \frac{\text{d}t}{t(\log t)^\alpha}.$$

Pour quelles valeurs de $\alpha$, $I_\alpha(x)$ admet-il une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

Qu'en est-il alors de $J_\alpha(x)$ ?

### Problème 384 *12 points.* *./1977/besanconCrem/pb/texte*

$E$ désigne un espace vectoriel réel de dimension trois,et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $E$.

On rappelle que $\mathscr{L}(E)$, muni des deux opérations : addition et multiplication par un réel, est un espace vectoriel réel (l'addition nulle est notée $0$). On peut aussi munir $\mathscr{L}(E)$ de la composition (au sens des applications) ; on posera

$$f^2 = f \circ f.$$

$I$ désigne l'application identique de $E$.

Soient $a$ et $c$ deux réels, $a \neq 0$, et $P$ l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ :

$$f \longmapsto P(f) = f^2 + af + cI.$$

A- 1. $P$ est-elle une application linéaire ?

2. Montrer que si le trinôme $x^2+ax+c$ a une racine réelle, alors il existe au moins une application $f$ de $\mathscr{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.



Retour page 1

3. Soit $f$ un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $P(f)=0$.
   a) Montrer que si $c \neq 0$, $f$ est bijective et déterminer son inverse.
   b) Peut-on avoir $c=0$ et $f$ bijective ?

B- Dans cette partie on suppose $c=0$ ; $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$ désignent respectivement le noyau de $f$ et l'image de $f$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $P(f)=0$.

1. En écrivant tout vecteur $x$ de $E$ sous la forme $x=x'+x''$ avec $x'=x+\dfrac{1}{a}f(x)$, vérifier que $x' \in \ker f$ et $x'' \in \mathbf{Im} f$.
   Montrer que $E$ est somme directe de $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$.
2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\mathbf{Im} f = \mathbf{Im} f^2$.
3. Montrer que $\mathbf{Im} f$ est stable par $f$ et préciser la restriction de $f$ à $\mathbf{Im} f$.
4. Calculer $f^n$ en fonction de $f$ ($f^n = f \circ f^{n-1}$ par définition).

C- Soit $f$ un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $P(f)=0$.

1. Montrer que si $f$ est involutif, alors $\|a\| = \|c+1\|$.
2. On se propose de vérifier par un contre-exemple, que cette condition n'est pas suffisante pour que $f$ soit involutif.
   $E$ étant un plan vectoriel, soit $f$ l'endomorphisme de $E$ différent de l'identité tel que $f^2-2f+I=0$.
   Montrer qu'il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que $f(x) \neq x$, et vérifier que $(x,\ f(x))$ est un système libre.
   En posant $u=f(x)-x$, montrer que $(u,\ x)$ est une base de $E$ et expliciter la matrice de $f$ dans cette base.
   Que peut-on conclure ?

N.B.– Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendantes.

## XI. Besançon, Dijon, Nancy, Reims & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 1150.** *4 points.* *./1977/besanconErem/exo-1/texte.tex*

Soit $A, B$ et $C$ trois points non alignés d'un plan affine euclidien $(P)$. On note $G$ le barycentre des points $A, B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients $1, 2$ et $-1$.
Soit $M$ un point quelconque de $(P)$. On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan $(P)$ pour lesquels $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement dépendants

**2.** Déterminer l'ensemble $(F)$ des points $M$ du plan $(P)$ pour lesquels $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$.

**Ex. 1151.** *4 Points.* *./1977/besanconErem/exo-2/texte.tex*

Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1.$$

**1.** Démontrer que $g$ admet un minimum pour $x=0$. En déduire que $g$ ne prend que des valeurs positives ou nulles.

**2.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}^*)\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

a) La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer pour tout $x$ non nul $f''(x)$. On admettra que $f'$ est dérivable pour $x=0$ et que $f'(0)$ Démontrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) En déduire que $f$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$ dont on indiquera le domaine de définition.

Retour page 1

**Problème 385** *12 points.* ./1977/besanconErem/pb/texte

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices carrées $2 \times 2$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

I – 1. Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ ces matrices sont-elles inversibles ? On note $J$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ des matrices inversibles.

2. Montrer que $J$ muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif.

3. Pour tout $M \in \mathscr{M}$, on pose $M^1 = M$ et $M^n = M^{n-1} \times M$, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2.

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, calculer $M^n$.

   b. Dans le cas où $|b| < 1$, que devient la matrice $M^n$ lorsque $n$ tend vers l'infini ?

4. On suppose que $M$ est la matrice d'un automorphisme $F$ du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ rapporté à une-base $(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$.

   a. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\overrightarrow{P}$ invariants par $F$.

   b. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\overrightarrow{P}$ colinéaires à leur image.

II – Dans le plan euclidien $(P)$ rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'application affine

$$f : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

avec $$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

1. Y a-t-il des points de $(P)$ invariants par $f$ ?

2. Soit $(D)$ une droite du plan $(P)$ et $(D')$ son image par $f$.

   a. Les droites $(D)$ et $(D')$ peuvent-elles être parallèles ; confondues ?

   b. Soit $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ une équation de $(D)$. Donner une équation de $(D')$.

3. On considère le cercle $(C)$ de centre $O$ et de rayon 2.

   a. Donner une équation de l'ensemble $(C')$ image de $(C)$ par f quelle est la nature de $(C')$ ?

   b. Trouver les points communs à $(D)$ et $(C)$, d'une part $(D')$ et $(C')$, d'autre part. On fera une figure de synthèse où l'on dessinera les ensembles $(D)$, $(D')$, $(C)$ et $(C')$ (unité : 2 cm).

## XII. Bordeaux, série C

**Ex. 1152.** *4 points.* ./1977/bordeauxC/exo-1/texte.tex

$n$ étant un entier relatif quelconque, on pose :

$$A = n - 1 \qquad \text{et} \qquad B = n^2 - 3n + 6.$$

1. a) Montrer que le p.g.c.d de $A$ et $B$ est égal au p.g.c.d de $A$ et de 4.

   b) Déterminer, suivant les valeurs de $n$, le p.g.c.d de $A$ et $B$.

2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif $n$, le nombre $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?



Retour page 1

**Ex. 1153.** —————— *3 points.* ./1977/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Dans E, plan affine euclidien, $A$, $B$ et $C$ sont les sommets d'un triangle équilatéral, tels que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = d$, où $d$ est un réel non nul.

1. Déterminer l'ensemble des réels $a$ tels que les points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients $a$, $1$, $1$ admettent un barycentre $G_a$. Quel est l'ensemble des points $G_a$ obtenus ,
2. On prend $a = 1$.
   On pose $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $f_1(M) = 2d^2$.
3. On prend $a = -2$.
   Montrer que le vecteur $\vec{V}(M) = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant de $M$ que l'on précisera.
   Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $f_{-2}(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit égal à 0.

## Problème 386 *13 points.* ./1977/bordeauxC/pb/texte

A- Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout couple $(a ; ?)b$ de réels, on définit une application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, notée $\varphi a, b$ dont la matrice dans la $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications linéaires $\varphi_{a,b}$ lorsque $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$.

1. a) Quelle est la nature de $\varphi_{1,0}$ ?
   b) Montrer que $\varphi_{0,1}$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
   c) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ et vérifier que $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ est une base de $\mathscr{A}$.
   Quelles sont les coordonnées de $\varphi_{a,b}$ dans cette base ? Pour faire, de l'ensemble $\mathscr{E}$ des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on définit les opérations $+$ et . comme suit :
   — si $f$ et $g$ sont dans $\mathscr{E}$, $f+g$ est défini par :
   $$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \qquad \forall \vec{x} \in \mathscr{P} ;$$
   — si $f$ est dans $\mathscr{E}$, et $\lambda$ dans$\mathbb{R}$, $\lambda.f$ est défini par :
   $$(\lambda.f)(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}), \qquad \forall \vec{x} \in \mathscr{P}.$$
2. On munit $\mathscr{A}$de la loi d'addition des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ notée $+$ et de la loi de composition des applications linéaires de P dans P notée $\circ$. Montrer que $(\mathscr{A}, +, \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.

B- Soit $(P)$ un plan affine d'espace vectoriel associé à $\mathscr{P}$. On munit $(P)$ du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . Pour tout réel $b$ non nul, on note $f_b$ l'application affine de $(P)$ dans $(P)$ qui au point $m$ de coordonnées $(x ; y)$ associe le point $M$ de coordonnées $(X ; Y)$ défini par

$$\begin{cases} X = -bx + by + 1 \\ Y = by. \end{cases}$$

1. Vérifier que l'application linéaire associée à $f_b$ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$ défini à la partie A.
2. Déterminer, suivant les valeurs de $b$, l'ensemble des points invariants par $f_b$.
3. a) On suppose : $b = 1$. Montrer que $f_1$ est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2x - 1$ parallèlement à l'axe $x'Ox$.
   b) On suppose : $b = -1$. Montrer que $f_1$ est la composée commutative d'une symétrie par rapport à une droite contenant $O$ et d'une translation.
   c) On suppose : $b \neq 1$ et $b \neq -1$. Montrer que $f_b$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une symétrie par rapport à une droite.

C- On suppose maintenant que $(P)$ est un plan affine euclidien et que le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé. On considère le mouvement d'un point $m$ de $(P)$ dont les coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x = -2t + 2\mathrm{e}^t + 1, \text{ t: réel quelconque } (t \text{ est la date}) \\ y = -2t + 4\mathrm{e}^t + 1. \end{cases}$$

On note $(\gamma)$ la trajectoire du point $m$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(\gamma)$ admet en chacun de ses points une tangente et montrer qu'il existe un unique point $A$ de $(\gamma)$, que l'on déterminera, tel que la tangente en $A$ à $(\gamma)$ soit parallèle à l'axe $y'Oy$.
2. Soit $M$ le transformé du point $m$ par la symétrie $f_1$ définie à la partie B. Quelles sont, en fonction de $t$, les coordonnées $(X ; Y)$ du point $M$ ? Calculer $Y$ en fonction de $X$.
3. Soit la fonction numérique $F$ définie par

$$F(X) = 2\log\left(\frac{2}{X-1}\right) + 2X - 1.$$

($X$ étant une variable réelle qui parcourt l'ensemble de définition de $F$ que l'on précisera). Étudier cette fonction $F$ et tracer sa représentation graphique $(\Gamma)$ relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour étudier le comportement de $F(X)$ pour $X \to +\infty$, on recherchera les limites, pour $X \to +\infty$,de $\dfrac{F(X)}{X}$ et de $F(X) - 2X$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\Gamma)$ et de la droite d'équation$Y = 2X - 1$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4. Déduire des questions précédentes le tracé de la trajectoire $(\gamma)$ du point $m$.

## XIII. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 1154.** ———— *4 points.* *./1977/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex*

On considère le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4}\}$.

**1.** Dresser les tables d'addition et de multiplication.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x = \dot{1}$,en l'inconnue $x$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x = 2$, en l'inconnue $x$.

**4.** Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ le système $\begin{cases} \dot{2}x + 3\dot{y} = \dot{2} \\ \dot{1}x + 2\dot{y} = \dot{4} \end{cases}$ en les inconnues $x$ et $y$.

**5.** Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation, en l'inconnue $x$, $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.

**Ex. 1155.** ———— *4 points.* *./1977/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex*

Un sac contient cinq jetons numérotées $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3$. On extrait simultanément deux jetons et on désigne par $X$ la somme des nombres inscrits sur les deux jetons. Tous les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.
3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire $X$.

### Problème 387 *12 points.* *./1977/bordeauxCrem/pb/texte*

A- L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B} = (1,\ \mathrm{i})$ la base constituée des nombres complexes $1$ et i.

On dira que le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est le vecteur de coordonnées $(x ; y)$ dans la base $\mathscr{B}$. Si $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ sont deux vecteurs de cet espace vectoriel, leur produit scalaire sera $xx' + yy'$.

Soit $a$ un réel donné et $f_a$ l'application linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ de matrice $m = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

On pose $f_a(z) = Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $z = z + \mathrm{i}y$ $(x,\ y,\ X,\ Y$ réels).



Retour page 1

I- 1. Quelles sont les coordonnées de $Z$ dans la base $\mathscr{B}$ ?

2. Exprimer $Z$ en fonction de $x$ et $y$ puis en fonction de $z$ et $\overline{z}$ où $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ désigne le nombre complexe conjugué de $z = x + \mathrm{i}y$.

3. Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ invariants par $f_a$ ?
Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous-espace de $\mathbb{C}$.

4. Pour quelle valeur du réel $a$, $f_a$ est-il une rotation vectorielle ?

II- 1. Montrer que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $f_a$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
Soit $f_a^{-1}$ l'application réciproque de $f_a$. On pose $f_a^{-1}(z) = X' + \mathrm{i}Y'$ ($X'$, $Y'$ réels).

2. Déterminer dans la base $\mathscr{B}$ la matrice de $f_a^{-1}$.

3. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un élément de $\mathbb{C}$. Exprimer $Z' = f_a^{-1}(z)$ en fonction de $x$ et $y$ puis en fonction de $z$ et $\overline{z}$. Déterminer une relation entre $Z$, $Z'$ et $z$. En déduire que $f_a + f_a^{-1} = 2a1_{\mathbb{C}}$ où $1_{\mathbb{C}}$ est l'application identique dans $\mathbb{C}$.

4. Si $a \neq 0$, déterminer le noyau et l'image de $f_a - f_0$.

B- Soit $P$ un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathbb{C}$ et rapporté a? un repère orthonormé d'origine $O$ et de base $\mathscr{B}$. On désigne par $\varphi_a$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui au point $O$ associe le point $A(1\ ;\ a)$, $a \in \mathbb{R}$ et dont l'application linéaire associée est $f_a$. L'image par $\varphi_a$ d'un point $M$ est alors le point $M' = \varphi_a(M)$.

I- 1. Déterminer les coordonnés $x'$ et $y'$ du point $M'$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $M$.

2. Démontrer que si $a \neq 1$ alors l'application affine $\varphi_a$ admet un point invariant unique $\Omega$ dont on déterminera les coordonnées.
Si $a = 1$, quel est l'ensemble des points invariants ?

3. Établir que $\varphi_a$ est la composée d'une application affine de point invariant $O$ et d'une translation.

4. Quelle est l'image par $\varphi_a$ de la droite affine d'équation $x = 0$? de la droite affine d'équation $y = 2ax$ ?

II- On suppose que $a = 0$ Montrer que $\varphi_0$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
Quelle est l'image par $\varphi_0$ du cercle de centre $O$ et de rayon 1 ?
Quelles sont les images par $\varphi_0$ des bissectrices des axes du repère ?

III- On suppose $a = 1$.

1. Exprimer $y'?x'$ en fonction de $y?x$. En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par $\varphi_1$.

2. On considère la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Étudier la fonction $f$. Construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O,\ \mathscr{B})$.
Déterminer une équation de la courbe $(\mathscr{C}')$ transformée de $(\mathscr{C})$ par $\varphi_1$.
Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme $x = y - \dfrac{1}{y}$.
Construire $(\mathscr{C}')$ sur la même figure que $(\mathscr{C})$, (On pourra au préalable étudier et représenter la fonction $g : x \longmapsto x - \dfrac{1}{x}$. On déduira la courbe $(\mathscr{C}')$ de la courbe représentative de la fonction $g$)

IV- 1. On suppose $a \neq 0$. Soit $T_1$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui au point $O$ associe le point $A(1\ ;\ a)$ et dont l'application linéaire associée est

$$u = f_a + f_a^{-1}.$$

Démontrer que $T_1$ est une homothétie ou une translation.

2. On suppose encore $a \neq 0$. Soit $T_2$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui au point $O$ associe le point $A(1\ ;\ a)$ et qui admet

$$v = f_a - f_0$$

pour application linéaire associée.
Démontrer que $T_1$ est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.



Retour page 1

## XIV. Bordeaux Limoges & Poitiers, série E

**Ex. 1156.** ———— *5 points.* *./1977/bordeauxE/exo-1/texte.tex*

**1.** Soit $f$ l'application numérique définie sur l'intervalle

$$\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[\quad\text{par}\quad \left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[\right)\quad f(x)=\operatorname{tg}x.$$

Montrer que $f$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Soit $g$ l'application numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

et soit $f$ l'application numérique définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$ par $h=g\circ f$.

a. Montrer que $h$ est dérivable et calculer sa dérivée.

b. Calculer $h(0)$ et en déduire une expression simple de $h$.

c. En déduire que $g=f^{-1}$.

**Ex. 1157.** ———— *3 points.* *./1977/bordeauxE/exo-2/texte.tex*

On lance, indépendamment l'un de l'autre, deux dés sur une table. Le 1er dé est cubique ; ses faces sont numérotées de 1 à 6, et chacune a la même probabilité de rester en contact avec la table. Le 2e dé est un tétraèdre régulier ; ses faces sont numérotées de 1 à 4, et chacune a la même probabilité de rester en contact avec la table.

On s'intéresse à la variable aléatoire $X$ égale au produit des nombres inscrits sur les faces des 2 dés qui sont en contact avec la table. Donner le tableau de la loi de probabilité de $X$, et calculer l'espérance mathématique de $X$.

### Problème 388 *12 points.* *./1977/bordeauxE/pb/texte*

On rappelle qu'une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même est appelé endomorphisme.

I – Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel rapporté à une base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ et $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ défini par la matrice $M_{a,b}$ :

$$M_{a,b}=\begin{pmatrix}b-4a & 2a\\ 2a & b-a\end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que l'un au moins n'est pas nul.

1. Montrer que $\varphi_{a,b}$ n'est pas une application bijective si, et seulement si, $a$ et $b$ vérifie la relation $b(b-5a)=0$. Pour chacun des couples $(a,b)$ vérifiant cette relation, déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$.

   On notera $\vec{H}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{K}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$.
2. $a$ et $b$ étant quelconques, déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi_{a,b}$.

II – Dans cette partie, $b=0$. On appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M_{a,0}\quad (a\neq 0).$$

1. Montrer que la multiplication es matrices est une loi de composition interne commutative dans $\mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ muni de cette loi est-il un groupe ?
2. Déterminer l'image de $\varphi_{a,0}$.

   Montrer que $(\vec{H}\ ,\ \vec{K})$ est une base de $\mathcal{V}$ et écrire la matrice $M'_{a,0}$ de $\varphi_{a,0}$ dans cette base.
3. Montrer qu'il existe une projection vectorielle $p$ et une homothétie $h$ telles que $\varphi_{a,0}=h\circ p$. Préciser la forme de $h$ et de $p$.

III – Dans cette partie $b=1$ et $a$ est quelconque. Déterminer les valeurs $\lambda$ telles qu'il existe un vecteur non nul $\vec{u}$ vérifiant $\varphi_{a,1}(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

Écrire la matrice de $\varphi_{a,1}$ dans la base $(\vec{H}\ ,\ \vec{K})$.

Retour page 1

IV – On considère un espace affine $E$, dont $\mathscr{V}$ est l'espace vectoriel associé ; soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de $E$.

1. Soit $a$ un nombre réel non nul.
   On considère l'application $f_a$ qui a tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ telles que
$$\begin{cases} x' = -4ax + 2ay + 1 \\ y' = \phantom{-}2ax - \phantom{2}ay + 2 \end{cases}$$
   a. Montrer que $f_a$ est une application affine non injective.
   b. Pour quelle valeur de $a$ admet-elle plus d'un point invariant ? Préciser dans ce cas la nature de $f_a$.
2. On considère l'application affine $g_a$ d'endomorphisme associé $\varphi_{a,1}$ laissant invariant le point $O$.
   a. Déterminer les coordonnées de $M'$, image de $M(x,y)$ par $g_a$ en fonction de $a$, $x$ et $y$.
   b. Déterminer l'ensemble $(D)$ des points invariants par $g_a$.
   c. Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une droite vectorielle fixe si $a \neq 0$ et déduire de la partie **??** une construction géométrique de $M'$.

# XV. Bordeaux & Rouen remplacement, série E

**Ex. 1158.** ———— *5 points.* *./1977/bordeauxErem/exo-1/texte.tex*

**1.** Calculer sous la forme $a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, les racines carrées du nombre complexe
$$\frac{15}{4} - 2i$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$iz^2 + 4(2+i)z + 3i + 8 = 0.$$

**Ex. 1159.** ———— *3 points.* *./1977/bordeauxErem/exo-2/texte.tex*

Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$y = f(x) = x\mathrm{e}^{nx} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

**1.** Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative ; On utilisera un repère orthonormé.

**2.** Calculer l'aire de la surface plane ensemble des points $M(x,y)$ tels que
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et } 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

**3.** Calculer les dérivées première $f^{(1)}$, seconde $f^{(2)}$ et troisième, $f^{(3)}$ de la fonction $f$, puis, par récurrence ; la dérivée $p$-ième
$$f^{(p)} \;:\; x \longmapsto f^{(p)}(x).$$

**4.** Calculer $f^{(p)}(1) - pn^{p-1}\mathrm{e}^n = a_p$. Puis $U = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=k} a_p$.

## Problème 389 *12 points.* *./1977/bordeauxErem/pb/texte*

Les parties I –, II – et III – du problème sont indépendantes.
On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes.
Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel euclidien de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormée et $E$ espace affine associé à $\mathscr{V}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $(P)$ le plan de $E$ d'équation cartésienne $x - y + z - 3 = 0$ et $B$ le point de $(P)$ d'abscisse 2 et d'ordonnée 1.

I- $f$ l'application affine de $E$ dans $E$ définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 1 \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathscr{V}$ associé à $f$ conserve la norme.
2. Montrer que $\varphi$ est involutif et caractériser $\varphi$.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$ et préciser si $f$ est involutive.
4. Montrer que $A = f(B)$ est un élément de $(P)$ et en déduire que $(P)$ est globalement invariant par $f$.
5. Déterminer le plan $\mathscr{Q}$ dont l'image par $f$ est le plan $xOy$ d'équation $z = 0$ ; $M_0$ étant un point de $\mathscr{Q}$ déterminer l'ensemble $\Gamma$ dont l'image par $f$ est le cercle $\Gamma'$ du plan $xOy$ de centre $f(M_0)$ et de rayon $1$. (On utilisera la nature de $f$).
6. Soit $s$ l'application affine d'endomorphisme associé $\varphi$ et telle que $s(B) = B$
   a. Caractériser $s$.
   b. Préciser l'endomorphisme associé à $f \circ s$, en déduire la nature de $t = f \circ s$ et montrer que $f$ est la composée de deux applications que l'on précisera.
   c. Montrer que $f \circ f = t \circ t$, en déduire que $s \circ t = t \circ s$.

II- Soit $D$ le point de coordonnées

$$x = 4, \; y = 1, \; z = 2.$$

1. Montrer que l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points $M$ du plan $xOy$ d'équation $z = 0$ tels que les droites $OM$ et $Df(M)$ soient orthogonales, a pour équation par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$y^2 + 4xy + x^2 + 3x = 0.$$

2. Soit $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$, écrire l'équation de $(\mathscr{C})$ par rapport au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. En déduire que $(\mathscr{C})$ est une conique dont précisera la nature.
3. Déterminer l'équation réduite de la conique puis la construire.

III- Pour représenter le plan $(P)$ et un triangle $(Q, B, R)$ en géométrie descriptive on choisit :

- le point $O$ à 6 cm du bord gauche de la feuille et à 11 cm du bord supérieur
- l'unité de longueur 1 cm
- $y'Oy$ pour support de la ligne de terre parallèle au petit axe de la feuille
- le plan $yOz$ pour plan frontal de projection
- le plan $xOy$ pour plan horizontal de projection
- l'axe $Oy$ est orienté de gauche à droite, l'axe $Ox$ vers le bas, l'axe $Oz$ vers le haut.

1. Construire les traces du plan $(P)$.
2. Sachant que la droite $QB$ est parallèle à la trace horizontale du plan $(P)$, que droite $BR$ est parallèle à la trace frontale du plan $(P)$ et que les points $Q$ et $R$ ont même ordonnée $4$, construire les projections du triangle $ABC$ puis dessiner triangle en « vraie grandeur » . note $G$ le barycentre du système pondéré $(Q, 1)$ ; $(B, 1)$ ; $(R, -1)$.
3. Sans calculer ses coordonnées déterminer sur l'épure les projections de $G$.
4. Soit le point $N$ image du point $M$ par l'application composée de la symétrie orthogonale par rapport à $(P)$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{BQ}$. Sans calculer ses coordonnées déterminer sur l'épure les projections de $N$ sachant que $M$ a pour coordonnées

$$x = 4, \; y = 2 \quad \text{et} \quad z = 7.$$

Retour page 1

# XVI. Caen, série C

**Ex. 1160.** ———— *4 points.* *./1977/caenC/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210.
2. Si $x$ et $y$ sont deux entiers naturels non nuls, $\Delta$ leur plus grand diviseur commun, $\mu$ leur plus petit multiple commun, déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que :

$$\begin{cases} \mu = 210.\Delta \\ y - x = \Delta. \end{cases}$$

**Ex. 1161.** ———— *4 points.* *./1977/caenC/exo-2/texte.tex*

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$4z^3 - 6\mathrm{i}\sqrt{3}z^2 - 3(3+\mathrm{i}\sqrt{3})z - 4 = 0.$$

1. Démontrer que cette équation admet une racine réelle. En déduire les solutions, dont on donnera la forme trigonométrique. 2. Démontrer que ces racines sont les éléments d'une suite géométrique dont on donnera la raison complexe.

## Problème 390 *12 points.* *./1977/caenC/pb/texte*

On rappelle que l?ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques définies sur R, muni de l?addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur R.

A- 1. . Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ .

2. a) Soit $f$ appartenant à $\mathscr{D}$. On pose :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = f(x).\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Montrer que $h$ appartient à $\mathscr{D}$ et que si $f' = f$, alors $h$ est une application constante. En déduire l'ensemble $F_1$ des fonctions $f$ de $\mathscr{D}$ telles que $f' = f$ .

b) De même, en posant $k(x) = f(x)\mathrm{e}^{x}$, déterminer l'ensemble $F_2$ des fonctions $f$ de $\mathscr{D}$ telles que $f' = -f$..

B- 1. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$ engendré par $f_1$ et $f_2$ telles que :

$$f_{:}x \longmapsto \cos x \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \longmapsto \sin x.$$

Démontrer que $f_1$ et $f_2$ forment une base de $F$ et que leurs fonctions dérivées $f_1'$ et $f_2'$ appartiennent à $F$.

2. Plus généralement, on désigne par $g_1$ et $g_2$ deux éléments de $\mathscr{D}$ linéairement indépendants tels que le plan vectoriel $G$ de base $(g_1,\ g_2)$ contienne $g_1'$ et $g_2'$ et fonctions dérivées de $g_1$ et $g_2$ respectivement. Démontrer que, pour toute fonction $f$ de $G$, $f'$ est élément de $G$ et que l'application $\Phi$ de $G$ dans $G$ définie par $\Phi(f) = f'$ est un endomorphisme de $G$. Déterminer son noyau. Démontrer que cette application est bijective si et seulement si $G$ ne contient pas la fonction constante $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$, par $f_0(x) = 1$.

3. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $G$ ayant pour matrice dans la base $(g_1,\ g_2)$ :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\varphi$ est involutif. En déduire une nouvelle base $\mathscr{B}$ de $G$ laquelle la matrice de $\varphi$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



Retour page 1

C- 1. Déduire des questions précédentes que l'on peut choisir les fonctions $g_1$ et $g_2$ de façon que $\varphi = \Phi$ (on utilisera la base $\mathscr{B}$).

2. Si l'on suppose, de plus, que $g_1(0) = g_2(0) = 1$, montrer que l'on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = \frac{4\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{3} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{3}.$$

Dans les questions suivantes, $g_1$ et $g_2$ sont les fonctions ainsi définies.

3. Étudier les variations des fonctions $g_1$ et $g_2$. Tracer, dans un plan rapporté à un repère orthonormé, leurs courbes représentatives $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^\star$) .
5. Montrer, à l'aide de l'application $\varphi$, que toute fonction $f$ appartenant à $G$ telle que $f = ag_1 + bg_2$ admet une primitive $\theta$ et une seule dans $G$. Donner les coordonnées de $\theta$ dans la base $(g_1,\ g_2)$.

## XVII. Caen remplacement, série C

**Ex. 1162.** ——— *4 points.* *./1977/caenCrem/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien E est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. Soit $M$ un point de E de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
   Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ du point $M'$, image de $M$ dans la symétrie orthogonale $s$ par rapport au plan P dont une équation est : $2x + 3y - z - 5 = 0$.
2. Soit $f$ l'application affine de E dans E qui au point $M$ associe le point $M''$ de coordonnées $\left(x''\ ;\ y''\ ;\ z''\right)$ tel que :

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{3x - 6y + 2z + 17}{7} \\ y'' &= \frac{-6x - 2y + 3z + 29}{7} \\ x'' &= \frac{2x + 3y + 6z + 51}{7} \end{aligned}$$

   Démontrer que $f$ est un antidéplacement de E, qui n'a pas de point invariant et que l'on peut décomposer $f$ en le produit commutatif de l ?application $s$ par une application $g$ que l'on déterminera.

**Ex. 1163.** ——— *4 points.* *./1977/caenCrem/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^3 + (3 + 2\mathrm{i})z^2 + (3 - \mathrm{i})z + 2(1 - 5\mathrm{i}) = 0$$

après avoir montré qu ?elle admet une solution réelle.

**PROBLÈME 391** *12 points.* *./1977/caenCrem/pb/texte*

I- Soit la fonction numérique $f$ définie par $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1. Donner l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition de$f$.
   Démontrer que : $\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) + f(-x) = 0$.
   Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et définir la fonction dérivée. Étudier les variations de $f$.
2. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans un plan euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   Étudier les branches infinies, Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de sa tangente en 0. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction $\begin{array}{rl}\varphi : \mathscr{D} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - x\end{array}$ ).



Retour page 1

II- 1. Démontrer que $f$ est intégrable sur $[0\,;a]$ où $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^a \log(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x$.

2. Soit $u_n$ l'aire de la portion de plan ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

a). Démontrer que $u_n = n\log(n+\sqrt{n^2+1}) - \sqrt{n^2+1}+1$.

b). On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Étudier son sens de variation. Cette suite est-elle convergente ?

III- 1. Démontrer, sans calcul, que $f$ admet une application réciproque notée $g$. Donner son ensemble de définition, montrer qu'elle y est dérivable et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C}')$ dans le plan P.

2. Calculer $g(x)$ et $g'(x)$.

3. Dans toute la suite du problème, on pose $g' = h$.
Calculer $h'(x)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h^2(x) - g^2(x) = 1$.

4. Soit $(O',\ \vec{i},\ \vec{j})$ un nouveau repère orthonormé de P. Soit $\mathscr{H}$ l''ensemble des points $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ où $X = 3h(x)$, $Y = 2g(x)$ et $x$ décrit $\mathbb{R}$. Construire $\mathscr{H}$.

## XVIII. Caen, série E

**Ex. 1164.** ______ *4 points.* *./1977/caenE/exo-1/texte.tex*

Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \log\sqrt{\left|\frac{2+x}{2-x}\right|}.$$

**1.** Prouver que $g$ est une fonction impaire.

**2.** a) Étudier les variations de $g$.

b) Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $g$ dans un repère orthonormé $(A,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

**3.** a) Prouver que la restriction de $g$ à $]-2\,;2[$ est une bijection de $]-2\,;2[$ sur $\mathbb{R}$ ;

b) Définir l'application $f^{-1}$ ; en particulier préciser $f^{-1}(x)$.

**Ex. 1165.** ______ *3 points.* *./1977/caenE/exo-2/texte.tex*

**1.** Prouver que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

(On utilisera successivement deux intégrations par parties).

**2.** a) Utiliser la question précédente pour évaluer les réels :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

(On pourra évaluer $I+J$ et $I-J$).

b) Avec la précision permise par la table de logarithmes décimaux, déterminer une valeur approchée du réel $b = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.
En déduire une valeur approchée des réels $I$ et $J$.

Retour page 1

**Problème 392** *13 points.* *./1977/caenE/pb/texte*

Dans tout le problème on désigne par $P$ le plan complexe.

A- On définit sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes une loi de composition interne, notée $\star$ par :

$$z \star z' = xx' + \mathrm{i}(xy' + x'y) \quad \text{si } z = x + \mathrm{i}y \qquad \text{et} \qquad z' = x' +_i cy'.$$

I- 1. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.

2. Démontrer que $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2 \qquad \overline{z \star z'} = \overleftarrow{z} \star \overline{z'}$. $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z \star (2\mathrm{i}) = 0$.

II- On considère l'équation $E_\theta$ :

$$z \star z + \left[2\sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\right] \star z + 1 + 2\mathrm{i}\sin 2\theta = 0$$

où $z$ est l'inconnue complexe et $\theta$ un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi[$.

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre $\theta$, l'existence et le nombre de solutions de $E_\theta$.

2. Lorsque $E_\theta$ admet deux solutions $z_1$ et $z_2$, vérifier que

$$|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}.$$

III- 1. Déterminer l'ensemble des points du plan $P$ dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité

$$|z + 1 + \mathrm{i}| \star (2\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}.$$

2. Soit $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points du plan dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité :

$$|(2\mathrm{i}) \star (z - 1)| = |z|.$$

Démontrer que $(\mathscr{H})$ a pour équation : $y^2 = x^2 - 8x + 4$.
Construire $(\mathscr{H})$ et préciser ses éléments caractéristiques.

B- Soit $f_u$ l'application de $P$ dans $P$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = u \star z$, où $u = a + \mathrm{i}b$ désigne un nombre complexe.

a) Montrer que $f_u$ est une application affine de $P$.
Démontrer que : $\forall (u,\ u') \in \mathbb{C}^2 \qquad f_u \circ f_{u'} = f_{u \star u'}$.

b) Déterminer les nombres complexes $u$ pour lesquels $f_u$ est involutive. Quelles sont les applications correspondantes ?

c) On suppose $ab \neq 0$.
Déterminer les droites du plan $P$ égales à leur image par $f_u$.

## XIX. Caen & Orléans-Tours remplacement, série E

**Ex. 1166.** ——— *3points.* *./1977/caenErem/exo-1/texte.tex*

Sachant que l'équation suivante :

$$z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 16z - 52 = 0$$

a deux racines réelles opposées, la résoudre dans $\mathbb{C}$.

**Ex. 1167.** ——— *5 points.* *./1977/caenErem/exo-2/texte.tex*

Log désigne la fonction logarithme népérien.
Quel est l'ensemble $D$ de définition de la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x}?$$

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in D\ f(x) = g(x) \\ \qquad\qquad f(0) = 0 \end{cases}$$



Retour page 1

Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ au point $0$. Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(C')$ la courbe représentative, dans le repère précédent, de la fonction $h$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in ]\,0\,,\,\mathrm{e}\,[\cup]\,\mathrm{e}\,,\,+\infty\,[\; h(x) = \dfrac{x}{-1+\operatorname{Log} x} \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $(C')$ est l'image de $(C)$ dans une homothétie que l'on précisera.

### Problème 393 *12 points.*

*./1977/caenErem/pb/texte*

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ et $D(0,-1)$.

I – 1. Soit les points $A'(1,1)$ et $C'(1,-1)$. Montrer qu'il existe une application affine unique $g$ du plan $P$ telle que $g(A) = A', g(B) = 0$ et $g(C) = C'$

Démontrer que $g$ est une rotation. Déterminer son centre et son angle.

2. On considère l'application affine $f$ définie par : $f(A) = B, f(B) = A$ et $f(C) = B$. Calculer les coordonnées $(x',y')$ de l'image par $f$ du point $M$ de coordonnées $(x,y)$. Montrer que $f$ admet un seul point invariant $\omega$.

Soit $\varphi$ l'endomorphisme du plan vectoriel, associé à l'application affine $f$. On désigne par $s$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\Delta$ engendrée par le vecteur $\vec{\imath}$, et par $p$ la projection vectorielle de direction $\Delta$ , sur la droite vectorielle $\Delta'$ engendrée par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Démontrer que $\varphi = s \circ p$.

Écrire $f$ comme la composée de deux applications affines admettant, chacune, $\omega$ comme point invariant. Préciser la nature de ces deux applications affines.

II – On désigne par $G$ le barycentre des points $A,B,C,D$, affectés respectivement des coefficients $a,b,c,d$, positifs ou nuls tels que $a+b+c+d = -1$

1. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes pour que $G$ appartienne :

— au segment $[O,A]$

— au segment $[A,B]$

2. a. On pose

$$a = \alpha\cos^2\frac{u}{2}\ ,\ b = (1-\alpha)\cos^2\frac{v}{2}$$
$$c = \alpha\sin^2\frac{u}{2}\ ,\ d = (1-\alpha)\cos^2\frac{v}{2}\quad \text{avec } \alpha \in [0,1]$$

$u$ et $v$ étant des nombres réels quelconques. Montrer que les coordonnées de $G$ s'écrivent :

$$X = \alpha\cos u \qquad Y = (1-\alpha)\cos v$$

b. On choisit $u = \dfrac{\pi}{3}$ et $v = -\dfrac{\pi}{4}$ Déterminer et construire l'ensemble $E$ des points $G$ quand $a$ varie dans l'intervalle $[0,1]$.

c. $a$ est fixé, ($a \in [0,1]$), $u$ et $v$ sont des nombres variables tels que $u+v = \dfrac{\pi}{2}$.

Écrire une équation cartésienne de l'ensemble $F$ des points $G$.

Construire $F$ pour $\alpha = \dfrac{3}{4}$

## XX. Centre Outremer, série C

**Ex. 1168.**

*./1977/centreoutC/exo-1/texte.tex*

**1.** Soit le nombre complexe $Z = A+iB$. On dit que $z_1$ est une racine quatrième de $Z$ si $z_1^4 = Z$. On donne $Z = -8(1+i\sqrt{3})$. Montrer que $z_1 = \sqrt{3}-i$ est une racine quatrième de $Z$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+8+8i\sqrt{3} = 0$. Donner le module et l'argument de chaque solution.



Retour page 1

**Ex. 1169.** ./1977/centreoutC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{A}_2$ , de repère orthonormé ( $O$ , $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ) on considère le mobile $M$ de coordonnées

$$M\begin{cases} x = \mathrm{e}^t - 2 \\ y = -\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{-t} + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

**1.** Montrer que la trajectoire est une partie d'une.courbe dont on donnera une équation cartésienne. Dessiner cette trajectoire en précisant le sens du mouvement.

**2.** Vérifier qu'il existe un point fixe $\Omega$ tel qu'à l'instant $t$ le vecteur accélération du mobile $M$ soit le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

## Problème 394

./1977/centreoutC/pb/texte

I – Soit $\mathscr{M}(2,2)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels. On considère $\mathscr{M}$ défini par

$$\mathscr{M} = \left\{ M \in \mathscr{M}(2,2) \quad (\exists (a,b,d) \in \mathbb{R}^3) M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{M}$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En donner une base. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}$ ? On munit $\mathscr{M}$ de l'addition à de la multiplication matricielles : $(\mathscr{M}, +, \times)$ est-il un anneau. On dit que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}(2,2)$ commutent si $AB = BA$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} et B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{M}$ Montrer que la condition $a = d$ et $a' = d'$ est une condition suffisante pour que $A$ et $B$ commutent. Est-ce une condition nécessaire ?

2. On considère

$$\mathscr{B} = \left\{ M \in \mathscr{M} \quad (\exists u \in \mathbb{R}) M = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-u} \end{pmatrix} \right\}.$$

   Montrer que $\mathscr{B}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe commutatif. Que peut-on dire de l'application $\varphi$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{B} \\ u &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-u} \end{pmatrix} \end{aligned} \ ?$$

3. Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension deux et ( $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ) une base de $E$. Pour tout triplet $(a,b,d)$ de réels, on définit l'application linéaire de $E$ dans $E$, notée $f_{a,b,d}$ dont la matrice dans la base ( $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ) est $M_{a,b,d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Déterminer toutes les applications $f_{a,b,d}$ vérifiant

$$f_{a,b,d} \circ f_{a,b,d} = f_{a,b,d}.$$

   a. Définir géométriquement $f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

   b. Quelles sont les applications $f_{a,b,d}$ involutives ?

II – Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension deux, d'espace vectoriel associé $E$, rapporté au repère cartésien ( $O$ , $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ).

1. On considère les applications affines $g_{a,b}$ définies pour tout couple de réels $(a,b)$ par

$$\begin{cases} x' = ax + \ by \ + 1, \\ y' = bx + 2ay - 1. \end{cases}$$

   Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des couples $(a,b)$ pour lesquels l'application $g_{a,b}$ n'admet pas un point invariant unique.

   Soit $\mathscr{H} = \left\{ M \in \mathscr{E} (\exists (a,b) \in \mathscr{C}) \overrightarrow{0M} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \right\}$. Déterminer la nature de $\mathscr{H}$ et donner ses éléments caractéristiques. Discuter selon le choix de $(a,b)$ dans $\mathscr{C}$ l'existence des points invariants de $g_{a,b}$.

2. On considère l'application $h$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{cases} x' = x + y \ , \\ y' = x - y + 2. \end{cases}$$

Retour page 1

a. Montrer que $h$ est une application affine bijective. Quelle est l'image de la droite d'équation $x+y-2=0$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ?

b. Montrer que $h$ a un unique point invariant

Soit $A_0$ le point de coordonnées $(1,3)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $A_1 = h(A_0), A_2 = h(A_1)\ldots$ Calculer les coordonnées $(U_n, V_n)$ de $A_n = h(A_{n-1})$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$. $U_n$, et $V_n$ admettent-elles des limites finies quand $n$ augmente indéfiniment ? Montrer que les points $A_{2p}$, appartiennent tous à une même droite $(D_0)$ et que les points $A_{2p+1}$ appartiennent tous à une même droite $(D_1)$.

## XXI. Clermont, série C

**Ex. 1170.** ———— *4 points.* *./1977/clermontC/exo-1/texte.tex*

Les fonctions réelles $f$ et $g$ sont définies par :

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{1+x^2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}$$

Étudier les ensembles de définition de fonctions dérivées premières de $f$ et de $g$, puis calculer la dérivée première, pour la valeur de la variable, de chacune des fonctions $f$ et $g$.

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{()1+x^2)^3}}.$$

Étudier la limite, lorsque l'entier naturel $n$ tend vers l'infini, de

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^3}} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]^3}} + \cdots + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]^3}}\right].$$

**Ex. 1171.** ———— *4 points.* *./1977/clermontC/exo-2/texte.tex*

Un plan affine euclidien P étant rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe au point $M$ de P dont les coordonnées sont $x_M$ et $y_M$ le nombre complexe

$$z_M = x_M + \mathrm{i} y_M, \qquad (\mathrm{i}^2 = 1), \quad \text{affixe de } M.$$

Les réels $\alpha, \beta, \gamma$ étant strictement positifs, les points $A$, $B$, $C$ ont respectivement pour affixes

$$z_A = \alpha, \qquad z_B = \beta, \qquad z_C = \mathrm{i}\gamma.$$

On construit dans P les triangles équilatéraux $CBA'$, $ACB'$et $BAC'$ de manière que ces triangles soient extérieurs au triangle $ABC$.

a) Calculer les affixes des points $A'$, $B'$ et $C'$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma$ et de $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Démontrer que les nombres complexes $z_{A'} - z_A$, $z_{B'} - z_B$ et $z_{C'} - z_C$ ont le même module.

b) On suppose que $\alpha = -1$, $\beta = +1$ et $\gamma = \sqrt{3}$.

Déterminer les nombres complexes $a$, $b$ et $c$ de manière que l'équation $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ ait pour solutions $z_{A'}$, $z_{B'}$ et $z_{C'}$.



Retour page 1

## Problème 395 *12 points.*

./1977/clermontC/pb/texte

On désigne par P un plan d'un espace affine euclidien E dont la dimension est 3.
La distance de deux points M et N de E, ou norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$, est notée $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$.

Á tout couple $(M,\ N)$ de points de E, on associe :

$\alpha$) le réel $\Delta(M,\ N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ si les points $M$ et $N$ ont la même projection orthogonale $m$ sur P,

$\alpha$) le réel $\Delta(M,\ N) = \left\|\overrightarrow{Mm}\right\| + \|\overrightarrow{mn}\| + \left\|\overrightarrow{nN}\right\|$ si les points $M$ et $N$ ont, sur P, des projections orthogonales $m$ et $n$ distinctes.

On choisira un repère cartésien orthonormé $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E tel que $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ soit un repère cartésien orthonormé de P.

1. On désigne par $t$ un réel quelconque.
   Le point $M(t)$ de E est défini par l?égalité
   $$\overrightarrow{OM}(t) = (\cos t).\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$$
   et le point $L$ de P est tel que
   $$\overrightarrow{OL} = \vec{i}.$$
   Démontrer que $\Delta(L,\ M(t)) = |t| + \left|2\sin\dfrac{t}{2}\right|$.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ :
   $$\begin{aligned} f : [-2\pi\,;+4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto |t| + \left|2\sin\frac{t}{2}\right|\end{aligned}$$
   Tracer la courbe représentative F de $f$ dans un plan $\Gamma$ affine euclidien, rapporté au repère cartésien orthonormé $(\Omega,\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra le centimètre comme unité de longueur.
3. L'unité d'aire étant le centimètre carré, calculer l'aire de la partie du plan $\Gamma$ limitée par F, par l'axe des abscisses et par les droites qui ont pour équations respectives $t = 4\pi$ et $t = -2\pi$.
4. $\alpha$ étant un réel strictement positif donné, on désigne par $A$ le point de E tel que $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{k}$.
   Quel est l'ensemble des points $M$ du plan P tels que, $\ell$ étant un réel donné,
   $$\Delta(A,\ M) = \ell\ ?$$
   Discuter suivant les valeurs de $\ell$.
   Quel est l'ensemble des points $N$ du plan $\left(O;\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tels que
   $$\Delta(A,\ N) = \ell\ ?$$
   Discuter suivant les valeurs de $\ell$.
5. Étant donnés les réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ strictement positifs et tels que $\beta < \alpha$, les points $A$ et $B$ de E sont définis par : $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \gamma\vec{i} + \beta\vec{j}$.
   Quel est l'ensemble des points $S$ de P tels que
   $$\Delta(A,\ S) = \Delta(S,\ B)\ ?$$
   Discuter suivant les valeurs respectives de $\gamma$ et de $\alpha - \beta$.
6. On désigne par $\varphi$ une application affine de E sur E qui
   a) l laisse P globalement invariant et qui
   b) est telle que, quels que soient les points $M$ et $N$ de E,
   $$\Delta(M,\ N) = \Delta(\varphi(M),\ \varphi(N)).$$
   Quelles sont les restrictions à P des applications affines $\varphi$? Prouver que, si $m$ est la projection orthogonale de $M$ sur P, $\varphi(m)$ est la projection orthogonale de $\varphi(M)$ sur P.
   Trouver toutes les applications affines $\varphi$ de E sur E qui possèdent les propriétés 6a et 6b.



Retour page 1

# XXII. Clermont remplacement, série C

**Ex. 1172.** ——— *4 points.* *./1977/clermontCrem/exo-1/texte.tex*

1. Dans le corps des nombres complexes, calculer les racines cubiques de l'unité.
2. On note $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Á chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. On désigne par A, B, C, D les images respectives dans ce plan des nombres

   $$-j^2,\ \frac{2}{j^2},\ -\frac{2}{j^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{4}{j^4}.$$

   Démontrer que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle. (On pourra former d'abord l'équation du cercle passant par A, B, C).

1.

**Ex. 1173.** ——— *5points.* *./1977/clermontCrem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
on considère les points A et B ayant respectivement pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $(-1\ ;\ 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
Soit $s$ la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est l'angle droit positif et dont le rapport est $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer $A' = s(A)$. Montrer que l'ensemble des images $M?'$ des points $M$ de D par $s$ est une droite D' qui coupe D en $I$. Déterminer $I' = s(I)$ et comparer $\lambda$ et $\lambda'$ tels que $\overrightarrow{A'M'} = \lambda'\overrightarrow{A'I'}$ et $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$. (Représenter graphiquement les points et les droites).
2. Soit $M''$ le barycentre des points $M$ et $M'$ respectivement affectés des coefficients 2 et $-1$. Démontrer que $M''$ est l'image de $M$ dans une similitude directe $s''$ de centre B et que l'ensemble des points $M''$ images des points $M$ de D est une droite D" que l'on déterminera. (Pour résoudre cette question on pourra soit utiliser les nombres complexes, soit introduire $A''$ barycentre des points $A$ et $A'$ respectivement affectés des coefficients 2 et $-1$ et montrer qu'il existe une similitude directe $s'$ de centre $B$ telle que

   $$s'(A) = M,\ s'(A') = M' \qquad \text{et} \qquad s'(A'') = M'').$$

## Problème 396 *11 points.* *./1977/clermontCrem/pb/texte*

A- Soit E l'ensemble des fonctions numériques $f$ d'une variable réelle, définies sur $\mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0.$$

1. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que la fonction qui à $x$ associe $\mathrm{e}^{kx}$ soit élément de E.
2. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction numérique $f$ d'une variable réelle soit élément de E est que la fonction g définie par

   $$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} f(x) \quad \text{soit trois fois dérivable sur } \mathbb{R}$$

   et telle que

   $$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad g'''(x) = 0.$$

   En déduire la forme générale des fonctions $g$, puis la forme générale des fonctions $f$ de l'ensemble E.

B- 1. Soit E' l'ensemble des fonctions réelles $f$ qui, $a$, $b$ et $c$ désignant trois réels quelconques, associent au réel $x$ le réel $f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$.
Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.
On sait que F muni de l'addition, et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que E' est un sous-espace vectoriel de F, et que $\mathscr{B} = \{f_0,\ f_1,\ f_2\}$ est une base de E', avec $f_0(x) = \mathrm{e}^x$, $f_1(x) = x\mathrm{e}^x$ et $f_2(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

2. Étudier les variations de la fonction $f_1$, et tracer sa représentation graphique $(\mathscr{C}_1)$ dans un repère orthonormé. On prendre pour unité de longueur le centimètre. Tracer, dans le même repère, la représentation graphique $(\mathscr{C}_0)$ de la fonction $f_0$.
3. Soit $m$ un nombre réel positif. L'unité d'aire est le centimètre carré. Calculer l'aire $A_m$ de la portion de plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$ et les droites d'équation $x = -m$ et $x = 1$, c'est-à-dire déterminée par les inégalités
$$\begin{cases} -m \leqslant x \leqslant 1 \\ x\mathrm{e}^x \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x. \end{cases}$$
Cette aire a-t-elle une limite lorsque $m$ tend vers $+\infty$ ?
4. Soit $D$ l'application qui à toute fonction $f$ de E' fait correspondre sa fonction dérivée.
Démontrer que $D$ est un endomorphisme de E'. Déterminer les composantes de $D(f_0)$, $D(f_1)$ et $D(f_2)$ dans le base $\mathscr{B}$.
Démontrer que $D$ est bijective et déterminer les composantes de $D^{-1}(f_0)$, $D^{-1}(f_1)$ et $D^{-1}(f_2)$ dans le base $\mathscr{B}$, $D^{-1}$ étant l'application réciproque de $D$.

C- Soit $\alpha$ un nombre réel donné. Á toute fonction f de E', on associe la fonction $f_\alpha$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_\alpha(x) = f(x+\alpha).$$

1. Soit $T_\alpha$ l'application qui à $f$ fait correspondre $f_\alpha$. Montrer que $f_\alpha$. $T_\alpha$ est-il un endomorphisme de E' ? Déterminer $T_\alpha(f_0)$, $T_\alpha(f_1)$ et $T_\alpha(f_2)$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Soit$\mathscr{T}$ l'ensemble des applications $\mathscr{T}_\alpha$ lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathscr{T}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications, est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

## XXIII. Clermont & Grenoble, série E

Ex. 1174. ———— *4 points.* *./1977/clermontE/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ l'application numérique de la variable réelle $x$ définie par :
$$f(x) = x.\mathrm{e}^{1-2|x|}$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ est dérivable pour $x = 0$. Calculer $f'(0)$.

**2.** Étudier la variation de $f$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité graphique : 4 cm).

**3.** Calculer $I_m = \displaystyle\int_{-m}^{2m} f(x).\mathrm{d}x$ où $m$ désigne un réel positif.

$I_m$ admet-elle une limite quand $m \to +\infty$ ?

Ex. 1175. ———— *3 points.* *./1977/clermontE/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ soient les points $M, A, B$ et $C$ d'affixes respectives $z, -z-2i, z(z+2i)$ et $2iz-3-i$. [ On rappelle que l'affixe $z$ d'un point de coordonnées $(x, y)$ est le complexe $(x+iy)$ ] .

**1.** Trouver l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ , tels que $O$ soit l'isobarycentre de $A, B, C$. Préciser le module et l'argument de chaque valeur trouvée pour $z$. Placer les points $A, B, C$ pour chaque cas.

**2.** Montrer que si $OBAC$ est un parallélogramme de diagonale $OA$ , l'affixe $z$ de $M$ est solution de l'équation :
$$z^2 + (1+4i)z - 3 + i = 0.$$
Déduire l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $OBAC$ soit un parallélogramme de diagonale $OA$.

## 🏛Problème 397 *13 points.*

./1977/clermontE/pb/texte

I – $E$ est un espace vectoriel euclidien de dimension trois, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit $\phi$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{\imath}) &= -\vec{\imath} + 2\vec{k} \\ \phi(\vec{\jmath}) &= \vec{\jmath} + 2\vec{k} \\ \phi\left(\vec{k}\right) &= 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{aligned}$$

1. a. $X, Y, Z$ étant des réels, on pose :

$$X'\vec{\imath} + Y'\vec{\jmath} + Z'\vec{k} = \phi\left(X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}\right).$$

Calculer $X', Y', Z'$ en fonction de $(X, Y, Z)$ .

b. Déterminer le noyau $N$ de $\phi$. En donner une base.

c. Quelle est la nature de l'ensemble image $\phi(E)$ ? Montrer que $\phi(E)$ et $N$ sont orthogonaux.

2. Soit $\varphi$ la restriction de $\phi$ au plan vectoriel $P$ d'équation cartésienne $2X - 2Y + Z = 0$

a. Montrer que les vecteurs

$$\vec{e_1} = \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \quad \text{et} \quad \vec{e_2} = \frac{1}{3}\left(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$$

définissent une base orthonormée du plan $P$.

b. Calculer $\varphi(\vec{e_1})$ et $\varphi(\vec{e_2})$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$. En déduire que $\varphi$ est un automorphisme de $P$. Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{e_1}\,\vec{e_2})$.

c. Montrer que $\varphi$ est l'application composée d'une homothétie vectorielle de rapport positif et d'une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments.

II – On considère un plan affine $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $\mathscr{R}\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

1. Soit $a$ et $b$ des réels. On considère l'application affine $f_{(a,b)}$ de $\mathscr{P}$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ dans $\mathscr{R}$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x', y')$ définies par

$$\begin{cases} x' = 3x + a \\ y' = -3y + b \end{cases}$$

a. Quel est l'endomorphisme associé à $f_{(a,b)}$ ? Montrer que $f_{(a,b)}$ admet un point invariant $\Omega$.

b. Définir géométriquement $f_{(a,b)}$ et construire géométriquement $M'$ connaissant $M$

2. On se place dans le cas $a = -6$ et $b = 12$ . On désigne par $f$ l'application $f_{(-6,12)}$.

a. Définir l'application réciproque $f^{-1}$ de $f$.

b. On définit la suite de points $M_n$ par

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_n = f^{-1}(M_{n-1}) \qquad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Calculer les coordonnées $(x_n, y_n)$ de $M_n$ en fonction des coordonnées $(x_{n-1}, y_{n-1})$ de $M_{n-1}$.

c. Trouver les réels $\alpha$ et $\beta$ de telle sorte que les suites $v_n$ et $w_n$ définies par

$$v_n = x_n - \alpha \qquad \text{et} \qquad w_n = y_n - \beta$$

soient des suites géométriques.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ Montrer que la suite de points $M_n$ converge vers une position limite.

III – Géométrie descriptive.

$\mathscr{E}$ désigne l'espace affine euclidien associé à E (défini en I ) , muni du repère $(O, \mathscr{B})$ . Le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est le plan horizontal de projection. Le plan $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection. $O$ est choisi à 4 cm à droite de la ligne de marge ; la ligne de terre $\left(O, \vec{\jmath}\right)$ est le petit axe de la feuille. L'unité est le centimètre. On considère le plan : $\mathscr{P}$ passant par $O$ et de vecteurs directeurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ (définis dans I(2)a ) et le point $A$ de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ 2)$ dans le repère $(O, \mathscr{B})$. Sur l'épure ainsi définie :

1. Représenter $\mathscr{P}$ par ses traces.
2. Représenter la droite passant par $A$ et orthogonale à $\mathscr{P}$ .
3. Construire par les procédés de la géométrie descriptive, l'intersection B de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$. Vérifier la position de $B$ par le calcul.
4. On considère dans $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$) la transformation $f_{(-6,12)}$ définie dans II et de point invariant associé $\Omega$.
   a. Déterminer les coordonnées de $\Omega$ dans $\mathscr{R}$ puis dans $(O, \mathscr{B})$. Placer $\Omega$ sur l'épure.
   b. Représenter sur l'épure la droite passant par $\Omega$ , de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1}$. Que représente-t-elle pour $f_{(-6,12)}$ ?
   c. Utilisant un rabattement du plan $\mathscr{P}$ sur le plan horizontal de projection, construire l'image $C$ du point $B$ par $f_{(-6,12)}$.

# XXIV. Côte d'Ivoire, série C

**Ex. 1176.** ———— *4 points.* *./1977/coteivoireC/exo-1/texte.tex*

On sait que :

$$103^3 - 1 = 9 \times 11110^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A = 10^{9n} + 2.10^{6n} + 2.10^{3n} + 1$.

1. Quel est le reste de la division de $A$ par $111$ ?
2. On suppose $n$ impair. Montrer que $A$ est divisible par 7, par 11 et par 13.
3. On suppose $n$ pair.

   a) Montrer que $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.

   b) Quel est le reste de la division de $A$ par $111 \times 1001$ ?

.

**Ex. 1177.** ———— *5 points.* *./1977/coteivoireC/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, rapporté à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on définit une application linéaire $f$ pour le ségalités suivantes $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = a\vec{j} + b\vec{k} \\ f(\vec{k}) = a\vec{j} - b\vec{k}. \end{cases}$$

1. Calculer $a$ et $b$ pour que $f$ soit une symétrie vectorielle; préciser l'ensemble image et la direction.
2. Calculer $a$ et $b$ pour que $f$ soit un projecteur (c'est-à-dire une application linéaire telle que$f \circ f = f$ ). Indiquer dans chaque cas l'ensemble des vecteurs invariants et la direction.
3. En supposant que l'espace vectoriel est euclidien et la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée, calculer $a$ et $b$ pour que $f$ soit une rotation. On donnera l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

**PROBLÈME 398** *11 points.* *./1977/coteivoireC/pb/texte*

Question préliminaire :
Soit $u$la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$u(x) = \log(1+x).$$

En étudiant la dérivabilité de $u$ au point 0 (zéro), montrer que$\dfrac{\log(1+x)}{x}$ possède une limite quand $x$ tend vers $0$.
En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x.\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = 1$.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.



Retour page 1

A- Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction numérique $f_n$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

.

1. Étudier la variation de $f$.
   Montrer que l'équation dans $\mathbb{R}$ : $f_n(x) = 1$ a une seule solution ou aucune suivant la parité de $n$.
2. Montrer que, sauf pour certaines valeurs particulières de $n$, les courbes représentatives de $f_n$ ont deux points communs et ont même tangente en chacun de ces points.

B- On se limite dorénavant à la restriction $g_n$ de $f_n$ à l'intervalle $[0\,;1]$ :

$$\forall x \in [0\,;1], \qquad g_n(x) = x^n(1-x).$$

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $g_n$ dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

1. Montrer que, sauf pour une valeur de $n$, $g_n$ possède un maximum $M_n$ et que

$$M_n = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

2. Tracer $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ relativement à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Donner l'allure de $(\mathscr{C}_n)$ pour $n \geqslant 2$ ; placer $(\mathscr{C}_{n+1})$, par rapport à $(\mathscr{C}_n)$, sur un même schéma (position relative des points de même abscisse et des deux points représentatifs du maximum).
3. Calculer successivement :
   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$
   b) $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$
   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ; pouvait-on prévoir ce résultat à l'aide d'un encadrement convenable de $g_n(x)$ et du résultat B(3)b ?
4. On pose $\forall x \in [0\,;1], \qquad S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ et

$$J_n = \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a) Calculer $S_n(x)$ en fonction de $n$ et de $x$, puis
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$
   - $J_n$
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

   b) Exprimer $J_n$ en fonction de $I_0,\ I_1,\ \ldots, I_n$. En déduire la valeur de la somme

$$s_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

   c) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 (\lim\limits_{n\to+\infty} Sn(x))\,\mathrm{d}x$.

C- On se place à présent dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes pour $n \in \mathbb{N}$ ; on pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad h_n(z) = z^n(1-z).$$

1. $n$ étant différent de 0, résoudre l'équation : $h_n(z) = h_0(z)$.
2. On se propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z|. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

   a) Montrer que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions.

   b) Soit $z_0$ l'une de ces solutions ; calculer, en fonction du module $\rho$ et de l'argument $\varphi$ de $z_0$ l'argument de $1-z_0$ , le module et l'argument de $z_0^n(1-z_0)$.

   c) En déduire que le système(**??**) n'admet de solution que si $n$ est congru à 1 modulo 6. Quel est alors l'ensemble des solutions de ce système ?

## XXV. Côte d'Ivoire, série E

**Ex. 1178.** ———— *4 points.* *./1977/coteivoireE/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé d'axes $Ox, Oy, Oz$. On choisit le plan $(xOy)$ pour plan horizontal. L'unité de longueur est $u = 1$ cm. Le point $O$ est au centre de la feuille d'épure, $Ox$ est dirigé vers le bas, $Oy$ vers la droite, $Oz$ vers le haut.
On considère le point $A$ de coordonnées ( 2 , 4 , 3 ) et la droite $D$ dont les projections horizontale et frontale ont pour équation :

$$d \;:\; x = y+2 \qquad d' \;:\; z = 2y+4$$

À l'aide d'un rabattement du plan $(\pi)$ déterminé par la droite $D$ et le point $A$ autour d'une charnière $(\ell, \ell')$ judicieusement choisie, construire le triangle équilatéral $(ABC)$ dont le côté opposé au sommet $A$ est porté par $D$.

**Ex. 1179.** ———— *4 points.* *./1977/coteivoireE/exo-2/texte.tex*

Soit le polynôme à variable complexe $P(z) = z^2 - 2pz + q$, les coefficients $p$ et $q$ étant des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $(E)$ l'équation dans $\mathbb{C}$ : $P(z) = 0$.

**1.** On suppose dans toute cette question que $q = 1$.

   a. Écrire les relations existant dans ce cas entre les modules et les arguments des solutions de l'équation $(E)$.

   b. On suppose, en outre, que $p$ est le complexe de module 1 et d'argument $\varphi$ :

   — Pour quelles valeurs de g) les solutions sont-elles réelles ? imaginaires pures ? Écrire dans chaque cas les solutions de $(E)$.

   — Quelles sont les solutions de $(E)$ si $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ?

**2.** On suppose dans cette question $p$ de module 1 , d'argument $\varphi$ ; avec $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ et $q$ de module $2\sin\varphi$ et d'argument $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$ . Sans résoudre l'équation $(E)$ correspondante, chercher, lorsque $\varphi$ varie, l'ensemble des points $M$, milieux de $(M_1, M_2)$, $M_1$ et $M_2$ étant les images dans le plan complexe des solutions de l'équation. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Quelle conséquence pouvez-vous en tirer pour $M_1$ et $M_2$ ?
*N.B. – On supposera la partie réelle de $z_1$ inférieure ou égale à celle de $z_2$.*

**PROBLÈME 399** *12 points.* *./1977/coteivoireE/pb/texte*

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\Delta$ la droite affine d'équation $y = x$ dans $\mathscr{R}$.

I – 1. Soit $s_1$ la symétrie affine orthogonale par rapport à $\Delta$. Donner l'expression analytique de $s_1$ .

2. Soit $s_2$ la symétrie affine par rapport à $\Delta$ parallèlement à la droite passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{\imath}$. Donner l'expression analytique de $s_2$ .

3. Soit $f = s_2 \circ s_1$.

   a. Montrer que $f$ est une bijection. Déterminer l'application réciproque $f^{-1}$ de $f$.

   b. Soit $M'(x', y')$ l'image du point $M(x, y)$ par $f$. Trouver l'expression analytique de $f$.



Retour page 1

c. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

d. Soit $U$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$. On pose $U^1 = U$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $U^n = U^{n-1} \times U$. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad U^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}$$

II – Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{P}$ On pose Mn ="n- 1 ) pour $n \geqslant 1$. Soit $\overrightarrow{a}$ le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$.

1. Déterminer $\varphi(\overrightarrow{a})$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ , $\overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \overrightarrow{a}$
3. Retrouver l'expression de $U^n$
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites affines invariantes par $f$ .

III – 1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ en fonction des coordonnées du point $M$.

2. En déduire que l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ est aigu ou droit.
3. Trouver l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$. soient orthogonaux.

IV – 1. Étudier la fonction $g \ : \ x \longmapsto 2x - \text{Log}\, x$ et tracer la courbe représentative $(C)$ de $g$ dans le repère $\mathscr{R}$.
(On donne Log 2 = 0,69 )

2. Former l'équation de l'image $(C')$ de $(C)$ par $f$ . Tracer $(C')$ dans le repère $\mathscr{R}$. Vérifier que le point $A(\ 1\ ;\ 2\ )$ appartient à $(C)$, soit $A'$ son image par $f$. Construire les tangentes en $A$ à $(C)$ et en $A'$ à $(C')$ ; montrer qu'elles ont mêmes vecteurs directeurs. Rapprocher ce résultat du II1 .

## XXVI. Dijon, série C

**Ex. 1180.** *3 points.* *./1977/dijonC/exo-1/texte.tex*

On considère l'anneau commutatif$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $dots$, $\overline{7}$.

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ?
   Montrer qu'ils forment un groupe multiplicatif. Dresser leur table.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{6}y = \overline{5} \\ \overline{5}x + \overline{2}y = \overline{3}. \end{cases}$$

**Ex. 1181.** *5 points.* *./1977/dijonC/exo-2/texte.tex*

$x$ étant réel, on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal a ? $x$. On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow [0\,;1] \\ x &\longmapsto x - E(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : [0\,;1] &\longrightarrow [0\,;1] \\ u &\longmapsto |2u-1| \end{aligned} \quad .$$

1. Soit $f = h \circ \varphi$. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, que $f$ admet le réel $1$ pour période et est une fonction paire. Représenter graphiquement $f$ dans un plan rapporté a ? un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
2. Soit $F$ la restriction de $f$ au segment $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.
   Démontrer que $F$ admet une fonction réciproque $F^{-1}$ dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
3. Soit $g = F^{-1} \circ f$.
   Démontrer que $g$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $1$ et paire. $k$ étant un entier relatif, exprimer $g(x)$ en fonction de $x$ et de $k$ dans les deux cas suivants :

$$x \in \left[k\,;k+\frac{1}{2}\right[ \qquad x \in \left[k+\frac{1}{2}\,;k\right[.$$



Retour page 1

## Problème 400 *12 points.*



A- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ une base de E.

$m$ étant un réel, soit $\varphi_m$ l'endomorphisme de E (application linéaire de E dans E) qui, au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\vec{u}_1 = \varphi_m(\vec{u})$ de coordonnées $(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ telles que

$$\begin{aligned} x_1 &= 2mx + 3y + mz \\ y_1 &= (2-m)x + (3m-2)y + 6z \\ z_1 &= (m-2)y + 2mz \end{aligned}$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\varphi_m(\vec{\imath})$, $\varphi_m(\vec{\jmath})$, $\varphi_m(\vec{k})$.
2. Démontrer que, quel que soit le réel $m$, le système de vecteurs $(\varphi_m(\vec{\imath}))$, $\varphi_m(\vec{\jmath})$ est libre.
   (On pourra étudier d'abord le cas particulier $m = 2$, puis $m \neq 2$).
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m$ pour lesquelles le système de vecteurs $\varphi_m(\vec{\imath})$, $\varphi_m(\vec{\jmath})$, $\varphi_m(\vec{k})$ est lié. En déduire l'ensemble des valeurs de $m$ pour lesquelles $\varphi_m$ est un automorphisme de E.
4. On suppose $m = 0$. Déterminer le noyau $N_0$ de $\varphi_0$, l'image $I_0$ de $\varphi_0$ et démontrer que $N_0$ et $I_0$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
5. On suppose $m = 2$.Prouver que $\varphi_2$ est bijective et déterminer analytiquement l'application réciproque $\varphi_2^{-1}$..

B- On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Á chaque triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels, on associe l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :
   $$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad f(t) = x\mathrm{e}^t + yt\mathrm{e}^t + zt^2\mathrm{e}^t$$
   e étant la base des logarithmes népériens.
   Soit E l'ensemble des applications $f$ , démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ et que les applications $i,\ j,\ k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
   $$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{e}^t \\ j(t) &= t\mathrm{e}^t \\ k(t) &= t^2\mathrm{e}^t \end{aligned}$$
   forment une base de l'espace vectoriel E. ( $x,\ y,\ z$ sont alors les coordonnées de $f$ dans la base $(i,\ j,\ k)$).
2. On note $f'$ et $f''$ les fonctions dérivées première et seconde de $f$ . Calculer pour $t$ réel, $f'(t)$ et $f''(t)$. En déduire que $f'$ et $f''$ sont éléments de E.
3. On définit l'application $\psi$ de E dans E telle que :
   $$\psi(f) = 2f + f' + f''.$$
   Démontrer que $\psi$ est un endomorphisme de E et déterminer dans la base $(i,\ j,\ k)$ les coordonnées $x_1,\ y_1,\ z_1$ de $\psi(f)$ en fonction de coordonnées de $f$. En utilisant les résultats de A4, prouver que $\psi$ est une bijection de E sur E et déterminer $\psi^{-1}$ sans nouveaux calculs.
4. Soit $h$ élément de E définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = (-3 - 6t + 4t^2)\mathrm{e}^t.$$
   Résoudre dans E l'équation :
   $$\psi(f) = h.$$
5. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction $f$ définie par
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = (1 - 3t + t^2)\mathrm{e}^t.$$

# XXVII. Gabon, série C & E

Ex. 1182. 4 points. ./1977/gabonC/exo-1/texte.tex

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation $f$ qui à tout point $m$ d'affixe, $z$ associe le point $M$ d'affixe $Z$ tel que

$$Z = \frac{z+2i}{1-iz}$$

**1.** Déterminer les points invariants de $f$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $m$ pour lesquels $Z$ est un nombre réel. Construire cet ensemble de points.

**3.** Soit $A$ le point d'affixe i, quel est l'ensemble des points $m$ pour lesquels $A$, $m$ et $M$ sont alignés ?

Ex. 1183. 3 points. ./1977/gabonC/exo-2/texte.tex

Construire dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient

$$4y^2 = |9x^2 - 36x|.$$

## Problème 401 *13 points.* ./1977/gabonC/pb/texte

On désigne par $F$, l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par les nombres réels.

I – Soit $E$ l'ensemble des fonctions numériques $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{x} + c\mathrm{e}^{-x}.$$

($a$, $b$ et $c$ varient dans $\mathbb{R}$ ).

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$. Si $h_1$, $h_2$, $h_3$ sont les éléments de $E$ définis par

$$h_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad h_2(x) = \mathrm{e}^{x}, \quad h_3(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

montrer que $(h_l, h_2, h_3)$ est une base de $E$.

2. Déterminer par récurrence la dérivée $n$-ième, $h^{(n)}$, d'une fonction h appartenant à $E$.
3. Soit $\mathscr{S}$ l'application de $F$ dans $F$ définie par

$$\mathscr{S}(f) = f - 2f' + f''.$$

a. Montrer que $\mathscr{S}$ est un endomorphisme de $F$.

b. Montrer que $\mathscr{S}_1$ restriction de $\mathscr{S}$ à $E$ est un endomorphisme de $E$.

c. Montrer que $\mathscr{S}_1$ est la composée d'une projection et d'une homothétie que l'on déterminera.

d. Déterminer le noyau $N(\mathscr{S}_1)$ et l'image $\mathscr{S}_1(E)$ de l'endomorphisme $\mathscr{S}_1$.

II – On veut déterminer l'ensemble $G$ des fonctions f de $F$ vérifiant

$$f(x) - 2f'(x) + f''(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1. \qquad \text{(XIX.3)}$$

quel que soit $x$ réel.

1. Démontrer que l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $\mathscr{S}_1(E)$ et trouver alors une fonction $h_0$ telle que $\mathscr{S}_1(h_0)(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
2. Déterminer un polynôme $p_0$ du premier degré tel que $\mathscr{S}(p_0)(x) = x - 1$.
3. Soit $f$ une fonction de $F$ appartenant au noyau $N(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$.
   a. Calculer la dérivée seconde de la fonction $g$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$.
   b. En déduire la forme générale de la fonction $g$.
   c. En déduire l'ensemble $N(\mathscr{S})$.
4. Vérifier que $f$ appartient à $G$ si, et seulement si $f - (h_0 + p_0)$ appartient à $N(\mathscr{S})$. En déduire l'ensemble $G$ des fonctions vérifiant l'égalité (**??**).

Retour page 1

# XXVIII. Grenoble, série C

**Ex. 1184.** ——— *4 points.* *./1977/grenobleC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2(\log x^2) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{pour}/x = 0. \end{cases}$$

($\log$ désigne le logarithme népérien. On rappelle qu'on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\log x = 0$.)

1. La fonction $f$ est-elle continue au point $x = 0$ ? Est-elle dérivable en ce point ?
   Si oui, calculer la dérivée au point $x = 0$.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ . Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé. Précisez les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d ?abscisse $1$ et $-1$.
   Cette intégrale a-t-elle une limite quand $\alpha$ tend vers zéro ? Si oui, peut-on interpréter géométriquement cette limite ?

**Ex. 1185.** ——— *4points.* *./1977/grenobleC/exo-2/texte.tex*

Soit $n$ un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Soit $Q$ la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$Q(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$
   Donner, en utilisant une fonction rationnelle, une autre expression de $Q(x)$ pour $x \neq 1$. Á l ?aide d'une dérivation, en déduire une autre expression de la somme
   $$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}.$$
2. Soit $p$ un nombre réel, $0 < p < 1$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant $n$ haies, numérotées de 1 à $n$. Pour chaque entier $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité de renverser la $i$ -ième haie est $p$.
   Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n$-ième haie, quel que soit le nombre de haies renversées.
   Soit $X$ la variable aléatoire définie comme suit :
   $$X = \begin{cases} n+1, & \text{si aucune haie n ?est renversée} \\ \text{k}, & \text{si } k \text{ est le numéro de la première haie renversée} \end{cases}$$
   a) Calculer en fonction de $p$ et $k$ la probabilité de l'événement $(X = k)$, notée $P(X = k)$ ; préciser $P(X = 1)$ et $P(X = n+1)$. Vérifier qu'on a :
   $$P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n+1) = 1.$$
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$ en fonction de $n$ et $p$.

## Problème 402 *12 points.* *./1977/grenobleC/pb/texte*

Le plan affine $P$ est rapporté a ? un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $P'$ l'ensemble des points d'abscisse non nulle de $P$, et $D^0$ l'ensemble des points d'abscisse nulle. On définit dans $P$ la loi de composition interne, notée $\star$, qui au couple de points $(m,\ m')$ de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ associe le point $m \star m'$ de coordonnées $\left(xx'\ ;\ xy' + y\right)$.

I– 
1. Montrer que la loi $\star$ est associative. Montrer qu'il existe un élément neutre E, qu'on déterminera.
2. Déterminer l'ensemble des points de P qui admettent un symétrique pour la loi $\star$ ; déterminer les coordonnées du symétrique du point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, lorsque celui-ci existe. Quelle est la structure de $(P',\ \star)$ ?
3. Soit $M_0$ un point de P, de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$. Déterminer l'ensemble $G$ des points de $P'$ qui commutent avec $M_0$ ; montrer que c'est un sous-groupe commutatif de $(P',\ \star)$. Dans quel cas peut-on avoir $G = P'$ ? Déterminer toutes les droites affines D, contenues dans P, telles que D$\cap P'$ soit un sous-groupe de $P'$.

II– Pour chaque point $A$ de $P$, on note $f_A$ l'application qui au point $m$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que $M = A\star m$. Dans cette question et dans la suite du problème, on note $(a\ ;\ b)$ les coordonnées de $A$.

1. Donner l'expression analytique de $f_A$, et caractériser $f_A$ géométriquement. Quels sont les points invariants de $f_A$ ?
2. Démontrer qu'on a, pour tout $A' \in P$, $f_A \circ f_{A'} = f_{A\star A'}$, où $\circ$ désigne la loi de composition des applications.
   Soit $\mathscr{F} = \left\{f_a / A \in P'\right\}$. Montrer que l'application $A \longmapsto f_A$ est un isomorphisme de $(P',\ \star)$ sur $(\mathscr{F},\ \circ)$. En déduire la structure de $\mathscr{F}$.
3. Montrer que pour tout $A \in P$ on a $f_A(D^0) \subset D^0$. On notera$f_A^0$ l'application de $D^0$ dans $D_0$ qui a ? un point $m \in D^0$ associe $f_A(m)$. Montrer que l'application $A \longmapsto f_A^0$ est un isomorphisme de $(P',\ \star)$ sur, un groupe d'applications bijectives de $D^0$ dans $D^0$, qu'on caractérisera et qu on reconnaîtra.
4. On définit une suite $(A_n)$ de points de $P$ par $A_1 = A$, $A_2 = f_A(A_1)$, $\ldots$, $A_n = f_A(A_{n-1})$ pour $n \geqslant 2$. Déterminer les coordonnées de $A_N$ en fonction de $a$, $b$ et $n$(on pourra distinguer les cas $a = 1$, et $a \neq 1$). Montrer que si on a $|a| < 1$, la suite $(A_n)$ a une limite, qu'on précisera.

III– Pour chaque point $A$ de $P$ (de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on note $g_A$ l'application de $P$ dans $P$ qui au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que $M = m\star A$.

1. Donner l'expression analytique de $g_A$. Quels sont ses points invariants ?
2. Montrer que si une application affine de $P$ dans $P$ laisse invariants deux points distincts de $D^0$, elle laisse invariants tous les points de $D^0$. Déterminer toutes les applications affines de $P$ dans $P$ qui laissent invariants tous les points de $D^0$ ; y en-a-t-il d'autres que les applications $g_A$, $A \in P$ ?
3. Déterminer l'ensemble des points $A$ de $P$ tel que $g_A$ soit involutive,

IV– On suppose dans cette question que $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe de $P$. $A$ désigne le point de coordonnées $(-1\ ;\ 1)$, et on pose $g_A = g$.

1. Donner l'expression analytique de $g$, et caractériser $g$ géométriquement.
2. Quelle est l'équation du transformé $(\mathscr{C}_1)$ par $g$ du cercle $((\mathscr{C})$ de centre $O$ et de rayon 1 ?
3. On note $(O,\ \vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1)$ le repère orthonormé qui se déduit de $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par rotation de centre O et d'angle $\alpha$ $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$.
   Déterminer l'équation de $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $(O,\ \vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1)$, on notera $(x_1\ ;\ y_1)$ les coordonnées d'un point dans le nouveau repère.
   Quelle relation ? doit-il satisfaire pour que le terme en $x_1y_1$ dans la nouvelle équation de $(\mathscr{C}_1)$ soit nul ?
   Calculer alors $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$.
4. Reconnaître $(\mathscr{C}_1)$. Préciser ses éléments de symétrie. Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$.

# XXIX. Grenoble remplacement, série C

**Ex. 1186.** ——— *3 points.* *./1977/grenobleCrem/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$,le reste de la division par 7 de $5^n$.
2. En déduire le reste de la division par 7 de $5^{136}$.
3. Un nombre s'écrit$\overline{3x53}$ en base 10. Déterminer $x$ pour que l'on ait

$$5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0 \text{ (mod 7)}.$$

5136+3x53 ?0 (mod7).



Retour page 1

**Ex. 1187.** ——— *4points.* ./1977/grenobleCrem/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $f$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x ; y ; z)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x' ; y' ; z'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = x-4 \\ z' = -y. \end{cases}$$

Démontrer que $f$ est composée d'une rotation $\mathscr{R}$, d?axe $\delta$, et d'une translation T, de vecteur $\vec{v}$, $\vec{v}$ étant un vecteur directeur de $\delta$ (autrement dit, $f$ est un vissage).
Déterminer $\delta$ et $\vec{v}$.

## Problème 403 *13 points.*

./1977/grenobleCrem/pb/texte

I- On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication externe par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont on notera $\underline{0}$ l'élément nul.
Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels, on note $g_{a,\ b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$ définie par :

$$g_{a,\ b}(x) = (a\cos x + b\sin x)$$

et on note $f_{a,\ b}$ l'application définie par :

$$f_{a,\ b}(x) = \mathrm{e}^{-x} g_{a,\ b}(x) = \mathrm{e}^{-x}(a\cos x + b\sin x)$$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ b}$ lorsque $a$ et $b$ parcourent $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace de $\mathscr{F}$.

   b) Montrer que les deux applications $e_1 = f_{1,\ 0}(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x)$ et $e_2 = f_{0,\ 1}(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x)$ forment une base de $\mathscr{E}$.
2. a) Soit $f$ un élément de $\mathscr{E}$ ; montrer que sa fonction dérivée est élément de $\mathscr{E}$. On note $D$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout élément de $\mathscr{E}$ associe sa fonction dérivée ; montrer que $D$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ et calculer la matrice de $D$ dans la base $(e_1,\ e_2)$.

   b) Montrer que $D$ admet une application réciproque $D^{-1}$ , dont on déterminera la matrice dans la base $(e_1,\ e_2)$. En déduire que tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ a une primitive et une seule dans $\mathscr{E}$.

   c) `Application` : trouver la primitive dans $\mathscr{E}$ de l'application $f = f_{2,\ -4}$ (définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 4\sin x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
3. Soit $f$ un élément de $\mathscr{E}$, et $f'$ et $f''$ ses dérivées première et seconde.

   a) Montrer, sans calcul, qu'il existe trois nombres réels $\alpha, \beta, \gamma$ non tous nuls tels que

   $$\alpha f + \beta f' + \gamma f'' = \underline{0}. \tag{1}$$

   b) Déterminer un triplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ de nombres réels non tous nuls, indépendants de $f$, pour lequel (1) est satisfaite.

   c) Utiliser ce résultat pour retrouver la matrice de $D^{-1}$ dans la base $(e_1,\ e_2)$.
4. Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Au point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ de P on associe le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, appelé affixe de $M$.
   Soit $\varphi$ la bijection de $\mathscr{E}$ sur P qui à $f_{a,\ b}$ associe le point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ de P, et soit $T = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$.
   Si $M$ est le point de coordonnées $(a ; b)$, on note $\left(a' ; b'\right)$ les coordonnées du point $M' = T(M)$. On se propose d'étudier $T$.

   a) Exprimer $\left(a' ; b'\right)$ en fonction de $(a ; b)$, et l'affixe $z'$ de $M'$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$.

   b) Quelle est la nature de l'application $T$ ?

II- On considère la courbe $(\mathscr{C})$, ensemble de points de P dont les coordonnées $(x ; y)$ satisfont à la relation $(y - \cos x)^2 = \cos 2x$.

1. Étudier les variations des fonctions $\phi_+$ et $\phi_-$ définies par

$$\phi_+(x) = \cos x + \sqrt{\cos 2x} \qquad \text{et} \qquad \phi_-(x) = \cos x - \sqrt{\cos 2x}$$

(on pourra admettre qu'aux points d'abscisse $x$ telle que $\cos 2x = 0$, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente de vecteur directeur $\vec{j}$.
Comment peut-on déduire la partie de $(\mathscr{C})$ située dans l'ensemble des points dont l'abscisse $x$ vérifie $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$ de la partie de $(\mathscr{C})$ située dans l'ensemble des points dont l'abscisse $x$ vérifie $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ ?
Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
2. On note $(\mathscr{C}_{a,\,b})$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto g_{a,\,b}(x)$. On pose $t = \tan x$. Montrer que pour que les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_{a,\,b})$ aient un point commun d'abscisse $x$, il faut et il suffit que $t$ satisfasse à une équation du second degré $(E_{a,\,b})$ qu'on déterminera.
3. On dira que les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_{a,\,b})$ sont tangentes si l'équation $E_{a,\,b}$ admet une racine double. Montrer que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $a$ et $b$ satisfassent à une équation du second degré, qu'on déterminera.
4. Soit $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points $M$ de P dont les coordonnées $(a\,;\,b)$ vérifient $a^2 - b^2 - 2a = 0$. Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole, dont on précisera les sommets et les foyers.
Quelle est la nature de l'image $(\mathscr{H}')$ de $(\mathscr{H})$ par $T$ ? Soit $U$ l'application de P dans P qui au point $M$ associe le milieu du bipoint $(M\,;\,T(M))$.
Quelle est la nature de $U$ ? Quelle est la nature de l'image $(\mathscr{H}'')$ de $(\mathscr{H})$ par $U$ ?

## XXX. Grenoble remplacement, série E

**Ex. 1188.** *4 points.* *./1977/grenobleErem/exo-1/texte.tex*

On considère l'équation $(E)$ :

$$z^3 - (4+5i)z^2 + (-1+19i)z + 12 - 12i = 0.$$

**1.** Démontrer que $(E)$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

**2.** Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**3.** Résoudre sans nouveaux calculs, mais en le justifiant, l'équation $(E')$ :

$$z^3 - (4-5i)z^2 + (-1-19i)z + 12 + 12i = 0.$$

**Ex. 1189.** *5 points.* *./1977/grenobleErem/exo-2/texte.tex*

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = x\text{Log}\,|x| \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est continue en $x = 0$. Est-elle dérivable en $x = 0$ ? Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé.

**2.** Dans $(P)$ on considère la loi de composition interne notée $*$ qui à deux points $M$ et $M'$ de coordonnées respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ associe le point $M''$ de coordonnées $(xx', xy' + yx')$.

a) Montrer que la loi $*$ possède un élément neutre appartenant à $(C)$.

b) Montrer que $(C)$ est stable pour la loi $*$ .

c) Montrer que tous les points de $(C)$, sauf 0, admettent un symétrique unique pour cette loi, et que ce symétrique appartient à $(C)$.

Retour page 1

**Problème 404** *11 points.* ./1977/grenobleErem/pb/texte

Les parties I – et II sont indépendantes.

I – 1. Dans le plan affine rapporté au repère ( $O$ , $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ) on donne la courbe $(C)$ d'équation :

$$2x^2+y^2-4x-4y+4=0.$$

Construire cette courbe et en préciser les éléments.

2. Soit $M$ un point mobile de coordonnées :

$$\begin{cases} x=2\displaystyle\int_0^t \sin 2u du \\ y=2+2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^t \cos 2u du \end{cases}$$

Le temps $t$ appartient à l'intervalle $[0,\pi]$ Calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré.

3. Montrer que la trajectoire de $M$ est la courbe $(C)$.

II – 1. Soit $D_k$ la droite d'équation : $2x+y+k=0$, où $k$ désigne un paramètre réel. Montrer que l'intersection de $(C)$ et de $D_k$ est, pour certaines valeurs de $k$ (que l'on précisera) constituée de deux points $M_k$ et $N_k$ éventuellement confondus. Soit alors $I_k$ le milieu de $M_k$, $N_k$ . Calculer ses coordonnées. Quel est, lorsque $k$ varie, l'ensemble des points $I_k$ ?

2. On considère l'application affine $f$ , qui au point $M$ de coordonnées $(x,y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x',y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(x+2y-2) \\ \\ y' = \dfrac{1}{3}(4x-y+4) \end{cases}$$

a. Montrer que $f$ est une involution.

b. Trouver l'ensemble des points invariants par $f$ .

c. Quelle est la nature de l'application $f$ ?

3. Déterminer les images directe et réciproque de $(C)$ par $f$ .

## XXXI. Groupe 1, série C remplacement

Ex. 1190. ./1977/groupe1Crem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**1.** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Calculer $f'(x)$. Montrer qu'il existe un et un seul $\alpha\in]0\,;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$. Dresser le tableau de variation de $f$.

**2.** Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^\star$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{e}^{-x^4}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $f(x)$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$. Existe-t-il $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ?

Donner l'allure de la courbe représentative de $f$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Retour page 1

# XXXII. Lille, série C

**Ex. 1191.** ——— *4 points.* *./1977/lilleC/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre l'équation : $3b-8a=0$ où $(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2$. En déduire l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui sont solutions de l'équation :
$$(a,\ b)\in\mathbb{Z}^2 \qquad 3b-8a=1.$$
2. Un entier naturel non nul $A$, s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base cinq et $abc$ dans le système de numération de base sept. Déterminer $a,\ b,\ c$ et donner l'expression de $A$ dans le système décimal.
   ℹ : 0 représente l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{N}$.

**Ex. 1192.** ——— *3 points.* *./1977/lilleC/exo-2/texte.tex*

1. 2.

On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z$, associe
$$z'=f(z)=2\mathrm{i}\overline{z}+2-\mathrm{i},$$
$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de z.
On désigne par $F$ la transformation du plan complexe, qui au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'=F(M)$, d'affixe $z'=f(z)$.

1. La transformation F admet-elle des points invariants ?
2. Déterminer la nature de $F$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

## Problème 405 *13 points.* *./1977/lilleC/pb/texte*

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $/CaligF$, muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I- Soit $E$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ tel que :
$$E=\left\{f\in\mathscr{F}, \qquad f''-f'+\frac{1}{4}f=\overline{0}\right\}$$
$f'$ désignant la fonction dérivée première de $f$, $f''$ la fonction dérivée seconde et $\overline{0}$ l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E, muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. a) Démontrer que si $f$ est élément de $E$, alors l'application $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad g(x)=\mathrm{e}^{-x/2}f(x)$$
appartient à $\mathscr{F}$, et que sa fonction dérivée seconde coïncide avec $\overline{0}$.
   b) Réciproquement, démontrer que si $g$ est élément de $\mathscr{F}$ tel que sa fonction dérivée seconde coïncide avec $\overline{0}$, alors il existe un élément $f$ de $E$ tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad g(x)=\mathrm{e}^{-x/2}f(x).$$
   c) En déduire que :
$$E=\left\{f\in\mathscr{F}, \qquad \exists(a,\ b)\in\mathbb{R}^2, \qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x/2}.\right\}$$
   On notera $f_{a,\ b}$ l'élément de $E$ tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x/2}.$$



Retour page 1

3. Démontrer que $(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1})$ est une base de $E$. On la note $B$. Qu'en déduit-on sur la dimension de $E$ ? Si $f_{a,\,b}$ est élément de $E$, donner ses coordonnées dans la base $B$.
4. Démontrer que si $f_{a,\,b}$ est élément de $E$, sa fonction dérivée première est élément de $E$.
5. On considère alors l'application $\varphi$ de $E$ dans $E$ qui à tout élément $f_{a,\,b}$ de $E$ associe $f'_{a,\,b}$.
   a) Vérifier que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer sa matrice dans la base $B$.
   b) $\varphi$ est-il un automorphisme de $E$ ? Si oui, donne rl'expression de $\left[\varphi^{-1}(f_{a,b})\right](x)$ pour f$f_{a,\,b}$ élément de $E$ et pour tout $x$ réel. Que représente $\varphi^{-1}(f_{a,\,b})$ pour $f_{a,\,b}$ ?
6. On considère l'élément $f_{1,\,1}$ de $E$. Donner l'expression de $f_{1,\,1}(x)$ pour tout $x$ réel, étudier le sens de variation de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $D$ du plan tel que :
   $$D=\{M(x\ ;\ y),\qquad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$
   a) en utilisant le I(5)b.
   b) par un calcul direct d'intégrale.

II- Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on considère la suite $(h_n)$ d'éléments de $E$ telle que :
$$h_1=f_{1,1}\qquad\text{et}\qquad 4h'_{n+1}=h_n$$
où $h'_{n+1}$ désigne la fonction dérivée de $h_{n+1}$.
On posera :
$$\forall x\in\mathbb{R}, h_n(x)=(U_nx+V_n)\mathrm{e}^{x/2},\qquad (U_n\ V_n)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Exprimer $U_{n+1}$ et $_{n+1}$ en fonction de $U_n$ et $V_n$. En déduire qu'il existe un endomorphisme $\psi$ de $E$ tel que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad h_{n+1}=\psi(h_n).$$
   Écrire la matrice $A$ de $\psi$ dans la base $B$.
2. Calculer $A^2$ et $A^3$. Démontrer que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad A^n=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&0\\-2n&1\end{pmatrix}.$$
   En déduire l'expression de $U_n$ et $V_n$ en fonction de $n$, pour $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$. Donner alors, pour tout élément $n\in\mathbb{N}^\star$, et tout $x$ réel, l'expression de $h_n(x)$.

# XXXIII. Lille, série E

**Ex. 1193.** ——— *4 points.* *./1977/lilleE/exo-1/texte.tex*

Le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$. On considère les points $A(\ 4\ ;\ 1\ )$ et $B(\ 0\ ;\ 3\ )$.

**1.** Déterminer, par ses coordonnées, le barycentre $G$ des points $A$ et $B$ affectés des coefficients respectifs 3 et 1.

**2.** Soit $a$ un réel quelconque. Trouver les coordonnées du point $M$ tel que
$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=4\cos\alpha\,\vec{\imath}+8\sin\alpha\,\vec{\jmath}.$$
Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ de $\mathscr{E}$ lorsque $\alpha$ décrit l'intervalle $[0,2\pi[$

**3.** Déterminer l'ensemble $F$ des points $P$ de $\mathscr{E}$ tels que
$$3PA^2+PB^2=k^2\qquad\text{où } k \text{ est un réel positif donné.}$$
On discutera de la nature de $F$ suivant les valeurs de $k$.

**Ex. 1194.** ——— *3 points.* ./1977/lilleE/exo-2/texte.tex

Un représentant de commerce doit visiter $n$ clients distincts. Chacune de ces $n$ visites est indépendante des autres. Quelle que soit la visite considérée, on désigne par $p$ la probabilité de l'événement : le représentant rencontre son client. On appelle $q$ la probabilité de l'événement contraire (le client n'est pas rencontré soit parce qu'il est absent, soit parce qu'il est occupé ailleurs, etc.).

**1.** Soit $X$ le nombre de clients effectivement rencontrés. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $X$ ? Quelle est l'espérance mathématique de $X$ ?

**2.** On suppose $n=5$ et $p=0,6$. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : aucun client n'est rencontré.

B : un client au moins est rencontré.

C : tous les clients sont rencontrés.

## Problème 406 *13 points.* ./1977/lilleE/pb/texte

*Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.*

Soit $E$ l'ensemble des fonctions $f_m$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f_m(x)=\mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^x+m\right)$$

où Log désigne le logarithme népérien.

On désigne par $C_m$ la courbe représentative de $f_m$ par rapport à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ :

I – Étude de $f_m$

1. Préciser $f_0$.
2. Soit $m$ positif. Étudier l'ensemble de définition $D_m$ de $f_m$, les limites aux bornes, les variations de $f_m$.
3. Soit $m$ négatif. Étudier l'ensemble de définition $D_m$ de $f_m$, les limites aux bornes, les variations de $f_m$.
4. Montrer que pour tout x dans $D_m$ , $f_m(x)=x+\mathrm{Log}(1+m\mathrm{e}^{-x})$. En déduire que la courbe $C_m$ admet une asymptote oblique dont on donnera une équation. Préciser suivant les valeurs de m la position de $C_m$ par rapport à l'asymptote.
5. Montrer que pour tout $m$, $f_m$ est une bijection de $D_m$ sur $f_m(D_m)$ . Comparer $f_m^{-1}$ et $f_{-m}$.
6. Construire $C_1$ et $C_{-1}$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

II – On se propose de trouver des transformations géométriques simples transformant une courbe $C_m$ en une courbe $C_{m'}$ .

1. Soit m positif et $T_m$ la translation de vecteur $(\mathrm{Log}\, m)(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$.
   a. Soit $M$ un point de coordonnées $(x,y)$ , $M'$ de coordonnées $(x',y')$ son image par $T_m$. Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x,y$ et $m$.
   b. Montrer que $C_1$ est transformée en $C_m$ par cette translation. En déduire une translation transformant $C_p$ en $C_m$ pour $p>0$ et $m>0$.
   c. Tracer $C_4$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Soit $m$ négatif et soit $T_m$ la translation de vecteur $[\mathrm{Log}\,(-m)](\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Montrer que $C_{-1}$ est transformée en $C_m$ par la translation $T_m$ . En déduire une translation transformant $C_p$ en $C_m$ pour $p<0$ et $m<0$. Tracer $C_{-2}$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
3. En utilisant le I5, montrer que $C_{-1}$ et $C_1$ se correspondent dans une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.
4. Montrer alors que si $m>0$ et $p<0$, $C_p$ est l'image de $C_m$ par un anti- déplacement.
   *Application pratique :* donner l'expression analytique de l'antidéplacement transformant $C_4$ en $C_{-2}$ .

III – Dans cette partie $t$ désigne le temps et $m$ est un paramètre réel. On considère un point mobile $M$ du plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Ses coordonnées sont définies, à partir d'une date $t_0$, positive et supérieure à $m$ par :

$$\begin{cases} x=\mathrm{Log}\,(t-m)\\ y=\mathrm{Log}\, t\end{cases}$$



Retour page 1

1. Trouver la trajectoire du point $M$ ($m$ étant fixé).
2. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant $t$.
3. Montrer que le mouvement est toujours retardé pour tout $m$ réel.
   *Note :* on prendra $0,7$ comme valeur approchée de Log 2 pour la construction des courbes.

# XXXIV. Lille remplacement, série C

**Ex. 1195.** ——— *4 points.* *./1977/lilleCrem/exo-1/texte.tex*

Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et assimilé au plan complexe. Soit P* le plan P privé du point $O$.
On considère l'application $f$de P* vers lui-même, qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ par la relation

$$z'.\overline{z} = a^2.$$

$a$ étant un réel donné non nul, et $\overline{z}$ le conjugué de $z$.

1. Démontrer que l'application $f$ est involutive.
   Quel est l'ensemble des points invariants ?
2. Démontrer que les points $O$, $M$, $M'$ sont alignés et que $OM.OM' = a^2$.
3. Quelles sont les images
   a) des droites passant par $O$ ?
   b) des cercles de centre $O$ ?
   c) de la droite d'équation $x = |a|$ ?

**Ex. 1196.** ——— *3 points.* *./1977/lilleCrem/exo-2/texte.tex*

Pour tout entier naturel $n$ on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_0$.
2. Par une intégration par parties, calculer $I_1$.
3. Montrer que, pour tout entier non nul $n$, on a la relation de récurrence :

$$(3+2n)I_n = 2nI_{n?1}.$$

**Problème 407** *13 points.* *./1977/lilleCrem/pb/texte*

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.

A- Soit $E$ l'ensemble des matrices de la forme $a.M + b.I$ où

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $a$ et $b$ sont des nombres réels arbitraires.

1. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$ et que sa dimension est $2$.
2. Prouver que $M^2 + M?6.I = 0$ où $0$ désigne la matrice nulle.
   En déduire que la multiplication des matrices est une loi interne dans $E$, et que l'addition et la multiplication des matrices munissent $E$ d'une structure d'anneau commutatif et unitaire.



Retour page 1

3. a) Résoudre dans $E$ l'équation

$$X^2 = X.$$

   On trouve quatre solutions : la matrice nulle $0$, la matrice unité $I$ et deux autres $A$ et $B$, que l'on exprimera en fonction de $M$ et de $I$.

   b) Démontrer que $A.B = B.A = 0$.

   c) Démontrer que $(A\ ;\ B)$ est une base de $E$.

4. Résoudre dans $E$ l'équation

$$Y^2 = I.$$

   On trouve ainsi quatre solutions : $I$, $-I$ et deux autres $S$ et $-S$ que l'on exprimera en fonction de $M$ et de $I$.

B- Soit $\pi$ un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On dé- signe par $phi_A$, $\phi_B$, $\phi_S$, $\phi_{-S}$ les endomorphismes de $\pi$, de matrices respectives $A$, $B$, $S$ et $-S$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. Quelle est la nature géométrique de $\phi_A$ et $\phi_B$ ? Démontrer que :

   Image $\phi_A$ = Noyau de $\phi_B$

   et Image $\phi_B$ = Noyau de $\phi_A$.

   Expliquer alors pourquoi le produit $A.B$ est nul.

2. Déduire de A4. que $\phi_S$ et $\phi_{-S}$ sont involutives. Reconnaître les endomorphismes $\phi_S$ et $\phi{-}S$ et préciser leurs éléments caractéristiques.

C- Soit P le plan af?ne euclidien associé à $\pi$, et rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Écrire les équations analytiques des applications affines associées à $\phi_S$ et $\phi_{-S}$ et laissant le point $O$ invariant. On les appelle $f_s$ et $f_{-s}$ . Les reconnaître.

2. Étudier, et représenter graphiquement dans le plan P, les variations de la fonction $g$ :

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{14}\left[-9x + 5\sqrt{x^2+1}\right].$$

   Soit $(C)$ la courbe représentative. Montrer qu'elle admet pour asymptotes les droites d'équation $x + y = 0$ et $2x + 7y = 0$.

3. Soit la fonction $h$ :

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{14}\left[-9x - 5\sqrt{x^2+1}\right]$$

   et $(C')$ sa courbe représentative. En remarquant que $h(-x) = -g(x)$, dites quelle est la transformation qui permet de passer de $(C)$ à $(C')$. Construire alors $(C')$.
   Montrer que l'équation de la courbe $(\Gamma) = (C) \cup (C')$ peut s'écrire :

$$28(2x+7y)(x+y) - 25 = 0.$$

4. Prendre le nouveau repère $(O,\ \vec{i'},\ \vec{j'})$ suivant :

$$\vec{i'} = \vec{i} - \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{j'} = 7\vec{i} - 2\vec{j}.$$

   Trouver l'équation de $(\Gamma)$ dans ce repère et en déduire sa nature géométrique.

5. On transforme la courbe $(\Gamma)$ par $f_s$ et $f_{-s}$ .
   Montrer que $f_s(\Gamma) = f_{-s}(\Gamma)$.
   Soit $(\Gamma')$ la courbe obtenue. Quelle est son équation dans le repère $(O,\ \vec{i'},\ \vec{j'})$ ?
   La reconnaître et la construire.

5.



Retour page 1

# XXXV. Lille remplacement, série E

**Ex. 1197.** ———— *4 points.* *./1977/lilleErem/exo-1/texte.tex*

On considère un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ qui au vecteur $\vec{v}$ de composantes $(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{v'}$ de composantes $(x', y', z')$ tel que

$$x' = \frac{6x-2y-3z}{7}$$

$$y' = \frac{-2x+3y-6z}{7}$$

$$z' = \frac{-3x-6y-2z}{7}$$

**1.** Montrer que $f$ est une isométrie vectorielle.

**2.** Rechercher l'ensemble des vecteurs invariants.

**3.** Rechercher l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés.

**4.** Caractériser l'application $f$.

**Ex. 1198.** ———— *4 points.* *./1977/lilleErem/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit $\omega_p = p(p+1)(2p+1)$, $p$ étant un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence sur $n$ que :

$$\sum_{p=1}^{n} \omega_p = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}.$$

$n$ étant un entier naturel non nul.

**2.** Une urne contient 30 boules. Il y a $n$ boules rouges ($n \geqslant 1$), $(n+1)$ boules blanches, le complément étant constitué de boules vertes.

a. Quelle est la valeur maximale $N$ du nombre de boules rouges dans l'urne ?

b. On effectue le tirage suivant : « On tire une boule, on note sa couleur, on remet la boule dans l'urne, on tire une seconde boule, on note sa couleur, on remet une boule, on tire une troisième boule dont on note la couleur ».

Calculer la probabilité de tirer dans cet ordre une rouge, une blanche, une blanche.

Calculer la probabilité de tirer 1 rouge et 2 blanches, sans tenir compte de l'ordre des tirages.

c. La méthode de tirage étant la même qu'en 2b on désigne par $A_n$, l'événement : « les trois boules tirées sont des deux couleurs : rouge et blanche. »

Calculer la probabilité $P(A_1)$ de l'événement $A_1$, puis la probabilité $P(A_n)$ de l'événement $A_n$ pour $n > 1$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(A_n)$ ( $N$ étant la valeur trouvée au 2a.

**Problème 408** *12 points.* *./1977/lilleErem/pb/texte*

Les questions de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

I – Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

1. Soient :

$f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ : $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x + \sqrt{3}x$

$g$ l'application de $]-\infty;0[$ vers $\mathbb{R}$ : $x \longmapsto g(x) = 2\mathrm{Log}\,(-2x) - \sqrt{3}x$.

Tracer $(C)$ et $(C')$ les courbes représentatives de $f$ et g dans le même repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ en prenant 2 cm comme unité de longueur. On tracera les droites $\Delta$ et $\Delta'$ d'équations $y = f_1(x) = \sqrt{3}x$ et $y = g_1(x) = -\sqrt{3}x$ On montrera que $\Delta$ est asymptote à $(C)$. On placera les points de $(C)$ d'abscisses $-2$, $0$ et $1$ et les points de $(C')$ d'abscisses $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.

Retour page 1

2. Trouver $x_0$ pour que la tangente à $(C)$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ passe par l'origine du repère. Tracer cette tangente. Montrer de même qu'il existe une tangente à $(C')$ passant par $0$ et dont le point de contact avec $(C')$ a pour abscisse $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \left[f(x) - (\mathrm{e} + \sqrt{3}x\right]\,\mathrm{d}x$ et

$$J = \int_{-\frac{\mathrm{e}}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left[\left(-\frac{4}{e} - \sqrt{3}x\right)x - g(x)\right]\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[\left(-\frac{4}{e} - \sqrt{3}x\right)x - g_1(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

On constatera que $I = J$. Hachurer les domaines du plan dont $I$ et $J$ sont les aires.

II – $\mathscr{P}$ étant toujours le plan défini en I et rapporté au repère $\left(O\,,\,\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{e_2}\right)$, soit $S_a$ l'application affine de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x', y')$ tel que

$$x' = -\frac{3a}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}ay$$

$$x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{3a}{2}y$$

où $a$ désigne un nombre réel non nul.

1. Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ calculer $z'$ en fonction de $z$ .
2. Montrer que $S_a$ est une similitude plane directe dont on précisera les éléments. Étudier deux cas suivant le signe de $a$.
3. Soit $r$ l'application $S_a$ correspondant à la valeur $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ de $a$. Quelle est la nature de $r$ ? Écrire l'expression analytique de $r$ et montrer que l'image par $r$ de la courbe $(C)$ définie en **??** est $(C')$.

# XXXVI. Limoges, série C

Ex. 1199. ——— *4 points.* *./1977/limogesC/exo-1/texte.tex*

**1.** Calculer les racines carrées du nombre complexe $2\mathrm{i}$.
Soit $z$ un nombre complexe ; résoudre l'équation (E) :

$$Z^2 - [(3 - \mathrm{i})z + 2\mathrm{i}]\,Z + 2(1 - \mathrm{i})z^2 + (1 + 3\mathrm{i})z - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

où l'inconnue est le nombre complexe $Z$.

**2.** Dans la plan complexe P, on note $m$, $M'$ et $M''$ les images des nombres $z$, $Z'$ et $Z''$, $Z'$ et $Z''$ étant les racines de l'équation (E). On définit ainsi deux applications de P dans P, notées

$$f : m \longmapsto M' = f(m) \quad \text{et} \quad g : m \longmapsto M'' = g(m).$$

Donner la nature géométrique de $f$ et $g$ et préciser leurs éléments caractéristiques.

Ex. 1200. ——— *4 points.* *./1977/limogesC/exo-2/texte.tex*

**1.** Dans le corps des classes résiduelles modulo 7 : $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, dont les éléments seront notés

$$\{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}$$

résoudre l'équation $x = \dot{3}x + \dot{5}$.

**2.** On considère l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ définie par $n \longmapsto u_n$ tel que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dot{3}u_n + \dot{5} \\ u_0 = \dot{2}. \end{cases}$$

On pose $u_n = v_n + \dot{1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
Calculer $u_{1977}$.



Retour page 1

## PROBLÈME 409 *12 points.* ./1977/limogesC/pb/texte

On considère la fonction réelle à variable réelle $f$ définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}.$$

A- 1. Montrer que $f$ est trois fois dérivable et calculer les dérivées successives $f'$, $f'$, $f'''$.

2. Étudier les fonctions $f'$, $f'$, $f'''$ et construire les courbes représentatives.

B- Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ les fonctions telles que

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = -2x \quad ; \quad P_2(x) = 4x^2 - 2 \quad ; \quad P_3(x) = -8x^3 + 12x.$$

a) Montrer que $(P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ est une base de E.

b) Soit $Q$ la fonction polynôme de E définie par $Q(x) = 3 - 10x + 4x^3$.
Quelles sont les coordonnées de $Q$ dans la base précédente ?

c) Calculer les trois nombres

$$A_i = \int_{-1}^{+1} P_i(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec } i \in \{1,\ 2,\ 3\}.$$

d) Soit $\phi$ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall T \in \mathrm{E}, \qquad \phi(T) = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\phi$ est une application linéaire.

On pose $A = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer $A$.

Calculer en fonction de $A$ le nombre

$$B = \int_{-1}^{+1} Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si $T$ est un élément de E, calculer en fonction de $A$ :

$$C = \int_{-1}^{+1} T(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer la nombre de $\phi$ en fonction de $A$.

C- Soit P un plan affine rapporté à un repère orthonormé.
Soit $M$ un point de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$ animé d'un mouvement défini par :

$$x(t) = f(t) \qquad ; \qquad y(t) = f'(t) \qquad \text{avec } t \geqslant 0.$$

a) Déterminer l'équation de la trajectoire et la construire en précisant le sens de parcours.

b) Quels sont les vecteurs vitesse t accélération à l'instant $t$ ? Pour $t_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, construire le représentant de ces vecteurs d'origine $M_0$.

c) Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire, le mouvement est accéléré ou retardé.
On donne $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6065$ et $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}2231$.



Retour page 1

# XXXVII. Limoges remplacement, série C

**Ex. 1201.** ———— *4 points.* *./1977/limogesCrem/exo-1/texte.tex*

Pour tout réel donné a strictement positif, on considère la fonction $f_a$ de variable réelle $x$, définie par :

$$f_a(x) = \log(a - e^x).$$

On appelle $C_a$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et $D_a$ son domaine de définition.

**1.** Étudier $f_a$ construire sa courbe représentative $f_a$ et déterminer l'ensemble image $f_a(D_a)$.

**2.** Montrer que $f_a$ est une bijection de $D_a$ sur $f_a(D_a)$. Déterminer son application réciproque, en déduire que $C_a$ possède un axe de symétrie.

**3.** $b$ étant un réel strictement positif, montrer que $C_b$ se déduit de $C_a$ par une translation qu'on précisera.

: $\log$ désigne le logarithme népérien.

**Ex. 1202.** ———— *3 points.* *./1977/limogesCrem/exo-2/texte.tex*

$b$ est un entier naturel donné strictement supérieur à 1. On rappelle que

$$b^2?1 = (b+1)(b?1).$$

**1.** Quel est le plus grand diviseur commun de $b^2$ et $(b?1)$ ?

**2.** Quel est l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$b^2x + (b?1)y = 1 \text{ ?}$$

**3.** *Application numérique* : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$9x + 2y = 1.$$

## Problème 410 *13 points.* *./1977/limogesCrem/pb/texte*

A- Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont des nombres réels,

1. Démontrer que $E$ muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En donner une base.
2. Démontrer que $E$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices a une structure d'anneau. Est-ce un corps ?
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un élément de $E$. Définir, suivant les valeurs de $a$ et $b$, le noyau et l'image de $f$. $f$ peut-il être involutif ? Dans ce cas, préciser la nature de $f$.

B- On suppose, dans toute la suite, $a = 1$ et $b = 0$. Soit $P$ le plan affine euclidien associé à $\mathscr{P}$, rapporté au repère cartésien orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ Soit $F$ l'application affine de $P$, associé à $f$, laissant le point $I$de coordonnées $(1~;~2)$ invariant.

1. Tout point $M$ de $P$, de coordonnées $(x~;~y)$ a pour image par $F$le point $M'$ de de coordonnées $(x'~;~y')$. Exprimer les coordonnées $(x'~;~y')$ de $M'$ en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de $M$.
2. Á tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ de $P$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ ($z$ affixe de $M$). Si $z$ est l'affixe de $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$, montrer que :

$$z' = (1+i)\overline{z} - 2 + 3i.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$). Donner la nature et les caractéristiques de l'application affine $F$ .



Retour page 1

3. Soit $S$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d'équation

$$y = (1-\sqrt{2})x+1.$$

Quelle relation lie les affixes d'un point $M$ et de son symétrique $N$ ?
Préciser la nature de l'application affine $G = S \circ F$ ; en donner les caractéristiques.

4. Soit la famille de courbes $(C_m)$ définie par l'équation

$$y^2 = m^2x^2 - 2x + 1.$$

où $m$ est un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de $m$ la nature des courbes $(C_m)$.
Construire la courbe correspondant à $m = \frac{1}{2}$ et son image par $G$.

## XXXVIII. Lyon, série C

**Ex. 1203.** ——— *5 points.* *./1977/lyonC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

e représentant la base des logarithmes népériens.

**1.** Étudier $f$ et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

**2.** Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

où $\lambda$ est un nombre réel strictement positif. Quelle est la limite de cette aire lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 1204.** ——— *3 points.* *./1977/lyonC/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5\,440 \\ \mathrm{pgcd}(x,\ y) = 8 \end{cases}$$

**PROBLÈME 411** *12 points.* *./1977/lyonC/pb/texte*

Dans un plan affine euclidien orienté $P$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application affine $f_h$laissant invariant le point $O$ et dont l'endomorphisme associé est $\varphi_h$ de matrice $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 1 & h \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, $h$ étant un réel donné.

I- 1. Si $M$ est un point de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M_1 = f_h(M)$ de coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, montrer que

$$\begin{cases} x_1 = hx \\ y_1 = x + hy. \end{cases}$$

Déterminer les points invariants de$f_h$.
L'application $f_h$ est-elle bijective ?

2. On considère l'application $f_0$ correspondant à $h = 0$ et $\Delta$ la droite d'équation $y = x$. Montrer qu'il existe une application $g$ de $P$ dans $P$ telle que $f_0 = g \circ S_\Delta$ où $S_\Delta$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta$ et caractériser $g$.



Retour page 1

3. On suppose $h \neq 0$ dans toute la suite du problème.
   Caractériser $f_{-h} \circ f_h$.
   Soit $D_1$ la droite d'équation $y = -x$ et $D_2$ la droite d'équation $y = 0$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $S_1$ la symétrie orthogonale par rapport à $D_1$ et $S_2$ la symétrie orthogonale par rapport à $D_2$. Déterminer géométriquement la nature de l'application $T = S_2 \circ S_1 \circ f_{-h} \circ f_h$ puis en préciser la caractérisation.
4. Si $S_y$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O, \vec{j})$ et si $S_\Delta$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$, soit :
$$U = f_h \circ S_y \circ f_h \circ S_\Delta.$$
   Calculer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point $M$, les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de son image $U(M)$.
   Soit $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe de $M$ et $Z = X + \mathrm{i}Y$ celle de $U(M)$. Calculer $Z$ en fonction de $z$. En déduire la nature de $U$ et préciser sa caractérisation.

II- On considère l'application $f_1$ correspondant à $h = 1$. On a donc
$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x + y. \end{cases}$$

1. Soit $M$ un point de $P$ n'appartenant pas à la droite $(O, \vec{j})$, soit $H$ sa projection sur la droite $(O, \vec{j})$, et soit $M_1 = f_1(M)$. Déterminer les directions des droites $HM_1$ et $MM_1$ et en déduire une construction simple de $M_1$ connaissant $M$.
2. Soit $\mathscr{H}$ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 9$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer la nature de $\mathscr{H}$ et construire $\mathscr{H}$.
3. Déterminer l'équation de la courbe $\mathscr{H}_1$ image de $\mathscr{H}$ par $f_1$. Mettre cette équation sous la forme $x = F(y)$ où $F$ est une fonction que l'on déterminera. En déduire les asymptotes de $\mathscr{H}_1$
   Vérifier que ces asymptotes ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{k}$.
   Déterminer l'équation de $\mathscr{H}_1$ dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{k})$. Reconnaître la nature de $\mathscr{H}_1$. Construire $\mathscr{H}_1$ sur le même dessin que $\mathscr{H}$.

III- Soit $M_0$ un point donné de $P$,
$$M_1 = f_h(M_0),\ M_2 = f_h(M_1),\ \ldots,\ M_n = f_h(M_{n?1})$$
pour tout entier naturel $n$. On notera $(x_0\ ;\ y_0)$ les coordonnées de $M_0$, $(x_1\ ;\ y_1)$ celles de $M_1$, $\ldots$, $(x_n\ ;\ y_n)$ celles de $M_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a
$$\begin{cases} x_n = h^n x_0 \\ y_n = nh^{n-1}x_0 + h^n y_0. \end{cases}$$
   Montrer que si $x_0 > 0,\ h > 0$ et $h \neq 1$, on a :
$$y_n = x_n(\alpha \log x_n + \beta)$$
   où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes indépendantes de $n$ que l'on calculera en fonction de $h$, $x_0$ et $y_0$ ($\log x_n$ représente le logarithme népérien de $x_n$).
2. On suppose $x_0 > 0,\ h > 0$ et $h \neq 1$. Que faut-il imposer de plus à $h$ pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Dans ces conditions trouver la limite de cette suite et montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et trouver sa limite.



Retour page 1

# XXXIX. Lyon, série E

**Ex. 1205.** 4 points. ./1977/lyonE/exo-1/texte.tex

**1.** Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos^3 x \sin^2 x = -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x.$$

**2.** Calculer le nombre réel $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

**Ex. 1206.** 4 points. ./1977/lyonE/exo-2/texte.tex

$z$ désigne un nombre complexe et $\overline{z}$ son conjugué. On appelle $M$ le point d'affixe $z$ du plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désigne par F l'ensemble des points $M$ de P tels que $\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+4+\mathrm{i}}$ soit imaginaire pur.

Montrer que F est inclus dans une conique que l'on tracera.

## Problème 412 12 points. ./1977/lyonE/pb/texte

E désigne un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2$ (l'unité étant le centimètre).

A- $m$ étant un paramètre réel, $\mathscr{C}_m$ est la courbe représentative dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_m(x) = mx + \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

1. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un même point que l'on déterminera. Étudier les variations de $f_m$ (on discutera suivant les valeurs de $m$ en distinguant $m > 0$, $m = 0$ et $m < 0$).
2. On suppose dans cette question $m > 0$. Montrer que $f_m$ est bijective. On appelle $f_m^{-1}$ la bijection réciproque de $f_m$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ? Calculer la dérivée de $f_m^{-1}$ en $1$ : $f_m^{-1}(1)$.
3. On suppose dans toute la suite $m = -1$. Tracer avec soin $\mathscr{C}_{-1}$. On appelle $\Delta$ l'asymptote de $\mathscr{C}_{-1}$ et $B$ le point de coordonnées $(0 ; 1)$.
4. $\lambda$ étant un réel négatif, calculer en centimètres carrés, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_{-1}$,$\Delta$te les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

B- $g$ est l'application de E vers E qui au point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x' ; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2. \end{cases}$$

1. Prouver que $g$ est une application affine. Écrire la matrice $P$ de l'endomorphisme associé à $g$. Calculer $P^2$.
2. Démontrer que $g \circ g$ est une translation. On appellera $\vec{u}$ le vecteur de cette translation. et $t$ la translation de vecteur $\dfrac{\vec{u}}{2}$.
   Reconnaître et caractériser l'application $s$ telle que $g = t \circ s$. Prouver que $g = s \circ t$.
   En déduire une construction géométrique de $M'$ connaissant $M$.
3. On considère la suite de points définis par
   $$M_0 = O \qquad \text{et} \qquad M_n = g(M_{n-1}) \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}^\star.$$
   Montrer que les points $M_{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$ appartiennent à une même droite. que dire des points $M_{2k+1}$ ?
4. Quelles sont les images par $g$ de la droite d'équation $x = 0$ et de $\Delta$ ?

C- 1. Montrer que l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}_{-1}$ par $g$ a pour équation :

$$y = -x + 2 + \log x \qquad (\log \text{ désignant le logarithme népérien}).$$

2. Tracer $\mathscr{C}'$ dans le repère initial $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Existe-t-il des tangentes à cette courbe passant par $O$ ?

## XL. Lyon, série C remplacement

**Ex. 1207.** —— *5 points.* *./1977/lyonC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

$\mathrm{e}$ représentant la base des logarithmes népériens.

**1.** Étudier $f$ et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

**2.** Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

où $\lambda$ est un nombre réel strictement positif. Quelle est la limite de cette aire lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 1208.** —— *3 points.* *./1977/lyonC/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \quad x^2 - y^2 = 5\,440 \\ \text{pgcd}(x,\ y) = 8 \end{cases}$$

**Problème 413** *12 points.* *./1977/lyonCrem/pb-1/texte*

Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre.

I- Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de sa structure d'anneau unitaire.

1. On considère la matrice J=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer son carré.
2. On désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble F des matrices de la forme $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels.
   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$ et que (I, J) est une base de F.
   b) Montrer que F est stable pour le multiplication dans $\mathscr{M}$ et en déduire que F est un anneau commutatif et unitaire. Cet anneau est-il un corps ?

II- On appelle $\psi$ l'application de F dans $\mathbb{C}$ qui, à toute matrice $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ de F, associe le nombre complexe $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

1. a) Montrer que $\psi$ est un isomorphisme de (F, +) sur $(\mathbb{C},\ +)$.
   b) L'application $\psi$ est-elle un isomorphisme de (F, $\times$) sur $(\mathbb{C},\ \times)$ ?
2. Aux deux nombres complexes $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z' = \alpha' + \mathrm{i}\beta'$, l'application $\psi^{-1}$ fait correspondre les deux matrices $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ et $A' = \alpha'\mathrm{I} + \beta'\mathrm{J}$. On considère la loi de composition interne dans $\mathbb{C}$, notée $\star$, et définie par :

$$z \star z' = \psi(A \times A').$$

   a) Exprimer $(\alpha + \mathrm{i}\beta) \star (\alpha' + \mathrm{i}\beta')$.



Retour page 1

b) Quelle est la restriction de la loi $\star$ à $\mathbb{R}$ ?
Quelle est la restriction de la loi $\star$ à l'ensemble des imaginaires purs ?

3. Étant donné un nombre complexe $z$, on note $z^{(0)} = 1$, $z^{(1)} = z$ et $z^{(n)} = z^{(n-1)} \star z$ pour tout entier naturel non nul $n$.

a) Calculer $i^{(2)}$ puis $i^{(n)}$ pour $n > 2$. En posant $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, démontrer que $z^{(n)} = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta\mathrm{i}$ pour $n \geqslant 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^{(2)} = 1 \quad z^{(3)} = 1\ ; \quad z^{(n)} = 1 \quad z^{(2)} - z - \mathrm{i} = 0$.

4. Dans le plan complexe on considère le point $\mathrm{M}_1$ d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ et les points $\mathrm{M}_2$, $\mathrm{M}_3, \dots,$ $\mathrm{M}_n$ d'affixes respectives $z_2 = z_1^{(2)}$, $z_3 = z_1^{(3)}$, $\dots, z_n = z_1^{(n)}$.
Calculer les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $\mathrm{M}_n$.
Trouver les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III- Soit P le plan vectoriel euclidien orienté de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit $f$ l'endomorphisme de P de matrice $A = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ et soit $\varphi$ l'endomorphisme de matrice J.

1. a) Á quelle condition $f$ est-il un automorphisme de P ?

b) Quel est le noyau de $\varphi$ ? Quelle est l'image de $\varphi$ ?

2. a) Soit $\rho$ la rotation vectorielle de P dont la mesure (élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) admet pour représentant $\dfrac{\pi}{4}$.
On considère les vecteurs $\vec{i_1} = \rho(\vec{i})$ et $\vec{j_1} = \rho(\vec{j})$ qui forment donc une base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ orthonormée directe. Exprimer $\vec{i_1}$ et $\vec{j_1}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Démontrer que la matrice de $f$ dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}$.
En déduire la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$. Soit $\vec{V} = x\vec{i_1} + y\vec{j_1}$. Quelles sont les composantes du vecteur $\varphi(\vec{V})$ dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ ?

c) Démontrer qu'il existe une homothétie vectorielle $h$, une rotation $r$ et un projecteur $p$ tels que $\varphi = h \circ r \circ p$.

# XLI. Lyon remplacement, série E

**Ex. 1209.** ———— *4 points.* *./1977/lyonErem/exo-1/texte.tex*

Étudier le mouvement plan du point $M$ défini dans un repère orthonormé par les coordonnées du point $M$ en fonction de la date $t$

$$M : \begin{cases} x = a(\cos t - \sin t) \\ y = b(\cos t + \sin t) \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels positifs non nuls.}$$

**1.** Déterminer le support de la trajectoire du point $M$.

**2.** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ et la période du mouvement.

**Ex. 1210.** ———— *4 points.* *./1977/lyonErem/exo-2/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$|2 + x| + 2 + 2x = x^2.$$

**2.** Résoudre ensuite les équations suivantes :

a) $|2 + \operatorname{Log} x| + 2 + 2\operatorname{Log} = (\operatorname{Log} x)^2$..

b) $|2 + \mathrm{e}^{-x}| + 2\mathrm{e}^{-x} + 2 = \mathrm{e}^x$.

N.B. $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de $x$, c'est-à-dire le logarithme dans la base e de $x$.

**PROBLÈME 414** *12 points.* *./1977/lyonErem/pb/texte*

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ décrit par la matrice de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}$ quand $(\alpha, \beta)$ décrit $\mathbb{R}^2$ .

I – 1. $\mathscr{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$

2. Démontrer que $\mathscr{F}$ est stable pour la multiplication des matrices.

II – Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $B = (\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $B$ est $F = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $\beta$, $f$ est-il un endomorphisme de $\mathscr{P}$ ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et de $\beta$, $f$ est-il une homothétie vectorielle de $\mathscr{P}$ ?
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et de $\beta$, $f$ est-il une isométrie vectorielle de $\mathscr{P}$ ? Préciser, pour chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques des isométries vectorielles obtenues.
4. $\alpha$ et $\beta$ sont quelconques. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha$ et $\beta$, l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ .

III – Soit $P$ un plan affine associé à $\mathscr{P}$ muni du repère $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$. On suppose $\alpha = 2$ et $\beta = 2$. Soit $g$ l'application affine laissant 0 invariant et dont l'endomorphisme dans la base $B$ a pour matrice $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

À tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$, $g$ fait correspondre $M'$ de coordonnées $(x', y')$

1. Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ est inclus dans une droite vectorielle.
3. Montrer que le barycentre $G$ des points $M$ et $M'$ affectés respectivement des coefficients $-2$ et $1$ appartient à la droite $(\ O\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.
4. Déduire des questions III2. et III3. une construction géométrique de l'image $M'$ d'un point $M$ (une figure est indispensable).

IV – 1. Étudier et représenter graphiquement la courbe $(C)$ représentative de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $y = h(x) = \dfrac{-x^2+1}{x}$.

2. Soit $(\ O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ le repère défini par $\begin{matrix}\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}\\ \vec{v} = \vec{\jmath}.\end{matrix}$ Un point $M$ a pour coordonnées $(x, y)$ dans le repère $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$ et pour coordonnées $(X, Y)$ dans le repère $(\ O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.

a. Montrer que l'on peut trouver une matrice $F$ de $\mathscr{F}$ telle que

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

b. Quelle est l'équation de $(C)$ dans le repère $(\ O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ ? Quelle est la nature de $(C)$ ?

## XLII. Madagascar, série C

Ex. 1211. ______ . *./1977/madagascarC/exo-1/texte.tex*

**1.** On considère la matrice $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

On pose $A^0 = I$ (matrice unité d'ordre 2), et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^{n+1} = A^n A.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $\alpha_n$ et $\beta_n$ tels que

$$A^n = \begin{bmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \beta_n & \alpha_n\end{bmatrix}$$

Exprimer $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ et $\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n$ et $\beta_n$. En déduire des expressions de $\alpha_n$ et $\beta_n$ en fonction de $n$.

**2.** Soit $u$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ est donné ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\beta_n + \alpha_n}$. Expliciter $u_n$ en fonction de $u_0$ et de $n$. En déduire que la suite $u$ admet une limite, que l'on précisera.

Ex. 1212. ./1977/madagascarC/exo-2/texte.tex

Dans un espace affine euclidien de dimension 3, on donne trois droites $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ n'appartenant pas à une même direction. Pour $i \in \{1,2,3\}$ on désigne par $( O_i \ , \ \overrightarrow{u_i} \ )$ un repère normé de $\Delta_i, (O_i, \in \Delta_i;\ \|u\| = 1)$. On se propose de montrer qu'il existe trois points

$$A_1 \in \Delta_1, \quad A2 \in \Delta_2, A_3 \in \Delta_3$$

tels que les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$, soient respectivement orthogonaux à $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_1}$.

**1.** À tout point $M_1$ de $\Delta_1$ on associe successivement la projection orthogonale $M_2$ de $M_1$ sur $\Delta_2$, la projection orthogonale $M_3$ de $M_2$ sur $\Delta_2$, et enfin la projection orthogonale $M_1'$ de $M_3$ sur $\Delta_l$.
On pose

$$\overrightarrow{O_iM_i} = x_i\overrightarrow{u_i}, i \in \{1,2,3\}; \overrightarrow{O_1M_1'} = x_1'\overrightarrow{u_1}.$$

Montrer que $x_1$ et $x_2$ sont liés par une relation de la forme

$$x_2 = a_1x_1 + b_1,$$

où $a_1$ et $b_1$ sont des constantes ($a_1$ s'exprime simplement en fonction de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, et vérifie $|a_1| \leqslant 1$).
En déduire que $x_1$ et $x_1'$ sont liés par une relation de la forme

$$x_1' = ax_1 + b, \quad \text{avec} \quad |a| < 1.$$

**2.** Conclure.

## Problème 415

./1977/madagascarC/pb/texte

1. On considère l'application

$$\varphi \ : \ t \longmapsto \sin t - t + \frac{t^3}{6} \quad \text{de } [\ 0 \ , \ +\infty \ [ \ \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Dresser un tableau donnant les variations de $\varphi''$, $\varphi'$ et $\varphi$. En déduire

$$(\forall t \in [\ 0 \ , \ +\infty \ [) \quad t - \frac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t. \tag{XIX.4}$$

(Le candidat pourra utiliser la formule (XIX.4), même s'il ne l'a pas justifiée.)

2. À tout réel $x$, on associe l'application $f_x$ de $\left[\ 0 \ , \ \frac{\pi}{2}\ \right]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par $t \longmapsto \cos(x \sin t)$. On désigne par $\Gamma_x$ la représentation graphique de $f_x$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 4 cm) : Étudier $f_x$ (continuité, dérivabilité, sens de variation, construction de $\Gamma_x$) pour les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ de $x$.
Dans les questions suivantes on ne cherchera pas à calculer les primitives des fonctions $f_x$.

3. À tout réel $x$ on associe l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(xsint)\,\mathrm{d}t.$$

On se propose d'étudier l'application $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie.
a. Montrer que, pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$F(x+h) - F(x) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right) \cdot \sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin t\right))\,\mathrm{d}t \tag{XIX.5}$$

$$\left|\sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right) \cdot \sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin t\right))\right| \leqslant \frac{|h|}{2}. \tag{XIX.6}$$

et

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \frac{\pi|h|}{2}. \tag{XIX.7}$$



Retour page 1

b. Déduire de 3a que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ et monotone sur $[\,0\,,\,\pi\,]$.

c. Soit $x$ un réel donné. Pour tout réel non nul $h$, on pose

$$\Delta(h)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t.\sin\left(\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin t\right)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant les inégalités (que l'on justifiera)

$$\left|\sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right)-\frac{h}{2}\sin t\right|\leqslant\frac{|h|^3}{48}|\sin^3 t|\leqslant\frac{|h|^3}{48},$$

vérifier $\Delta(h)\leqslant\frac{|h|^3}{48}$. En déduire $\lim\limits_{h\to 0}\Delta(h)=0$ Montrer que $F$ est dérivable au point $x$.

4. On se propose de trouver un encadrement du réel $F(\pi)$. On écrit $F(\pi)=I+J$, avec

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t$$

On désigne par $A$, $B$, $C$ les points d'abscisses $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}$ de la courbe $(\Gamma_\pi)$.

a. Par des considérations d'aires, montrer

$$0<I<\frac{\pi}{6}.$$

b. Soit $g\ :\ t\longmapsto at+b$ la fonction affine qui est représentée par la droite $BC$. On pose $h=g-f_x$.
Vérifier que

$$\left(\forall t\in\left[\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\,\right]\right)\qquad h''(t)\leqslant 0$$

et que

$$h'\left(\frac{\pi}{6}\right)>0,\qquad h'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0.$$

En déduire

$$\left(\forall t\in\left[\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\,\right]\right)\qquad h(t)\geqslant 0$$

Par des considérations d'aires, montrer

$$-\frac{\pi}{3}<I<-\frac{\pi}{6}.$$

c. Conclure, et représenter graphiquement les variations de la restriction de $F$ à $[0,\pi]$.

## XLIII. Maroc, série C

Ex. 1213. ________ *6 points.* *./1977/marocC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{|\log x|} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction $f$.
2. Étudier les variations de la fonction $f$. On sera amené à calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\ ;\ \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)\ ;\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right).$$

3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Retour page 1

**Ex. 1214.** *3 points.* ./1977/marocC/exo-2/texte.tex

1. Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18 360.
2. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{N}$,la résolution de l'équation, (d'inconnue $b$) $b^3\left[b^2+(b+1)^2\right]=18\ 360$.
3. Existe-t-il un nombre $b$ tel que le nombre qui s'écrit 36 723 dans le système décimal s'écrive 442 003 dans le système de numération à base $b$?

## Problème 416 *11 points.*

./1977/marocC/pb/texte

A- Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application affine $S_1$ de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\begin{cases} x'=-3x+\sqrt{3}y\\ y'=-\sqrt{3}x+3y. \end{cases}$$

1. a) Soit les nombres complexes $z$ et $z'$ affixes des points $M$ et $M'$ ($z=x+\mathrm{i}y$ et $z'=x'+\mathrm{i}y'$) . Exprimer $z'$ en fonction de $z$.
   b) Préciser la nature de l'application $S_1$ et ses éléments caractéristiques.
2. On considère la suite de points :
   $$P_0(1\ ;\ 0)\ ;\ P_1=S_(P_0)\ ;\ P_2=S_1(P_1)\ ;\ \dots\ ;\ P_n=S_1(P_{n-1})$$
   Les coordonnées de $P_n$ étant notées $(\alpha_n\ ;\ \beta_n)$.
   a) Quelle est la nature de l'application qui transforme $P_0$ en $P_n$?
   b) Déterminer $\alpha_n$ et $\beta_n$ en fonction de $n$.
3. Soit (C) la courbe d'équation :$x^2-y^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}xy-1=0$.
   Déterminer une équation de la courbe (C') transformée par $S_1$ de la courbe (C ). Quelle est la nature de (C')?

B- Soit $S$ l'application de P dans P qui au point $N(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $N'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x'=\alpha-\beta y+a\\ y'=\beta x+\alpha y+b \end{cases}$$

$\alpha,\beta,\ a,\ b$étant quatre réels.

1. a) Á quelle condition $S$ est-elle une similitude? Préciser dans ce cas son rapport et son angle.
   b) On considère la suite de points
   $$A_0(u_0\ ;\ v_0)\ ;\ A_1=S(A_0)\ ;\ \dots\ ;\ A_n=S(A_{n-1})\qquad \text{avec } u_0\neq 0.$$
   Les coordonnées de $A_n$ sont notées $(u_n\ ;\ v_n)$. On définit ainsi deux suites $(u)$ et $(v)$. Démontrer :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad u_{n-1}-u_n=\alpha(u_n-u_{n-1})-\beta(v_n-v_{n-1}).$$
2. Dans cette question, on pose $\beta=0$ .Soit la suite $(\omega)$ définie par :
   $$\forall n\ in\mathbb{N},\qquad \omega_n=u_{n+1}-u_n.$$
   a) Vérifier que $(w)$ est une suite géométrique.
   b) Écrire $u_n$ en fonction de $n,\ u_0$ et $a$. On pourra calculer
   $$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i.$$
   c) Pour quelles valeurs de $\alpha$ la suite $(u)$ est-elle convergente? Quelle est alors sa limite?
3. Dans cette question $\beta=a=0.$.
   a) Discuter la nature de l'application $S$, suivant les valeurs de $\alpha$.
   b) Déterminer dans ces différents cas les coordonnées de l'isobarycentre $G_n$ des points $A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_{n-1}$.
   c) Étudier la limite du vecteur $\overrightarrow{OG_n}$ lorsque $n$tend vers $+\infty$, suivant les valeurs de $\alpha$.

Retour page 1

# XLIV. Maroc, série E

**Ex. 1215.** ——— *5 points.* *./1977/marocE/exo-1/texte.tex*

Soit $a$ et $b$ deux réels et $f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$$

**1.** Étudier la limite de $f$ quand $x$ tend vers moins l'infini (discuter suivant les valeurs de a).

**2.** Déterminer $a$ et $b$ pour que la représentation graphique $(C)$ de $f$ admette pour asymptote, quand $x$ tend vers moins l'infini, la droite $(D)$ d'équation

$$2x - y + 2 = 0.$$

**Ex. 1216.** ——— *4 points.* *./1977/marocE/exo-2/texte.tex*

Soit la fonction numérique $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : $x \longmapsto y = \text{Log}\left(x^{\frac{3}{4}} - 1\right)$(Log : logarithme népérien).

**1.** Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$ . (Unité : 2cm) . On précisera le point A d'intersection de $(C)$ avec l'axe $x'Ox$ et on construira la tangente à $(C)$ en ce point.

**2.** Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $g$. Préciser son ensemble de définition. Expliciter $g(y)$ pour tout élément $y$ de cet ensemble.

## Problème 417 *11 points.* *./1977/marocE/pb/texte*

$\mathcal{V}$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ; $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$. On notera $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ . Sur $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ on considère les trois lois suivantes :

$$\begin{array}{lcc}
\forall x \in \mathcal{V}, \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{V}), \forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) & (f+g)(x) = & f(x)+g(x) \\
\forall x \in \mathcal{V}, \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{V}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} & (\alpha f)(x) = & \alpha f(x) \\
\forall x \in \mathcal{V}, \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{V}), \forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) & f \circ g(x) = & f(g(x))
\end{array}$$

($\mathcal{L}(\mathcal{V})$ muni des deux premières lois est alors un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) .

I – Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ défini par

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{\imath}) &= \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k} \\
f(\overrightarrow{\jmath}) &= \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k} \\
f\left(\overrightarrow{k}\right) &= \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}
\end{aligned}$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme bijectif.
2. Montrer que la droite vectorielle $\mathscr{D}$ engendrée par $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$ est stable par $f$ et déterminer la restriction $f_1$ de $f$ à $\mathscr{D}$.
3. Montrer que le plan vectoriel $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ est stable par $f$ et déterminer la restriction $f_2$ de $f$ à $\mathscr{P}$.
4. On pose $f^2 = f \circ f, f^3 = f^2 \circ f, \ldots, f^n = f^{n-1} \circ f$ On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
   a. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ , $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont stables par $f^n$ et préciser les restrictions de $f^n$ à chacun de ces sous-espaces vectoriels. En déduire que l'on peut écrire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = 2^n p + (-1)^n (I - p)$$

   où $p$ désigne la projection vectorielle orthogonale sur et $I$ l'application identique dans $\mathcal{V}$.

   b. Calculer, en fonction des coordonnées $(x, y, z)$ d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$, les coordonnées $(x', y', z')$ du vecteur $p(\overrightarrow{u})$. En déduire que les coordonnées $(x_n, y_n, z_n)$ du vecteur $f^n(\overrightarrow{u})$ peuvent se mettre sous la forme :

   $$\begin{aligned}
   x_n &= a_n(x+y+z) + (-1)^n x \\
   y_n &= a_n(x+y+z) + (-1)^n y \\
   z_n &= a_n(x+y+z) + (-1)^n z
   \end{aligned}$$

   Calculer $a_n$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n \in \mathbb{N}$.



Retour page 1

II – Soit $g$ l'endomorphisme de défini par :

$$\begin{aligned} g(\vec{\imath}) &= -\vec{\jmath} + \vec{k} \\ g(\vec{\jmath}) &= \vec{\imath} - \vec{k} \\ g\left(\vec{k}\right) &= -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau de $g$.
2. Démontrer que l'image de $g$ est le plan vectoriel dont une équation cartésienne dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est : $x+y+z=0$.
3. On pose :
$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\jmath} - \vec{k}\right), \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right), \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right)$$
   a. Montrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.
   b. Déterminer $g\left(\vec{I}\right)$ et $g\left(\vec{J}\right)$ et montrer que la restriction $g_2$ de $g$ à l'image de $g$ est la composée d'une homothétie de rapport positif et et d'une isométrie dont on précisera la nature.
   c. Décrire $g$

## XLV. Montpellier, série C

**Ex. 1217.** *5 points.* *./1977/montpellierC/exo-1/texte.tex*

Soit $E$ Un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle $(x\ ;\ y)$ les coordonnées d'un point $M$ dans ce repère. Soit $P = \left\{M \in E / \quad x^2 - 2y = 0\right\}$.

1. Vérifier que $\vec{T} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à $P$ au point $\Omega$ d'abscisse $\lambda$. Montrer que pour tout $\lambda$, $(\vec{T}, \vec{j})$ forme un système libre.
2. Déterminer, en fonction de $\lambda$ et des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point $M$ les coordonnées $xyp$ du point $M'$ image de $M$ par la symétrie oblique $f_\lambda$ d'axe $\mathscr{D}(\Omega, \vec{j})$ et de direction $\vec{T}$.
3. Montrer que $f_\lambda(P) = P$.

**Ex. 1218.** *3 points.* *./1977/montpellierC/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ :

**1.** l'équation $3x \equiv 1 \pmod 5$

**2.** l'équation $5x \equiv 2 \pmod 7$

**3.** le système formé par les deux équations précédentes.

**PROBLÈME 418** *12 points.* *./1977/montpellierC/pb/texte*

(le 3. peut être traité indépendamment des autres questions).

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
   Étudier $f$ et tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Vérifier que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ :
$$f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^x$$
$$[f(x)]^2 - \left[f'(x)\right]^2 = 1.$$
2. Soit $M$ un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x_0$. ($x_0 \in \mathbb{R}_+^\star$).
   Soit $m$ le point de coordonnées $(x_0\ ;\ 0)$ et $P$ la projection orthogonale de $m$ sur la droite $\Delta$ tangente en $M$ à $\mathscr{C}$.
   Déterminer en fonction de $x_0$ les coordonnées de $P$ et vérifier que ces coordonnées peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} X = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \\ Y = \dfrac{1}{f(x_0)}. \end{cases}$$

Calculer $\left\|\overrightarrow{mP}\right\|$.

3.
4. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \log\left[\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right] - \sqrt{1-x^2}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $F$ et montrer que :

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

b) EÉtudier $F$ et tracer la représentation graphique $\Gamma$ de $F$dans le plan $P$ rapporté au même repère. Montrer que $F$ admet une fonction réciproque $F^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ (on ne demande pas de déterminer $F^{-1}$).
Construire la représentation graphique $T$ de $F^{-1}$ sur la même figure.

5. a) Montrer que le point $P$ est sur la courbe $T$. (on pourra utiliser le 1.).
b) Montrer que $m$ appartient à la tangente en P à la courbe $T$.

## XLVI. Montpellier remplacement, série C

**Ex. 1219.** ——— *5 points.* *./1977/montpellierCrem/exo-1/texte.tex*

Soit l'équation : $e^x - 2e^{-x} = m$ ($m \in \mathbb{R}$, e est la base des logarithmes népériens.)

1. Exprimer $x$ en fonction de $m$.
2. Pour $m = \dfrac{1}{2}$, calculer la valeur approchée de $x$ avec la précision donnée par la table de logarithmes.

**Ex. 1220.** ——— *3 points.* *./1977/montpellierCrem/exo-2/texte.tex*

$\mathscr{P}$ est la plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les applications :

$$\begin{aligned} f' : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'' : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M'' \end{aligned}$$

où $M$, $M'$ et $M''$ ont respectivement pour affixes $z$, $z'$ et $z''$ avec :

$$z' = (2-2\mathrm{i})z + 1$$

$$z'' = (2+2\mathrm{i})\overline{z} + 1.$$

1. Reconnaître $f'$ et $f''$ et trouver leurs éléments caractéristiques.
2. Calculer $\overline{z'}$ et comparer $\overline{z'}$ et $z''$, en déduire que $f'' = s \circ f'$ où $s$ désigne la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite de repère $\oint$.
3. a) Construire la courbe $(\Gamma)$ d'équation $4x^2 - 4y^2 = 1$.
b) Déterminer les équations cartésiennes de $f'(\Gamma)$ et $f''(\Gamma)$.

## 🏛Problème 419 *12 points.* 

./1977/montpellierCrem/pb/texte

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2+3x+6}{2x-4}$$

1. Montrer qu'existent $a,\ b,\ c$ réels tels que, pour tout $x$ différent de 2 :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{2x-4}.$$

2. Étudier la fonction $f$, construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que C admet une asymptote oblique et un centre de symétrie $\omega$.
3. Déterminer l'équation $Y = F(X)$ de la courbe C dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Montrer que le produit $XY$ des coordonnées d'un point de C par rapport au repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$, est supérieur à 8.
   b) Discuter, selon les valeurs du paramètre $t$, l'intersection de la droite $D_t$ d'équation $Y = tX$ et de la courbe C. Exprimer en fonction de $t$ les coor- données $(X\ ;\ Y)$ des points d'intersection quand ils existent.
   Retrouver en étudiant les variations de la fonction $t \longmapsto XY$ le résultat du 3a.
4. $\mathscr{H}$ désigne la courbe qui a pour équation $y = \dfrac{8}{x-2}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $v_n$ l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équations $x = 6$, $x = 6+n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ et les courbes C et $\mathscr{H}$.
   a) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   b) Montrer que la somme des carrés des $n$ premiers entiers naturels non nuls est égale $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   En déduire la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de $n$.
   c) Montrer que le plus petit entier naturel $n$ satisfaisant à la condition $S_n > 100$ est 6. sn > 100 est 6.
5. On considère maintenant la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 10,\ u_1 = \frac{4}{5}f(u_0),\ \dots u_n = \frac{4}{5}f(u_{n-1}).$$

   Calculer $u_1$.
   a) Exprimer $u_n - 2$ en fonction de $u_{n-1}$.
   Montrer que $(u_n-2)(u_{n-1}-2)$ est positif quel que soit $n$ et en déduire que $u_n - 2$ est positif quel que soit $n$. Calculer $u_n - 6$ et montrer que $u_n - 6$ est positif quel que soit $n$.
   b) Démontrer l'inégalité :

$$u_n - 6 < \frac{(u_{n-1}-6)^2}{10}.$$

   (On pourra chercher le signe de la différence $\dfrac{(u_{n-1}-6)^2}{10} - (u_n - 6)$).
   c) En raisonnant par récurrence prouver que :

$$u_n - 6 < 10.\left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}.$$

   En déduire que la suite $(u_n)$ converge et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.



Retour page 1

# XLVII. Nancy, série C

**Ex. 1221.** ———— *3 points.* *./1977/nancyC/exo-1/texte.tex*

Soit $n$ un entier strictement supérieur à 2. Si $p$ est un entier relatif $(p \in \mathbb{Z})$ nous noterons par $\overline{p}$ la classe de $p$ modulo $n$ $(\overline{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. On note par $S_n$ l'ensemble des $x$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui vérifient $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

1. a) Démontrer que pour chaque $n$ $(n > 2)$ $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{-1}$ ne sont pas dans $S_n$.

   b) Démontrer que si $x \in \S_n$ et si $y \in \S_n$ on a alors

$$(x - y)(x + y) = \overline{0}.$$

   c) Démontrer que si $x \in S_n$, alors $-x \in \S_n$ ; montrer que si $n$ est premier, $S_n$ est vide ou a exactement deux éléments.

2. Résoudre l'équation $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$ dans chacun des cas suivants :

$$n = 5, \qquad n = 7, \qquad n = 6, \qquad n = 10.$$

**Ex. 1222.** ———— *4 Points.* *./1977/nancyC/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls ; soit $f$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f(0) = 0, \qquad \text{et } six > 0,\ f(x) = x^2 \ln(x).$$

1. Étudier $f$ et construire sa représentation graphique dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé ; on donne $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0{,}61$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$. (On étudiera la dérivabilité de $f$ en 0).

2. Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \geqslant 0.$$

   a) Justifier l'existence de $g$

   b) Calculer explicitement $g(x)$ pour $x > 0$.

   c) Calculer $g(0)$ ; en déduire l'aire de la partie du plan définie par :

$$\{0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

## Problème 420 *13 Points.* *./1977/nancyC/pb/texte*

Soit $E$ un espace affine de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

I- On appelle $A, B, C, D$ les points de E définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants : $(1, -1, 0)$; $(2, 0, 1)$; $(-1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$.

Soit $\lambda$ et $\mu$ des nombres réels ; on désigne par $P$ le barycentre des points pondérés $(A, 1-\lambda)$ et $(B, \lambda)$ et par $Q$ le barycentre des points pondérés $(C, 1+\lambda)$ et $(D, -\lambda)$.

Enfin on appelle $G$ le barycentre des points pondérés $\left(P, \dfrac{1+\mu}{2}\right)$ et $\left(Q, \dfrac{1-\mu}{2}\right)$.

1. a) calculer, en fonction de $\lambda$, les coordonnées des points $P$ et $Q$.

   b) Démontrer que les coordonnées de $G$ sont :

$$(\lambda + \mu,\ \lambda - \mu,\ \lambda \times \mu).$$

2. a) Le réel $\lambda$ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points $G$ obtenus quand $\mu$ varie est une droite $D_\mu$.

   b) Représenter $D_\lambda$ par un système d'équations cartésiennes.

3. a) Le réel $\mu$ étant fixé, montrer que l'ensemble des points $G$ obtenus quand $\lambda$ varie est une droite $D'_\mu$.



Retour page 1

b) Représenter $D'_\mu$ par un système d'équations cartésiennes.

4. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des points $G$ obtenus quand $\lambda$ et $\mu$ décrivent $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $x^2 - y^2 = 4z$.
5. Reconnaître $\mathscr{S}$.

II- 1. Déterminer l'intersection de l'ensemble $\mathscr{S}$ défini au I4 avec chacun des trois plans d'équation $x = 0,\ z = 0$ et $z = 1$. Représenter les trois ensembles obtenus sur des figures séparées en rapportant chacun des plans considérés à un repère orthonormé simple.

2. Soit $K$ et $K'$ les points de coordonnées $(0~;~0~;~1)$ et $(0~;~0~;~-1)$ respectivement. On désigne par $L$ la droite passant par $K$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$, et par $L'$ la droite passant par $K'$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$.
   Soit $M$ le point de $E$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ ; montrer que la projection orthogonale $H$ de $M$ sur $L$ a pour coordonnées $(0~;~y~;~1)$, et que la projection orthogonale $H'$ de $M$ sur $L'$ a pour coordonnées $(x~;~0~;~-1)$.
   Montrer que $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points $M$ de $E$ situés à égale distance de $L$ et de $L'$.

III- On désigne par V l'espace vectoriel associé à $E$. Si $\varphi$ est un réel vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, on désigne par $F_\varphi$ l'endomorphisme de V défini par :

$$\begin{aligned} F_\varphi(\overrightarrow{i}) &= (-\cos 2\varphi)\overrightarrow{j} + (\sin 2\varphi)\overrightarrow{k}\\ F_\varphi(\overrightarrow{j}) &= -\overrightarrow{i}\\ \text{et } F_\varphi(\overrightarrow{k}) &= (-\sin 2\varphi)\overrightarrow{j} + (-\cos 2\varphi)\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

1. Montrer que $F_\varphi$ est un endomorphisme orthogonal de V, et montrer que l'ensemble des vecteurs de V invariants par $F_\varphi$ est le droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + (\tan)\varphi\overrightarrow{k}$.
2. Soit $f_\varphi$ l'application affine de $E$ dans $E$ dont l'endomorphisme associé est $F_\varphi$ et telle que $f_\varphi(K)$ soit le point $K_1$ de coordonnées $(2\tan\varphi~;~0~;~1)$, où $K$ est le point de coordonnées $(0~;~0~;~1)$.

   a) Définir analytiquement $f_\varphi$.

   b) Montrer qu'il existe des points de $E$ invariants par $f_\varphi$ (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que $f_\varphi$ est une rotation dont on déterminera l'axe $\delta_\varphi$.

   c) Montrer que $\delta_\varphi$ est inclus dans $\mathscr{S}$ et que $f_\varphi(L) = L'$ où $L$ et $L'$ sont les droites qu l'on a définies au II2.

IV- Soi $r$ une rotation (affine) telle $r(L) = L'$. On désigne par $\delta$ l'axe de $r$, et par $R$ la rotation vectorielle associée à $r$.
Montrer que l'on a $R(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$ ou $R(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i}$.
Montrer que la droite $\delta$ est contenue dans $\mathscr{S}$.

## XLVIII. Nantes, série C

**Ex. 1223.** ———— *4 points.* *./1977/nantesC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 & : f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1\\ x > 0 & : f(x) = 2 + x\log x.\end{cases}$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.

**2.** Étudier le sens de variation de $f$. Tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ : l'axe $x'Ox$ des abscisses est dirigé par $\overrightarrow{i}$ ; on précisera les branches infinies et les demi-tangentes à $(C)$ au point de $(C)$ d'abscisse nulle.

Retour page 1

**3.** $m$ étant un réel strictement positif et inférieur à 1, calculer l'aire $A(m)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$m \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 2.$$

Étudier $\lim\limits_{\to 0} A$.

**Ex. 1224.** *4 Points.* ./1977/nantesC/exo-2/texte.tex

$x$ est un entier naturel vérifiant :$2 \leqslant x \leqslant 8$ et $n$ est un entier relatif quelconque.
Un sac contient 10 boules dont $x$ sont numérotées $n$ et dont les $(10-x)$ restantes sont numérotées 1.
On tire simultanément deux boules du sac : les tirages ainsi faits sont supposés équiprobables.

**1.** Définir un espace probabilisé fini $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ p)$ permettant de décrire l'épreuve.

**2.** On envisage la variable aléatoire réelle $X$ qui, à tout événement élémentaire, associe la somme des nombres inscrits sur les boules tirées. Préciser l'image de $n$ par $X$, et définir la loi de probabilité de $X$.

**3.** Calculer, en fonction de $x$ et $n$, l'espérance mathématique $E(X)$ de $X$.

**4.** Dans cette question on choisit $n$ égal à (-4) : calculer la variance de $X$.

## Problème 421 *12 Points.* ./1977/nantesC/pb/texte

Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 ; on désigne par V l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) associé à E.
$\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ désigne un repère orthonormé direct de E.
$F$ étant une partie non vide de E ou de $V$, on notera $\mathrm{I}_F$ l'identité sur $F$ ; en particulier l'identité $\mathrm{I}_V$ sera simplifiée en I. Étant donné un sous-espace vectoriel $U$ de $V$, on notera $\mathscr{L}(U)$ l'ensemble des endomorphismes de $U$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de $U$ dans $U$.
$\mathscr{D}$ est la droite vectorielle de $V$ engendrée par $\vec{k}$ et $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel orthogonal à $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ est orientée par $\vec{k}$ ; $\mathscr{P}$ se trouve donc ainsi orienté.

A- On note $\phi$ l'ensemble des isométries vectorielles $\varphi$ de $V$ qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{k}) = \vec{k} \\ \varphi \circ \varphi \circ \varphi = \mathrm{I}. \end{cases}$$

1. Démontrer que tout élément de $\phi$ est une rotation vectorielle. On désigne par $J$ la rotation vectorielle dont l'axe est $\mathscr{D}$ et dont l'angle mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ ; démontrer que $\phi$ est l'ensemble $\{I,\ J, K\}$ avec $K = J \circ J$.
2. On considère l'endomorphisme somme des trois éléments de $\phi$ ; caractériser les restrictions de cet endomorphisme respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ; décrire cet endomorphisme comme le composé de deux endomorphismes simples de $V$.
3. Démontrer que $I$ et $L = J + K$ engendrent un plan vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(V)$. $\alpha$ et $\beta$ étant deux réels, on notera $f_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme $\alpha I + \beta L$ (on rappelle que les endomorphismes $\alpha I$ et $\beta L$ associent à tout vecteur $\vec{v}$ de $V$ respectivement les vecteurs

$$(\alpha I)(\vec{v}) = \alpha.\vec{v} \qquad \text{et} \qquad (\beta L)(\vec{v}) = \beta L(\vec{v}).$$

B- On note $G$ l'application affine de E vers E qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{0,-1}$.

1. a) Définir analytiquement $G$.
   b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par $G$ est le plan $P$ contenant O et de direction $\mathscr{P}$.
   c) $M$ étant un point de E, on désigne par $m$ le projeté orthogonal de $M$ sur $P$.
   Vérifier la relation : $\overrightarrow{mG(M)} = -2\overrightarrow{mM}$.
2. Déterminer les plans de E invariants par $G$ ; caractériser la restriction de $G$ à un tel plan distinct de $P$.



Retour page 1

3. $a$ étant un réel non nul, on envisage le cercle $(C)$ du plan d'équation $x = 0$,qui passe par $O$ et dont le centre est le point $\Omega\,(0\ ;\ a\ ;\ 0)$.
   Démontrer que l'image (Γ) de (C ) par $G$ est une conique dont on précisera la nature et les éléments géométriques (centre, axes, foyers, ... ).
   Construire (C ) et (Γ) dans le cas particulier : $a = 2$.

C- Soit $A$ un point de E. Étant donnés deux réels $\alpha$ et $\beta$, on note $F_{\alpha,\beta}$, l'application affine de E vers E qui laisse $A$ invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{\alpha,\beta}$.
On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $F_{\alpha,\beta}$, $\alpha$ et $\beta$ décrivant$\mathbb{R}$.
$Q$ et $D$ désignent les variétés affines de E contenant A et de directions respectives $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.

1. Démontrer que les restrictions de $f_{\alpha,\beta}$ à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$sont respectivement :
$$(\alpha-\beta)I_{\mathscr{P}} \qquad \text{et} \qquad (\alpha+2\beta)I_{\mathscr{D}}.$$
   En déduire les restrictions de $F_{\alpha,\beta}$ à $Q$ et à $D$ respectivement.
2. Déterminer les éléments de $\mathscr{F}$ qui sont des isométries.
3. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications$F_{\frac{2}{3},-\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}$.
4. $\alpha$ étant un réel non nul distincts de $\dfrac{1}{3}$, démontrer que $F_{\alpha,\beta}$ est la composée de deux applications affines simples que l'on précisera.
5. $\alpha$ et $\beta$ désignent deux réels distincts.
   a) $M$ étant un point de E, on note $M'$ et $m$ son image respectives par $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et par la projection orthogonale sur $Q$.
   Démontrer qu'il existe un réel $k$, que l'on précisera, tel que, quel que soit $M$, on ait :
$$\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}.$$
   b) Démontrer que $F_{\alpha,\beta}$ est la composée de $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta},\frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et d'une homothétie que l'on caractérisera.

1. 2. 3.

## XLIX. Nantes remplacement, série C

**Ex. 1225.** ———— *4 points.* *./1977/nantesCrem/exo-1/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien, de dimension 3, de base orthonormée „ $= \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On envisage l'application linéaire $f$ de E dans E définie par :
$$f(\vec{\imath}) = -\frac{7}{9}\vec{\imath}+\frac{4}{9}\vec{\jmath}-\frac{4}{9}\vec{k}\ ;\ f(\vec{\jmath}) = \frac{4}{9}\vec{\imath}-\frac{1}{9}\vec{\jmath}-\frac{8}{9}\vec{k}\ ;\ f(\vec{k}) = -\frac{4}{9}\vec{\imath}-\frac{8}{9}\vec{\jmath}-\frac{1}{9}\vec{k}.$$
   a) Démontrer que f est une isométrie vectorielle.
   b) Déterminer l'ensemble des vecteur de E invariants par $f$.
   c) Caractériser $f(\vec{\jmath}+\vec{k})$.
   d) Caractériser $f$.
2. Soit g la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{\jmath}+\vec{k}$. Caractériser l'application $h$, égale à $g\circ f$.
3. $e$ désignant l'identité dans E, démontrer que l'ensemble $\{e,\ f,\ g,\ h\}$, muni de la loi ($\circ$) de composition des applications, est un groupe commutatif.

**Ex. 1226.** ———— *3 Points.* *./1977/nantesCrem/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue $x$ :
$$3^{3x}-5\times 3^{2x}-3^{x}+5 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Retour page 1

## 🏛PROBLÈME 422 *13 Points.* *./1977/nantesCrem/pb/texte*

P est un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dont les $Ox$ et $Oy$ sont dirigés respectivement par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

1. $m$ étant un réel positif non nul, étudier, en discutant par rapport à $m$ la nature de l'application $T_m$ de P vers P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = y + \log m \\ y' = x + \log m, \end{cases}$$

   $\log m$ désigne le logarithme népérien de $m$. Existe-t-il des droites invariantes par $T_m$, soit point par point, soit globalement ?

2. a) Étudier, quand $x$ tend vers $/pf$, les limites des fonctions (de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$) :

$$x \longmapsto -x + \log(\mathrm{e}^x - 1) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto -x + \log(\mathrm{e}^x + 1).$$

   b) On considère la fonction $f_1$ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log(\mathrm{e}^x + 1) \end{cases}$$

   Étudier les variations de $f_1$ ; et en tracer la courbe représentative $(C_1)$ dans le plan P rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   c) On considère la fonction $g_1$ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \longmapsto \log|\mathrm{e}^x - 1| \end{cases}$$

   Étudier les variations de $g_1$ ; et en tracer la courbe représentative $(C'_1)$ dans le plan P rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   d) Démontrer que $T_1$ laisse invariant l?ensemble $(C_1)\cup(C'_1)$.

3. Soit $m$ un réel positif non nul. Démontrer que l'image par $T_m$ de l'ensemble $(C_1)\cup(C'_1)$ est la réunion des courbes $(C_m)$ et $(C'_m)$ représentant respectivement les fonctions $f_m$ et $g_m$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ :

$$x \longmapsto \log(\mathrm{e}^x + m) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \log|\mathrm{e}^x - m|$$

   .

   Construire $(C_\mathrm{e})\cup(C'_\mathrm{e})$.

4. Étudier les variations de la fonction $h$ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to \qquad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f_1(x) - x - \mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$$

   En déduire le signe de $h(x)$.

   Si $m$ est un réel positif non nul, on envisage l'aire $A(m)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$0 \leqslant x \leqslant m \qquad \text{et} \qquad x \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

   Démontrer que $A(m)$ est comprise entre 0 et 1 (on ne demande pas le calcul de cette aire).

`Remarque` : $\log 2 \simeq 0{,}7$ ; $\log(\mathrm{e}-1) \simeq 0{,}5$ ; $\log(\mathrm{e}+1) \simeq 1{,}3$ ; $\log(\mathrm{e}^2-1) \simeq 1{,}9$ ; $\log(\mathrm{e}^2+1) \simeq 2{,}1$.

Retour page 1

# L. Nantes & groupe 1 bis, série E

**Ex. 1227.** ——— *3 points.* ./1977/nantesE/exo-1/texte.tex

On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $z$ complexe par

$$f(z) = z^3 - 2(i+1)z^2 + 2(1+2i)z - 4i.$$

**1.** Calculer f(1-i).

**2.** Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$f(z) = 0.$$

N.B. – On désigne par $i$ le nombre complexe de module $1$ et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

**Ex. 1228.** ——— *4 Points.* ./1977/nantesE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ de variable réelle $x$ définie pour tout $x$ réel par

$$f(x) = \mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^x).$$

**1.** Étudier la fonction $f$. Tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

**2.** Calculer l'aire $\mathcal{A}(k)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x,y)$ vérifient

$$\begin{cases} k \leqslant x \leqslant \quad 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x), \end{cases}$$

où $k$ désigne un nombre réel négatif.

**3.** Calculer $\mathcal{A}(-3)$ avec une incertitude inférieure à $5.10^{-3}$.

**4.** Étudier $\lim\limits_{-\infty} \mathcal{A}$.

## Problème 423 *13 Points.* ./1977/nantesE/pb/texte

I – Soit $P$ un plan vectoriel euclidien et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base orthonormée de $P$. On considère l'application linéaire $\varphi$ de $P$ dans $P$ dont la matrice, relativement à la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

1. Quels sont les vecteurs de $P$ qui sont invariants par $\varphi$.
2. Quels sont les vecteurs $\overrightarrow{v}$ de P pour lesquels $\varphi(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ ?
   Quelle est la nature de $\varphi$ ?

II – Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, associé à $P$, est orienté par la donnée du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Les équations de droites dont il sera question sont relatives au repère $\mathscr{R}$.

1. Soit $(D)$ la droite d'équation
$$-x + 2y + 2 = 0.$$
$(\Delta_1)$ est l'image de $(D)$ dans la rotation affine-dont le centre est $A(4\,;\,1)$ et dont l'angle admet $\frac{\pi}{6}$ pour mesure. Démontrer qu'une équation de $(\Delta_1)$ est
$$\left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(1-2\sqrt{3}\right)y - \left(9+2\sqrt{3}\right) = 0.$$
2. Soit $S_D$ la symétrie orthogonale par rapport à $(D)$ ; l'image du point $M(x,y)$ par cette transformation est le point $M'(x',y')$ : exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
3. Soit $S_{\Delta_1}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta_1$. Quelle est la nature de $S_{\Delta_1} \circ S_D$ ?



Retour page 1

4. Soit $H$ l'homothétie dont le centre est $A$ et dont le rapport est $+3$ ; soit $R$ la rotation dont le centre est $A$, et dont l'angle admet $\frac{\pi}{3}$ pour mesure. Quelle est la nature de la transformation $H \circ R$ ? Soit N un point quelconque du plan, image du complexe z ; soit N' le transformé de N par $H \circ R$, $N'$ étant image du complexe $z'$. Déterminer les complexes $a$ et $b$ de manière que $z' = az + b$ caractérise la transformation $H \circ R$.

III – L'espace affine euclidien orienté, de dimension 3, est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,,\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$. Soit $(\Delta)$ la droite affine définie par les relations

$$\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(1-2\sqrt{3}\right)y - \left(9+2\sqrt{3}\right) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

et $(D)$ la droite affine définie par

$$\begin{cases} -x+2y+2=0, \\ z=4. \end{cases}$$

Quelle est la nature de la transformation $S_{\Delta_1} \circ S_D$ ? Préciser ses éléments. Définir analytiquement cette transformation.

IV – L'espace affine euclidien orienté, de dimension 3, est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,,\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$ : ses axes $Ox$, $Oy$ et $Oz$ sont dirigés respectivement par $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$.
Le plan $(Ox,Oy)$ est le plan horizontal de projection ; le plan $(Oy,Oz)$ est le plan frontal de projection. L'origine $O$ du repère est le centre de la feuille ; la ligne de terre est $Oy$.
$Ox$ est dirigé vers le bas ; $Oy$ vers la droite, $Oz$ vers le haut de la feuille.
L'unité graphique est égale à 2 cm. On envisage le point $A(\,4\,,\,1\,,\,0\,)$ et l'axe vertical $V$ qui contient $A$ et qui est orienté par $\overrightarrow{k}$.
Soit $R$ la rotation dont $V$ est l'axe et dont l'angle admet $\frac{\pi}{3}$ pour mesure ; soit $T$ la translation dont le vecteur est $4\overrightarrow{k}$. Représenter sur l'épure la droite qui contient les points $B(\,3\,,\,0\,,\,-1\,)$ et $C(\,1\,,\,1\,,\,1\,)$. À l'aide d'une rotation autour de $V$, déterminer graphiquement la distance des points $B$ et $C$. Représenter ensuite sur l'épure la transformée $(B_1,C_1)$ de la droite $(BC)$ par la transformation $T \circ R$.

# LI. Nantes remplacement, série E

**Ex. 1229.** ———— *4 points.* *./1977/nantesErem/exo-1/texte.tex*

Le plan affine euclidien $(P)$ est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,,\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ dont les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont dirigés respectivement par $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ On considère les points $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(0,-1)$.

**1.** Démontrer qu'il existe une similitude inverse $s$ , et une seule, définie par : $s(A) = B$ et $s(B) = C$. Déterminer le centre, le rapport et l'axe de cette similitude.

**2.** Soit $s'$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite dont une équation est $x = 0$. Démontrer que l'application $r = s$ est une similitude directe ; en donner le centre, le rapport et une détermination de l'angle.

**Ex. 1230.** ———— *4 Points.* *./1977/nantesErem/exo-2/texte.tex*

Soit l'espace affine euclidien $E_3$, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,,\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\,,\,\overrightarrow{k}\right)$ dont les axes $X'OX$, $Y'OY$ et $Z'OZ$ sont dirigés respectivement par $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$. On considère le point $M$ de $E_3$ ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \\ Y = \sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \\ Z = \sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

où $t$ est un paramètre réel représentant le temps.

**1.** Démontrer que la trajectoire $(C)$ de $M$ est contenue dans un plan $P$, dont on écrira l'équation.



Retour page 1

**2.** Démontrer que $(C)$ est un cercle ayant son centre en $O$ et que le mouvement de $M$ est uniforme.

**3.** Représenter en géométrie descriptive la trajectoire $(C)$ en choisissant pour plan horizontal de projection le plan $XOY$ et pour plan frontal de projection le plan $XOZ$ : on place $O$ au centre de la feuille ; la ligne de terre $XOX'$ est portée par le petit axe de la feuille ; $OY$ est dirigé vers le bas et $OZ$ est dirigé vers le haut de la feuille ; l'unité graphique est égale à 1 centimètre.

## Problème 424 *12 Points.*

*./1977/nantesErem/pb/texte*

I – On considère la fonction numérique $f$ qui, au réel $x$ , associe :

$$f(x) = \frac{4}{x^2-4}$$

1. Démontrer qu'il existe deux constantes réelles $a$ et $b$ telles que, pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ,\ +2\}$ , on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}\ .$$

2. Soit $F$ la fonction numérique qui, au réel $x$ , associe :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $F$ est définie sur $]\ -2\ ,\ +2\ [$ ; calculer $F(x)$.

II – On considère la fonction numérique $g$ qui, au réel $x$ , associe :

$$g(x) = \text{Log}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

1. Étudier les variations de la fonction $g$ ; démontrer que $g$ est une fonction impaire. Construire la courbe représentative $(C)$ de $g$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$ dont les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont dirigés respectivement par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. (On prendra 2 cm pour unité). Tracer la tangente en $O$ à la courbe $(C)$.

2. a. Démontrer que la restriction (notée $\hat{g}$) de $g$ à $]\ -2\ ,\ +2\ [$ est une bijection de $]\ -2\ ,\ +2\ [$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\hat{g}$ admet une fonction réciproque que l'on notera $\hat{g}^{-1}$. Déterminer les propriétés de $\hat{g}^{-1}$ et construire la courbe représentative $(C')$ de cette application par rapport au repère $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$.
   b. Calculer $\hat{g}^{-1}(x)$, puis $(\hat{g}^{-1} \circ g)(x)$. Construire la courbe représentative $(C'')$ de $\hat{g}^{-1} \circ g$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
   N.B. - Les courbes $(C)$ et $(C')$ seront tracées sur un même dessin ; la courbe $(C'')$ sera tracée sur une feuille différente.

III – On considère les fonctions numériques $h$ et $k$ qui, au réel $x$, associent respectivement

$$h(x) = \text{Log}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 \qquad\qquad k(x) = \text{Log}\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

1. Comparer $h(2x)$ et $g(x)$, puis $k(-x)$ et $g(x)$.
2. On désigne par $(H)$ et $(K)$ respectivement les courbes représentatives des fonctions $h$ et $k$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$. Déterminer la transformation pour laquelle l'image de la courbe $(C)$ est $(H)$, puis la transformation pour laquelle l'image de la courbe $(C)$ est $(K)$.

IV – 1. Démontrer que

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

est définie pour $-2 < x < 2$.
Déterminer alors $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties. Étudier $\lim_{2} G$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

2. Déduire du calcul de $G(x)$, l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$0 \leqslant x \leqslant \text{Log}\,3 \qquad \text{et } \hat{g}^{-1}(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

Donner une valeur approchée de cette aire à $0{,}01$ près.



Retour page 1

# LII. New-York & Montréal, série C

**Ex. 1231.** ./1977/newyorkC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre complexe $u = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Mettre $u$ sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes $z$ tels que $z^4 = u$.
2. Déterminer par la méthode algébrique les nombres complexes $X$ tels que $X^2$ = u, puis les nombres complexes $z$ tels que $z^4 = u$.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

**Ex. 1232.** ./1977/newyorkC/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points $A$, $B$, $C$, $D$ de coordonnées respectives :

$$(1\ ;\ 1),\ (-3\ ;\ 3),\ (2\ ;\ 2),\ (-4\ ;\ 4).$$

On appelle $E$ et $F$ les milieux respectifs de $(A,\ C)$ et $(B,\ D)$.

1. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathscr{R}$ qui transforme $A$ en $B$ et $C$ en $D$. Déterminer son angle et son centre $I$.
2. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathscr{R}'$ qui transforme $A$ en $D$ et $C$ en $B$. Déterminer son angle et son centre $J$.
3. Que peut-on dire du quadrilatère $IEJF$ ? Étudier $\mathscr{R}' \circ \mathscr{R}$ et $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}'$.

## Problème 425

./1977/newyorkC/pb/texte

A- Soit f la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty\,;0[ & f(x) = 1 - \mathrm{e}^x \\ \forall x \in ]0\,;+\infty[ & f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$. Étudier la dérivabilité en 0.

   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. a) Vérifier que :

   $$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}}.$$

   Déterminez une primitive de la restriction de $f$ à $[0\,;+\infty[$.

   b) On considère un réel $\lambda$ ($\lambda > 0$).
   $M$ étant un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, déterminer l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ de l'ensemble des points $M$ vérifiant

   $$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \lambda \\ f(x) \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

   c) $\mathscr{A}_\lambda$ a-t-elle une limite lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?
3. a) Soit $y \in ]0\,;1[$.
   Montrer que $y$ admet exactement deux antécédents $x$ et $z$ par $f$ tels que $xz < 0$.
   Calculer $z$ en fonction de $x$ lorsque $x > 0$.
   Calculer $z$ en fonction de $x$ lorsque $x < 0$.

   b) Étudier le cas $y = 0$.

c) Soit $\varphi$ ainsi définie

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^\star & \varphi(x) = z \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Exprimer $\varphi(x)$.
Étudier la continuité de $\varphi$.
Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0]$.
$\varphi$ est-elle dérivable en $0$ ?
Étudier la limite de $\varphi(x)+x-\log 2$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou ver s$-\infty$.
Qu'en déduire pour la courbe $(\Gamma)$ représentative de $\varphi$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ? La tracer.

B- Plus généralement, soit une fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :

$\alpha$) $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$

$\beta$) $\forall x \in ]-\infty\,;0[ \qquad f'(x) < 0$

$\gamma$) $\forall x \in ]0\,;+\infty[ \qquad f'(x) > 0$

$\delta$) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On note $f_1$ la restriction de $f$ à $[0\,;+\infty[$ et $f_2$ sa restriction à l'intervalle $]-\infty\,;0]$. Justifier l'existence de $f_1^{-1}$ et de $f_2^{-1}$.
   Ceci permet de démontrer que tout $y$ appartenant à $]f(0)\,;\ell[$ admet exactement deux antécédents $x$ et $z$ par $f$ tels que $xz < 0$.
2. Soit $\varphi$ définie par
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) = z \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$
   Étudier la continuité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\varphi$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}.$$
   Étudier les variations de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$.
   Établir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$.
4. Montrer que $\varphi \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}}$ ($1_{\mathbb{R}}$ : fonction identité de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
   Qu'en déduire pour la courbe représentative de $\varphi$ dans un repère orthonormé ?
5. Peut-on déterminer simplement une famille de fonctions $f$ telle que l'application $\varphi$ associée soit $-1_{\mathbb{R}}$ ?

## LIII. Nice, série C

**Ex. 1233.** ———— *4 points.* *./1977/niceC/exo-1/texte.tex*

Trouver tous les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels non nuls, avec $a \leqslant b$, qui vérifient :

$$m + 10d = 142,$$

où $m$ et $d$ désignent respectivement le plus petit commun multiple (ppcm) et le plus grand commun diviseur (pgcd) de $a$ et $b$.

**Ex. 1234.** *5 points.* ./1977/niceC/exo-2/texte.tex

1. Étudier la fonction numérique
$$f : x \longmapsto \log(1 - \log x).$$
Construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2$ cm).
2. Montrer que $f$ est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de $f^{-1}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Exprimer la fonction $f^{-1}$ au moyen de la fonction exponentielle de base $\mathrm{e}$.

## Problème 426 *11 Points.* ./1977/niceC/pb/texte

Soit $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des réels strictement positifs. Á tout couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$, on associe l'application $f_{a,\ b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :
$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad f_{a,\ b}(z) = \mathrm{e}^a z + (\log b)\overline{z}$$
où $\log$ désigne le logarithme népérien et $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de $z$.

A- On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et que $(1,\ \mathrm{i})$ en est une base.

1. Démontrer que $f_{a,\ b}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ et déterminer la matrice $M_{a,\ b}$ de $f_{a,\ b}$ dans la base $(1,\ \mathrm{i})$.
2. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ 1}$ lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $(\mathscr{F},\ \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R},\ +)$. Quelle est la nature des éléments de $\mathscr{F}$ ?
3. Démontrer que l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$ pour lesquels $f_{a,\ b}$ n'est pas bijective, est l'ensemble défini par :
$$\begin{cases} a \in ]0\,;1[\cup[1\,;+\infty] \\ a = \log(|\log b|). \end{cases}$$
4. Pour tout élément $b$ de $]0\,;1[\cup[1\,;+\infty]$, on pose :
$$g_b = f_{\log(|\log b|),\ b}.$$
   a) Préciser la matrice $N_b$ de $g_b$ dans la base $(1,\ \mathrm{i})$ dans les deux cas suivants :
   $$0 < b < 1 \qquad \text{et} \qquad b > 1.$$
   b) Trouver la nature de $g_{\sqrt{\mathrm{e}}}$ et $g_{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}}$. En déduire que, pour tout élément $b$ de $]0\,;1[\cup[1\,;+\infty]$, $g_b$ est le composé de deux endomorphismes simples qu el'on déterminera.
   c) On considère : $b > 1$ et on pose, pour tout entier naturel $n$ :
   $$u_n = [g_b(1)]^n.$$
   Démontrer que la suite $(u_n)$ est géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. 'Etudier, suivant le valeur de $b$,le convergence de cette suite.

B- Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$, on désigne par $F_{a,\ b}$ l'application de P dans P qui, à tout point $M$, d'affixe $z$, associe le point $M'$, d'affixe $f_{a,\ b}(z)$.

1. Trouver l'ensemble $E_1$ des points $M$ de P dont l'image par $F_{a,\ b}$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1. Donner, suivant les couples $(a,\ b)$, la nature de $E_1$.
2. Trouver l'ensemble $E_2$ des points $M$ de P dont l'image par $F_{a,\ b}$ est un point dont l'affixe $z'$ satisfait à :
$$\arg(z') \equiv \frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$
3. Soit $E_3$ l'ensemble des points de P invariant par $F_{a,\ b}$. Déterminer $E_3$ pour les couples $(a,\ b)$ qui satisfont à :
$$\mathrm{e}^a = 1 - \log b.$$



Retour page 1

# LIV. Nice remplacement, série C

**Ex. 1235.** ———— *3 points.* *./1977/niceCrem/exo-1/texte.tex*

Soit $a$ un nombre complexe non nul. On considère le polynôme :

$$P_a(z) = z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3.$$

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_1(z) = 0$ .(On observera que $P_1(1) = 0$).

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ ll'équation $P_a(z) = 0$. On pourra poser $Z = \dfrac{z}{a}$.

**3.** Soit $T_a$ le triangle dont les sommets ont pour affixes les racines de $P_a(z) = 0$. Montrer que $T_1$ est équilatéral ; en déduire que $T_a$ est équilatéral pour tout $a$.

**Ex. 1236.** ———— *5 points.* *./1977/niceCrem/exo-2/texte.tex*

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Á tout point $M$ de P, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

Soient $A$, $B$, $C$ les points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. a) Il existe une unique similitude directe $s_1$ de P telle que l'on ait $s_1(A) = B$ et $s_1(B) = C$. Pour tout point $M$ de P, d'affixe $z$, exprimer en fonction de $z$ l'affixe $z_1$ du point $s_1(M)$, image de $M$ par $s_1$.

   b) Trouver le centre $K_1$, le rapport$k_1$ et l'angle $\alpha_1$ de $s_1$.

2. Il existe une unique similitude indirecte $s_2$ de P telle que l?on ait $s_2(A) = B$ et $s_2(B) = C$.

   a) Pour tout point $M$ de P d'affixe $z$, exprimer en fonction de $z$ l'affixe $z_2$ du point $s_2(M)$, image de $M$ par $s_2$.

   b) Trouver le centre $K_2$, le rapport $k_2$ de $s_2$ et la droite $\Delta_2$ telle que, si l'on note $h(K_2,\ k_2)$ l'homothétie de centre $K_2$ et de rapport $k_2$ et $s\Delta_2$ la symétrie affine orthogonale par rapport à $\Delta_2$, l'on ait :

$$s_2 = h(K_2,\ k_2) \circ s\Delta_2 = s\Delta_2 \circ h(K_2,\ k_2).$$

## PROBLÈME 427 *12 Points.* *./1977/niceCrem/pb/texte*

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}.$$

A- 1. Démontrer que $f$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'$, $f''$, $f'''$.

2. Démontrer par récurrence sur $n$ que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f$ est $n$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée $n$-ième $f^{(n)}$ s'exprime comme le produit de $f$ et d'une fonction polynôme $P_n$ , de degré $n$. (On ne demande pas de déterminer $P_n$ ).

3. Étudier les fonctions $f$, $f'$, $f''$ et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .(On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\|$ = 5cm). Démontrer en particulier que l'on a :

$$x > 1, \qquad \left|f''(x)\right| > \left|f'(x)\right| > \left|f(x)\right|.$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection respectifs des trois courbes.

B- Soit E l'espace vectoriel des fonctions trinômes de la fonction :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c \qquad (a\ ;\ b\ ;\ c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On sait que : $\dim$ E=3.

On pose $\forall i \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, P_i(x) = \mathrm{e}^{+x^2} f^{(i)}(x)$, avec $f^{(0)} = f$.

1. Montrer que $(P_0,\ P_1,\ P_2)$ est une base de $E$.

2. Soit $Q$ la fonction trinôme définie par : $Q : x \longmapsto -3 - 4x + 4x^2$.
   Trouver les coordonnées de $Q$ dans la base $(P_0,\ P_1,\ P_2)$.

3. On pose : $\forall i \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $\quad A_i = \displaystyle\int_0^1 P_i(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Calculer $A_1$ et $A_2$ et démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant A_0 \leqslant 1$.

4. Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : S \longmapsto \int_0^1 S(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   a) Montrer que $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$.

   b) Calculer $S(Q)$ en fonction de $A_0$.

   c) Si $S$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ dans la base $(P_0,\ P_1,\ P_2)$, calculer $\varphi(S)$ en fonction de $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ A_0$.

   d) Démontrer que le noyau $\ker\varphi$ de $\varphi$ est un plan vectoriel de $E$ dont on donnera une base.

   e) Démontrer que la droite vectorielle engendrée par $P_0$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker\varphi$ dans $E$.

   f) Démontrer que l'ensemble des polynômes $S$ de $E$ solutions du système :

$$\begin{cases}\varphi(S)\\ 4S'(0)+S''(0)=0.\end{cases}$$

   est un sous-espace vectoriel de $E$ dont on donnera la dimension et une base.

C- Pour tout entier naturel $n$ non nul, on désigne par $g_n$ la fonction définie par :

$$g_n : x \longmapsto x^n\mathrm{e}^{-x^2}$$

et on pose :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_1$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-2}$, ($n \geqslant 2$).
3. Utiliser cette relation pour calculer $I_7$.

## LV. Orléans Tours, série C

**Ex. 1237.** ——— *4 points.* *./1977/orleansC/exo-1/texte.tex*

**1.** Déterminer l'ensemble $E_1$ des entiers relatifs $x$ tels que le nombre

$$n = x^2 + x - 2$$

soit divisible par $7$.

**2.** Déterminer l'ensemble $E_3$ des entiers relatifs $x$ tels que le nombre $n$ soit divisible par $3$.

**3.** Déterminer l'ensemble $E$ des entiers relatifs $x$ tels que le nombre $n$ soit divisible par $42$.
Quel est alors le plus petit entier $n$ strictement positif divisible par 42 ?
On pourra utiliser la courbe représentative de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

**Ex. 1238.** ———— *3 Points.* ./1977/orleansC/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $M$ un point mobile de ce plan dont la position est définie en fonction du temps $t$ ($t \in ]0\,;+\infty[$ par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = (\log t)\,\vec{\imath} + (1-t+\log t)\,\vec{\jmath}).$$

**1.** Déterminer et tracer, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la trajectoire du point $M$ quand $t$ décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Justifier.

**2.** Montrer que le vecteur accélération a une direction indépendante de $t$.

**3.** Préciser les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire sur lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.
Soit A la position du point $M$ à l'instant $t=2$, construire les représentants d'origine A des vecteurs vitesse et accélération à cet instant.

## PROBLÈME 428 *13 points.* ./1977/orleansC/pb/texte

**Partie A.**

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à un base orthonormée $(\vec{u},\ \vec{v})$.
tout vecteur $\vec{V}(x\ ;\ y))$ de $\vec{P}$ est déterminé par son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Aux deux nombres complexes $a,\ b$, fixés, est associée l'application $\varphi$ de $\vec{P}$ dans lui-même, telle que $\vec{V}(z) \longmapsto \vec{V'}(z')$ avec $z' = az + b\overline{z}$.

**1.** a) Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire de $\vec{P}$.

b) Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ et $\delta$ réels tels que :

$$a = \alpha + \mathrm{i}\beta, \qquad b = \gamma + \mathrm{i}\delta.$$

Démontrer que la matrice de $\varphi$ relative à la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ est : $\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \delta-\beta \\ \beta+\delta & \alpha-\gamma \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que $\varphi$ est bijective, si et seulement si : $|a| \neq |b|$.

**2.** a) Démontrer que, pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ :

$$az + b\overline{z} = 0 \iff (a,\ b) = (0,\ 0).$$

b) Soit Id l'application identique de $\vec{P}$.
Démontrer que $\varphi$ est involutive, distincte de Id et (-Id), si, et seulement si, $a$ est imaginaire pur et $|b| = |a+1|$. Préciser la nature de $\varphi$.

c) Préciser les éléments caractéristiques de $\varphi$ lorsque $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $b = +2$.

**Partie B.**

Soit $P$ un plan affine euclidien, associé à $\vec{P}$, rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**1.** Soit $f$ l'application de $P$ dans $P$ telle que $M(z) \mapsto M'(z') : z' = \mathrm{i}\sqrt{3}z + 2\overline{z} - (1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.

a) Démontrer que $f$ est involutive. Déterminer $f$ avec précision.

b) Démontrer que $\mathscr{C}$, courbe d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 - 2x = 0$, est globalement invariante par $f$ : $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

**2.** Soit $g$ l'application de $P$ dans $P$ telle que $M(z) \mapsto M''(z'') : z'' = \dfrac{3}{4}z + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\overline{z}$.

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par $g$ est une droite, $\mathscr{D}$.
En donner une équation cartésienne.

b) Démontrer que la direction de la droite $(MM')$ est fixe, orthogonale à celle de $\mathscr{D}$.

c) Soit $\Gamma$ le cercle de centre $O$ et de rayon 2.
Déterminer une équation cartésienne de $\Gamma'$, image de $\Gamma$ par $g$, relative au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, puis au repère $\left(O,\ \dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{2},\ \dfrac{-\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\Gamma'$.

D'après Bac. C Orléans-Tours.



Retour page 1

# LVI. Orléans Tours remplacement, série C

**Ex. 1239.** *4 points.* *./1977/orleansCrem/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21 590 et 9 525.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ pour lesquels on a $34x \equiv 2 \quad (15)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :
$$21\ 590x + 9\ 525y = 1\ 270.$$

**Ex. 1240.** *4 Points.* *./1977/orleansCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $M'$ le transformé d'un point $M$ de $\mathscr{P}$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Soit $M''$ l'image de $M'$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = 0$.

   Exprimer en fonction des coordonnées ($x$ et $y$) de $M$, les coordonnées $x''$ et $y''$ de $M''$.

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation, $t_1$, de $\mathscr{P}$ qui à $M$ associe $M''$.

   Retrouver géométriquement ce résultat.
2. Soit $t_2$ la transformation de $\mathscr{P}$ qui à $M(x\ ;\ y)$ associe $N(X\ ;\ Y)$ tel que
$$\begin{aligned} X &= 1 + y \\ Y &= 1 - x. \end{aligned}$$

   Caractériser la transformation $t_2$, puis la transformation $t_2 \circ t_1$.

## Problème 429 *12 points.* *./1977/orleansCrem/pb/texte*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. On désigne par$\mathscr{F}$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi$ de E qui possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in \mathrm{E}, \qquad \forall \vec{v} \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(\vec{u}).\vec{v} = \varphi(\vec{v}).\vec{u}.$$

($\varphi(\vec{u}).\vec{v}$ désigne le produit scalaire du vecteur $\varphi(\vec{u})$ et du vecteur $\vec{v}$.).

A- On suppose que $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base orthonormée de E.

1. Montrer qu'un endomorphisme $\varphi$ de E appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si on a
2. Montrer qu'un endomorphisme $\varphi$ de E de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ,est un élément de $\mathscr{F}$ si et seulement si $b = c$.
3. a) Soit $\varphi$ un élément de $\mathscr{F}$ de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. .

   Montrer que si $\varphi$ est involutive alors $\varphi$ est une isométrie vectorielle. Dans le cas $b = 0$ on caractérisera chacune des applications ainsi obtenues. Dans le cas $b \neq 0$ on précisera la nature de l'application $\varphi$.

   b) Déterminer l'endomorphisme involutif $\varphi_0$de $\mathscr{F}$ tel que
$$\varphi_0(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \frac{2}{5}\vec{\imath} + \frac{11}{5}\vec{\jmath}.$$

   (On donnera la matrice de $\varphi_0$, puis les éléments caractéristiques de $\varphi_0$).

B- 1. Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par
$$g(x) = \frac{5}{2}x + 3\sqrt{x^2 - 4}.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire sa représentation graphique (C), dans un plan affine E , associé au plan vectoriel euclidien E, et rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On montrera que (C) admet deux asymptotes.

2. Soit $h$ l'homothétie de centre O et de rapport $-1$.
   Déterminer, relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ , l'équation de la courbe (C'), image de la courbe (C) par $h$, et montrer qu'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère appartient à (C)∪ (C') si et seulement si
$$y^2 - \frac{11}{4}x^2 - 5xy + 36 = 0.$$
3. On désigne par $f_0$ l'application affine dont l'endomorphisme associé est $\varphi_0$ et qui laisse invariant le point O. Montrer que la courbe (C)∪(C') est globalement invariante par $f_0$.
4. Soient $\vec{I} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$.
   Déterminer l'équation de (C)∪(C') dans le repère $(O,\ \vec{I},\ \vec{J})$ et en déduire la nature de cette courbe. Retrouver ainsi le résultat de la question B3 précédente.
5. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-4} + x$ est la fonction
$$x \longmapsto \frac{x^2}{4} + \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\log\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|.$$
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$, et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = -2$ relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\alpha$ tant un réel strictement inférieur à $-2$.

## LVII. Paris, série C

**Ex. 1241.** ——— *3 points.* *./1977/parisC/exo-1/texte.tex*

1. Quel est le reste de la division par $8$ du nombre $7^n$, $n$ désignant un entier naturel quelconque ?
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que le nombre $7^n.n + 4n + 1$ soit divisible par $8$ ?

**Ex. 1242.** ——— *4 Points.* *./1977/parisC/exo-2/texte.tex*

1. Soit $n$ un entier naturel. Une variable aléatoire $X_n$ peut prendre les $n$ valeurs
$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{k}{n},\ \ldots,\ \frac{n}{n}$$
   et elles seules, avec probabilités égales.
   Calculer l'espérance mathématique de $X_n$ et trouver sa limite éventuelle quand $n \to +\infty$.
2. Soit $f$ une fonction numérique, définie et continue sur le segment $[0\,;1]$.
   Une variable aléatoire $Y_n$ peut prendre des $n$ valeurs
$$f\left(\frac{1}{n}\right),\ f\left(\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ f\left(\frac{k}{n}\right),\ \ldots,\ f\left(\frac{n}{n}\right)$$
   et elles seules, avec probabilités égales.
   Écrire l'espérance mathématique E($Y_n$) de $Y_n$. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{E}(Y_n)$ existe : l'exprimer sous forme d'une intégrale.
3. $p$ étant un entier au moins égal à 1, calculer la limite de
$$\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$



Retour page 1

## Problème 430 *13 points.*



I- On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension trois et on note $\mathscr{B}$ une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de E.

Étant donné deux réels $a$ et $b$, on considère l'application linéaire $\varphi_{a,\ b}$ de E dans E, définie par :

$$\begin{aligned}\varphi_{a,\ b}(\vec{i}) &= \vec{i}+(1-a)\vec{j}\\ \varphi_{a,\ b}(\vec{j}) &= (b-1)\vec{j}\\ \varphi_{a,\ b}(\vec{k}) &= a\vec{i}+b\vec{k}.\end{aligned}$$

1. a) Soit $\vec{u}$ un vecteur de E de coordonnées $x,\ y$ et $z$ dans la base $\mathscr{B}$.
   Quelles sont les coordonnées de $\varphi_{a,\ b}$ dans cette base ?

   b) Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,\ b}$.
   Montrer que $\varphi_{a,\ b}$ est bijective si et seulement si $b \neq 0$ et $b \neq 1$.
   Lorsque $b=0$ ou $b=1$, vérifier que le noyau et l'image de $\varphi_{a,\ b}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Existe-t-il un couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi_{a,\ b}$ soit une projection vectorielle ? dans l'affirmative, la caractériser.
3. Soit P le plan de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

   a) Vérifier que $\varphi_{0,\ 0}$(P)=P.
   Soit $s$ l'application de P dans P qui, à tout vecteur $\vec{V}$ de P, associe $\varphi_{0,\ 0}(\vec{V})$.
   Démontrer que $s$ est une symétrie vectorielle de P que l'on caractérisera.

   b) Démontrer que $\varphi_{0,\ 0}=\tau\circ s\circ\psi$, où $\tau$ est l'application :

   $$\begin{aligned}\tau : \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{E}\\ \vec{V} &\longmapsto \vec{V}\end{aligned}$$

   et $\psi$ une application linéaire de E dans P que l'on caractérisera.
4. Vérifier que $\varphi_{1,\ 1}$(E) est le plan vectoriel de base $(\vec{i},\ \vec{k})$.
   Quel est l'ensemble $A(\vec{W})$ des éléments de E dont l'image par $\varphi_{1,\ 1}$ est un vecteur quelconque $\vec{W}$ de ce plan ?

II- On note $\log$ la fonction logarithme népérien.

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques définies et dérivables sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ de $\mathbb{R}$.

On considère le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ engendré par les fonctions $f_0,\ f_1,\ f_2$ définies sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$f_0(x)=1,\qquad f_1(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f_2(x)=\log(1+x).$$

1. Démontrer que $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ est une base de $\mathscr{E}$.
2. Á tout élément $f$ de $\mathscr{E}$, on associe la fonction numérique $\hat{f}$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

   $$\hat{f}(x)=(1+x)f'(x)+f(x),$$

   où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.

   a) Démontrer que, pour tout $f$ de $\mathscr{E}$, $\hat{f}$ appartient à $\mathscr{E}$.

   b) Soit l'application

   $$\begin{aligned}\varphi : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathscr{E}\\ f &\longmapsto \hat{f}\end{aligned}$$

   Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.
   Calculer les coordonnées de $\varphi(f)$ dans la base $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ en fonction des coordonnées de $f$ dans cette base.

Retour page 1

3. On applique les résultats de la partie I du problème au cas particulier où E=$\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = (f_0,\ f_1,\ f_2)$.

   a) Montrer que $\varphi = \varphi_{1,\ 1}$.
   quel est l'ensemble $\mathscr{A}(F)$ des éléments de $\mathscr{E}$ dont l'image par $\varphi$ est un élément quelconque F de $\varphi(\mathscr{E})$ ?

   b) Soit $\begin{array}{rcl} G : ]-1\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\log(1+x) \end{array}$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}(G)$ est l'ensemble des fonctions $g_k$, $k$ appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} g_k : ]-1\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{k}{1+x}+\log(1+x) \end{array}$$

4. a) Étudier selon les valeurs de $k$, les variations de $g_k$.

   b) Un plan affine étant muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}$, on appelle $\Gamma_k$ la courbe représentative de $g_k$ dans ce plan.
   Tracer sur une même figure $\Gamma_{-1}$, $\Gamma_0$, $\Gamma_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ , $\Gamma_1$ et $\Gamma_{\mathrm{e}}$.

# LVIII. Paris, série C remplacement

**Ex. 1243.** ——— *4 points.* *./1977/parisCrem/exo-1/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

a) l'équation

$$3x-5y=6\ ;$$

b) le système

$$\begin{cases} 3x-5y=6 \\ y \equiv x^2 \pmod 5 \end{cases}.$$

**Ex. 1244.** ——— *4 points.* *./1977/parisCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On considère l'application $F$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On n'essaiera pas de « calculer l'intégrale ».

1. Étudier le sens de variation de $F$.
2. Étudier le signe de la fonction $f$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=F(x)-\log x$ où $\log$ signe la fonction logarithme népérien.
   En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $F$ dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé. On admet, pour tout réel $t$ , l'inégalité
$$\mathrm{e}^t > t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}.$$
   Que peut-on en déduire sur la branche infinie de $(\mathscr{C})$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
   Tracer dans P la courbe $(\mathscr{C})$.

Retour page 1

## 🏛Problème 431 *12 points.*



I- Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ décrit $\mathbb{R}^3$. On note $I$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On donne $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{A}$.
   Démontrer que, pour tout entier $n, n \geqslant 1$, il existe un nombre réel $\gamma_n$ tel que
   $$a^n = \begin{pmatrix} a^n & \gamma_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que, si $a \neq b$,
   $$\gamma_n = c\frac{a^n - b^n}{a - b}.$$
   Dans le cas où $a = b$, exprimer $\gamma_n$ en fonction de $a,\ c,\ n$.
2. On désigne par $\mathscr{A}'$ l'ensemble des éléments $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ de $\mathscr{A}$ pour lesquels il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = \mathrm{I}$.
   a) Montrer que $|a| = |b| = 1$.
   b) Montrer que $A$ est de l'une des formes suivantes :
   $$A = \mathrm{I}, \qquad A = -\mathrm{I}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   c) Conclure que tout élément $A$ de $\mathscr{A}'$ vérifie $A^2 = \mathrm{I}$.

II- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, muni d'une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. L'application identique de E est notée $e$. Étant donné une application linéaire $g$ de E dans E, on note, pour tout entier $k \geqslant 2$, $g^k$ la composée de $k$ applications égales à $g$ ; $g^1$ désigne, suivant l'usage, $g$.

*Exemple préliminaire* : on considère l'application linéaire $u$ de E dans E définie par $u(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$ et $u(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1. Montrer que l'équation $u^m = e$, dont l'inconnue est l'entier $m$ strictement positif, admet au moins une solution. Résoudre l'équation.
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul $\vec{v}$ de E, $\vec{v}$ et $u(\vec{v})$ forment une partie libre.

**Objet du problème** : On s'intéresse aux applications linéaires $f$ de E dans E, distinctes de e, pour lesquelles il existe un entier strictement positif $q$ tel que $f^q = e$. Pour chaque application $f$, on désigne par $p$ le plus petit entier strictement positif tel que $f^p = e$. On distingue, pour une telle application, les deux cas suivants :

Cas A : *il existe au moins un vecteur non nul $\vec{w}$ tel que $f(\vec{w})$ soit colinéaire à $\vec{w}$.*

Ce vecteur $\vec{w}$ étant fixé, on choisit une base de E dont le premier vecteur est $\vec{w}$.

1. Montrer que la matrice de $f$ relativement à cette base est de la forme
   $$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$
2. Que vaut $p$ ? Quelles sont toutes les applications $f$ dans ce cas ?

Cas B : *Pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul, $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$ forment une partie libre.*

1. Montrer que $p = 2$ est impossible, en considérant l'image par $f$ du vecteur $f(\vec{v}) - \vec{v}$ ou du vecteur $f(\vec{v}) + \vec{v}$.
2. Soit $\vec{v}_0$ un vecteur non nul de E. On pose, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\vec{v}_0^{\,k} = f^k(\vec{v}_0)$. Montrer dans l'ordre que l'on préférera, que
   - $(\vec{v}_0,\ \vec{v}_1)$ est une base de E, dans cette base la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & b \end{pmatrix}$ où $c = +1$ ou $c = -1$. (On ne cherchera ni à déterminer le signe de $c$, ni à calculer $b$) ;



Retour page 1

- $f(\vec{v}_{p-1}) = \vec{v}_0$, les vecteurs $\vec{v}_k$ sont tous non nuls et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \vec{v}_k$ est nulle.

III- On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E : il associe à deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E le réel noté $\vec{x}.\vec{y}$.

1. Étant donné une application linéaire $g$ de E dans E et un entier $r$ supérieur ou égal à deux, on pose :
$$\Phi_{g,\ r}(\vec{x},\ \vec{y}) = \vec{x}.\vec{y} + \sum_{k=1}^{r-1} g^k(\vec{x}).g^k(\vec{y}).$$
Montrer que l'application $\Phi_{g,\ r}$ de $\mathrm{E}^2$ dans $\mathbb{R}$ est, elle aussi, un produit scalaire sur E.
2. On prend pour $g$ une application $f$ de la partie II et pour $r$ l'entier $p$ associé. On note $(\mathrm{E},\ \Phi_f)$ l'espace vectoriel euclidien obtenu en munissant E du produit scalaire $\Phi_{f,\ p}$ , $p$ désigné par $\Phi_f$.
Démontrer que :
a) $f$ est une isométrie de $(\mathrm{E},\ \Phi_h)$ ;
b) si $p$ est strictement supérieur à deux, $f$ est une rotation de $(\mathrm{E},\ \Phi_f)$.
3. On prend ici $f = u$, où u est l'application considérée au début de II. Calculer $\Phi_u(\vec{i},\ \vec{i})$, $\Phi_u(\vec{j},\ \vec{j})$, $\Phi_u(\vec{i},\ \vec{j})$. Interpréter la valeur du rapport $\dfrac{\Phi_u(\vec{i},\ \vec{j})}{\Phi_u(\vec{i},\ \vec{i})}$. Vérifier cette interprétation en tenant compte de la valeur de l'entier $p$ associé à $u$.

## LIX. Paris, série E

**Ex. 1245.** ———— *4 points.* *./1977/parisE/exo-1/texte.tex*

**1.** L'ensemble des réels strictement positifs est noté $\mathbb{R}_+^\star$, résoudre dans $\mathbb{R}_+^\star$ l'inéquation
$$(2+\log x)\log x \leqslant 0.$$
($\log$ désignant le logarithme népérien.)

**2.** Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
$$g(x) = x(\log x)^2.$$

**3.** On considère la fonction $g_1$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\begin{cases} g_1(0) = 0 \\ g_1(x) = g(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star. \end{cases}$$
Montrer que $g_1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ (unité 4 cm), construire la courbe représentative de $g_1$.

Pour préciser le tracé de le courbe en $O$, on étudiera la limite éventuelle de $\dfrac{g_1(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives.

**Ex. 1246.** ———— *4 Points.* *./1977/parisE/exo-2/texte.tex*

L'espace affine euclidien $E$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. l'unité de longueur est le centimètre.
La ligne de terre $y'Oy$, de vecteur directeur $\vec{\jmath}$, est parallèle au bord supérieur de la feuille situé à 7 cm de celui-ci ; l'axe $Oy$ est dirigé vers le bord droit et le point $O$ est à 2 cm du bord gauche de la feuille.
Le plan horizontal de projection est le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et l'axe $Ox$ de vecteur directeur $\vec{i}$ est dirigé vers le bas de la feuille ; un point de cote positive se projette frontalement au-dessus de la ligne de terre.

**1.** Dans le plan $xOy$ on donne la droite $\Delta$ d'équation $3x = 2y$.
Un plan $P$ a pour trace horizontale $\Delta$ et passe par le point $A(1{,}5\ ;\ 6\ ;\ 2)$. Construire la trace frontale de ce plan.



Retour page 1

**2.** On donne le point $B(0~;~10~;~0)$. On effectue un changement de plan frontal de projection destiné à rendre debout le plan $P$. On choisit la nouvelle ligne de terre passant par $B$ et orientée de façon que l'éloignement du point $A$ par rapport au nouveau plan frontal soit positif.

Faire apparaître sur l'épure l'angle du plan $P$ avec le plan horizontal et la distance du point $B$ au plan $P$.

## Problème 432 *12 points.*

./1977/parisE/pb/texte

Soit $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes non nuls,
$E$ un plan affine euclidien orientérapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
$E^\star$ le plan $E$ privé de $O$.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}^\star$ qui, à $z$, associe

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

et l'application $F$ de $E^\star$ dans $E^\star$ qui, à tout point $m$ d'affixe $z$, associe le point $M$ d'affixe $Z$ où $Z = \dfrac{1}{z^2}$.

I- 1. Soit un nombre complexe $z$, de module $r$ et d'argument $\theta$.
Montrer que $Z$ s'écrit

$$Z = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta).$$

2. L'application $f$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?
Étudier l'équation $z = f(z)$.
3. a) On désigne par $m$ un point de $E^\star$ dont l'affixe a pour module un. Construire son image par $F$. Représenter les points invariants par $F$.
b) Étant donné un point $M$ de $E^\star$ dont l'affixe a pour module un, quel est l'ensemble des points $m$ tels que $F(m) = M$ ? Construire ses points.
4. a) Soit $(d)$ une demi-droite de $E$, d'origine $O$. Construire l'image par $F$ de $(d^\star)$, où $(d^\star)$ désigne $(d)$ privée du point $O$.
b) Étant donné, dans $E$, une droite $(\Delta)$ passant par $O$, quel est l'ensemble des points $m$ tels que $F(m)$ appartienne à $(\Delta^\star)$, où $(\Delta^\star)$ désigne $(\Delta)$ privée de $O$ ?

II- On considère l'ensemble $(\gamma)$ des points de $E^\star$ dont l'affixe est

$$z = -2\cos^2\theta - 2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta,$$

où $\theta$ décrit l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Démontrer que $(\gamma)$ est inclus dans un cercle passant par $O$.
2. Donner, en fonction de $\theta$, le module et un argument de l'affixe $z$ d'un point $m$ de $(\gamma)$.
Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées $X$ et $Y$ de $F(m)$.
En déduire l'équation de l'image $(\Gamma)$ de $(\gamma)$ par l'application $F$.
Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ?
Vérifier que les points $I$ et $J$ de $(\gamma)$ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent à $(\Gamma)$.
En expliquer la raison.
3. On considère les fonctions vectorielles $g$ et $G$ de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{3\pi}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ associé à $E$ définies par

$$\overrightarrow{g(\theta)} = \overrightarrow{Om} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{G(\theta)} = \overrightarrow{OM}$$

où $m$ est le point de $(\gamma)$ d'argument $\theta$ et $M$ son image par $F$.
Déterminer, s'ils existent, les vecteurs dérivés $\overrightarrow{g'(\theta)}$ et $\overrightarrow{G'(\theta)}$.
Comparer $\overrightarrow{g'(\frac{2\pi}{3})}$ et $\overrightarrow{G'(\frac{2\pi}{3})}$.
Dessiner $(\gamma)$ et $(\Gamma)$ sur une même figure.

Retour page 1

III- Dans cette question, l'affixe de $m$ est

$$z = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

où le paramètre $t$ désigne le temps et décrit l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.

1. Quelle est la trajectoire du point $m$ ? Quelle est celle du point $M = F(m)$ ?
   Préciser les mouvements de $m$ et $M$. Les points $m$ et $M$ peuvent-ils être confondus ? Dans l'affirmative, à quelles dates et en quels points de la trajectoire ?
2. Soit $P$ le point défini par $\overrightarrow{mP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{mM}$.
   a) Calculer les coordonnées de $P$ en fonction de $t$.
   b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ du point $P$.
   Le vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ peut-il être nul ? Où sont alors situés les points $m$, $M$ et $P$ ?
   c) Montrer que, dans le cas où $\overrightarrow{V}(t)$ n'est pas nul, la tangente à la trajectoire de $P$ est orthogonale à la droite $(mM)$.

## LX. Paris remplacement, série E

**Ex. 1247.** *4 points.* *./1977/parisErem/exo-1/texte.tex*

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels. Soit $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de $E$. On désigne par $f$ l'application linéaire, de $E$ dans $E$, définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath} + \vec{k} \\ f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{k} \\ f(\vec{\imath}) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) \end{cases}.$$

Déterminer le noyau $N$ et l'image $I$ de $f$, et préciser une base pour chacun d'eux.
Déterminer l'image $f(I)$ de $I$ et la comparer au noyau pour la relation d'inclusion.
Déduire de ces éléments ce qu'est l'application composée $f^3 = f \circ f \circ f$.

**Ex. 1248.** *3 Points.* *./1977/parisErem/exo-2/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1.$$

### Problème 433 — *13 points.* *./1977/parisErem/pb/texte*

I- Étant donné un plan affine euclidien $(\Pi)$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la notation $T(x\ ;\ y)$ désigne, selon l'usage, le point $T$ de $(\Pi)$ dont les coordonnées sont $x$ et $y$.
On considère le carré dont les sommets sont

$$A(2\ ;\ -2)\ ,\ B(-2\ ;\ -2)\ ,\ C(-2\ ;\ 2)\ ,\ D(2\ ;\ 2),$$

et les points

$$J(0\ ;\ 2)\ ,\ U(1\ ;\ 0)\ ,\ V(-1\ ;\ 0)\ ,\ U'(2\ ;\ 0)\ ,\ V'(-2\ ;\ 0).$$

1. Illustrer géométriquement l'ensemble des points $M$ du plan $(\Pi)$, distincts de $U$ et $V$, tels que la droite $(MU)$ rencontre le segment $[U'A]$ et que la droite $(MV)$ rencontre le segment $(V'B)$.
2. a) On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(a\ ;\ b)$ tels que

$$\begin{cases} -1 < a < +1 \\ 0 \leqslant b \leqslant \inf[2(1-a),\ 2(1+a)]. \end{cases}$$

On rappelle que, pour deux réels $\alpha$ et $\beta$,

$$\inf(\alpha,\ \beta) = \alpha \quad \text{si} \quad \alpha \leqslant \beta$$

$$\inf(\alpha,\ \beta) = \beta \quad \text{si} \quad \beta \leqslant \alpha.$$

Comparer $\mathscr{E}$ et l'ensemble défini dans la question I1.

Retour page 1

b) Soit $M(a\ ;\ b)$ un point de $\mathscr{E}$. Calculer en fonction de $a$ et $b$ les coordonnées du point $P$ commun à la droite $(MU)$ et au segment $[U'A]$ et celles du point $Q$ commun à la droite $(MV)$ et au segment $[V'B]$.

Calculer l'aire $S(M)$ du polygone $(U,\ P,\ A,\ B,\ Q,\ V)$ en fonction de $a$ et $b$. On peut interpréter cette aire comme la « zone d'ombre » de « l'écran » $[UV]$ dans le carré, lorsque la source lumineuse est placée en $M$.

3. a) Quelle est la nature des courbes $(\Gamma_k)$, dans le plan $(\Pi)$, des fonctions numériques $\varphi_k$ de la variable réelle $x$ définies, pour $k \in \mathbb{R}_+$ par

$$\varphi_k(x) = (8-k)(1-x^2)\ ?$$

Préciser, en fonction de $k$, les coordonnées de leurs points communs avec les axes $(O;\vec{\imath})$ et $(O;\vec{\jmath})$ et avec les droites $(JA)$ et $(JB)$.

Quel est l'ensemble des réels $k$ tels que $(\Gamma_k)$ coupe le segment $[OJ]$ ?

b) En utilisant la question I(3)a, préciser, en fonction de $k$, l'ensemble $e_k$ des points $M$ de $\mathscr{E}$ tels que

$$S(M) = k.$$

Représenter sur trois croquis différents $e_k$ pour $k = 6{,}5$, $k = 7$, $k = 7{,}5$.

II- 1. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^x(x^2-1).$$

Étudier les variations de $f$.

2. a) Comparer, sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$, et $h(x) = -(1+x)$ : pour étudier le signe de $(f-h)(x)$, on étudiera la signe de la dérivée seconde de $f-h$ sur $\mathbb{R}_+$, puis celui de la dérivée première déduit de son sens de variation.

b) Montrer que $f(-1+\sqrt{2}) \geqslant -\sqrt{2}$ ; en déduire que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$, on a $f(x) \geqslant -\sqrt{2}$. Construire le courbe représentative $(L)$ de la fonction $f$ dans $(\Pi)$.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Considérons $(L')$ l'ensemble des points de $(L)$ d'abscisse $x$ telle que $-1 \leqslant x \leqslant +1$ comme un écran analogue à celui de la partie I.

Quelle est l'aire de la « zone d'ombre » de « l'écran » $(L')$ dans le carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ pour une source lumineuse placée en $J$ ?

III- L'objectif de cette partie est la réalisation d'une épure.

Étant donné un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, la notation $T(x\ ;\ y\ ;\ z)$ désigne le point $T$ de coordonnées $x$, $y$ et $z$.

L'unité de longueur est le centimètre.

La ligne de terre $y'Oy$, de vecteur directeur $\vec{\jmath}$, est parallèle au bord supérieur de la feuille, à 10 cm de celui-ci ; l'axe $Oy$ est dirigé vers la bord droit et le point $O$ est à 10 cm du bord gauche.

Le plan horizontal de projection est le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et l'axe $Ox$, de vecteur directeur $\vec{\imath}$ est dirigé vers la bas de la feuille.

Un point de cote positive se projette frontalement au dessus de la ligne de terre.

1. Représenter les points

$$E(6\ ;\ 6\ ;\ 6)\ ,\ F(6\ ;\ -6\ ;\ 6)\ ,\ I(0\ ;\ 3\ ;\ 0)\ ,\ K(0\ ;\ -3\ ;\ 0)\ ,\ N\left(3\ ;\ -\frac{3}{2}\ ;\ -3\right).$$

2. Démontrer que les points $O,\ E,\ F,\ I,\ K,\ N$ appartiennent à un même plan $(\Pi_1)$.

3. a) Représenter les points $G$ et $H$ symétriques respectivement de $E$ et $F$ par rapport à $O$. Démontrer que $(E,\ F,\ G,\ H)$ est un rectangle.

b) On considère le demi-cercle $(\Omega)$ du plan $(\Pi_1)$ admettant le segment $[IK]$ comme diamètre, et dont les points ont des éloignements (ou abscisses) positifs.

Construire l'épure de $(\Omega)$. Mettre en évidence les projections de la « zone d'ombre » de « l'écran » $(\Omega)$ dans le rectangle $(E,\ F,\ G,\ H)$ quand la source lumineuse est placée en $N$.

- Les trois parties peuvent être traitées d'une façon indépendante.

# LXI. Poitiers, série C

**Ex. 1249.** *3 points.* *./1977/poitiersC/exo-1/texte.tex*

Un dé cubique a quatre faces noires et deux faces blanches. Quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. On lnace ce dé cinq fois de suite.

**1.** Quelle est la probabilité pour que la face blanche apparaisse pour la première fois au cinquième jet?

**2.** Quelle est la probabilité pour que la face blanche apparaisse au moins une fois?

**3.** On appelle $X$ la variable aléatoire qui à chaque épreuve fait correspondre le nombre de faces noires obtenues.

a) Quelle est la loi de probabilité de $X$?

b) Calculer son espérance mathématique.

**Ex. 1250.** *4 Points.* *./1977/poitiersC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \log|x+1|.$$

**1.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on précisera les branches inifinies).

**2.** Soit $D$ l'ensemble des points $M$ du plan P dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient :

$$-2 \leqslant x \leqslant \lambda \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqslant y \leqslant x \qquad \text{où} \qquad \lambda \in ]-2\,;-1[.$$

Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de $D$. Quelle est sa limite lorsque $\lambda$ tend vers $-1$ par valeurs inférieures?

**PROBLÈME 434** *13 points.* *./1977/poitiersC/pb/texte*

On considère un plan affine euclidien $P$ rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'axes $x'x$ et $y'y$.
Soit $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ un nombre complexe. On appelle $A$ le point d'affixe $a$ et $A'$ le point d'affixe $-a$.
On appelle $C_a$ l'ensemble des points $M$ de $P$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ telle que $(z^2 - a^2)$ soit un nombre réel.
On appelle $C'_a$ l'ensemble des points $M$ de $P$ d'affixe $z$ telle que $(z^2 - a^2)$ soit un nombre imaginaire pur.
Dans tout le problème $\alpha$, $\beta$, $x$ et $y$ sont réels.

A- 1. Déterminer l'intersection de $C_a$ et $C'_a$.

2. Donner une équation de $C_a$ et une équation de $C'_a$.

3. Déterminer $C_a$ lorsque $a^2$ est réel. Quelle est la nature de $C_a$ lorsque $a^2$ n'est pas réel?

4. Déterminer $C'_a$ lorsque $a^2$ est imaginaire pur. Quelle est la nature de $C_a$ lorsque $a^2$ n'est pas imaginaire pur?

B- On suppose dans toute la suite du problème que $a^2 = 4(1 - \mathrm{i})$ et que $A$ a une ordonnée négative. Dans ce cas particulier on désignera par $\mathscr{H}$ la courbe $C_a$ et par $\mathscr{H}'$ la courbe $C'_a$.

1. a) Donner une équation de $\mathscr{H}'$. Représenter $\mathscr{H}'$ en précisant ses sommets, ses foyers $F'_1$ et $F'_2$ et ses asymptotes.

b) Donner une équation de $\mathscr{H}$. Représenter $\mathscr{H}$ (sur la même figure que $\mathscr{H}'$) en précisant ses sommets, ses foyers $F_1$ et $F_2$ et ses asymptotes.

2. Calculer le module et un argument de $a$. En déduire une mesure de l'angle des droites $(x'x,\ AA')$.

3. Soit $S$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $AA'$.

a) Calculer les coordonnées de $M' = S(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$.

b) Montrer que $S(\mathscr{H}) = \mathscr{H}'$ et que $S(\{F_1,\ F_2\}) = \{F'_1,\ F'_2\}$.

4. Soit $K$ l'ensemble $\{F_1,\ F_2,\ F'_1,\ F'_2\}$.
Trouver l'ensemble $G$ des isométries de $P$ qui laissent $G$ invariant. Vérifier que tout élément de $G$ laisse $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}'$ invariant.

5. Étant donné un nombre réel $t$ supérieur à 2, on se propose de calculer l'aire de la partie $E'$ du plan $P$ comprise entre $\mathscr{H}'$ et la droite $D'$ d'équation $x = t$.
   a) Donner une équation de la droite $D$ image de $D'$ par $S$ et calculer les abscisses $x_1$ et $x_2$ $(x_1 < x_2)$ des points d'intersection de $D$ et $H$.
   b) Soit $E$ la partie du plan $P$ comprise entre $\mathscr{H}$ et $D$. Calculer l'aire de $E$ en fonction de $t$.
   c) Exprimer l'aire de $E'$ par une intégrale.
   En admettant que $E$ et $E'$ ont même aire, déduire une primitive de l'application $f$ de $[-2\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sqrt{x^2-4}.$$

## LXII. Poitiers remplacement, série C

**Ex. 1251.** ———— *3 points.* *./1977/poitiersCrem/exo-1/texte.tex*

Étant donnés deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$, on désigne respectivement par $d$ et $m$ le PGCD et le PPCM de $a$ et $b$. Déterminer l'ensemble S des paires $\{a\ ;\ b\}$ telles que
$$d+m = 126 \qquad \text{et} \qquad 5 < d < 10.$$

**Ex. 1252.** ———— *4 Points.* *./1977/poitiersCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} \qquad \text{si} \qquad x \leqslant 1$$
$$\text{et } f(x) = ax^2+bx \qquad \text{si} \qquad x > 1 \qquad \text{où } (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.** Déterminer $a$ et $b$ pour que $f$ soit continue et dérivable au point 1.

**2.** Étudier alors les variations de $f$ et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**3.** On désigne par D l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont telles que :
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$
Calculer l'aire $A$ de $D$.

**Problème 435** *13 points.* *./1977/poitiersCrem/pb/texte*

Soit P un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé à P et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct de P.

I Vérifier que le sous-ensemble E de P d'équation $4x^2+9y^2-16x+18y-11 = 0$est une ellipse dont on précisera le centre $\omega$, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité. Représenter E.

II Soit g l'application affine admettant $\omega$ comme point invariant et dont l'endomorphisme associé $\varphi$ pour matrice par rapport à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
Vérifier que $g$ est bijective. Calculer les coordonnées de $g(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$. Montrer que $g(E)$, l'image de E par $g$, est le cercle C ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse E.

III K étant un sous-ensemble de P, on dit qu'une bijection affine $f$ de P dans P laisse K invariant si et seulement si $f(K) = K$. Montrer que l'ensemble F des bijections affines $f$ de P dans P qui laissent K invariant, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

IV 1. On appelle $G$ le groupe des bijections affines de P dans P qui laissent E invariant. Donner des exemples d'éléments de G.
2. On appelle $G_1$ le groupe des bijections affines de P dans P qui laissent C invariant.

a) Montrer que $f_1$ appartient à $G_1$ si et seulement si

$$g^{-1} \circ f_1 \circ g \text{ appartient à } G.$$

b) Soit h l'application de $G_1$ dans $G$ définie par :

$$h(f_1) = g^{-1} \circ f_1 \circ g.$$

Montrer que $h$ est un isomorphisme de $G_1$ sur $G$.

V Soit $f_1$ une bijection affine de P dans P qui laisse C invariant.

1. On pose $\omega_1 = f_1(\omega)$. Un diamètre de C passant par $\omega_1$, coupe C en $A$, et $B_1$. Soient $A = f_1^{-1}(A_1)$ et $B = f_1^{-1}(B_1)$. En utilisant les propriétés des bijections affines, montrer que $\omega_1 = \omega$.
2. Soit $\varphi_1$ l'endomorphisme associé $f_1$. Montrer que, pour tout vecteur $\vec{V}$ de $\mathscr{V}$, le point $M$ tel que $\overrightarrow{\omega M} = \dfrac{3\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|}$ appartient au cercle C, et en déduire que $\left\|\varphi_1(\vec{V})\right\| = \left\|\vec{V}\right\|$.
3. En déduire que les éléments de$G_1$ sont des isométries affines que l'on déterminera.

VI 1. Déduire des questions précédentes que les bijections affines $f$ appartenant à $G$ laissent $\omega$ invariant.

2. Donner la forme géneérale des matrices par rapport à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ des endomorphismes qui leur sont associés.
3. Quelles sont les isométries affines de $G$ ?

# LXIII. Polynésie, série C

**Ex. 1253.** ______ . ./1977/polynesieC/exo-1/texte.tex

Soit $(\mathbb{C}, +, \times)$ le corps des complexes. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ différent de $-1$, on pose

$$f(z) = Z = \frac{z-1}{z+1}.$$

On note $M$ l'image de $z$ dans le plan complexe $P$.

**1.** Déterminer l'ensemble $(T_1)$ des points $M$ de $P$ tels que $Z$ soit réel.

**2.** Déterminer l'ensemble $(T_2)$ des points $M$ de $P$ tels que $Z$ soit imaginaire pur :

**3.** Déterminer l'ensemble $(T_3)$ des points $M$ de $P$ tels que $\operatorname{Arg} Z = \dfrac{3\pi}{2}$.

**Ex. 1254.** ______ ./1977/polynesieC/exo-2/texte.tex

**1.** Pour tout nombre réel $x$ différent de 0 déterminer le signe de l'expression $h(x) = x - 1 - x \operatorname{Log} x$.

**2.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$\begin{cases} x \neq 1, \ f(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x-1} \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Est-ce que $f$ est continue en $x = 0$ ; en $x = 1$ ?

**3.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative.

## Problème 436

./1977/polynesieC/pb/texte

I – Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel $\mathscr{P}$ On considère l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{(a,b)}$ de $\mathscr{P}$ dont

la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a$ et $b$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante exprimée sur $a$ et $b$ pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit un automorphisme de $\mathscr{P}$. Dans les cas où $\varphi_{(a,b)}$ n'est pas bijectif déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par $\varphi_{(a,b)}$ ainsi que le noyau de $\varphi_{(a,b)}$.

b) Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit un automorphisme involutif de $\mathscr{P}$. Caractériser géométriquement ces automorphismes involutifs.

II – Soit $P$ le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

a) À tout quadruplet $q = (a,b,m,n)$ de nombres réels, on fait correspondre l'application affine $g_q$ d'endomorphisme associé $\varphi_{(a,b)}$, telle que l'image $O'$ de $O$ par $g_q$ ait pour coordonnées $(m,n)$. Déterminer les quadruplets $q = (a,b,m,n)$ pour lesquels $g_q$ est involutive. Caractériser géométriquement les applications $g_q$ involutives.

b) Dans cette question, $m$ et $n$ sont des nombres réels fixés. On note $g'$ l'application affine $g_q$ telle que $q = (-1,0,m,n)$. Remarquer que $a = -1$ et $b = 0$. Soit $M$ un point de $P$ de coordonnées $(x,y)$ et $M'$ l'image de $M$ par $g'$. Quelle est l'image par $g'$ de la droite $(D)$ d'équation $y = x + \dfrac{n-m}{2}$ ?

c) Démontrer qu'il existe une application $g_q$, dont on précisera le quadruplet $q = (a,b,m,n)$, qui soit une homothétie de rapport positif, transformant le cercle $(C)$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$$

en le cercle $(C')$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 18 = 0.$$

d) Soit $g''$ l'application $g_q$ correspondant au quadruplet $q = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Montrer que $g''$ est une projection sur une droite $(\Delta)$ parallèlement à une droite $(\Delta')$.

## LXIV. Pondichéry, série C

**Ex. 1255.** ______ . ./1977/pondicheryC/exo-1/texte.tex

**1.** $a$ et $b$ étant deux réels, soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1 & \text{si } x < 0, \\ f(x) = ax^2 + bx & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ f(x) = \sqrt{2x} & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

a) À quelle condition sur $a$ et $b$, $f$ est-elle continue au point $2$ ?

b) Pour quelles valeurs de $a$ et $b$, $f$ est-elle dérivable au point $2$ ? $f$ est-elle alors dérivable en $0$ ?

**2.** Étudier les variations de l'application $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1 & \text{si } x < 0, \\ g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ g(x) = \sqrt{2x} & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de $g$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On indiquera l'asymptote de $(\Gamma)$ et ses demi-tangente point $O$.

**Ex. 1256.** ______ ./1977/pondicheryC/exo-2/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel. On considère les trois entiers

$$A = 2^n + 3^n, \quad B = 2^{n+1} + 3^{n+1}, \quad C = 2^{n+2} + 3^{n+2}.$$

**1.** Démontrer que $A$ et $B$ sont premiers entre eux.

**2.** Trouver, suivant les valeurs de $n$, le P.G.C.D. de $A$ et $B$.



Retour page 1

## PROBLÈME 437

./1977/pondicheryC/pb/texte

Soit $E$ un plan affine euclidien, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de $E$. Pour, tout réel $\alpha$ on désigne par $s_\alpha$ l'application de $E$ dans $E$ telle que si $M$ est le point de coordonnées $(x, y)$ est le point de coordonnées $(x', y')$ avec

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \alpha y, \\ \\ y' = \alpha x + \dfrac{1}{2}y + 1. \end{cases}$$

**1.** a) Démontrer que $s_\alpha$ est une similitude plane directe.

b) Pour tout point $A$ de $E$ on désigne par $E_A$ l'ensemble des images du point $A$ par les applications $s_\alpha$. Quelle est la nature de $E_A$ ? Discuter. Donner une construction géométrique : simple de $E_A$ à partir des points 0 et $A$. Soit $(F)$, l'ensemble des points $A$ tels que $A$ appartient à $E_A$.

Donner une équation cartésienne de $(F)$ et, représenter $(F)$.

c) Montrer que toute application $s_\alpha$ admet un point invariant, et un seul, $\omega_\alpha$. Quel est l'ensemble des points $\omega_\alpha$ lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$ ?

**2.** Soit

$(L)$ la droite d'équation $x = 2$,

$(L')$ la droite d'équation $y = x - 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\beta$, et un seul, tel que l'image de $(L)$ par $s_\beta$ soit $(L')$. Quels sont le rapport, l'angle et le centre $\omega_\beta$ de cette similitude $s_\beta$.

b) Soit $(H)$ l'ensemble des points $M$ de $E$ tels que, si $d(M, O)$ et $d(M, L)$ sont respectivement les distances de $M$ à $O$ et à la droite $(L)$,

$$d(M, O) = d(M, L).$$

est la nature de $(H)$ ? Tracer $(H)$. Indiquer ses sommets ses foyers et ses asymptotes.

c) Soit $(H')$ l'image de $(H)$ par $s_\beta$. Montrer que $(H')$ est une conique de centre $I'(2, -1)$. Indiquer ses sommets, ses foyers et ses asymptotes. Montrer qu'elle passe par $O$. La tracer.

d) Soit $\sigma$ une similitude du plan $P$ que

$$\sigma(H) = (H').$$

Quelle est l'image de $(H)$ par $s_\beta^{-1} \circ \sigma$ ?

Quelles sont les similitudes directes ou indirectes du plan $P$ qui transforment $(H)$ en $(H')$ ?

Donner les coordonnées de l'image du point $M(x, y)$ par chacune d'elles.

# LXV. Reims, série C

Ex. 1257. 4 points. ./1977/reimsC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dé?finie par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x \qquad \text{si } x \leqslant 0$$

$$f(x) = x\log x - 2xsix > 0\text{si } x > 0.$$

1. Étudier la continuité de $f$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$.
3. Étudier complètement la fonction $f$ et construire sa représentation graphique dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm) .



Retour page 1

**Ex. 1258.** ———— *4 points.* *./1977/reimsC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé, on appelle affixe de tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, et l'on pose $\overline{z} = x - \text{i}y$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M$ de P dont l'affixe $z$ vérifie la relation
$$|2\text{i}\overline{z} - 1 - \text{i}| = \sqrt{2}.$$
2. Soit $T$ l'application de P dans P qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par $z' = 2\text{i}\overline{z} - 1 - \text{i}$.
   a) Montrer que $T$ admet un point invariant $\Omega$ unique.
   b) Déterminer l'ensemble des points $M$ de P tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$.
   c) Indiquer la nature et les éléments géométriques précis de l'application $T$.
3. Utiliser la question 2 pour retrouver les résultats de la question 1 par une méthode géométrique.

## Problème 438 *12 points.* *./1977/reimsC/pb/texte*

Étant donné un espace vectoriel E de base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ on note $\mathscr{L}$(E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Soit $f$ et $f_{a,b}$ les éléments de $\mathscr{L}(E)$ définis par

$$f\begin{cases} f(\overrightarrow{\imath}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}) \\ f(\overrightarrow{\jmath}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}) \\ f(\overrightarrow{k}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}) \end{cases} \qquad f_{a,b}\begin{cases} f_{a,b()}\overrightarrow{\imath}) = \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{\imath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\jmath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{k} \\ f_{a,b}(\overrightarrow{\jmath}) = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\imath} + \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{\jmath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{k} \\ f_{a,b}(\overrightarrow{k}) = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\jmath} + \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{k} \end{cases}$$

L'application $\left|\begin{array}{ccc} \text{E} & \to & \text{E} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}\right.$ sera notée $e$,

l'application $\left|\begin{array}{ccc} \text{E} & \to & \text{E} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{0} \end{array}\right.$ sera notée $\theta$.

I-
1. Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des vecteurs invariants par $f$. En déduire que $f$ est une projection que l'on caractérisera. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des endomorphismes de E du type $f_{a,b}$ lorsque $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$(E) et que $(f,\ e)$ est une base de $\mathscr{F}$. Comment s'écrit $f_{a,b}$ dans cette base ?
3. Montrer que $\mathscr{F}$, muni de l'addition des applications et de la composition (notée $\circ$) des applications, est un anneau unitaire. Cet anneau est-il commutatif ? Cet anneau est-il un corps ? (On rappelle que $\mathscr{L}$(E), muni de l'addition et de la composition, est un anneau unitaire).
4. Soit $\varphi = \alpha f + \beta e$ un élément de $\mathscr{F}$. On pose
$$\varphi = \varphi^1 \qquad \text{et} \qquad \varphi^n \circ \varphi = \varphi^{n+1} \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$
Démontrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \varphi^n = \left[(\alpha+\beta)^n - \beta^n\right] f + \beta^n e.$$
5. Déterminer les éléments de $\mathscr{F}$ qui sont involutifs. Préciser la nature et les éléments de ces involutions.

II- On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel euclidien, que $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ en est une base orthonormée, et que $\mathscr{E}$ est un espace affine de repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $O'$ le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Soit s l'application affine de $\mathscr{E}$ dont l'endomorphisme associé est $f_{-2,1}$ et telle que $s(O) = O'$.

1. Déterminer l'image par $s$ du point $I$de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
2. Montrer que $s$ est une isométrie involutive dont on précisera la nature et les éléments géométriques.
3. Soit $Q$ le plan affine d'équation$2x - y - z + 3 = 0$. Déterminer l'image de $Q$ par $s$. (Pour déterminer l'image de $Q$ par s on pourra définir sa position par rapport aux éléments de $s$ ou employer une méthode analytique).

Retour page 1

# LXVI. Rennes, série C

**Ex. 1259.** ——— *3 points.* ./1977/rennesc/exo-1/texte.tex

Un plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé direct.
Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce plan. $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.

**1.** Déterminer la nature et les éléments de chacune des applications $S_1$ et $S_2$ de $P$ dans $P$ qui associent au point $M$ d'affixe $z$ respectivement les points $S_1(M)$ d'affixe $z_1 = \mathrm{i}\overline{z}$ et $S_2(M)$ d'affixe $z_2 = 2\mathrm{i}z + 5\mathrm{i}$.

**2.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ du plan pour lesquels la distance des points $S_1(M)$ et $S_2(M)$ est égale à 1.
Préciser la nature et les éléments de symétrie de $\mathscr{E}$.

**Ex. 1260.** ——— *3 points.* ./1977/rennesc/exo-2/texte.tex

$$\textbf{Soit} \qquad K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4},\ \dot{5},\ \dot{6}\}.$$

**1.** $a$ étant un paramètre, élément de $K$, résoudre et discuter dans $K$ l'équation : $x^2 = a$.
Montrer que l'équation $x^2 + \dot{2}px + q = \dot{0}$, où $p$ et $q$ sont deux éléments de $K$, admet deux racines distinctes ou confondues dans $K$, si et seulement si, $\delta = p^2 - q$ appartient à un sous-ensemble $G$ de $K$.

**2.** Résoudre dans $K$ les équations en $x$ :

a) $x^4 - \dot{5}x^2 + \dot{6} = \dot{0}$

b) $x^3 + x - \dot{2} = \dot{0}$. (On remarquera que cette dernière équation admet la solution $x = \dot{1}$.)

## Problème 439 *14 points.* ./1977/rennesc/pb/texte

A- $\mathscr{P}$ est un plan affine rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $Ox$ et $Oy$ dont les droites affines passant par $O$ et admettant pour vecteur directeur respectivement $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
$a,\ b,\ c$ étant trois réels donnés, $T$ est l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, le point $M' = T(M)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ax + by + c. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de $T$ dans les cas particuliers suivants :

   a) $a = c = 0,\ b = 1$ ;

   b) $a = 0,\ b = 1,\ c \neq 0$ ;

   c) $b = 0$ ?

2. Écrire la matrice de l'application linéaire associée à $T$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
   A quelle condition doivent satisfaire les réels $a,\ b,\ c$ pour que $T$ soit bijective ?
   A quelle condition doivent satisfaire les réels $a,\ b,\ c$ pour que $T$ soit involutive ?
   Quelle est la nature de la transformation $T$ lorsque $b = -1$ ?
   Déterminer l'ensemble $I$ des points de $\mathscr{P}$ invariants par $T$.
   Discuter la nature de $I$ suivant les paramètres $(a,\ b,\ c)$.

3. On suppose que les réels $a,\ b,\ c$ sont tels que $T$ soit bijective, et que l'ensemble $I$ des points invariants est une droite.
   Soit $M_0$ un point de $\mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $I$, $M'_O = T(M_0)$.
   $M$ est un point de $\mathscr{P}$ tel que la droite $(MM_0)$ n'est pas parallèle à $Oy$ et $M' = T(M)$.
   Montrer que les trois droites $I$, $(M_0M)$ et $(M'_0M')$ sont concourantes ou parallèles.
   En déduire une construction simple de $M' = T(M)$ pour tout point $M$ du plan $\mathscr{P}$ connaissant $I$, $M_0 \notin I$ et $M'_0 = T(M_0)$. (On supposera d'abord que la droite $(M_0M)$ n'est pas parallèle à $Oy$).



Retour page 1

4. Montrer que la transformation $T$ est déterminée si l'on suppose qu'elle admet pour ensemble $I$ est points invariants la droite d'équation $y = x + 1$, et que le point $M_0$ de coordonnées $(3\ ;\ -2)$, a pour image de le point $M_0'$ de coordonnées $(3\ ;\ 1)$. (Pour ce faire, on déterminera les réels $(a,\ b,\ c)$ correspondant à $T$.)

   Vérifier que, dans ce cas, $T$ est bijective.

   Construire géométriquement l'image $M_1'$ du point $M_1$ de coordonnées $(-1\ ;\ 2)$, puis l'image $M_0''$ de $M_0'$, enfin l'antécédent $T^{-1}(M_0)$ de $M_0$.

   (Le candidat fera le dessin sur une feuille de papier quadrillé qui lui est remise en supposant le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé (l'origine étant sensiblement au centre de la feuille), et en prenant le centimètre comme unité. Il expliquera brièvement ses constructions).

   Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$, $H$ le projeté de $M$ sur $I$ parallèlement à $Oy$. Vérifier, par le calcul et sur le dessin, que $\overrightarrow{HM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HM}$.

B- On suppose que les trois réels $a,\ b,\ c$ donnés, $b$ différent de $0$.

$t$ est la translation de $\mathscr{P}$ de vecteur $-\vec{\imath}$ (opposé de $\vec{\imath}$), $f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\Gamma$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que si $f$ est telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+1) = ax + bf(x) + c.$$

   En déduire que, si $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $f''$ satisfait la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f''(n) = b^n f''(0).$$

2. $\beta$ désignant un réel positif ou nul, déterminer les fonctions $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''(x) = g''(0)\mathrm{e}^{\beta x}.$$

3. Supposant $b > 0$, on se propose de déterminer les applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables, satisfaisant à la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+1) = ax + bf(x) + c$$

   et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = f''(0)b^x = f''(0)\mathrm{e}^{x \ln b}.$$

   ($\ln b$ : logarithme népérien de $b$.)

   En utilisant les résultats de la question B2 précédente, montrer que les fonctions solutions sont telles que :

   a) si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{a}{2}x^2 + (c - \dfrac{a}{2})x + f(0)$

   b) si $b \neq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{a}{1-b}x + \left[\frac{c}{1-b} - \frac{a}{(1-b)^2}\right](1 - b^x) + f(0)b^x.$$

4. Soit $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Étudier dans ce cas les variations de la fonction $f_1$, solution du problème posé dans la question précédente, et telle que $f_1(0) = 1$. Tracer la courbe $\Gamma_1$ d'équation $y = f_1(x)$.

C- $a,\ b,\ c$ étant trois réels donnés, $b \neq 0$, $U = (u_n,\ n \in \mathbb{N})$ est la suite de réels de premier terme $u_0$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = an + bu_n + c.$$

1. Montrer que s'il existe une courbe $\Gamma$ définie dans la partie B (c'est-à-dire telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, $T$ correspondant aux trois réels $a,\ b,\ c$) qui passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ u_0)$, alors tous les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\Gamma$.

   En déduire $u_n$ en fonction de $n$ lorsque $b = 1$, puis lorsque $b$ est strictement positif et différent de $1$.

   Montrer que la formule donnant $u_n$ en fonction de $n$ pour $b \in \mathbb{R}_+^\star - \{1\}$ s'étend au cas $b < 0$.

2. Comment faut-il choisir $a,\ b,\ c$ et $u_0$ pour que la suite $U$ soit :

   a) constante ;

b) une suite arithmétique

c) une suite géométrique ?

3. Comment faut-il choisir $a$, $b$, $c$ et $u_0$ pour que la suite $U$ soit convergente ? Calculer alors sa limite.

## LXVII. Rennes, série E

Ex. 1261. 3 points. ./1977/rennesE/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace euclidien orienté affine $\mathscr{E}_3$. Soit $\alpha$ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f_\alpha$ l'application de $\mathscr{E}_3$ vers $\mathscr{E}_3$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x, y, z)$ associe $M'(x', y', z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \phantom{-}x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2 - 2\cos\alpha - 4\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + 4 + 2\sin\alpha - 4\cos\alpha, \\ z' = \phantom{-}z \end{cases}$$

Montrer que $f_\alpha$ est une rotation affine de $\mathscr{E}_3$. Vérifier que son axe a pour direction la droite vectorielle de base $\vec{k}$. Donner une mesure en radians de son angle.

**2.** On représente $\mathscr{E}_3$ sur une épure ; la droite définie par $O$ et la droite vectorielle de base $\vec{\jmath}$ est la ligne de terre (que l'on orientera vers la droite sur l'épure).

Utiliser l'une des rotations précédentes pour représenter, sur l'épure, la distance du point $A(4, 1, 3)$ à la droite déterminée par les deux points $B(1, -2, 0)$ et $C(7, 4, 3)$.

Ex. 1262. 3 points. ./1977/rennesE/exo-2/texte.tex

Un enquêteur d'une entreprise de sondage s'adresse à un groupe de 20 personnes au sujet de leurs loisirs. On sait que le nombre de personnes de ce groupe qui s'intéresse à la pêche est 10, que le nombre de personnes de ce groupe qui s'intéresse à la lecture est 8, et que 3 personnes s'intéressent à la fois à la pêche et à la lecture.

**1.** Combien de personnes dans ce groupe ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture ?

**2.** L'enquêteur interroge au hasard une personne du groupe (on suppose que chacune des personnes du groupe a la même chance d'être choisie par l'enquêteur). Quelles sont les probabilités pour que l'enquêteur choisisse

a. une personne s'intéressant à la pêche ;

b. une personne s'intéressant à la lecture ou à la pêche ? ( Le « ou » est à prendre au sens non exclusif, c'est-à-dire que la personne peut s'intéresser à la fois à la pêche et à la lecture. )

**3.** L'enquêteur choisit au hasard dans le même groupe de 20 personnes un échantillon de 4 personnes distinctes. On suppose que tous les échantillons possibles de 4 personnes distinctes ont la même chance d'être choisis. Quelle est la probabilité pour que, dans l'échantillon choisi, il se trouve exactement 3 personnes s'intéressant à la pêche et exactement 1 personne s'intéressant à la lecture ?

N.B. – On observera que certaines personnes du groupe dans lequel est pris l'échantillon s'intéressent à la fois à la pêche et à la lecture.

**Problème 440** *14 points.* ./1977/rennesE/pb/texte

Problème identique à celui de la série C problème Rennes série C

## LXVIII. Rennes remplacement, série C

Ex. 1263. 3,5 points. ./1977/rennescrem/exo-1/texte.tex

Une épreuve consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu ordinaire (jeu de piquet) de 32 cartes ; on suppose que toutes les cartes ont la même chance d'être tirées. On associe à cette épreuve un espace $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ comprenant 32 éventualités, tel que $\mathscr{B} = \mathscr{P}(\Omega)$ et dans lequel tous les singletons sont équiprobables.



Retour page 1

1. $X$ est une variable aléatoire numérique définie sur $\Omega$ qui ne peut prendre que les 4 valeurs : 0, 1, 2 ou 3. On sait que :
   il existe dans $(\Omega,\ \mathscr{B},\ p)$ deux événements $A$ et $B$ tels que :
   $$p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$$
   $$p(A\cap B)=\frac{3}{8}$$
   $$A=\{\omega\ ;\ X(\omega)>1\}\qquad \text{si } \omega\in B,\ X(\omega)\in\{1,\ 3\}$$
   $$p(X=1)\leqslant p(X=2)$$
   $$p(X=0)=\frac{3}{8}.$$
   Montrer que ces données suffisent pour connaître la loi de probabilité de $X$ et déterminer cette loi en calculant pour chaque valeur $k$ que peut prendre $X$ la probabilité $p_k=p(X=k)$.
2. On sait également que $X$ ne dépend que de la valeur de la carte tirée (as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept) et non de sa couleur (trêfle, carreau, cœur, pique) ; qu'elle prend la valeur 3 si l'on tirer une figure (roi, dame, valet) ; que sa valeur est la même pour tous les tirages possibles d'une basse carte (sept, huit, neuf ) ; enfin que la valeur prise par X lorsqu'on tire l'as de pique est strictement supérieure à la valeur correspondant au tirage d'un dix, d'un neuf, d'un huit ou d'un sept. Quels sont les événements $A$ et $B$ ?

**Ex. 1264.** ———— 2,5 *points.* ./1977/rennescrem/exo-2/texte.tex

On pose :
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x\qquad;\qquad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x\qquad;\qquad I_1+I=I_2.$$

1. Calculer $I_2$.
2. Calculer $I_1$.
3. En déduire $I$.

## Problème 441 — *14 points.* ./1977/rennescrem/pb/texte

P est un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct. Á tout point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère est associé le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ appelé affixe du point $m$. On appelle $A$ et $B$ les points de P d'affixes respectives i et $-$i.

A- 1. On considère la relation de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui associe au complexe $z$ le complexe $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$
   Montrer que tout complexe distinct de $-$i (c'est-à-dire tout élément de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$) a une image et que toute image est un complexe distinct de 1 (c'est- à-dire un élément de $\mathbb{C}-\{1\}$).
   2. Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$) dans $\mathbb{C}-\{1\}$) définie par :
   $$\varphi(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$
   Montrer que $\varphi$ est bijective.
   3. Quel est le sous-ensemble $P_1$ de P des points $m$ dont l'affixe $z$ vérifie la propriété $|\varphi(z)|<1$ ?
   4. $k$ étant un nombre réel donné vérifiant $0\leqslant k<1$, montrer que le sous-ensemble $P_2$ de $P_1$ des points $m$ dont l'affixe $z$ vérifie la propriété $|\varphi(z)|=k$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

B- On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   Á tout élément $u=a+\mathrm{i}b$ $(a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$ de cet ensemble, on fait correspondre la fonction $f_u$ associant à tout point $m$ d'affixe $z$ de $P_1$ le point $M$ de $P_1$ d'affixe $Z$ telle que :
   $$Z=\frac{az-b}{bz+a}.$$



Retour page 1

1. Vérifier que, quel que soit l'élément $u$ de $\mathbb{U}$, $f_u$ est définie en tout point de $\mathrm{P}_1$, que c'est une bijection de $\mathrm{P}_1$ sur $\mathrm{P}_1$.
   Montrer qu'il existe un point de $\mathrm{P}_1$, et un seul, qui soit invariant par chaque $f_u$ quel que soit$u \in \mathbb{U}$. On désigne l'ensemble des bijections $f_u$ par $E$.
2. Soit $g$ l'application de $\mathbb{U}$ dans $E$ définie par $g(u) = f_u$.
   Montrer que tout élément de $E$ est l'image par $g$ de deux éléments de $\mathbb{U}$. Si $g(u) = g(u')$, $u' \neq u$, quelle relation existe-t-il entre $u$ et $u'$ ?
3. Rappeler la structure de $(\mathbb{U}, \times)$ (c'est-à-dire $\mathbb{U}$ muni de la multiplication des complexes).
   Étant donné un élément de $E$ correspondant à $u$, élément de $\mathbb{U}$ : $f_u$ montrer que la bijection réciproque $f_u^{-1}$ est un élément de $E$. Quels sont les éléments de $\mathbb{U}$ qui correspondent à cette bijection réciproque $f_u$ (c'est-à-dire quels sont les éléments $v$ de $\mathbb{U}$ tels que $g(v) = f_u^{-1}$) ?
   Montrer que l'identité de $\mathrm{P}_1$ est élément de $E$. Quels sont les éléments correspondants de $\mathbb{U}$ ?
   $u_1$ et $u_2$ étant deux éléments de $\mathbb{U}$, montrer que $f_{u_1} \circ f_{u_2}$ est élément de $E$.
   En déduire la structure de l'ensemble $E$ muni de la loi de composition des applications : $(E, \circ)$. Que peut-on conclure de cette étude pour l'application $g$ définie à la question précédente ?
4. Dans cette question, on se place dans le cas $u = \mathrm{i}$. $\Gamma$ étant le cercle de centre $O$ et de rayon 1, on pose $\Gamma_1 = \Gamma \cap \mathrm{P}_1$. Quelle est l'image de $\Gamma_1$ par $f_{\mathrm{i}}$ ?
   Á quelle transformation ponctuelle simple se réduit la restriction de $f_{\mathrm{i}}$ à $\Gamma_1$ ?
   $D$ étant la droite d'équation $x + py = 0$ $(p \in \mathbb{R})$, on pose $D_1 = D \cap \mathrm{P}_1$. Quelle est l'image de $D_1$ par $f_{\mathrm{i}}$ ?

C- On définit dans l'ensemble $\mathrm{P}_1$ la relation binaire $\mathscr{R}$ de la manière suivante :
$M_1$ et $M_2$ étant deux points quelconques de $\mathrm{P}_1$, $M_1 \mathscr{R} M_2$ signifie qu'il existe une bijection $f_u$ telle que : $M_2 = f_u(M_1)$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathrm{P}_1$.
2. On se propose de définir les classes d'équivalence déterminées dans $\mathrm{P}_1$ par la relation $\mathscr{R}$. $m_0$ étant un point quelconque de $\mathrm{P}_1$, on désigne par $C(m_0)$ sa classe d'équivalence.
   Soit $z_0$ l'affixe de $m_0$ et $z$ l'affixe d'un point quelconque $M$ de $C(m_0)$. Établir que $z$ vérifie une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi(z_0)$ où $\alpha$ est un élément de $\mathbb{U}$. Réciproquement, montrer que tout point $M$ de $\mathrm{P}_1$ d'affixe $z$ vérifiant une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi(z_0)$ où $|\alpha| = 1$ appartient à $C(m_0)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire $|\varphi(z)|$ pour que le point $M$ d'affixe $z$ appartienne à $C(m_0)$.
   Déterminer la classe d'équivalence du point $m_0$.
   Quelle est, en particulier, la classe d'équivalence du point $A$ ?

# LXIX. Rennes remplacement, série E

**Ex. 1265.** ——— *3,5 points.* *./1977/rennesErem/exo-1/texte.tex*

Soit, dans le corps des nombres complexes, l'équation

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - (6i+2) = 0.$$

**1.** Sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure $\alpha$, calculer $\alpha$.

**2.** Mettre l'équation sous la forme $(z-\alpha)(az^2 + bz + c) = 0$ où $a$, $b$, $c$ sont des nombres complexes que l'on calculera, puis la résoudre.

**Ex. 1266.** ——— *3,5 points.* *./1977/rennesErem/exo-2/texte.tex*

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le plan horizontal de projection est le plan de repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; le plan frontal est de repère $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le point $O$ est le centre de la feuille ; la ligne de terre, de repère $(O, \vec{\jmath})$, est le petit axe de la feuille orienté vers la droite. Soit $A$ et $B$ les points de coordonnées $(1,0,2)$ et $(1,5,2)$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs réels tels que

$$\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

Retour page 1

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\Pi$ passant par $A$ dont la direction est le plan vectoriel de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
2. Représenter sur l'épure les projections du point $B$ et les traces du plan $\Pi$.
3. Faire apparaître, sur l'épure, en vraie grandeur, la distance du point $B$ au plan $\Pi$ (on expliquera brièvement les constructions effectuées).

## Problème 442 *13 points.*

*./1977/rennesErem/pb/texte*

Soit $P$ le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère la famille $\Phi$ des applications linéaire $\varphi_{(a,b)}$ de $P$ dans $P$ définies par leur matrice $M_{(a,b)}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a+b}{a-b} & \dfrac{2}{a-b} \\[2ex] -\dfrac{2ab}{a-b} & \dfrac{a+b}{a-b} \end{pmatrix}$$

$a$ et $b$ étant deux réels distincts.

1. Montrer que, quels que soient les réels $a$ et $b$, $\varphi_{(a,b)}$ est involutive. Déterminer, en fonction de $a$ et $b$, des équations cartésiennes de l'axe $D_a$ et de la direction $D_b$ de la symétrie vectorielle $\varphi_{(a,b)}$.
   Montrer que $D_a$ et $D_b$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $P$.
   Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $D_a$, $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $D_b$. Quelle est la matrice de $\varphi_{(a,b)}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $P$ ?
2. On considère le sous-ensemble $\Phi'$. des applications linéaires $\varphi_{(a,b)}$ pour lesquelles $a+b=0$.
   Exprimer $M_{(a,b)}$ en fonction de $a$.
   Déterminer $\varphi_{(a,-a)} \circ \varphi_{(a'-a')}$.
   À quelle condition cette application est-elle une homothétie ?
   Préciser les rapports d'homothétie.
   Dans le cas où $a=-a'$ comparer les axes et les directions de $\varphi_{(a,-a)}$ et $\varphi_{(a',-a')}$.
3. Quelle relation doit lier $a$ et $b$ pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit une isométrie vectorielle ?
   Soit $\Phi''$ l'ensemble des isométries vectorielles $\varphi_{(a,b)}$ de $\Phi$ telles que $b=2a-3$.
   Montrer que $\Phi''$ contient deux isométries vectorielles et déterminer les valeurs correspondantes de $a$.
   Montrer que $\varphi_{\left(\frac{1}{2},-2\right)} \circ \varphi_{(1,-1)}$ est une rotation vectorielle dont on déterminera le Cos et le Sin .
4. On suppose $ab \neq -1$ et $\dfrac{b-a}{1+ab}=1$. Montrer qu'alors l'angle de droites $(D_a, D_b)$ est constant. Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ de direction $P$ étant rapporté au repère orthonormé $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, montrer que la projection d'un point fixe $A$ distinct de $O$ sur la droite affine passant par $O$ et de direction $D_a$ parallèlement à $D_b$ appartient à un cercle fixe passant par $O$ et $A$ lorsque $a$ varie.
5. On considère dans $\mathscr{P}$ l'application affine $f_{(2,1)}$ dont $O$ est un point double et qui est associée à l'application linéaire $\varphi_{(2,1)}$
   Définir analytiquement $f_{(2,1)}$. Trouver l'équation $y=g(x)$ de l'image par $f_{(2,1)}$ de la droite d'équation $x=-1$. On considère la famille des fonctions numériques $g_k$ définies par
   $$g_k(x) = g(x) + \frac{k}{x-1}$$
   $k$ étant un réel non nul. Étudier et représenter graphiquement $g_1$. Soit $\Gamma_k$ la représentation graphique de $g_k$ dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de $\mathscr{P}$. Montrer que, pour $k>0$, les tangentes aux courbes $\Gamma_k$ aux points d'intersection de $\Gamma_k$ avec l'axe de $f_{(2,1)}$ ont pour direction $D_1$. Quelle est l'image par $f_{(2,1)}$ d'une courbe $\Gamma_k$ ?

Retour page 1

# LXX. Rouen, série C

**Ex. 1267.** ———— *3 points.* ./1977/rouenC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $f$ :

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{x-2}{(2x-3)^2}.$$

Montrer qu'il existe deux réels $A$ et $B$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\} \qquad f(x) = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{2x-3}.$$

Calculer

$$I = \int_0^2 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 1268.** ———— *3 points.* ./1977/rouenC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$$

où $b,\ c,\ d$ sont trois nombres complexes.
Déterminer $b,\ c,\ d$ sachant que

$$\begin{cases} f(\mathrm{i}) = 0 \\ f(1) = -4\mathrm{i} \\ f(-\mathrm{i}) = -8\mathrm{i}. \end{cases}$$

$b,\ c,\ d$ étant choisis, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

## Problème 443 *14 points.* ./1977/rouenC/pb/texte

Dans le plan affine (P) rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on définit la loi de composition interne notée $\star$, qui au couple de points $(M,\ M')$ de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$, $(x'\ ;\ y')$ associe le point $m$ de coordonnées $(xx'\ ;\ xy' + x'y)$.

A- 1. On appelle $(P^\star)$ l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$de (P) tels que $x$ soit différent de 0.
Démontrer que $(P^\star)$ est stable pour la loi $\star$.
Par abus de langage, la loi induite par $\star$ sur $(P^\star)$ sera encore notée $\star$. Démontrer que $(P^\star,\ \star)$ est un groupe commutatif. Soit $(P_1)$ l'ensemble des points de $P^\star$ d'ordonnée nulle.
Démontrer que $(P_1, : star)$ est un sous-groupe de $(P^\star)$ isomorphe à $(\mathbb{R}^\star,\ \times)$.

2. Soit $(a\ ;\ b)$ un point donné de $(P^\star)$. On appelle $\varphi_A$ l'application de (P) vers (P) qui au point $M$ associe le point $M'$ vérifiant :

$$\varphi_A(M) = M' = A \star M.$$

Calculer les coordonnées de $M'$ en fonction de celles $(x\ ;\ y)$ de $M$.
Montrer que $\varphi_A$ est une application affine de (P).
Donner la matrice de l'endomorphisme associé dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ .
Reconnaître $\varphi_I$ où $I$ est l'élément neutre de $(P^\star,\ \star)$, et $\varphi_N$ où $N$ est un point quelconque de $(P_1)$.
Déterminer les points invariants de $\varphi_A$. Discuter suivant $A$.

B- On se propose de rechercher les fonctions numériques réelles $f$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}^\star$ , telles que la représentation graphique $(\Gamma^\star)$ de $f$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit un sous-groupe de $(P^\star,\ \star)$.

1. On suppose que le problème admet une solution $f$ de représentation graphique $(\Gamma^\star)$.
Soit $M_1$ et $M_2$ deux points quelconques de $(\Gamma^\star)$ d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$. En écrivant que $(\Gamma^\star)$ est stable pour $\star$, établir une relation (1) liant $f$ , $x_1$ et $x_2$.
Soit $g$ la fonction numérique réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$



Retour page 1

Cette relation étant vérifiée quels que soient $x_1$ et $x_2$ réels non nuls, démontrer que $g$ vérifie

$$(3)\begin{cases} g(1)=0 \quad ; \quad g(-1)=0 \\ g \text{ est une fonction paire} \\ x \in \mathbb{R}^\star \qquad g'(x)=\dfrac{g'(1)}{x}. \end{cases}$$

En déduire la forme générale des fonctions $g$ vérifiant (3), puis celle des fonctions $f$ susceptibles de répondre à la question.

2. Vérifier que les représentations graphiques des fonctions $f$ trouvées au B1 sont bien des sous-groupes de $(P^\star, \star)$.
3. Soit $(\Gamma_1)$ la courbe représentative dans (P) de la fonction $f_1$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f_1(x)=x\log|x|.$$

   a) Étudier les variations de $f_1$ et construire $(\Gamma_1)$. Montrer que $f_1$ peut être prolongée par continuité? pour $x=0$ et que la courbe ainsi obtenue admet à l'origine une tangente que l'on déterminera.
   b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation$x=\lambda$ et $x=1$ avec $0<\lambda<1$. $A(\lambda)$ admet-elle une limite quand $\lambda$ tend vers 0? Pouvait-on le pr'voir?
4. Soit B le point de $(\Gamma_1)$ d'abscisse $\mathrm{e}$ (base des logarithme népériens), $C$ le point de $(\Gamma_1)$ d'abscisse 1. La droite $(IC)$ recoupe la courbe $(\Gamma_1)$ en un point $D$. La droite $(IB)$ recoupe la courbe $(\Gamma_1)$ en un point $E$. Démontrer sans calculs que $E=B\star D$. (On admettra que ces points $E$ et $D$ existent et sont uniques).

- La question B3 est indépendante de ce qui précède.

## LXXI. Rouen remplacement, série C

**Ex. 1269.** *2points.* *./1977/rouenCrem/exo-1/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$1+\log(x+3)>\log(x^2+2x-3)$$

$\log$ désignant la fonction logarithme népérien.

**Ex. 1270.** *4 points.* *./1977/rouenCrem/exo-2/texte.tex*

Un clochard suit une route indéfiniment bordée d'arbres alignés, distants les uns des autres de 10 mètres. Il décide au cours de sa promenade, de jouer au jeu suivant : devant chaque arbre, il lance son unique pièce de monnaie; si c'est pile, il continue dans la même direction, si c'est face, il rebrousse chemin, jusqu'à l'arbre voisin.
Au bout de 6 déplacements, il s'endort au pied de l'arbre où il est.
On appelle $x$ la distance arithmétique, en mètres, entre l'arbre devant lequel il commence son jeu et l'arbre d'arrivée.
Quelles sont les valeurs possibles prises par $x$? Dresser la loi de probabilité de cette variable aléatoire sachant que la pièce n'est pas truquée.
Quelle est la distance ayant la plus grande probabilité?
Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

### Problème 444 *14 points.* *./1977/rouenCrem/pb/texte*

I- Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}=(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère l'endomorphisme $\varphi$ de P ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$

$$A=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 12 & 10\end{pmatrix}.$$



Retour page 1

1. Trouver le snombres réels $\lambda$ tels qu'il existe au moins un vecteur $\vec{u}$ non nul de P vérifiant respectivement $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
   Déterminer l'ensemble $E_1$ des vecteurs $\vec{v}$ et l'ensemble $E_2$ des vecteurs $\vec{w}$ qui vérifient respectivement $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\varphi(\vec{w}) = 2\vec{w}$.
2. Soit les vecteurs $\vec{e}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
   Après avoir vérifié que $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ est une base de P, que l'on notera $\mathscr{B}'$ , et précisé si elle est orthonormée ou non,établir la matrice $B$ de l'application $\varphi$ dans cette base $\mathscr{B}'$.
3. Soit $\alpha$ l'endomorphisme de P tel que $\alpha(\vec{i}) = \vec{e}_1$ et $\alpha(\vec{j}) = \vec{e}_2$. Notant $R$ la matrice de l'application $\alpha$ dans la base $\mathscr{B}$, déterminer $R$ ainsi que la matrice inverse $R^{-1}$ de $R$. Vérifier que $A = R.B.R^{-1}$.

II- Soit $\mathscr{M}$ le plan affine euclidien, de plan vectoriel euclidien associé P, rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$M_0$ étant un point donné du plan $\mathscr{M}$ on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du plan définie de la façon suivante :

notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées du point $M_n$ dans le repère $\mathscr{R}$,

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} x_n = -7x_{n-1} - 6y_{n-1} \\ y_n = 12x_{n-1} + 10y_{n-1}. \end{cases}$$

1. Démontrer que selon la position de $M_0$, les points $M_n$ sont ou bien tous confondus, ou bien tous distincts et alignés sur une droite affine que l'on déterminera.
2. La distance du point $M_n$ au point $O$a-t-elle pour limite l'infini lorsque $n$ tend vers l'infini ?
3. Calculer la limite lorsque $n$ tend vers l'infini de

$$\frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{x_n^2 + y_n^2}.$$

III- Soit $a$ un nombre réel non nul. On note S l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ la condition $f'(x) = af(x)$.

1. Montrer que l'application $f_a$ définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ appartient à S.
2. $f$ étant un élément quelconque de S, quelle est l'application dérivée de l'application $h = \dfrac{f}{f_a}$ ?
   En déduire que $f$ est de la forme $k.f_a$ où $k$ est un nombre réel.
   Trouver toutes les applications $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur$\mathbb{R}$, satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ aux deux conditions
$$\begin{cases} f'(x) = -7f(x) - 6g(x) \\ g'(x) = 12f(x) + 10g(x). \end{cases}$$

# LXXII. Strasbourg, série C

**Ex. 1271.** ——— *5 points.* *./1977/strasbourgC/exo-1/texte.tex*

**1.** Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 - \mathrm{e}^x \end{aligned}.$$

Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé, préciser les branches infinies.

**2.** Soit $\lambda$ un nombre réel et la fonction

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda(x + 1) - \mathrm{e}^x \end{aligned}.$$

On note $\Gamma_\lambda$ la courbe représentative de $f_\lambda$.
Trouver l'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ admet un maximum.
Soit $M_\lambda$ le point d'ordonnée maximale de $\Gamma_\lambda$ ; donner une équation de l'ensemble des points $M_\lambda$.

Retour page 1

Ex. 1272. ——— *3 points.* ./1977/strasbourgC/exo-2/texte.tex

Soit $a$ un nombre réel strictement positif différent de 1.

**1.** Montrer qu'il existe une suite $(u_n)$ à termes positifs définis par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ : \qquad u_{n+1} = \dfrac{1+au_n}{a+u_n}. \end{cases}$$

Vérifier que la suite $(V_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ : \qquad V_n = \frac{-1+u_n}{1+u_n}$$

est géométrique de raison $\dfrac{a-1}{a+1}$.

**2.** Étudier la limite de la suite $(V_n)$ ; en déduire celle de $(u_n)$.

## Problème 445 *12 points.* ./1977/strasbourgC/pb/texte

Soit $E$ un espace affine euclidien rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désigne :

— par $D$ le droite passant par $O$, de vecteur directeur $\vec{\jmath}$ ;

— et par $\Gamma$ le cercle unité ayant pour centre le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

1 ; Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications affines de $E$ dans $E$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $f(M)$ dont les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ sont de la forme

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + cy + d \end{cases}$$

où $a$ et $c$ sont des réels non nuls, et $b,\ d$ sont des réels quelconques.
Montrer que ces applications sont bijectives et laissent la droite $D$ invariante ($f(D) = D$).
Réciproquement, montrer que toute application bijective de $E$ dans $E$ laissant la droite $D$ invariante est un élément de $\mathscr{A}$.

2 ; Montrer que $\mathscr{A}$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

3 ; Quels sont les éléments involutifs de $\mathscr{A}$ ?

4 ; Quelles sont les similitudes directes appartenant à $\mathscr{A}$ ? Les caractériser géométriquement.

5 ; Á tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, appelé affixe de $M$.
Soit $s$ l'application de $E$ dans $E$ qui, à tout point d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = 2\overline{z} - 3\mathrm{i}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de $z$.
Montrer que $s$ est un élément de $\mathscr{A}$ et construire l'ensemble $s(\Gamma)$, image de $\Gamma$ par l'application $s$.

6 ; Soit $f_t$ l'application de $E$ dans lui-même qui, a tout point $M$ du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définies par

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^t x \\ y' = y + t \end{cases}$$

où $t$ est un réel quelconque.

a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{G}$ des applications $f_t$ est un sous-groupe commutatif de $\mathscr{A}$.

b) Étant donné un point $M$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$, on désigne par $\mathscr{C}_{(\alpha,\ \beta)}$ l'ensemble des points $N = f_(M)$ quand $t$ décrit $\mathbb{R}$.
Écrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}_{(\alpha,\ \beta)}$.
Construire les ensembles $\mathscr{C}_{(-1,\ 0)}$, $\mathscr{C}_{(1,\ 0)}$ et $\mathscr{C}_{(0,\ 1)}$.

c) On pose $f_t(\Gamma) = \Gamma_t$ pour $t \in \mathbb{R}^{\star}$.
Montrer que $\Gamma_t$ est une conique dont on déterminera une équation réduite et dont on calculera les coordonnées des sommets en fonction de $t$.

d) Déterminer les valeurs de $t$ pour lesquelles $\Gamma_t$ est tangente à la droite d'équation $y = 0$.
Construire les coniques correspondantes.



Retour page 1

# LXXIII. Strasbourg, série E

**Ex. 1273.** ./1977/strasbourgE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = 2x - \text{Log}\,|e^x - 1|.$$

Étudier les variations de cette fonction. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de cette fonction. (Pour la détermination de limites à $+\infty$ on pourra remarquer que

$$e^x - 1 = e^x\left(1 - e^{-x}\right).)$$

Construire la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**Ex. 1274.** ./1977/strasbourgE/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne $A(0, 2)$ et $B\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et le vecteur $\vec{u} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Soit $R_1$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\theta_1$, dont une mesure est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Soit $R_2$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\theta_2$, dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

On pose $T = t \circ R_2 \circ R_1$.

Déterminer l'application linéaire associée à $T$. Déterminer l'image de $B$ par $T$. En déduire les coordonnées du point invariant par $T$. Quelle est la nature de $T$. ? Donner les éléments caractéristiques de $T$.

## Problème 446

./1977/strasbourgE/pb/texte

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices à 2 lignes, 2 colonnes et à termes réels. Soit $\mathscr{M}_1$, le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ des matrices de la forme $aA + bB$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I – 1. Montrer que $\mathscr{M}_1$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(A, B)$.

2. Montrer que $B^2 = B \times B$ appartient à $\mathscr{M}_1$. En déduire que

$$(\forall M \in \mathscr{M}_1)\,(\forall M' \in \mathscr{M}_1) \quad M \times M' \in \mathscr{M}_1.$$

3. Soit $\varphi$ l'application de $\mathscr{M}_1$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui à $M = aA + bB$ associe $\varphi(M) = a + b + ib$. Montrer que $(\mathscr{M}_1, +, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$. Quelle est la structure de $(\mathscr{M}_1, +, \times)$ ?

4. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_1$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2 + 2i = 0$.

6. En déduire, en utilisant l'isomorphisme $\varphi$, la résolution dans $\mathscr{M}_1$, de l'équation $M^3 = 4A - 2B$.

II – Soit $t$ une application linéaire de $\mathscr{M}_1$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_1$. Soit $T$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $T = \varphi \circ t \circ \varphi^{-1}$.

1. Est-ce que $T$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ ?

2. On suppose dans cette question que $t$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(A, B)$ de $\mathscr{M}_1$.

   a. Montrer que $t$ est une projection. Déterminer le noyau et l'image de $t$.

   b. Déterminer $T$. Montrer que $T$ est encore une projection.

3. On prend maintenant pour $t$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_1$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(A, B)$.

   a. Vérifier que $t$ est involutive. En déduire la nature de $t$ et ses éléments caractéristiques.

   b. Déterminer $T(z)$ pour tout complexe $z$. Quelle est la nature de $T$ ?



Retour page 1

# LXXIV. Toulouse , série C

**Ex. 1275.** ——— *3points.* *./1977/toulouseC/exo-1/texte.tex*

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5 929.
2. Trouver les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels dont le P.G.C.D et le P.P.C.M sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 91x + 588 = 0.$$

**Ex. 1276.** ——— *5 points.* *./1977/toulouseC/exo-2/texte.tex*

1. Soit $\varphi$ la fonction réelle de variable réelle,qui , à $x$,associe

$$\varphi(x) = x^2 + \log x.$$

Déduire de l'étude de ses variations que cette fonction s'annule pour une seule valeur $x_0$ de la variable, comprise entre $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et 1. (On ne cherchera pas à calculer $x_0$)).

2. Soit $f$ la fonction réelle de variable réelle, qui, à $x$, associe $f(x) = 1 - x + \dfrac{1 + \log x}{x}$.

Étudier les variations de $f$. Montrer que la représentation graphique $\mathscr{C}$ de $f$ dans un repère orthonormé d'axes $Ox$ et $Oy$, admet deux asymptotes, dont l'une $D$ n'est pas parallèle à $Oy$ ; préciser la position de $C$ par rapport à $D$. (On ne cherchera ni la valeur du maximum, ni les abscisses des points d'intersection avec $Ox$, ni le point d'inflexion).

3. Construire $C$.
4. Calculer l'aire de l'ensemble E des points $M(x\ ;\ y)$ définis dans le repère $(Ox,\ Oy)$par

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x + \frac{1 + \log x}{x}.$$

On utilisera les valeurs numériques $\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}368$ ; $\frac{1}{\mathrm{e}^2} \simeq 0{,}134$.

## Problème 447 *12 points.* *./1977/toulouseC/pb/texte*

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et soit $\mathscr{V}$ l?espace vectoriel associé.

I- On considére l?ensemble E des points $m$ de P dont les coordonnées$(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Identifier E, déterminer ses foyers, les directrices associées et l'excentricité.

II- Soit $s$ l'application affine de P dans P qui au point $m(X\ ;\ Y)$ associe le point $M'\left(X'\ ;\ Y'\right)$ défini par les formules

$$\begin{cases} X' = \frac{3}{5}X + \frac{8}{5}Y \\ Y' = \frac{2}{5}X - \frac{3}{5}Y. \end{cases}$$

1. Démontrer que $s$ est bijective et déterminer $s^{-1}$ ; en déduire la nature de $s$et les éléments géométriques qui la caractérisent.
2. Démontrer que E est globalement invariante par $s$.

III- Soit $g$ l'application affine de P dans P définie par

$$\begin{cases} X' = \frac{3}{5}X - \frac{8}{5}Y \\ Y' = \frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y. \end{cases}$$

1. $u$ étant la symétrie orthogonale d'axe $x'Ox$, démontrer que $g = s \circ u$.
2. Établir que E est globalement invariante par $g$.



Retour page 1

IV- Étude de l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications affines $f$ de P dans P laissant E globalement invariante.

a) Montrer que toute application $f$ appartenant à $\mathscr{F}$ est bijective. En utilisant le fait qu'une ellipse admet un centre de symétrie unique, prouver que, pour toute application $f$ appartenant à $\mathscr{F}$, $f(O) = O$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

b) Montrer que l'application $a$ définie par

$$(a)\begin{cases} X' = X \\ Y' = 2Y \end{cases}$$

transforme E en un cercle C ; déterminer $a^{-1}$.

c) Prouver que $a \circ f \circ a^{-1}$ transforme C en C . Montrer que les transformations affines qui conservent C sont les isométries affines laissant O invariant. En déduire que : $a \circ f \circ a^{-1}$ est de la forme

$$\begin{cases} X' = X\cos\alpha + \epsilon Y \sin\alpha \\ Y' = X\sin\alpha - \epsilon Y\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \epsilon = \pm 1.$$

En déduire la forme générale des équations de $f$. Quelles sont les valeurs de $\alpha$ et de $\epsilon$ qui donnent les applications $s$ et $g$ ?

# LXXV. Toulouse remplacement, série C

**Ex. 1277.** ———— *4 points.* *./1977/toulouseCrem/exo-1/texte.tex*

Soit E l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ ; la classe d'un entier $n$ sera notée $\overline{n}$.

1. Soit $f$ l'application de E dans E définie par :

$$f(x) = \overline{17}x + \overline{9}.$$

   Trouver l'inverse de $\overline{17}$.
   Résoudre dans E l'équation : $f(x) = 0$.
   Montrer que $f$ est une bijection dont on donnera la bijection réciproque.

2. Soit $g$ l'application de E dans E définie par :

$$g(x) = \overline{22}x + \overline{7}.$$

   Quel est l'ensemble des images des éléments de E par $g$ ?

**Ex. 1278.** ———— *4 points.* *./1977/toulouseCrem/exo-2/texte.tex*

Soient $f$ et $g$ les fonctions numériques de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\log x}{x}$$
$$g(x) = x^2 + 1 - \log x.$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif $x$, on a : $g(x) > 0$.
   (On pourra montrer que $g$ passe par un minimum strictement positif). Étudier la fonction $f$ et la représenter graphiquement dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
   Construire les tangentes à la courbe représentative de $f$ aux points d'abscisses $1$ et $\mathrm{e}$.

2. Calculer l'aire $F(a)$ du domaine limité par la courbe représentative de $f$ et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 1$ et $x = a$ ($a$ étant un réel strictement positif). Déterminer $a$ pour que $F(a)$ soit égale à $1$.

### PROBLÈME 448 *12 points.*

./1977/toulouseCrem/pb/texte

A- Soit V un plan vectoriel euclidien de base orthonormée directe $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Á tout nombre réel $k$, associe l'endomorphisme $F_k$ de V dont la matrice relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$A_k = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+2k & 4k-1 \\ 4-k & -2-2k \end{pmatrix}.$$

Soient $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. deux vecteurs de V.

1. Montrer qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ , $\vec{v}' = \lambda\vec{v}$ forment une base orthonormée directe de V.

   Déterminer les images par $F_k$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire pour quelle valeur de $k$ l'application $F_k$ n'est pas bijective ; déterminer alors son image et son noyau.
2. Pour quelle valeur de $k$, l'application $F_k$ est-elle involutive ? Caractériser l'application obtenue.
3. Pour quelles valeurs de $k$, l'application $F_k$ est-elle une transformation orthogonale ? Caractériser chaque fois l'application obtenue.

B- Soit P le plan affine euclidien de repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'affixe du point $M$ de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Soit $f$ l'application de P dans P qui, au point M d'affixe $z$, associe le point $M$ d'affixe $z$ déterminée par :

   $$z' = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i} \qquad (\overline{z} = x - \mathrm{i}y \text{ est le conjugué de } z = x + \mathrm{i}y).$$

   Montrer que $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on donnera l'équation.
2. Á tout réel non nul $\alpha$, on associe l'application$g_\alpha$ et qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ donnée par : $z' = \mathrm{i}\alpha z + 2$.

   a) Reconnaître la nature de l'application $g_\alpha$ et la caractériser. Soit $\omega_\alpha$ le point invariant de $g_\alpha$. Quel est l'ensemble des points $\omega_\alpha$ quand $\alpha$ décrit l'ensemble des réels non nuls ? (On pourra utiliser l'image $O'$ du point $O$ par $g_\alpha$).

   b) b. On définit, pour tout entier naturel $n$, le point $M_n$ par $M_0 = O$,
   $M_{n+1} = g_{\frac{1}{2}}(M_n)$.
   Soit $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe de $M_n$ et $a$ l'affixe du point $A$, point invariant de $g_{\frac{1}{2}}$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = |z_n - a|$ est géométrique. ($|z_n - a|$ désigne le module du nombre complexe $z_n - a$).
   En déduire les limites des suites $(u_n)$ , $(x_n)$ et $(yn)$ quand n tend vers l'infini.

## LXXVI. Toulouse, série E

Ex. 1279.

./1977/toulouseE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (x+3)e^{\frac{1}{2}|\mathrm{Log}(x+3)^2|}.$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien.)

**1.** Simplifier l'écriture de $f(x)$ suivant les valeurs attribuées à $x$.

**2.** Étudier $f$ (sa continuité, sa dérivabilité) et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Retour page 1

Ex. 1280. ./1977/toulouseE/exo-2/texte.tex

Deux urnes contiennent chacune cinq boules numérotées de 1 à 5, indiscernables au toucher.

**1.** Soit l'épreuve qui consiste à tirer une boule de chaque urne.

a. Décrire un espace probabilisé du type $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ associé â cette épreuve, où $p$ est une probabilité uniforme (équiprobabilité des événements élémentaires).

b. Soit $X$ la variable aléatoire réelle définie sur $\Omega$, qui à chaque événement élémentaire associe la somme des numéros inscrits sur les deux boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de $X$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $X$.

**2.** Soit l'épreuve qui consiste à tirer deux boules de la première urne et une de la seconde,

a. Décrire un espace probabilisé du type $(\Omega', \mathscr{P}(\Omega'), p')$ associé à cette épreuve, où $p'$ est une probabilité uniforme.

b. Calculer les probabilités des événements suivants :

(E1) deux numéros inscrits sont pairs, l'autre impair.

(E2) la somme des trois numéros inscrits est paire.

## Problème 449

./1977/toulouseE/pb/texte

Soit $(P)$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application ponctuelle $T$ qui au point $M$ de coordonnées $(x, y)$ associe le point $M_1$ de coordonnées $(x_1, y_1)$ telles que

$$\begin{cases} x_1 = x + y, \\ y_1 = x - y. \end{cases}$$

1. a. Démontrer que $T$ est une application affine.

 b. Déterminer $T^{-1}$.

 c. $T$ admet-elle des points invariants ? Est-elle involutive ?

2. a. $(P)$ étant le plan des complexes, $M$ a pour affixe $z$ et $M_1$, $z_1$. Démontrer que $z_1 = (1+i)\overline{z}$.

 b. Démontrer que la transformation $T$ est le produit commutatif d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on précisera et d'une homothétie de rapport positif.

3. a. Soit $T^2 = T \circ T$. Caractériser $T^2$.

 b. $M_0$ étant un point donné de $(P)$ distinct de $O$, on pose

$$M_1 = T(M_0), \quad M_2 = T^2(M_0), \quad M_n = T^n(M_0)$$

$$(n \geqslant 2 \text{ et } T^n = T \circ T^{n-1})$$

 Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $M_n$ appartient à la réunion de deux droites $(D)$ et $(D_1)$ distinctes ou non ; lorsqu'elles sont distinctes, préciser suivant la parité de $n$ à laquelle appartient $M_n$.

 c. Déterminer l'ensemble des points $M$, pour lesquels les deux droites $(D)$ et $(D_1)$ sont confondues.

4. On considère la conique $(H)$ d'équation $x^2 - y^2 = 4$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$ et $(\Delta_3)$ les droites d'équations respectives :

$$y = x, \quad y = 1 - x, \quad y = 2 - x$$

 et soit $A_2$ (respectivement $A_3$) le point d'intersection de $(H)$ et $(\Delta_2)$ (respectivement de $(H)$ et $(\Delta_3)$). Les droites $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$, $(\Delta_2)$ et l'arc $A_2\, A_3$ de la courbe $(H)$ déterminent un domaine $(\Sigma)$.

$$(\Sigma) = \{M(x, y) \ : \ y \leqslant x \text{ et } 1 - x \leqslant y \leqslant 2 - x \text{ et } x^2 - y^2 \leqslant 4\}.$$

 a. Déterminer les images par $T$ : $(H')$ de $(H)$, $(\Delta'_1)$ de $(\Delta_1)$ $(\Delta'_2)$ de $(\Delta_2)$ et $(\Delta'_3)$ de $(\Delta_3)$. Construire sur une même figure $(H)$, $(H')$, $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$, $(\Delta_1)$ $(\Delta'_1)$, $(\Delta'_2)$ et $(\Delta'_3)$.

 On prendra le centimètre comme unité de longueur.

 b. Déterminer l'image $(\Sigma')$ du domaine $(\Sigma)$ par $T$.

 c. Calculer l'aire du domaine $(\Sigma')$.



Retour page 1

d. On admet qu'il existe un réel $\lambda$ tel que si $\mathscr{D}$ est un domaine quelconque d'aire $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}'$, son image par $T$, un domaine d'aire $\mathscr{A}'$, alors d' = $\mathscr{A}' = \lambda\mathscr{A}$.
Déterminer $\lambda$ et en déduire l'aire du domaine $(\Sigma)$.

N.B. – Pour déterminer $\lambda$ on pourra considérer un domaine $\mathscr{D}$ simple, par exemple déterminé par un carré ou un cercle ayant une position favorable.

# LXXVII. Toulouse remplacement, série E

Ex. 1281. ———— *4 points.* *./1977/toulouseErem/exo-1/texte.tex*

Soit $P$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et $\theta$ un réel appartenant à $[0, \pi]$. À tout point $M$ de coordonnées $(x,y)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ on associe son affixe $z = x + iy$. On considère l'application $f_\theta$ de $P$ dans $P$ qui à $M$ d'affixe $z$ associe $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta)\overline{z} + 4 + 4i.$$

**1.** Démontrer qu'il existe deux valeurs $\theta_0$ et $\theta_1$ de $\theta$ pour lesquelles $f_\theta$ est une isométrie. Décomposer $f_{\theta_0}$ et $f_{\theta_1}$ en le produit d'une symétrie et d'une translation, le vecteur de la translation définissant la direction de la droite par rapport à laquelle se fait la symétrie.

**2.** Discuter suivant les valeurs de $\theta$ l'existence et l'unicité des points invariants par $f_\theta$ .

Ex. 1282. ———— *4 points.* *./1977/toulouseErem/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soit $(P_1)$ le plan d'équation $2x - 2y + z - 2 = 0$ et les points $A$ de coordonnées $(1, 1, 5)$ et $B$ de coordonnées $(-1, -3, 4)$.

**1.** Calculer les coordonnées du point d'intersection $C$ de la droite $(AB)$ et du plan $(P_1)$. Calculer la distance $d$ du point $A$ au point $C$.

**2.** Retrouver ces résultats par la géométrie descriptive. On prendra le plan d'équation $z = 0$ comme plan horizontal de projection et le plan d'équation $x = 0$ comme plan frontal de projection. L'unité de longueur sera le centimètre. Pour mettre en évidence la distance de $A$ à $C$ le candidat utilisera la méthode de son choix, mais il expliquera les constructions effectuées,

## Problème 450 *12 points.* *./1977/toulouseErem/pb/texte*

I – À tout couple $(a,b)$ de nombres réels, on associe la fonction numérique d'une variable réelle, notée $f_{(a,b)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_{(a,b)}(x) = \frac{a + b\,\mathrm{Log}\,x}{x}.$$

Soit $E = \{f_{(a,b)} \ : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. a. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $\left(f_{(1,0)}, f_{(0,1)}\right)$ constitue une base de $E$.
2. Soit $U$ l'application définie sur $E$ par $U \ : \ f_{(a,b)} \longmapsto I \times f'_{(a,b)}$ où $I$ désigne l'application identique sur $\mathbb{R}_+^*$ et où $f'_{(a,b)}$ est la fonction dérivée de $f_{(a,b)}$. On a donc pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^* \ : \ [U(f)](x) = xf'(x)$.
   a. Montrer que $U$ est un automorphisme de $E$ (application linéaire bijective de $E$ sur $E$).
   b. Déterminer la matrice $M$ de $U$ dans la base $\left(f_{(1,0)}, f_{(0,1)}\right)$.
   c. Déterminer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   d. En déduire $U^n\left(f_{(a,b)}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U^{n+1} = U \circ U^n$.

II – Étudier les fonctions $f_{(1,1)}$ et $f_{(1,-1)}$ et représenter graphiquement ces deux fonctions dans le même repère $\mathscr{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé (l'unité étant le centimètre).

III – 1. On se propose de montrer le résultat préliminaire suivant : Si $g$ est une fonction numérique d'une variable réelle définie, positive ou nulle, continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$) et telle que

$$\int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{alors } g \text{ est nulle sur } [\alpha, \beta].$$



Retour page 1

a. En posant $G(u)=\displaystyle\int_\alpha^u g(x)\,\mathrm{d}x$, montrer que, sous les hypothèses considérées, la fonction $G$ ainsi définie est croissante sur $[\ \alpha\ ,\ \beta\ ]$. Calculer d'autre part $G(\alpha)$ et $G(\beta)$. Que peut-on en conclure pour $G$ ?

b. En déduire par dérivation la conclusion annoncée : $g$ est nulle sur $[\ \alpha\ ,\ \beta\ ]$.

2. Soit $\Phi$ l'application de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi\left(f_{(a,b)},f_{(a',b')}\right)=\int_1^{\mathrm{e}} f_{(a,b)}(x)\times f_{(a',b')}(x)dx.$$

Montrer que $\Phi$ est une forme bilinéaire symétrique définissant un produit scalaire sur $E$ (on pourra simplifier les écritures en notant $f_i$ pour $f_{(a_i,b_i)}$
On suppose ensuite que $E$ est muni de ce produit scalaire.

3. On rappelle que, par définition de la norme,

$$\left\|f_{(a,b)}\right\|=\sqrt{\int_1^{\mathrm{e}}[f_{(a,b)}(x)]^2\,\mathrm{d}x}\,.$$

Calculer $\left\|f_{(1,0)}\right\|$ puis $\left\|f_{(0,1)}\right\|$ (on pourra procéder par intégrations par parties successives).

4. Déterminer une relation entre $a$ et $b$ telle que $\left(f_{(1,0)},f_{(a,b)}\right)$ forme une base orthogonale de $E$.

N.B. Les parties I –, II–, III – sont dans une large mesure indépendantes.

## LXXVIII. Vientiane, série C

**Ex. 1283.** ——— *4 points.* *./1977/vientianeC/exo-1/texte.tex*

1. Soit $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies au moins dans un intervalle ouvert non vide de centre $x_0$. On sait que l'implication (1) :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue en } x_0\\ \text{et}\\ g \text{ est continue en } x_0\end{array}\right| \Rightarrow \quad fg \text{ est continue en } x_0$$

L'implication (2) :

$$fg \text{ est discontinue en } x_0 \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{c} f \text{ est discontinue en } x_0\\ \text{ou}\\ g \text{ est discontinue en } x_0\end{array}\right.$$

est-elle vraie ?

2. a) Soit $F$ la fonction numérique définie dans $[0\,;1]$ par

$$\forall x\in\left[0\,;\frac{1}{6}\right[ \quad : \quad F(x)=6x^2+x+1$$
$$\forall x\in\left[\frac{1}{6}\,;1\right] \quad : \quad F(x)=\frac{6x+3}{2x+5}.$$

Étudier la continuité de $F$ en $\dfrac{1}{6}$.

b) Soit $G$ et $H$ les fonctions numériques définies par :

$$\forall x\in[0\,;1] : G(x)=\cos 3\pi x$$
$$H(x)=\cos 4\pi x.$$

Étudier la continuité des fonctions produit $FG$ et $FH$ en $\dfrac{1}{6}$.

3. L'implication (3) :

$$fg \text{ est discontinue en } x_0 \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{c} f \text{ est discontinue en } x_0\\ \text{ou}\\ g \text{ est discontinue en } x_0\end{array}\right.$$

est-elle varie, quelles que soient les fonctions numériques $f$ et $g$ définies au moins sur un intervalle ouvert non vide de centre $x_0$ ?



Retour page 1

Ex. 1284. ———— *4 points.* ./1977/vientianeC/exo-2/texte.tex

On considère l'application $f$ :

$f\left|\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\longmapsto z^4-z^3+z^2+2\end{array}\right.$ ($\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes)

1. a) Montrer que si l'équation (1) : $f(z)=0$ admet pour racine le nombre complexe $\alpha$ , elle admet aussi pour racine $\overline{\alpha}$.

   b) Montrer que $1+\mathrm{i}$ et $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont racines de l'équation (1).

   c) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1) ? En déduire une factorisation de $f(z)$.
2. Montrer que $f$ est le produit deux deux polynômes du second degré à coefficients réels.

## Problème 451 *12 points.* ./1977/vientianeC/pb/texte

Soit un plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On rappelle que l'ensemble $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ des endomorphismes de $\mathscr{P}$, (applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans$\mathscr{P}$), muni de l?addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I- 1. Soit $p,\ q,\ s$, les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ définis dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ par :

$$\begin{cases}p(\vec{i})=\vec{i}\\ p(\vec{j})=\vec{0}\end{cases}\qquad\begin{cases}q(\vec{i})=\vec{0}\\ q(\vec{j})=\vec{j}\end{cases}\qquad\begin{cases}p(\vec{i})=\vec{j}\\ p(\vec{j})=\vec{i}\end{cases}.$$

Montrer que $p$ et $q$ sont des projections. Quelle est la nature de $s$ ?

2. Soit E le sous-espace de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ engendré par $p,\ q,\ s$. Quelle est la dimension de E ?
3. On note F le sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ constitué par les endomorphismes $f$ tels que :

$$\vec{\imath}.f(\vec{\jmath})=\vec{\jmath}.f(\vec{\imath}).$$

   a) Montrer que $f$ est élément de F si, et seulement si, sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, est de la forme $\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ où $a,\ b,\ d$ désignent trois nombres réels.

   b) Montrer que F=E.
4. Soit $f$ un élément de F de matrice $\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. A tout réel $\lambda$, on associe l'ensemble $E_\lambda$ des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{P}$ tels que $f(\vec{u})=\lambda\vec{u}$.

   a) Montrer que $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$.

   b) Montrer qu'il existe en général deux valeurs distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $\lambda$ pour lesquelles $E_\lambda\neq\left\{\vec{0}\right\}$.

   c) Préciser la nature des endomorphismes correspondant aux cas d'exception.
5. a) Établir l'implication :

$$f\in\mathrm{F}\longleftrightarrow\forall\vec{u}\in\mathscr{P},\qquad\forall v\in\mathscr{P}\qquad\vec{u}.f(\vec{v})=\vec{v}.f(\vec{u}).$$

   b) Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les valeurs de $\lambda$ (distinctes)trouvées au I(4)b, montrer que $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

II- Dans cette question on étudie le cas particulier $f=p+2s-2q$.

1. Quelle est la matrice de $f$ dans la base$(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ? $f$ est-elle bijective ?
2. Déterminer $\lambda_1$ et $\lambda_2$ (on choisira $\lambda_1<\lambda_2$) et vérifier que $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$ sont deux droites vectorielles orthogonales dont on donnera l'équation dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
   On note $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs unitaires de $E_{\lambda_1}$ et $E_{\lambda_2}$respectivement. Quelle est la matrice de $f$ dans la base orthonormée$(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ ?

III- On appelle P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathscr{P}$ et soit $O$ un point de P.

1. Étudier la fonction $g$ :

$$g\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto\dfrac{2}{5}\left(-x-3\sqrt{-x^2+25}\right)\end{array}\right.$$



Retour page 1

et tracer son graphique $\mathscr{C}_1'$ dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On prendra 1 cm pour unité).

2. Soit $\varphi$ l'application affine de P telle que son endomorphisme associé soit l'endomorphisme $f$ étudié en II, et telle que $\varphi(O) = O$.
   a) Montrer que $\varphi$ est bijective et définir analytiquement $\varphi^{-1}$.
   b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 5 = 0$ par rapport à $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.On appelle$\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ par $\varphi$. Déterminer une équation de $\mathscr{C}'$ par rapport à $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   Montrer que $\mathscr{C}'$ est la réunion de $\mathscr{C}_1'$ et d'une courbe $\mathscr{C}_2'$ dont on déterminera une équation. Prouver que $\mathscr{C}_1'$ et $\mathscr{C}_2'$ e sont symétriques par rapport à O.
   En déduire le trace de $\mathscr{C}'$.
   c) Caractériser géométriquement la courbe $\mathscr{C}$. Quelle est son équation dans le plan rapporté au repère $(O,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$. En déduire une équation de $\mathscr{C}$ par rapport à ce repère. Étudier alors la nature de $\mathscr{C}'$. Quels sont les axes de symétrie de $\mathscr{C}'$ ? Les tracer sur la figure faite en III(2)b.

# LXXIX. Vietnam, série C

**Ex. 1285.** ______ . ./1977/vietnamC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, les restes des divisions euclidiennes des nombres $4^n$ et $5^n$ par 7.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation en $x$ :

$$100 + 102^x + 103^x \equiv 0 \pmod 7.$$

**Ex. 1286.** ______ . ./1977/vietnamC/exo-2/texte.tex

Soit le complexe $\alpha = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et la suite $(U_n, n \in \mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$U_0 = 1 + i \qquad \text{et } (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad U_{n+1} = \alpha U_n.$$

**1.** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+6} = U_n$. Construire les images des complexes $U_n$ dans le plan complexe. Soit E l'ensemble de ces images

**2.** On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$
   a) Calculer
$$S_5 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5.$$
   b) Calculer la somme $S_n$ suivant les valeurs de $n$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = U_1 + U_{\varphi(n)}$, $\varphi$ étant une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1,2,3,4,5\}$ que l'on définira.
   Construire l'ensemble des images des complexes $S_n$ dans le plan complexe.

## Problème 452
./1977/vietnamC/pb/texte

Soit $P$ un plan affine rapporté à un repère $(\ O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$ et soit $P'$ l'ensemble des points de $P$ dont les coordonnées sont toutes les deux strictement positives (On représentera $P$ comme un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé en prenant 2 centimètres comme unité.)

I – Soit $\varphi$ l'application de $P$ dans $P'$ telle que, si $M$ a pour coordonnées : $(x,y)$, $M = \varphi(M)$ a pour coordonnées $x' = \mathrm{e}^x$, $y' = \mathrm{e}^y$)

1. Démontrer que $\varphi$ est une bijection.
2. Soit $(L)$, $(E)$, $(I)$ les courbes représentatives dans $P$ des fonctions $\ln$ (logarithme népérien), $\exp$ (exponentielle de base e : $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ ) et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (identité de $\mathbb{R}$). Démontrer que chacune de ces courbes a pour image par $\varphi$ une partie d'elle-même que l'on déterminera. Tracer les courbes $(L)$, $(E)$, $(I)$ sur un même graphique d'un trait de couleur ou marquer d'un trait plus épais les parties de $(L)$, $(E)$, $(I)$ qui représentent $\varphi(L)$, $\varphi(E)$ et $\varphi(I)$ respectivement. Donner une construction géométrique simple de l'image d'un point de $(E)$ utilisant $(E)$ et $(I)$. ( On construira sur le graphique l'image du point $A$ de coordonnées $\left(-1, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. )



Retour page 1

3. Soit plus généralement $(C)$ la courbe d'équation $y = f(x)$ dans $P$. Démontrer que l'image de $(C)$ par $\varphi$ a pour équation $y' = F(x')$, $F$ désignant la fonction $\exp\circ f\circ\ln$. En remarquant que $F$ peut s'écrire sous la forme $(\exp\circ f)\circ\ln$ ou $\exp\circ(f\circ\ln)$, démontrer que si $f$ est dérivable en $x_0$, $F$ est dérivable en $x_0' = \mathrm{e}^{x_0}$ et calculer $F'(x_0')$ en fonction de $x_0$, $f(x_0)$, et $f'(x_0)$ valeur de la dérivée de $f$ au point $x_0$. Caractériser les points $M$ de $(C)$, s'il en existe, tels que les tangentes à $(C)$ en $M$ et à $\varphi(C)$ en $M' = \varphi(M)$ soient parallèles.
4. Quelles sont les droites de $P$ qui se transforment en demi-droites, privées de leur origine, de $P'$ ? Déterminer et représenter les images des droites d'équations respectives

$$x = 0,\quad y = 0,\quad y = -x + \ln 2 \quad\text{et}\quad y = x + \ln 2.$$

II – Soit $\mathscr{P}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le plan vectoriel associé à $P(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\Pi$ l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ avec $X \in \mathbb{R}_+^*$ et $Y \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit dans $\Pi$ les lois $\oplus$ et $\odot$ par

$$(\forall\lambda\in\mathbb{R})\ \left(\forall\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\in\Pi\right)\ \left(\forall\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}\in\Pi\right)\ \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}XX'\\YY'\end{pmatrix}$$

et

$$\lambda\odot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X^\lambda\\Y^\lambda\end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(\Pi,\oplus,\odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Quel est le vecteur « nul » de $\Pi$ ?
2. $\lambda$ et $\mu$ désignant deux réels, montrer que

$$\lambda\odot\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\\mathrm{e}\end{pmatrix}\oplus\mu\odot\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\\mathrm{e}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda+\mu}\\\mathrm{e}^{\lambda+2\mu}\end{pmatrix}$$

En déduire que $\mathscr{B} = \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\\mathrm{e}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\\mathrm{e}^2\end{pmatrix}\right]$ est une base de $\Pi$. Exprimer en fonction de $X$ et de $Y$ les coordonnées de l'élément $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ de $\Pi$ dans la base $\mathscr{B}$.
Application. –
Étant donné $n\in\mathbb{N}$, calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $\begin{pmatrix}\mathrm{e}\\\mathrm{e}^n\end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix}3\\3^n\end{pmatrix}$.
3. Soit $f$ l'application de $\Pi$ dans $\Pi$ qui associe au vecteur $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ le vecteur $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ tel que $U = \dfrac{X}{Y}$ et $U = \dfrac{X^2}{Y^2}$.
Démontrer que $f$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\Pi,\oplus,\odot)$
Déterminer $f\circ f$ et caractériser entièrement l'endomorphisme $f$.
4. On convient de représenter $\Pi$ dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes $\Omega X$ et $\Omega' Y$, l'unité étant (2 centimètres, en associant à tout élément $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ de $\Pi$ le point de coordonnées $(X,Y)$. Tracer la représentation du noyau et de l'image de $f$ (Démontrer que les points représentatifs d'un vecteur $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et de son image $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ par $f$ sont alignés avec $\Omega$.

Construire le point représentatif de l'image du vecteur $\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ à partir du point représentant ce vecteur. Tracer la représentation de la droite vectorielle de $\Pi$ admettant pour base le vecteur $\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.



Retour page 1

# Chapitre XX

# 1978.

## Sommaire

# I. Aix-Marseille, série C

Ex. 1287. ./1978/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Un plan euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appelle D (respectivement $\Delta$) la droite passant par $O$ dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{\imath}\cos\theta - \vec{\jmath}\sin\theta$) avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$.

1. Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint $(P,\ Q)$ dont $M$ soit le milieu tel que $P \in$D et $Q \in \Delta$.
2. On appelle $Q'$ (respectivement $P'$) le projeté orthogonal de $P$ (respectivement $Q$) sur $\Delta$ (resp. D) et $M'$ le milieu du bipoint $(P',\ Q')$.
   On désigne par S l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $\mathrm{S}(M) = M'$.
   Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{OQ} = r'\vec{v}$.
   Calculer en fonction de $r,\ r',\ \theta$, les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$.
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

Ex. 1288. ./1978/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Soit $E$ l'ensemble des triplets $X = (p,\ q,\ r) \quad (p \in GZ,\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}^{\star})$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application $f$ de $E$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes telle que

$$X \in E \longmapsto f(X) = \frac{p + \mathrm{i}q}{r} = Z.$$

**1.** Calculer $|Z|$.
Montrer que, dans $E$, la loi notée $\star$, définie par

$$X_1 \star X_2 = (p_1p_2 - q_1q_2, p_2q_1 + p_1q_2, r_1r_2)$$

avec $X_1 = (p_1,\ q_1,\ r_1)$ et $X_2 = (p_2,\ q_2,\ r_2)$ est une loi de composition interne.
Calculer $f(X_1 \star X_2)$. Montrer que $f$ est un homomorphisme de $(E,\ \star)$ dans $(\mathbb{C},\ .)$.

**2.** Vérifier que si $X_0 = (3,\ 4,\ 5)$, $X_0 \in E$.
Calculer $X_0 \star X_0$, $X_0 \star (X_0 \star X_0)$.
En déduire deux solutions, autres que $X_0$, en nombres entiers positifs de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

## Problème 453 ./1978/aixmarseilleC/pb/texte

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
$\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\mathscr{F}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I- 1. Soit $u$ la fonction affine définie par :

$$x \in \mathbb{R} \to u(x) = ax + b \qquad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $u$ vérifie la relation

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |u(x) - u(y)| \leqslant |a|.|x - y|.$$

2. Soit $V$ la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \to V(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Montrer que $V$ vérifie la relation

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |V(x) - V(y)| \leqslant |x - y|.$$

3. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$ :

$$(\exists\ M,\ M \in \mathbb{R}^+),\ (\forall t \in \mathbb{R}), \quad |f(t)| \leqslant M.$$

Retour page 1

a) Montrer qu'il existe une fonction $F$, continue sur $\mathbb{R}$, définie par

$$x \in \mathbb{R} \to F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

c) En déduire que les applications $F_1$ et $F_2$ définies par

$$F_1 : x \longrightarrow \sin x$$
$$F_2 : x \longrightarrow \log(\mathrm{e}^x + 1)$$

vérifient respectivement

$$(\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2),\ |F_1(x) - F_1(y)| \leqslant |x - y|\,,$$
$$|F_2(x) - F_2(y)| \leqslant |x - y|\,.$$

II- On se propose d'étudier l'ensemble (L) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la proposition :

$$\left\{(\forall f,\ f \in (\mathrm{L})\ ), \quad (\exists \lambda_f,\ \lambda_f \in \mathbb{R}_+),\ (\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda_f\,|x - y|\right\}.$$

1. Montrer que (L) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F},\ +,\ .)$.
2. Établir que $(\forall f_1,\ f_1 \in (\mathrm{L})\ ), \quad (\forall f_2,\ f_2 \in (\mathrm{L})\ ), \quad f_2 \circ f_1 \in (\mathrm{L})$ où $\circ$ désigne la composition des applications.
3. Montrer que toute application de (L) est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

III- 1. Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$x \to \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin x.$$

Vérifier que

$$(\forall (x,\ y),\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2), \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{3}\,|x - y|\,,$$

et $\varphi(\pi) = \pi$.

2. Soit $(u_n)$ la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star), \quad u_n = \varphi(u_{n-1}).$$

Établir que $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_n - \pi| \leqslant \dfrac{1}{3^n}\,|u_0 - \pi|$.

En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. Donner sa limite.

IV- On définit les deux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\theta : x \longrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$G : x \longrightarrow G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la fonction $\theta$. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.
2. Démontrer que $(\forall t,\ t \in \mathbb{R}), \quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$.
   En déduire que $G$ appartient à (L).
3. Démontrer que $G$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
   Étudier le sens de variation de $G$.
4. Établir que $(\forall x,\ x \geqslant 1), \quad \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction $G$ est bornée et admet une limite $\ell$ (qu'on ne calculera pas) lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

# II. Aix-Marseille Montpellier Nice & Toulouse, série E

**Ex. 1289.** ./1978/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension trois muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On donne $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, et $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par $\{\vec{i}-\vec{j},\ \vec{j}-\vec{k}\}$.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$.
2. Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\vec{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{B}$, calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de l'image de $\vec{u}$ sur $\vec{P}$ de direction $\mathscr{D}$.

**Ex. 1290.** ./1978/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

Soit $\varphi$ un nombre réel donné appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(z^2-2z\right)\cos^2\varphi+1=0 \qquad \text{(où } z \text{ désigne l'inconnue).}$$

Donner en fonction de $\varphi$, le module et un argument de chaque solution.

## Problème 454

./1978/aixmarseilleE/pb/texte

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle donnée par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+\log\frac{x}{x+1}.$$

I.
1. Donner l'ensemble de définition de $f$.
   Déterminer la limite à droite de $f$ en 0 (on pourra poser $t=\frac{1}{x}$.)
2. Étudier le sens de variation de $f$.
   Construire la courbe représentative de cette fonction dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (on prendra 3 cm pour unité de longueur).
3. Si $k$ est un réel strictement positif donné, calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale

$$\int_1^k \log\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x.$$

   Donner l'expression de $\displaystyle\int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$.

II. Dans cette partie, $m$ désigne un réel strictement positif.

1. Montrer que l'on a : $\displaystyle\frac{1}{m+1}\leqslant\int_m^{m+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.
   (On pourra utiliser un encadrement convenable de $\frac{1}{x}$, si $x\in[m\,;\,m+1]$.)
2. Démontrer l'égalité : $\displaystyle\int_m^{m+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{m}-f(m)$.
   En déduire que : $0\leqslant f(m)\leqslant\dfrac{1}{m(m+1)}$.

III.
1. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{0,\ -1\},\qquad \frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}.$$

Retour page 1

2. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{2n(2n+1)}{.}$$

Á l'aide de la question précédente, simplifier l'expression de $S_n$.
Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et donner sa limite.

3. $n$ étant toujours u entier strictement positif, déduire des résultats de la partie **??** du problème que l'on a :

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to pf} [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)]$.

4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Vérifier que

$$f(n) + f(n+1) \cdots + f(2n) = u_n - \log 2 - \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Montrer que le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et donner sa limite.

## III. Aix-Marseille remplacement, série C

**Ex. 1291.** ./1978/aixmarseilleCrem/exo-1/texte.tex

Un plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle $D$ (respectivement $\Delta$) la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{\imath}\cos\theta - \vec{\jmath}\sin\theta$) avec $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

1. Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint $(P,\ Q)$ dont $M$ soit le milieu et tel que $P \in D$, $Q \in \Delta$.
2. On appelle $Q'$ (respectivement $P'$) le projeté orthogonal de $P$ (respectivement $Q$) sur $\Delta$ (resp. $D$) et $M'$ le milieu du bipoint $(P',\ Q')$. On désigne par $S$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $S(M) = M'$.
Démontrer que $S$ est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = r'\vec{v}$. Calculer en fonction de $r$, $r'$, $\theta$ les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ et $(x'\ ;\ y')$ de $M'$.
4. Démontrer que $S$ est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

**Ex. 1292.** ./1978/aixmarseilleCrem/exo-2/texte.tex

Soit E l'ensemble des triplets $X = (p\ ;\ q\ ;\ r)$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}^\star)$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application $f$ de E dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes telle que

$$X \in \mathrm{E} \longmapsto f(X) = \frac{p + \mathrm{i}q}{r} = Z.$$

**1.** Calculer $|Z|$.

**2.** Montrer que, dans E, la loi notée $\star$, définie par

$$X_1 \star X_2 = (p_1p_2 - q_1q_2\ ;\ p_2q_1 + p_1q_2\ ;\ r_1r_2))$$

avec $X_1 = (p_1\ ;\ q_1\ ;\ r_1)$ et $X_2 = (p_2\ ;\ q_2\ ;\ r_2)$ est une loi de composition interne.
Calculer $f(X_1 \star X_2)$. Montrer que $f$ est un homomorphisme de (E, : $\star$) dans $(\mathbb{C},\ \dot{})$.

**3.** Vérifier que si $X_0 = (3\ ;\ 4\ ;\ 5)$, $X_0 \in$E.
Calculer $X_0 \star X_0$, $X_0 \star (X_0 \star X_0)$.
En déduire deux solutions, autres que $X_0$, en nombres entiers positifs, de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

## IV. Aix-Marseille remplacement, série E

**Ex. 1293.** ./1978/aixmarseilleerem/exo-1/texte.tex

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension trois muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, et $\vec{P}$ le plan engendré par $\left\{\vec{i}-\vec{j},\ \vec{j}-\vec{k}\right\}$.

**1.** Montrer que les sous-espaces vectoriels $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$.

**2.** Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\vec{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{B}$, calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de l'image de $\vec{u}$ par la projection sur $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$.

**Ex. 1294.** ./1978/aixmarseilleerem/exo-2/texte.tex

Soit $\varphi$ un nombre réel donné appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(z^2-2z\right)\cos^2\varphi+1=0,$$

où $z$ désigne l'inconnue.
Donner, en fonction de $\varphi$, le module et un argument de chaque solution.

## V. Amiens, série C

**Ex. 1295.** *4 points.* ./1978/amiensC/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $U$ et $V$ deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout entier naturel $n$ associent respectivement $U_n$ et $V_n$ définis par :

$$U_0=1 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})U_n+3$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad V_n=U_n-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Calculer $V_0$. Déterminer une relation entre $V_{n+1}$ et $V_n$, en déduire en fonction de $n$ l'expression de $V_n$, puis celle de $U_n$, pour tout entier naturel $n$.

**2.** Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M_1$, d'affixe $z_1$, tel que $z_1=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})z+3$.
On pose $f^1=f$ et $\forall n\in\mathbb{N}^{\star}$, $f^{n+1}=f\circ f^n$. Quelle est la nature géométrique de $f$, ainsi que celle de $f^n$ ?
Soit $M_n=f^n(M)$, déterminer l'affixe $z_n$ de $M_n$.

**3.** Soit $A_0$ le point de $\mathscr{P}$ d'affixe 1, déterminer l'affixe de $A_n$. Comparer le résultat obtenu à la valeur de $U_n$. Expliquer.

**Ex. 1296.** *4 points.* ./1978/amiensC/exo-2/texte.tex

Un vendeur de journaux a, chaque semaine entre 0 et 5 clients pour une revue hebdomadaire.
Soit $E=\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$, où$A_n$ désigne l'événement : « il y a eu $n$ clients pour le revue ».
$(E,\ CaligP(E))$, est muni de la probabilité $p$ définie par :

$$p(A_0)=p(A_5)=\frac{1}{32}\quad p(A_1)=p(A_4)=\frac{5}{32}\quad p(A_2)=p(A_3)=\frac{10}{32}.$$

Le vendeur gagne 3 francs par exemplaire vendu et perd 1 franc en frais divers par exemplaire invendu.
Dans le cas où il a commandé $p$ exemplaires $(1\leqslant p\leqslant 5)$, on définit sur $(E,\ \mathscr{P}(E))$ la variable aléatoire réelle $G_p$ par : $G_p(A_n)$ est son gain (négatif ou positif) lorsque $n$ clients se sont présentés dans la semaine $(0\leqslant n\leqslant 5)$.

**1.** Calculer $G_p(A_n)$ pour tout $p\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ et $n\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.
(On peut disposer les résultats sous forme de tableau.)

**2.** Calculer les espérances mathématiques :

$$E(G_1),\ E(G_2),\ E(G_3),\ E(G_4),\ E(G_5).$$

Que feriez-vous à la place du vendeur ?

## 🏛PROBLÈME 455 *12 points.*

./1978/amiensC/pb/texte

On désigne par (E, $+$, .) l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et par $f_1$, $F_2$ et $f_3$ trois éléments de E tels que

$$\begin{cases} f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0, \\ f_1(x) = x^2 \log|x|, \\ f_2(x) = (x^2+1)\log|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star \\ f_3(x) = x \log|x|. \end{cases}$$

Soit $L = \left\{ f \in \mathrm{E} / \exists (a,\ b,\ c)\ : (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{et} f = af_1 + bf_2 + cf_3 \right\}$.

A- 1. Montrer que $(L,\ +,\ .)$ est un sous-espace vectoriel de (E, $+$, .) de base $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$.

2. Soit $P$ l'ensemble des applications paires de $L$ et $I$ l'ensemble des applications impaires de $L$. Montrer que $P$ est le plan de base $(f_1,\ f_2)$ et $I$ est la droite de base $f_3$.

3. Soit $\varphi$ l'application de $L^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, si $f$et $g$ ont respectivement pour coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ par rapport à $\mathscr{B}$,

$$\varphi(f\ ;\ g) = aa' + 2bb' + cc' + (a'b + ab').$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire défini sur $L$.

Montrer que $P$ et $I$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux.

Déterminer $f_4$ de façon que $f_1$ , $f_4$ , $f_3$ soit une base orthonormée de $L$.

B- Soit $h$ l'application de $\mathbb{R}^\star - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$h(x) = \frac{x+1}{2x+1} + \log|x|.$$

1. a) Étudier les variations de $h$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $h$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On ne demande pas de construire $(\mathscr{C})$).

b) Montrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe $Ox$ en trois points d'abscisses $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ telles que $\alpha < \beta < \gamma$/ Vérifier que :

$$-1 \leqslant \alpha < -\frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{4} < \beta < -\frac{1}{8} \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{8} < \gamma < \frac{1}{2}.$$

c) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}^\star - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. Soit $f_5 = f_1 + f_3$. Étudier $f_5$ (continuité, dérivabilité, sens de variation, limites). Construire sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le repère $\mathscr{R}$. (On pourra utiliser le signe de $h(x)$ pour déterminer celui de $f_5(x)$).

3. Soit $F$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \int_1^x f_5(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence et la continuité de $F$. Calculer $F(x)$ pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}^\star$. En déduire la valeur de $F(0)$.

C- Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = -2(x^2 - x)\log|x|.$$

On considère l'espace vectoriel euclidien $L$, muni de la base orthonormée $(f_1,\ f_4,\ f_3)$.

a) Montrer que $g$ est élément de $L$.

b) Soit $S$ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $P$. Montrer que $S(g)$ appartient à la droite vectorielle engendrée par $f_5$. En déduire le sens de variation de $S(g)$.

c) Construire la courbe $(\Gamma')$ représentative de $S(g)$.

d) Calculer l'aire, $\mathscr{A}$, de la portion de plan comprise entre $(\Gamma)$, $(\Gamma')$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.



Retour page 1

## VI. Amiens remplacement, série E

**Ex. 1297.** *4 points.* ./1978/amiensE/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(3~;~-1)$ et $B(0~;~2)$.
On désigne par :

- $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\sqrt{2}$
- $r$ la rotation de centre $B$ et d'angle dont une mesure est $\dfrac{3\pi}{4}$
- $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

1. Construire, après avoir donné une justification rapide, le point $\Omega$ du plan, dont l'image par $t \circ r \circ h$ est l'origine $O$.
2. Quelle est la nature de la transformation $t \circ r \circ h$ ?
   En donner les éléments caractéristiques. (On utilisera les nombres complexes ou toute autre méthode.)
   Vérifier le résultat du 1.

**Ex. 1298.** *4 points.* ./1978/amiensE/exo-2/texte.tex

Soit $a$, $b$ et $c$ les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^3 - (3+2\mathrm{i})z^2 + (3+11\mathrm{i})z - 2(1+7\mathrm{i}) = 0.$$

1. Sachant que $a \in \mathbb{R}$, calculer $a$, puis $b$ et $c$.
2. On désigne par $A$, $B$ et $C$ les images dans le plan complexe des nombres $a$, $b$ et $c$.
   Déterminer l'affixe de l'isobarycentre du triangle $ABC$.

## VII. Amiens remplacement, série E

**Ex. 1299.** *4 points.* ./1978/amiensErem/exo-1/texte.tex

Linéariser $\sin^5 x$.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 1300.** *4 points.* ./1978/amiensErem/exo-2/texte.tex

$\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On associe à chaque nombre complexe $z = x + : icy$ son image $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ dans ce repère.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2(11+3\mathrm{i})z + 16(7+\mathrm{i}) = 0.$$

**2.** O,n appelle $M_1$ et $M_2$ les images des solutions de cette équation. Déterminer toutes les similitudes de centre $O$ qui transforment $M_1$ en $M_2$ ou bien $M_2$ en $M_1$. Préciser les éléments géométriques qui les caractérisent.

**Problème 456** *12 points.* ./1978/amiensErem/pb/texte

Dans tout le problème, $C$ et $S$ désignent les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$C : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}~;~S : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

I. 1. Étudier les fonctions $C$ et $S$. On appelle $\Gamma$ (respectivement $\Sigma$) la courbe représentative de $C$ (respectivement $S$). Construire $\Gamma$ et $\Sigma$ sur une même figure.

2. a) Justifier sans calcul le fait que $S$ admette une fonction réciproque $S^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. $S^{-1}$ est-elle continue et dérivable ?

   b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2\mathrm{e}^x}.$$

   c) Déterminer l'expression de $S^{-1}(y)$ en fonction de $y$.
   (On pourra utiliser la formule du I(2)bet poser $X = \mathrm{e}^x$).

3. Soit $m$ un paramètre réel.

   a) Démontrer que $\Gamma$ admet une tangente au point d'abscisse $m$. Même question por $\Sigma$. Calculer les coordonnées du point $T_m$ d'intersection de ces tangentes, s'il existe.

   b) Quel est l'ensemble des points $T_m$ lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}$ ? Le construire

II. E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Á tout nombre réel $t$, on associe l'endomorphisme $\varphi_t$ de E dont la matrice dans la base $/ij$ est :

$$A_t = \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ S(t) & C(t) \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall t' \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} &C(t)^2 - S(t)^2 = 1 \\ &C(t)C(t') + S(t)S(t') = C(t+t') \\ &S(t)C(t') + S(t')C(t) = S(t+t'). \end{aligned}$$

2. Soit $\Phi$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_t$. Montrer que $\Phi$ est un groupe pour la loi de composition des applications notée $\circ$ et que l'application $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \Phi \\ t &\longmapsto \varphi_t \end{aligned}$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},\ +)$ sur le groupe $(\Phi,\ \circ)$.

3. Si $t \neq 0$, on considère pour chaque valeur du paramètre réel $\lambda$, le sous-ensemble $\mathrm{E}_\lambda$ défini par :

$$\vec{u} \in \mathrm{E}_\lambda \text{ si et seulement si, } \varphi_t(\vec{u}) = \lambda \vec{u}.$$

   a) Démontrer que $\mathrm{E}_\lambda = \{\vec{0}\}$,n sauf pour deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ que l'on déterminera en fonction de $t$. (On choisira $\lambda_1 < \lambda_2$).

   b) Montrer que $\mathrm{E}_{\lambda_1}$ et $\mathrm{E}_{\lambda_2}$ sont deux droites vectorielles indépendantes de $t$ dont on précisera des vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

   c) Montrer que $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ est une base de E et écrire la matrice de $\varphi_t$ dans cette nouvelle base.

III. $\mathscr{E}$ est l'espace affine euclidien associé à E. Soit $f_t$ l'application affine de $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned} f_t : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathscr{E} \\ M &\longmapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{OM'} = \varphi_t(\overrightarrow{OM}) \end{aligned}$$

1. Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur $\mathscr{E}$ par :
   $M\mathscr{R}M'$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M' = f_t(M)$.
   Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $P_0$ le point de coordonnées $(4\ ;\ 5)$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $H$ la classe d'équivalence de $P_0$.

   a) Quelles sont les coordonnées $x$ et $y$ d'un point $P$ de $H$ ?

   b) Vérifier que $y > 0$.

   c) En utilisant l'égalité $C(t)^2 - S(t)^2 = 1$, montrer que $H$ est une branche d'hyperbole équilatère que l'on construira.

Retour page 1

# VIII. Besançon, série C

**Ex. 1301.** *4 points.* *./1978/besanconC/exo-1/texte.tex*

$a$ et $b$ étant deux entiers naturels vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x,\ y)$ éléments de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$x^2 - y^2 = a^2b^2.$$

*Applications* : Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ dans les deux cas suivants :

$$(a,\ b) = (7\ ;\ 2)$$

$$(a,\ b) = (11\ ;\ 5)$$

**Ex. 1302.** *4 points.* *./1978/besanconC/exo-2/texte.tex*

Le plan vectoriel E est rapporté à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $f$ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

**1.** Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que la famille $(\vec{v}, f(\vec{v}))$ soit une famille liée et vérifier que c'est une droite vectorielle.

**2.** Soit $\vec{i'} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Après avoir vérifier que $(\vec{i'}, \vec{\jmath})$ est une base de E, donner la matrice de $f$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{\jmath})$.

**3.** Montrer que $f$ est la composée de deux symétries vectorielles $f_1$ et $f_2$ ($f = f_2 \circ f_1$) telles que $f_1(\vec{i'}) = f_2(\vec{i'}) = \vec{i'}$ et $f_1(\vec{\jmath}) = -\vec{\jmath}$.

## Problème 457 *12 points.* *./1978/besanconC/pb/texte*

A- 1° $f$ est une application dérivable de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ ; $a$ est un réel strictement positif donné.
Soit $g_a$ l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto g_a(x) = f(ax) - f(x).$$

Montrer que $g_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et déterminer sa fonction dérivée.

2° On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des applications $f$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, dérivables dans $\mathbb{R}_+^\star$, vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \qquad f(xy) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

a) Vérifier que pour tout réel $k$, la fonction $k\log$ appartient à $(\mathscr{F})$. ($\log$ désigne le logarithme népérien.)

b) Si $f$ est un élément de $(\mathscr{F})$, montrer que $f(1) = 0$.

c) Si $f$ est un élément de $(\mathscr{F})$, que peut-on dire de toute fonction $g_a$ introduite au A ?
En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}^\star, \qquad af'(a) - f'(1) = 0$.

d) Conclure alors que $f$ est une fonction du type $x \longmapsto k\log x$ ($k$ étant une constante réelle), puis donner $(\mathscr{F})$.

B-

C- Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices carrées

$$M_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

1° Montrer que $\mathscr{T}$ est un groupe commutatif pour la loi $\times$ des matrices.

2° $f$ est une application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante (2) que doit vérifier $f$ pour que l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathscr{T}$ définie par :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ f(a) & a \end{pmatrix}$$

soit un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^\star,\ \times)$ dans $(\mathscr{T},\ \times)$.

3° a) $f$ étant de plus dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifiant (2), soit $h$ l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Montrer que $h \in (\mathscr{F})$.

b) En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, dérivables dans $\mathbb{R}_+^\star$ et vérifiant (2) est l'ensemble des applications :

$$x \longmapsto kx\log x \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

D- Soit $\mathscr{E}$ un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. A tout réel $a \in \mathbb{R}_+^\star$, on associe l'application affine $\varphi_a$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $\varphi_a(O) = O$ et dont l'endomorphisme associé a pour matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a\log a & a \end{pmatrix}$.

**1.** Montrer que l'ensemble des applications $\varphi_a$, $a \in \mathbb{R}_+^\star$, muni de la loi de compositions des applications, est un groupe.

**2.** Montrer que la relation binaire $\mathscr{R}$ définie dans $\mathscr{E}$ par :

$$\forall (M,\ M') \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}, \qquad M\mathscr{M}' \iff \exists a \in \mathbb{R}_+^\star \quad M' = \varphi_a(M)$$

est une relation d'équivalence.

**3.** Vérifier que la classe d'équivalence du point $M_0\,(x_0\ ;\ y_0)$ avec $x_0 \neq 0$ est la courbe d'équation :

$$y = x\left(\frac{y_0}{x_0} + \log\frac{x}{x_0}\right).$$

**4.** Représenter la classe d'équivalence de $M_0\,(-2\ ;\ 2)$. On pourra prendre une repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

## IX. Besançon Dijon Nancy Metz Reims & Strasbourg, série E

**Ex. 1303.** ——— *5 points.* *./1978/besanconE/exo-1/texte.tex*

Pour chaque réel $\theta$ appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on définit l'application $f_\theta$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_\theta(z) = z^2\cos^2\theta - 2z\cos\theta + 1 + \sin^2\theta.$$

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ où l'on a choisi un repère cartésien orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par E l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle qu'il existe $\theta$ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $f_\theta(z) = 0$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\theta(z) = 0$.

**2.** Si le point $M$ d'affixe $z$ appartient à E, que peut-on dire du point $M'$ d'affixe $\overline{z}$?

Pour $\theta$ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ fixé, calculer la somme des zéros de $f_\theta$ ; en déduire que E est une partie du demi-plan ensemble des points d'abscisse positive.

**3.** Pour $z$ zéro de $f_\theta$, calculer $z^2 + \overline{z}^2$. Déterminer E et tracer sa représentation graphique.

**Ex. 1304.** ——— *4 points.* *./1978/besanconE/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 où l'on a choisi un repère cartésien $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $A$ et $B$ les points de $\mathscr{E}$ qui ont respectivement pour coordonnées $(4\ ;\ 2\ ;\ 2)$ et $(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$, on désigne par $s$ la symétrie orthogonale par rapport à un plan P telle que $s(A) = B$.

**1.** Donner une équation cartésienne du plan P.

**2.** Déterminer analytiquement $s$.

**3.** Soit Q le plan dont un repère cartésien est $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath})$. Montrer que Q est globalement invariant par $s$, reconnaître l'application $s'$ de Q dans Q qui coïncide avec $s$ sur Q.

Retour page 1

**Problème 458** *11 points.* ./1978/besanconE/pb/texte

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère un point $\Omega$ et la transformation ponctuelle $T_k$ définie par :

$$T_k(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M},$$

où $k$ est un réel non nul donné.

**1.** Déterminer le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ sur lequel $T_k$ est bien définie. Existe-t-il des points de $\mathscr{P}$ qui n'ont pas d'antécédent ?

Dans ce qui suit, on notera $\tilde{T_k}$ la prolongée de $T_k$ en $\Omega$ par :

$$\tilde{T_k}(\Omega) = \Omega \qquad \text{et} \qquad \tilde{T_k}(M) = T_k(M) \text{ pour } M \neq \Omega.$$

**2.** Démontrer que $\tilde{T_k}$ est involutive, en déduire que $\tilde{T_k}$ n'est pas une application affine.

**3.** a) Pour $k$ et $k'$ réels donnés, déterminer $\tilde{T_k} \circ \tilde{T_{k'}}$.

b) Pour $\alpha$ réel donné, on note $H_\alpha$ l'homothétie de

# X. Besançon Dijon Nancy Metz Reims & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 1305.** *4 points.* ./1978/besanconErem/exo-1/texte.tex

: Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer, en fonction du paramètre réel $a$, la limite :

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x}.$$

2. Calculer, suivant les valeurs du paramètre $b$, la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 + bx^2 + x + 1} - x\sqrt{x+1}.$$

# XI. Bordeaux, série C

**Ex. 1306.** *5points.* ./1978/bordeauxC/exo-1/texte.tex

L'ensemble $\Omega$ est défini par :

$$\Omega = \{(1,\ 1,\ 1)\ ;\ (1,\ 1,\ 2)\ ;\ (1,\ 2,\ 1)\ ;\ (1,\ 2,\ 2)\ ;\ (2,\ 1,\ 1)\ ;\ (2,\ 1,\ 2)\ ;\ (2,\ 2,\ 1)\ ;\ (2,\ 2,\ 2)\}.$$

On désignera par $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de $\Omega$.

L'application $p$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}_+$ est définie sur les événements élémentaires par :

$$p(\{(x,\ y,\ z)\}) = a(x+y+z) + b, \qquad \text{avec } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.** Montrer que $p$ est une probabilité si

$$36a + 8b = 1 \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant \frac{1}{12}.$$

**2.**

$$A = \{(x,\ y,\ z) \in \Omega \quad \text{tel que} \quad x = 1\}$$
$$B = \{(x,\ y,\ z) \in \Omega \quad \text{tel que} \quad x = 2 \quad \text{et} \quad y = 2\}.$$

Trouver $a$ et $b$ pour que $p(A) = p(B)$.



Retour page 1

**3.** Dans cette question $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ satisfait les conditions du 1.
On définit la variable aléatoire $X$ par :
pour tout élément $(x,\ y,\ z)$ de $\Omega$

$$\begin{cases} X((x,\ y,\ z)) = 3 & \text{si} \quad x+y+z=3 \\ X((x,\ y,\ z)) = 4 & \text{si} \quad x+y+z=4 \\ X((x,\ y,\ z)) = -3 & \text{si} \quad x+y+z=5 \\ X((x,\ y,\ z)) = -4 & \text{si} \quad x+y+z=6. \end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de $X$.
Trouver $a$ et $b$ pour que l'espérance mathématique de $X$ soit égale à 0 ; calculer dans ce cas la variance de $X$.

**Ex. 1307.** *3 points.* ./1978/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) \mathrm{d}x.$$

## Problème 459 *12 points.* ./1978/bordeauxC/pb/texte

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices deux lignes et deux colonnes à coefficients réels.
On rappelle que :

— L'ensemble $\mathscr{M}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel, forme un espace vectoriel réel.

— L'ensemble $\mathscr{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, forme un anneau commutatif pour lequel la matrice

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est élément neutre pour la multiplication.

On désigne par $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ constitué de toutes les matrices :

$$M_{a,b} = a\mathrm{I} + bJ$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a$ et $b$ sont des nombres réels.

Étant donné un plan vectoriel euclidien $E$, rapporté à un base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on notera $\Phi$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{a,b}$ de $E$ dont la matrice, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est l'élément $M_{a,b}$ de $\mathscr{S}$.
On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes.

A– 1. a) Montrer que $\mathscr{S}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel pour lequel $(\mathrm{I},\ J)$ est une base.

b) L'ensemble $\mathscr{S}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, forme un anneau commutatif pour lequel la matrice I est élément neutre pour la multiplication.

c) Déduire de ce qui précède, la structure algébrique de l'ensemble $\Phi$ muni de l'addition des endomorphismes et de la multiplication par un réel.
De même, déterminer la structure algébrique de l'ensemble $\Phi$ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes.

2. a) Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est un automorphisme de $E$.

b) Pour tout couple $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ déterminer le noyau $\ker \varphi_{a,b}$ et l'image $\mathbf{Im}\varphi_{a,b}$ de l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$.

c) Donner l'ensemble des projections vectorielles de $E$ inclus dans $\Phi$.

3. Soit $P$ un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien $E$.
Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de $P$.
On considère l'ensemble $F$ des applications affines $f_{a,b}$ laissant le point $O$ invariant et ayant $\varphi_{a,b}$ pour endomorphisme associé.

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{J}$ des éléments de $F$ qui sont des involutions affines. Caractériser„ avec précision, chaque élément de $\mathscr{J}$ et montrer que $\mathscr{J}$, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif.

b) Soit $\Delta$ et $\Delta'$ les droites affines passant par $O$ et ayant, respectivement, pour vecteur directeur $\overrightarrow{e} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

Montrer que $f_{0,1}$ est la composée d'un élément de $\mathscr{J}$ et d'une homothétie ponctuelle que l'on déterminera.

c) On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points $M\,(x\ ;\ y)$ de $P$ de coordonnées $x$ et $y$ tels que $\left|x^2 - 2y^2\right| = 1$. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux coniques $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ dont on définira les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers, asymptotes). Montrer que $\mathscr{H}$ est invariant par chacun des éléments de $\mathscr{J}$.

B– Dans cette partie, on désignera par $\Phi'$ le sous-ensemble des éléments $\varphi_{a,b}$ de $\Phi$ tels que $(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2$ et $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$.

1. a) Montrer que $\Phi'$, muni de la compositions des applications est un groupe commutatif.

   b) Montrer que si $\varphi_{a,b}$ est élément de $\varphi'$ il en est de même pour $\varphi a, -b,\ \varphi_{-a,b}$ et $\varphi -a, -b$.

   c) Vérifier que $\varphi 1, 1$ est élément de $\Phi'$.

2. a) Montrer que si $\varphi_{a,b}$ est élément de $\varphi'$ avec $a > 0$ et $b > 0$ alors $b \leqslant a < 2b$.

   b) Montrer que si $\varphi_{a,b}$ est élément de $\varphi'$ il existe un élément $\varphi a_1, b_1$ de $\Phi'$ tel que

   $$\varphi_{a,b} = \varphi 1, 1 \circ \varphi_{a_1,b_1}.$$

   Déterminer $a_1$ et $b_1$ en fonction de $a$ et de $b$ et démontrer que $0 < a_1 < a$ et $0 < b_1 < b$ dès que $a \neq b$ et $a > 0,\ b > 0$.

   c) Déduire de ce qui précède que, pour tout élément $\varphi_{a,b}$ de $\Phi'$ avec $a > 0$ et $b > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant 1)$ tel que

   $$\varphi_{a,b} = \underbrace{\varphi_{1,1} \circ \varphi_{1,1} \circ \cdots \varphi_{1,1}}_{n \text{ fois}}.$$

3. Soit $A$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2$ et $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$.

   Soit $T$ l'application de $\Phi'$ dans $A$ qui à l'élément $\varphi_{a,b}$ de $\Phi'$ associe le réel $T(\varphi_{a,b}) = a + b\sqrt{2}$.

   a) Montrer que $A$, muni de la multiplication des nombres réels, est un groupe commutatif isomorphe à $\Phi'$.

   b) Démontrer que si $(a,\ b) \in (\mathbb{N} - \{0\} \times \mathbb{N} - \{0\})$ est tel que $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$, il existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour lequel $a + b\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$.

## XII. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 1308.** ———— *4 points.* *./1978/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex*

On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes.

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel, $B = (\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath})$ une base de $\mathscr{E}$, et $\varphi$ un endomorphisme de $\mathscr{E}$ dont la matrice dans la base $B$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $E$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathscr{E}$, $\theta$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathscr{E}$.

1. Montrer que$\varphi$ vérifie la relation

$$\varphi^2 - 2\varphi + 2E = \theta$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 2 + bc = 0 \\ \text{et} \\ a + d = 2. \end{cases}$$



Retour page 1

2. Soit $P$ un plan af?ne associé au plan vectoriel $\mathscr{E}$ et $I$ un point de $P$. On considère une application af?ne $f$ de $P$ dont l'endomorphisme associé $\varphi$ vérifie la relation $\varphi^2 - 2\varphi + 2E = \theta$, et laissant le point $I$ invariant.
   Soit $M$ un point de $P$. On note $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{IM''}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.
   b) Montrer que si $M$ est distinct de $I$, les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$ sont linéairement indépendants. (On pourra supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda \overrightarrow{IM}$ et en déduire une contradiction).
3. Soit $M$ un point de $P$ distinct de $I$.
   Soit $N$ le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans le repère $R = \left(I,\ \overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IM'}\right)$. Déterminer en fonction de $(\alpha\ ;\ \beta)$ les coordonnées $\left(\alpha'\ ;\ \beta'\right)$ de $N'$ dans le repère $R$.

Ex. 1309. ———— *4 points.* *./1978/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex*

Un nombre naturel $N$ dont le nombre des dizaines est noté $D$ et dont le chiffre des unités est noté $u$, s'écrit :

$$N = 10D + u.$$

On considère le nombre $N' = D + 2u$.

1. Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés :
   (i) $N$ est divisible par 19,
   (ii) $N'$ est divisible par 19.
   En utilisant plusieurs fois de suite cette équivalence étudier si le nombre 29 431 est divisible par 19.
2. Dans cette question on ne considère que des naturels $N$ *non divisibles* par 19.
   Les nombres $N$ et $N'$ peuvent-ils être congrus, modulo 19 ?
   On note $r$ et $r'$ les restes respectifs des divisions de $N$ et $N'$ par 19, déterminer une relation entre $r$ et $r'$.

## Problème 460 *12 points.* *./1978/bordeauxCrem/pb/texte*

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques, définies et continues sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel réel.

1. Soit $Y$ le fonction numérique de la variable réelle définie par :
   $$Y(t) = 1 \text{ si } t > 0 \quad ; \quad Y(0) = 0 \quad ; \quad Y(t) = -1 \text{ si } t < 0.$$
   Montrer que l'intégrale : $H(x) = \displaystyle\int_0^x tY(t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction numérique ainsi définie est dérivable en toout point de $\mathbb{R}$. Déterminer $H'(x)$ et étudier les limites :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{H'(x) - H(0)}{x}$$
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{H'(x) - H(0)}{x}$$
2. Désignant par $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$, on considère la fonction numérique $g$ définie par :
   $$g(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que $g$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ ; calculer $g(0)$, $g'(0)$ et montrer que $g$ admet une dérivée seconde $g''(0)$ au point $x_0 = 0$. Déterminer $g''(0)$.

Retour page 1

3. Montrer que $g$ est un élément de $\mathscr{F}$ et que l'application $\varphi$ de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ qui à $f$ fait correspondre $g$ ets une application linéaire. Est-elle surjective ? Est-elle injective ?
4. Pour $n$ entier strictement positif, soir $g_n = \varphi(f_n)$ pour $f_n \in \mathscr{F}$ définie par $f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^x$. Établir une relation de récurrence entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x)$.
   En déduire une expression de $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ puis de $g_n(x)$.
   (L'expression de $g_n(x)$ $(n \geqslant 2)$ ne sera pas utilisée dans la suite du problème).
5. Étudier la fonction $g_1$. Tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé.
6. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan, ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan P dont les coordonnées vérifient $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ et $g_1(x) \leqslant y \leqslant 1$.
   Étudier la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $-\infty$.
7. Étudier la fonction $g$ correspondant à la fonction $f \in \mathscr{F}$ telle que $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan P admet un centre de symétrie et étudier l'ensemble des points de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   Tracer la partie de $(\mathscr{C})$ correspondant à $x \in [-4\pi\,;\,4\pi]$.

## XIII. Bordeaux, série E

**Ex. 1310.** *5points.* *./1978/bordeauxE/exo-1/texte.tex*

Soit $P$ le polynôme à coefficients complexes défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^3 - 6z^2 + (12+2\mathrm{i})z - 8 - 4\mathrm{i}.$$

1. Montrer que $P$ admet une racine réelle $z_0$. Résoudre alors l'équation complexe $P(z) = 0$.
   On appelle $z_1$ la solution de plus petit module et $z_2$ l'autre.
2. Dans le plan complexe, on considère les points $\omega$, $A$ et $A'$ d'affixes respectives $z_0$, $z_1$ et $z_2$.
   Trouver l'expression complexe de la similitude directe $R$, laissant $\omega$ invariant et telle que $R(A) = A'$. Donner alors les éléments caractéristiques de cette similitude.

**Ex. 1311.** *3 points.* *./1978/bordeauxE/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine P rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les deux points $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ et $M_1(x_1\ ;\ y_1)$. On donne un réel $a$, vérifiant $0 < a < 1$, et on impose $x_0 \neq x_1$ et $y_0 \neq y_1$.
On construit la suite des points $M_n$ de P de coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ par récurrence, de la façon suivante : pour $n \geqslant 2$, $M_n$ est le barycentre des points $M_{n-2}$ et $M_{n-1}$ affectés des coefficients $a$ et $1-a$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}_n$ en fonction de $\overrightarrow{OM}_{n-2}$ et $\overrightarrow{OM}_{n-1}$ et calculer les coordonnées de $M_n$ en fonction de celles de $M_{n-2}$ et $M_{n-1}$.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :
   $$u_n = \alpha r^n + \beta$$
   où $\alpha$, $\beta$ et $r$ sont des réels vérifiant : $\alpha \neq 0$, $r \neq 0$, $r \neq 1$.
   a) Montrer que l'on peut déterminer $r$ pour que $u_n$ vérifie la relation de récurrence :
   $$u_n = au_{n-2} + (1-a)u_{n-1}.$$
   b) Cette valeur de $r$ ayant été choisie, déterminer $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $u_0$ et $u_1$ et calculer $u_n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$.
   c) Montrer que, quand $n \to +\infty$, la suite $(u_n)$ a une limite et calculer cette limite.
3. Montrer que, quand $n \to +\infty$, les suite $(x_n)$ et $(y_n)$ ont pour limites respectives $x$ et $y$ que l'on calculera.
   Soit $G$ le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   Montrer que $G$ est la barycentre des points $M_0$ et $M_1$ affectés de coefficients que l'on précisera.

Retour page 1

## Problème 461 *12 points.*

./1978/bordeauxE/pb/texte

A- Soit $V$ un espace vectoriel euclidien rapporté à la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé de sens direct, $\alpha$ est un nombre réel et $\varphi_\alpha$ l'endomorphisme de $V$ défini par

$$\varphi_\alpha(\vec{i}) = \alpha\vec{i} + \vec{j} \qquad ; \qquad \varphi_\alpha(\vec{j}) = -\vec{i} + \alpha\vec{j} \qquad ; \qquad \varphi_\alpha(\vec{k}) = \alpha\vec{k}.$$

1. Discuter, selon $\alpha$, la dépendance linéaire de la famille de vecteurs

$$(\varphi_\alpha(\vec{i}),\ \varphi_\alpha(\vec{j}),\ \varphi_\alpha(\vec{k})).$$

2. On fait $\alpha = 0$. Soit $p$ la projection vectorielle sur le plan de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, de direction la droite vectorielle de base $(\vec{k})$. Montrer qu'il existe un endomorphisme unique $r$ de $V$ tel que :

$$\varphi_0 = r \circ p \qquad \text{et} \qquad r(\vec{k}) = \vec{k}.$$

Reconnaître géométriquement $r$.

3. Dans cette question $\alpha \neq 0$.

a) Montrer que $\varphi_\alpha$ est un automorphisme de $V$ et déterminer $(\varphi_\alpha)^{-1}$.

b) Calculer dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ :

$$(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1})(\vec{i}) \qquad ; \qquad (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1})(\vec{j}) \qquad ; \qquad (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1})(\vec{k}).$$

c) On pose $\alpha = \tan\theta$ avec $\theta$ appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\theta \neq 0$.

Soit $\ell_\theta$ l'application affine du plan euclidien de repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, dont l'endomorphisme associé est la restriction de $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ au plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et qui vérifie $\ell_\theta(O) = O$.

Reconnaître géométriquement l'application affine $\ell_\theta$ (on définira ses éléments caractéristiques en fonction de $\theta$).

B- $\alpha$ est toujours un nombre réel fixé non nul. $F_\alpha$ est l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$, pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de réels, par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(a\sin x + b\cos x + c).$$

1. Montrer que, pour l'addition des fonctions et la multiplication par un nombre réel, $F_\alpha$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension et dont on donnera une base $B$.

2. a) Montrer que l'on peut définir une application $\psi$ de $F_\alpha$ dans $F_\alpha$ qui, à toute application $f$ de $F_\alpha$, fait correspondre son application $f'$, dérivée première de $f$.

b) Montrer que $\psi$ est un automorphisme de $F_\alpha$ et donner les images par $\psi$ des vecteurs de la base $B$.

c) En utilisant les résultats de la question A(3)a, en déduire une primitive $F$ de $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(a\sin x + b\cos x + c).$$

3. On pose, pour une fonction $f$ de $F_\alpha$,

$$G_\alpha(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

$$G_\alpha(x) = x\left[\psi^{-1}(f)\right](x) - \left[(\psi^{-1} \circ \psi^{-1})(f)\right](x) + \left[(\psi^{-1} \circ \psi^{-1})(f)\right](0).$$

C- Soit $f$ et $g$ les fonctions définies, pour tout $x$ appartenant à $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x \sin x \qquad \text{et} \qquad h(x) = x\mathrm{e}^x.$$

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes de $g$ et $h$ dans un plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 1 cm).

Retour page 1

1. Étudier les variations de ces deux fonctions et la position relative des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Donner une équation des deux tangentes $T_1$ et $T_2$ à l'origine aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
3. Construire $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que $T_1$ et $T_2$.
   On donne $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = 7{,}56$.
4. Calculer l'aire de la portion du plan comprise entre ces deux courbes.

## XIV. Bordeaux, Limoages & Poitiers remplacement, série E

**Ex. 1313.** ———— *4 points.* *./1978/bordeauxerem/exo-1/texte.tex*

Soit $P$ le polynôme de variable complexe $z$ défini par :

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \qquad P(z) = z^3 - (5+2\mathrm{i})z^2 + (11+5\mathrm{i})z - 12\mathrm{i}.$$

1. a) Montrer que $P$ admet une racine imaginaire pure et la déterminer.
   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
   On donnera les solutions sous forme algébrique (partie réelle et partie imaginaire) et sous forme trigonométrique (module et argument).
2. Donner la représentation des solutions dans le plan complexe. On appelle $A$, $B$, $C$ les images des racines de l'équation $P(z) = 0$.
   Déterminer la nature du triangle $ABC$. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des points $A$, $B$, $C$.

**Ex. 1313.** ———— *4 points.* *./1978/bordeauxerem/exo-2/texte.tex*

$\mathscr{E}$ étant l'espace affine de dimension trois,associé à l'espace vectoriel E et rapporté au repère $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère l'application affine $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 3y + 5z + 1 \\ y' = 2x - 2y + 5z + 1 \\ z' = 2x - 3y + 6z + 1 \end{array}\right. .$$

**1.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

**2.** Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

**3.** En déduire une construction de $M'$ à partir de $M$.

### Problème 462 *12 points.* *./1978/bordeauxerem/pb/texte*

$n$étant un entier naturel, on considère la famille de fonctions $f_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x^2}.$$

A- 1. Montrer que, quel que soit $n$ la fonction $f_n$ est intégrable sur $[0\,;1]$.
   On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et à terme positifs. On admettra qu'elle a une limite $\ell$. (On ne demande pas de déterminer une primitive de $f_n$).
   2. Déterminer une relation liant $I_n$ et $I_{n+2}$ En déduire la valeur de $\ell$.

B- 1. Étudier les variations de $f_n$ suivant les valeurs du paramètre $n$.
   Préciser les cas $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.
   2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 3 cm), on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ relativement au repère $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Retour page 1

a) Déterminer les coordonnées des points de $\mathscr{C}_n$ ayant une tangente de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

b) Déterminer pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ les abscisses des points où la dérivée seconde $f_n''$ s'annule et change de signe.

c) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, pour $n \geqslant 0$ ont un point en commun et un seul $A$, que toutes les courbes $\mathscr{C}_{2p}$, $p \geqslant 0$, ont exactement deux points en communs $A$ et $B$, et que que toutes les courbes $\mathscr{C}_{2p+1}$, $p \geqslant 0$, ont exactement trois points en communs $A$, $B$ et $O$.

d) Préciser la position relative d'une courbe $\mathscr{C}_n$ et d'une courbe $\mathscr{C}_{n'}$, lorsque $x \geqslant 0$.

e) Construire soigneusement sur un même dessin les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

## XV. Caen, série C

**Ex. 1314.** ——— *4points.* *./1978/caenC/exo-1/texte.tex*

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère l'application $f$ de P dans P, qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$, telle que :

$$z' = \overline{z} + 8\mathrm{i}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.

**1.** Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application $f$.

**2.** Soit $H$ le milieu du bipoint $(M,\ M')$. Montrer que la distance des points $M$ et $H$ est :

$$MH = \left|\frac{z-\overline{z}-8\mathrm{i}}{2}\right|.$$

**3.** Quelle est la nature de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que

$$|z-(3+2\mathrm{i})| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{z-\overline{z}-8\mathrm{i}}{2}\right| \quad ?$$

Construire $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**Ex. 1315.** ——— *4 points.* *./1978/caenC/exo-2/texte.tex*

On note $n$ un entier naturel non nul, $A$ est l'entier $3n+1$ et $B$ est l'entier $5n-1$.

**1.** Démontrer que le P.G.C.D. de $A$ et de $B$ est un diviseur de $8$.

**2.** Pour quelles valeurs de $n$, ce P.G.C.D. est-il égal à 8 ? Calculer alors le P.P.C.M. de $A$ et $B$.

## XVI. Caen Nantes & Rennes remplacement, série C

**Ex. 1316.** ——— *3 points.* *./1978/caenCrem/exo-1/texte.tex*

On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) à l'inconnue $(x\ ;\ y)$ :

$$6x - 10y = a \qquad \text{(E)}$$

où $a$ désigne un entier relatif.

**1.** Á quelle condition, portant sur $a$, l'équation (E) admet-elle des solutions ?

**2.** Résoudre l'équation dans le cas : $a = 22$.

Retour page 1

**Ex. 1317.** ———— *5 points.* ./1978/caenCrem/exo-2/texte.tex

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

**1.** Soit $f$ la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto \log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Déterminer le fonction dérivée de $f$.
Calculer $u_0$.

**2.** Calculer $u_1$. Calculer $u_3$ à l'aide d'une intégration par parties.

**3.** Démontrer que :

$$\forall x,\ x \in [0\,;1],\quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

## Problème 463 *12 points.* ./1978/caenCrem/pb/texte

*Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On notera $P$ le plan vectoriel associé dont la base est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

A– Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = 3x+5y \\ y' = -2x-3y-2. \end{cases}$$

1. a) Démontrer que $f$ est une application affine et qu'elle admet un seul point invariant.
   b) Déterminer la matrice, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, de l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathscr{P}$ (application linéaire de $P$ dans $P$) associé à $f$.
2. Quelle est la nature géométrique de l'application

$$f^2 = f\circ f\ ?$$

   Caractériser $f^4 = f\circ f\circ f\circ f$.
3. Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$ ; on note :

$$M_1 = f(M)\ ;\ M_2 = f(M_1)\ ;\ M_3 = f(M_2).$$

   Démontrer que l'isobarycentre du système des points $(M,\ M_1,\ M_2,\ M_3)$ est un point invariant de $f$. Préciser ce point.
4. $M$ étant toujours un point quelconque de $\mathscr{P}$, on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathscr{P}$ définie par :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n,\ n\in\mathbb{N},\ M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$$

   On notera $(x_n\ ;\ y_n)$ les coordonnées de $M_n$.
   Démontrer qu'il existe un couple $(p,\ q)$, élément de $\mathbb{R}^2$, tel que :

$$\forall n\quad n\in\mathbb{N},\quad x_{n+2}+x_n = 2p \qquad \text{et} \qquad y_{n+2}+y_n+2q.$$



Retour page 1

B– Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. $\mathscr{U}$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel réel.

On désigne par $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathscr{U}$ dont les éléments sont les suites qui possèdent la propriété suivante :

pour toute suite $s$, de terme général $s_n$, il existe un réel $a$ tel que, pour tout entier naturel $n$ on ait :

$$s_{2n} + s_n = 2a.$$

1. a) Démontrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{U}$.

   b) Soit $s$ un élément de $\mathscr{S}$. Démontrer que :

   $$\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ s_{n+4} = s_n.$$

   En déduire $s_n$ en fonction de $a,\ s_0$ et $s_1$.

2. a) Démontrer que, étant donné un élément $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$, il existe une suite $s$, et une seule, de $\mathscr{S}$ telle que :

   $$\begin{cases} s_0 = b \\ s_1 = c \\ \forall n\ \ n \in \mathbb{N},\ s_{n+2} + s_n = 2a. \end{cases}$$

   On notera $s_{(a,\ b,\ c)}$ la suite ainsi obtenue.

   b) Démontrer que l'application de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{S}$ qui, au triplet $(a,\ b,\ c)$, associe, $s_{(a,\ b,\ c)}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

   c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{S}$ ?

3. Soit $u,\ v,\ w$ les suites de terme général respectif :

   $$u_n = \cos n\frac{\pi}{2}\ ;\ v_n = \sin n\frac{\pi}{2}\ ;\ w_n = 1.$$

   a) Démontrer que $u,\ v,\ w$ appartiennent à $\mathscr{S}$ et forcement une base de $\mathscr{S}$.

   b) Déterminer, dans la base $(u,\ v,\ w)$, les coordonnées d'un élément $s$ de $\mathscr{S}$ en fonction de $s_0,\ s_1,\ a$.

C– Soit $G$ l'ensemble des applications affines $g$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telles que $g^4$ $(g \circ g \circ g \circ g)$ soit l'application identique de $\mathscr{P}$.

On note $\psi$ l'endomorphisme de $P$ associé à $g$.

1. Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$. On note :

   $$M_1 = g(M)\ ;\ M_2 = g(M_1)\ ;\ M_3 = g(M_2).$$

   Démontrer que le point $\Omega$, isobarycentre du système $(M,\ M_1,\ M_2,\ M_3)$ est invariant par $g$.

2. Quelle propriété remarquable possède l'endomorphisme $\psi^2$ ? Quelle peut-être la nature géométrique de $\psi^2$ ?

3. On suppose que $\psi^2$ est la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle $D_1$ de base $(\vec{e}_1)$, de direction la droite vectorielle $D_2$, de base $(\vec{e}_2)$.

   a) Écrire la matrice de $\psi^2$ dans la base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

   b) Calculer le déterminant de cette matrice.

   c) En déduire que $\psi^2$ ne peut-être une telle symétrie.

4. Démontrer sque $G$ est la réunion de deux ensembles disjoints $G_1$ et $G_2$ correspondant aux deux valeurs possibles de $\psi^2$ dont on déterminera parfaitement l'un, et dont on montrera que que l'autre est non vide et constitué d'éléments admettant un seul point fixe.

# XVII. Caen Orléans Tours & Rouen, série E

**Ex. 1318.** ———— *3 points.* *./1978/caene/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-(3+\mathbf{i})z+2(1+\mathbf{i})=0$$

on donnera les solutions sous la forme algébrique et sous forme trigonométrique.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$X^4-(3+\mathbf{i})X^2+2(1+\mathbf{i})=0.$$

**Ex. 1319.** ———— *4 points.* *./1978/caene/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[, & f(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\\ \text{et} \quad f(0)=0\end{cases}$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

**1.** La fonction $f$ est-elle continue à droite au point zéro ? Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; on pourra poser $x=\dfrac{1}{t}$.

**2.** Étudier La fonction $f$ (pour étudier le signe de la fonction dérivée $f'$, on étudiera le sens de variation de $f'$.)

Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**3.** Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif.

Calculer l'aire $I_\alpha$ du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x=\alpha$, $x=1$ et $y=0$.

On pourra utiliser une intégration par parties et on remarquera que :

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\} \qquad \frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}.$$

Étudier $\lim\limits_{\alpha\to 0} I_\alpha$.

## Problème 464 — *13 points.* *./1978/caene/pb/texte*

A- Soit $E$ un plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée directe $\mathscr{B}=(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $\varphi$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ dont la matrice $A$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix} \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{réels.}$$

1. Déterminer la relation entre $\alpha$ et $\beta$ pour que l'application $\varphi$ soit bijective.
2. Quand elle n'est pas bijective, déterminer le noyau et l'image de $\varphi$ : on donnera une équation cartésienne et une base de chacun d'eux.
3. Préciser selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi$ ; quand $\varphi$ n'est pas l'identité de $E$ on notera $\Delta$ cet ensemble de vecteurs invariants.
4. a) On suppose $\alpha=\beta$. Calculer $A^2=A\times A$ ; en déduire la nature de $\varphi$, puis ses éléments caractéristiques.

   b) On suppose $\alpha=1$ et $\beta=2$. Calculer $A^2$ ; en déduire la nature de $\varphi$, puis ses éléments caractéristiques.
5. On se propose de déterminer les réels $\lambda$ pour lesquels il existe des vecteurs $\vec{u}$ non nuls tels que : $\varphi(\vec{u})=\lambda.\vec{u}$.

   a) A quelle condition existe-t-il deux valeurs de $\lambda$ distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ? (Une des deux valeurs est très simple).

   (On appellera $\lambda_2$ la valeur de $\lambda$ indépendante de $\alpha$ et $\beta$.)



Retour page 1

b) Soit $d_1$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ correspondant à $\lambda_1$, $d_2$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ correspondant à $\lambda_2$.
Déterminer $d_1$ et $d_2$ (on vérifiera que $d_2 = \Delta$).

$\mathscr{E}$ est le plan affine euclidien associé à $E$ et rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

B- 1. Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est $\varphi$ et telle que $f(O) = O'$, $O'$ étant le point de coordonnées $(1\ ;\ 2)$.
Définir analytiquement $f$ dans $\mathscr{R}$. $f$ peut-elle être une rotation ?

2. Soit $g$ l'application affine de $\mathscr{E}$ laissant $O$ invariant et d'application linéaire associée $\varphi$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 2$. Définir analytiquement $g$ dans $\mathscr{R}$.
On notera $(x\ ;\ y)$ les coordonnées dans $\mathscr{R}$ d'un point $M$ de $\mathscr{E}$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ celles de $M' = g(M)$ dans $\mathscr{R}$.

3. Soit $\vec{I} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\vec{\jmath}$.
Montrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base orthonormée directe de $E$.
Soit $\mathscr{R}'$ le repère $(O\ ;\ \vec{I},\ \vec{J})$ ; montrer que $g$ est définie analytiquement dans $\mathscr{R}'$ par :

$$\begin{cases} X' = -3X \\ Y' = Y. \end{cases}$$

On note $(X,\ Y)$ les coordonnées de $M$ dans $\mathscr{R}'$ et $(X',\ Y')$ celles de $M' = g(M)$ dans $\mathscr{R}'$.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R}$ est :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

a) Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ et ses éléments caractéristiques. Puis donner l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

b) Donner, dans le repère $\mathscr{R}'$, l'équation de la courbe $\mathscr{C}_1$ image de $\mathscr{C}$ par $g$. Quelle est la nature de $\mathscr{C}_1$ ? Préciser ses éléments caractéristiques et tracer $\mathscr{C}_1$.

## XVIII. Caen Nantes & Rennes remplacement, série E

**Ex. 1320.** ——— *3 points.* *./1978/caenerem/exo-1/texte.tex*

On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f(x) = x(1 - \log|x|). \end{cases}$$

Le symbole $\log$ désigne le logarithme néperien.

**1.** Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ est qu'elle est une fonction impaire.

**2.** $f$ est-elle dérivable au point $x = 0$ ?

**3.** Étudier les variations de $f$. Tracer la courbe représentant ces variations dans un plan affine euclidien (P) muni d'un repère orthonormé dont les axes sont $Ox$ et $Oy$. Écrire une équation de la tangente à la courbe en chacun de ses points où l'ordonnée est nulle.

**Ex. 1321.** ——— *5 points.* *./1978/caenerem/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affin euclidien (P), on considère un triangle $(A,\ B,\ C,\ D)$ ; on pose :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = a \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = b.$$

$a$ et $b$ sont deux réels qui satisfont à la double inégalité :

$$0 < a < b.$$

Les deux questions sont indépendantes.



Retour page 1

**1.** Déterminer un triplet $(p,\ q,\ r)$ de $\mathbb{R}^3$ de manière que $D$ soit la barycentre du système

$$\{A(p),\ B(q),\ C(r)\}.$$

**2.** Construire l'ensemble des points $M$ de $P$ défini par :

$$2a^2+b^2 \leqslant MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 \leqslant a^2+2b^2.$$

## Problème 465 *12 points.*

*./1978/caenerem/pb/texte*

I On considère un plan vectoriel euclidien E rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Soit $a$ un nombre réel et $f_a$ l'endomorphisme de E (application linéaire de E dans E) dont la matrice $M_a$, relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, est :

$$M_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+1) & \frac{1}{2}(a-1) \\ \frac{1}{2}(a-1) & \frac{1}{2}(a+1) \end{pmatrix}$$

**1.** Dire à quelle condition doit satisfaire $a$ de façon que $f_a$ soit bijectif ; démontrer que, dans ce cas, $(f_a)^{-1}$ est égal ) $f_{\frac{1}{a}}$.

**2.** Déterminer le noyau et l'image de $f_O$ ; donner une base de chacun des ces sous-espaces vectoriels.

**3.** Déterminer $a$ afin que $f_a$ soit une isométrie vectorielle ; définir avec précision les applications correspondantes.

**4.** On suppose ici que $a$ est différent de $0$ et de $1$.

a) Pour quelles valeurs du réel $k$ existe-t-il au moins un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $f_a(\vec{u})$ soit égal à $k\vec{u}$ ?

b) Démontrer alors qu'il existe deux droites vectorielles globalement invariantes par $f_a$ ; donner une base de chacune d'elles.

c) Soit $\vec{I}$ et $vecteur J$ les vecteurs définis par :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).$$

Démontrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$est une base orthonormée de E.
Écrire la matrice de $f_a$ relativement à cette base.

Soit (P) un plan affine euclidien

# XIX. Clermont Ferrand, série C

**Ex. 1322.** *4points.*

*./1978/clermontC/exo-1/texte.tex*

Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur $d$ et le plus petit commun multiple $m$ vérifient la relation

$$8m = 105d + 30.$$

**Ex. 1323.** *4 points.*

*./1978/clermontC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. On suppose que

$$-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

On désigne par $g$ et $h$ les fonctions définies par

$$g(x) = \mathrm{e}^x f(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

**1.** Montrer que $g$ et $h$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs dérivées.

**2.** Montrer qur $g$ est une fonction croissante et que $h$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

**3.** En déduire que, si $f(0)$ est nul, alors $f(x)$ est nul pour tout nombre réel $x$.

## 🏛 Problème 466 *12 points.*

./1978/clermontC/pb/texte

Pour tout nombre complexe $z$, on désigne par $\overline{z}$ le conjugué de $z$ et par $|z|$ le module de $z$.
On rappelle que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que $(1,\ \mathrm{i})$ en est une base.
On désignera par $L$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et par $E$ l'ensemble $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de tous les couples $(s,\ t)$ de nombres complexes.

I- Pour tout couple $(s,\ t)$ de $E$, on désignera par $f_{(s,\ t)}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe $z$ fait correspondre $s.z+t.\overline{z}$.

1. Montrer que $f_{(s,\ t)}$ appartient à $L$, pour tout couple $(s,\ t)$ de $E$.
2. Réciproquement, si $g$ est un élément de $L$, montrer qu'il existe un couple *unique* $(s,\ t)$ de $E$ pour lequel on a $g=f_{(s,\ t)}$.
   Calculer $s$ et $t$ en fonction de $g(1)$ et $g(\mathrm{i})$. On dira alors que $(s,\ t)$ *représente* $g$.
3. Pour $s,\ t,\ u$ et $v$ éléments de $\mathbb{C}$, l'application composée $f_{(u,\ v)}\circ f_{(s,\ t)}$ appartient à $L$.
   Il existe donc un unique couple $(p,\ q)$ qui la représente.
   Calculer $p$ et $q$ en fonction de $s,\ t,\ u$ et $v$.
4. Déterminer tous les couples $(s,\ t)$ pour lesquels $f_{(s,\ t)}$ est involutive.
5. Montrer que l'application $f_{(s,\ t)}$ est bijective si et seulement si $|s|\neq|t|$.
6. Lorsque $f_{(s,\ t)}$ est bijective, on sait que son application réciproque appartient à $L$. Il existe donc un couple unique $(x,\ y)$ qui représente cette application réciproque. Calculer $x$ et $y$ en fonction de $s$ et $t$.

II- Pour tout couple $(s,\ t)$ de $E$, on désignera par $V(s,\ t)$ l'ensemble des nombres complexes $\lambda$ pour lesquels il existe au moins un nombre complexe $z$ non nul tel que

$$s.z+t.\overline{z}=\lambda.z\ .$$

1. Déterminer tous les couples $(s,\ t)$ pour lesquels $0$ appartient à $V(s,\ t)$.
2. Pour tout couple $(s,\ t)$, montrer que $\lambda$ appartient à $V(s,\ t)$ si et seulement si $0$ appartient à $V(s-\lambda,\ t)$.
3. Affin d'étudier les ensemble $V(s,\ t)$, on se donne un plan affine euclidien $P$ et un repère cartésien orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ de ce plan.
   A tou nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ (où $a$ et $b$ sont réels) on fait correspondre le point image $M_z$ dans $P$ défini par $\overrightarrow{OM_z}=a\vec{u}+b\vec{v}$.
   A chacun des ensembles $V(s,\ t)$, on fait correspondre son image $C(s,\ t)$ dans $P$. Autrement dit, $C(s,\ t)$ est l'ensemble des points images $M_\lambda$ pour $\lambda$ élément de $V(s,\ t)$.
   Représenter sur une figure les ensembles $C(s,\ t)$ correspondants à chacun des trois cas suivants :
   a) $s=1+\mathrm{i}$ et $t=\mathrm{i}$ ;
   b) $s=1+2\mathrm{i}$ et $t=\mathrm{i}$ ;
   c) $s=1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $t=\mathrm{i}$.
4. Pour chaque couple $(s,\ t)$ quelconque de $E$, quelle est la nature géométrique de l'ensemble $C(s,\ t)$ ?
5. Pour chaque couple $(s,\ t)$ de $E$, montrer qu'il existe au plus deux nombres réels dans l'ensemble $V(s,\ t)$.
6. Déterminer l'ensemble des couples $(s,\ t)$ pour lesquels il n'y a qu'un seul nombre réel dans $V(s,\ t)$.
7. Déterminer l'ensemble des couples $(s,\ t)$ pour lesquels il y a deux nombres réels distincts dans $V(s,\ t)$.

III- Pour tout couple $(x,\ y)$ de $E$, on posera

$$x\star y=\frac{1}{2ic}(\overline{x}y-x\overline{y})\ ;$$

c'est un nombre réel qui est la partie imaginaire du produit $\overline{x}.y$.
Pour tout élément $g$ de $L$, on posera

$$\Delta(g)=g(1)\star g(\mathrm{i}).$$



Retour page 1

1. Calculer $\Delta\left(f_{(s,\ t)}\right)$ en fonction de $s$ et $t$.
2. Montrer que, pour tout couple $(x,\ y)$ de $E$ et pour $g$ appartenant à $L$, on a

$$g(x)\star g(y)=\Delta(g).(x\star y).$$

(On pourra le montrer en mettant $g$ sous la forme $g=f_{(s,\ t)}$.)
3. Montrer que, pour $g$ et $h$ éléments de $L$, on a

$$\Delta(g\circ h)=\Delta(g).\Delta(h).$$

4. Pour $g$ élément de $L$, montrer que $g$ est injective si et seulement si $\Delta(g)$est non nul.
5. Lorsque $V(s,\ t)$ contient deux nombres réels distincts $\alpha$ et $\beta$, montrer qu'on a

$$\Delta\left(f_{(s,\ t)}\right)=\alpha.\beta.$$

Que peut-on dire lorsque $V(s,\ t)$ ne contient qu'un seul nombre réel $\gamma$ ?

## XX. Côte d'ivoire, série C

**Ex. 1324.** ./1978/cotedivoireC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2+y^2=25$.

**2.** Soit $(C)$ la courbe d'équation $x^2+y^2-6x-4y-12=0$.
Trouver tous les points de $(C)$ dont les coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et placer ces points dans un repère orthonormé.

**Ex. 1325.** ./1978/cotedivoireC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M_1$ d'affixe $z_1$ tel que

$$z_1=\mathrm{i}\overline{z}+a+\mathrm{i}b$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, $a$ et $b$ étant deux réels quelconques donnés.
On appelle $A$ le point de coordonnées $a$ et $b$.

**1.** Montrer que $f$ est un antidéplacement de $\mathscr{P}$.

**2.** Comment faut-il choisir le point $A$ pour que $f$ soit une symétrie orthogonale ? Préciser quelle est cette symétrie.

**3.** On choisit le point $A$ de telle sorte que $f$ ne soit pas une symétrie orthogonale.

a) Quelle est la nature de $f$ ? Préciser les éléments qui définissent $f$.

b) On pose $f^1=f$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $f^n=f^{n-1}\circ f$.
Montrer que, pour tout entier naturel $p$ non nul, $f^{2p}$ est une translation dont on donnera le vecteur.
Quelle est la nature de $f^{2p+1}$ ?

**Ex. 1326.** ./1978/cotedivoireC/exo-3/texte.tex

*NB : le problème se compose de quatre parties.*
*La solution de la partie III ne fait appel à aucun des résultats établis dans les parties I et II*
*La partie IV peut-être traitée en admettant les résultats de la partie III.*
Dans tout le problème, on désignera par $S$ l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

I- On définit sur $S$ une loi $\Delta$ de la façon suivante :

$$\forall x\in S\qquad \forall y\in S\qquad x\Delta y=x+y+xy.$$

Démontrer que $\Delta$ est une loi de composition interne dans $S$ et qu'elle confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

II- Soit $h_1$ l'application définie par
$$\forall x \in S \qquad h_1(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}} - 1.$$

1. a) Montrer que $h_1$ prend ses valeurs dans $S$.
   b) Établir que
$$\forall x \in S \qquad \forall y \in S \qquad h_1(x \Delta y) = h_1(x) \Delta h_1(y).$$
2. a) Étudier les variations de $h_1$ et en déduire que $h_1$ est une bijection de $S$ sur $S$.
   b) Calculer $h_1'(0)$.
   c) Construire la courbe $(\Gamma)$ représentative de $h_1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Soit $t$ l'application de $S$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :
$$\forall x \in S \qquad t(x) = x+1.$$
   a) Montrer que $t$ est un isomorphisme du groupe $(S, \ \Delta)$ sur le groupe $(\mathbb{R}_+^\star, \ \times)$.
   b) Soit $f_1$ l'application définie par :
$$f_1 = t \circ h_1 \circ t.$$
   Déduire de ce qui précède que $f_1$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^\star, \ \times)$ dans lui-même.
   c) Calculer $f_1(x)$, puis $f_1'(1)$.
   d) Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f_1$ dans le même repère que précédemment et vérifier que $(\mathscr{C})$ se déduit de $(\Gamma)$ par une translation que l'on précisera.

III- Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ vérifiant les deux conditions suivantes :
$$\boxed{P} \qquad f \text{ est dérivable au point } 1$$
$$\boxed{Q} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

1) Vérifier que l'application $f_1$ définie au II est un élément de $\mathscr{F}$.

2) Soit $f$ un élément quelconque de $\mathscr{F}$.

   a) Établir que $f(1) = 1$.
   b) Soit $x_0$ un réel strictement positif et $k$ un réel tel que $x_0 + k \in \mathbb{R}_+^\star$.
   Montrer que $f(x_0+k) - f(x_0) = f(x_0)\big(f(1+\dfrac{k}{x_0}) - f(1)\big)$.
   c) Déduire de ce qui précède que $f$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^\star$ et que l'on a :
$$\boxed{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$
   où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
   d) Que se passe-t-il pour $f$ si l'on choisit $f'(1)$ nul ?
   Montrer que $f$ est strictement monotone si l'on choisit $f'(1) \neq 0$.
   e) En considérant une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction
$$x \longmapsto \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{x}$$
   montrer que, $\alpha$ désignant un réel on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \qquad f(x) = x^\alpha.$$

   *

3) Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ du type $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$.

Retour page 1

IV- On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications $h$ de $S$ dans $S$ vérifiant les deux conditions :

$$\begin{array}{ll} \boxed{P'} & h \text{ est dérivable au point zéro} \\ \boxed{Q'} & \forall x \in S \quad \forall y \in S \quad h(x\Delta y) = h(x)\Delta h(y) \end{array}$$

1) Vérifier que l'application $h_1$ de la partie II est un élément de $\mathscr{H}$.

2) $t$ étant l'application définie au II, montrer que si $h \in \mathscr{H}$, alors $t \circ h \circ t \in \mathscr{F}$.

3) Montrer que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des applications de $S$ dans $S$ du type $x \mapsto (1+x)^\alpha - 1$ où $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$.

4) Pour tout $\alpha$ réel et tout élément $x$ de $S$, on note $a^{[\alpha]}$ l'élément $(a+1)^\alpha - 1$ de $S$.
Établir que :

a) $\forall x \in S \quad \forall y \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta y^{[\alpha]} = (x\Delta y)^{[\alpha]}$.

b) $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta x^{[\beta]} = x^{[\alpha+\beta]}$.

c) $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \left(x^{[\alpha]}\right)^{[\beta]} = x^{[\alpha\beta]}$.

## XXI. Dijon, série C

**Ex. 1327.** ——— *3 points.* *./1978/dijonC/exo-1/texte.tex*

**1.** Soit $x$ un n ombre réel strictement positif. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

où $\log t$ désigne le logarithme népérien du nombre réel $t$. (On remarquera que, pour tout nombre réel $t$ non nul, $\dfrac{1}{t(1+t^2)}$ est égal à $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.)

**2.** Soit $I$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$I : x \longmapsto I(x), \qquad \text{pour } x \text{ strictement positif.}$$

Cette fonction admet-elle une limite lorsque $x$ tend vers 0 ?

**Ex. 1328.** ——— *4 points.* *./1978/dijonC/exo-2/texte.tex*

**1.** Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division par 7 de $2^n$, puis $10^{2n}$.
Vérifier que le nombre qui s'écrit 787878 en base dix est divisible par 7.

**2.** Soit $b$ et $c$ deux entiers naturels qui satisfont aux conditions suivantes :

$$0 < b \leqslant 9 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant c \leqslant 9.$$

Pour chaque entier naturel non nul $n$, on considère le nombre $a(n)$ qui s'écrit $\overline{bcbc\ldots bc}$ en base dix, $b$ et $c$ étant répétés chacun $n$ fois.
Déterminer, suivant les valeurs des entiers $b$ et $c$, l'ensemble des entiers $n$ tels que $a(n)$ soit divisible par 7.

Retour page 1

## 🏛PROBLÈME 467 *13 points.*

./1978/dijonC/pb/texte

Les parties A et B sont indépendantes, A étant un exemple illustrant B.

A- On rappelle que l'ensemble $F$ des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $f_1$ et $f_2$ les éléments de $F$ définis respectivement par

$$f_1(x) = (1+x)\mathrm{e}^x, \qquad f_2(x) = (1-x)\mathrm{e}^x.$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $F$engendré par la partie $(f_1,\ f_2)$.

1. Véri ?er que $(f_1,\ f_2)$ est une base de $E$.
2. Soit $f$ un élément de $E$. Démontrer que sa fonction dérivée $f$ est élément de $E$. Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $E$ qui, à tout élément de $E$, associe sa fonction dérivée première. Établir que $\varphi$ est une application linéaire de $E$ dans lui-même (ou endomorphisme de $E$).
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs de $E$ invariants par $\varphi$ est une droite vectorielle $D$ dont on donnera une base.
4. Démontrer que, pour tout élément $f$ de $E$, $\varphi(f) - f$ est élément de $D$.

B- Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2 et $D$ une droite vectorielle donnée de $E$. On considère l'ensemble $G$ des endomorphismes $g$ de $E$ qui possèdent les deux propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in D, \qquad (g(\vec{u}) - \vec{u}) = \vec{0}) \tag{1}$$

$$\forall \vec{u} \in D, \qquad (g(\vec{u}) - \vec{u}) \in D) \tag{2}$$

1. Prouver que le noyau de tout élément $g$de $G$ est inclus dans $D$. En déduire que tout élément de $G$ est bijectif.
2. Soit $\vec{j}$ un vecteur donné de $D$, non nul.

   a) Soit $g$ un élément donné de $G$.

   Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de $E$, on peut trouver un nombre réel $x$ et un seul tel que

   $$g(\vec{u}) = \vec{u} + x\vec{j}.$$

   On dé ?nit ainsi l'application $\theta$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ par

   $$\theta : \vec{u} \longmapsto \theta(\vec{u}) = x.$$

   Démontrer que $\theta$ est une application linéaire ; en déterminer le noyau.

   b) Inversement, soit $\theta$ une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}$, de noyau $D$ ou $E$. Soit $g$ l'application de $E$ dans $E$ définie par

   $$g(\vec{u}) = \vec{u} + \theta(\vec{u})\vec{j}.$$

   $g$ est-elle élément de $G$ ?
3. Prouver qu'il existe au moins (une base de $E$ dans laquelle la matrice de tout élément de $g$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ , $b$ étant un nombre réel.

   Soit $\mathscr{B}$ une telle base.
4. Démontrer que $(G, \circ)$ est un sous-groupe du groupe des endomorphismes bijectifs de $E$, $\circ$ désignant la loi de composition des applications.
5. Pour tout réel $m$, on note $\Delta_m$ la droite vectorielle dont une équation dans la base $\mathscr{B}$ est $y - mx = 0$ et $s_m$ la symétrie par rapport à $\Delta_m$ , de direction $D$.

   Soit $m$ un réel donné ; démontrer que, quel que soit l'élément $g$ de $G$, on peut trouver un réel $m'$ tel que

   $$g = s_m \circ s_{m'}.$$



Retour page 1

# XXII. Grenoble, série C

**Ex. 1329.** *3 points.* *./1978/grenobleC/exo-1/texte.tex*

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

**1.** Soit $p$ un entier naturel. Montrer que parmi les trois entiers suivants $p, p+10, p+20$ un seul est un multiple de 3.

En déduire tous les triplets $(a, b, c)$ de $\mathbb{N}^3$ tels que $a, b$ et $c$ soient tous premiers et soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 10.

**2.** Soit $\mathscr{E} = \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}^3 / 3u + 13v + 23w = 0\}$

a) Montrer pour $(v, w) \in \mathbb{Z}^2$ l'équivalence entre les propositions suivantes :

$$\{13v + 23w \equiv 0 \; mod(3)\} \qquad \text{et} \qquad \{v \equiv w \; mod(3)\}.$$

b) En déduire que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des triplets de la forme

$$(-13k - 23k' - 12r,\ 3k + r,\ 3k' + r),$$

où $(k,\ k',\ r)$ prend toute valeur dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0,\ 1,\ 2\}$.

# XXIII. La Réunion remplacement, série C

**Ex. 1330.** *3 points.* *./1978/reunionCrem/exo-1/texte.tex*

Déterminer les couples d'entiers naturels $a$ et $b$ tels que leur plus petit commun multiple soit 120 et la somme de leurs carrés 801.

**Ex. 1331.** *5 points.* *./1978/reunionCrem/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on donne un cercle $(C)$, centré en un point $O$, dont un diamètre est appelé $[AA']$.
Autres données :
$(D)$ tangente en $A'$ à $(C)$,
$P$ un point de $(C)$, distinct de $A$ et $A'$,
$(\Delta)$ médiatrice de $(A,\ P)$,
$s$ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$,
$Q$ le point d'intersection de la droite $(D)$ avec la tangente en $P$ à $(C)$,
$t$ la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{OQ}$,
$M$ l'image de $A$ dans la translation $t$ : $M = t(A)$.

1. Démontrer que les points $A$, $P$, $M$ sont alignés.
2. Démontrer qu'il existe deux isométries vectorielles du plan vectoriel $\pi$, associé à $\mathscr{P}$, qui transforment $\overrightarrow{QM}$ en $\overrightarrow{OP}$. En préciser la nature et les éléments.
3. Déterminer la nature et les éléments de l'application ponctuelle $\varphi$ telle que $t = \varphi \circ s$.
4. Démontrer qu'il existe deux isométries affines, dont on précisera les éléments, qui transforment le bipoint $(Q,\ M)$ en le bipoint $(O,\ P)$.

   L'une d'elles est une rotation dont le centre sera appelé $I$.
5. Montrer que le point $I$ appartient à une parabole indépendante de la position du point $P$ sur le cercle $(C)$.

**Problème 468** *12 points.* *./1978/reunionCrem/pb/texte*

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, $E$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$E$ étant muni d'une addition notée $+$, telle que pour tout couple $(f,\ g)$, élément de $E^2$, et pour tout $x$ réel,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et d'une multiplication par un réel notée . telle que pour tout $f$, élément de $E$, pour tout $k$ réel, pour tout $x$ réel,

Retour page 1

$$(k\mathring{u}f)(x)=kf(x),$$

*On admettra* que $(E,\ +,\ \mathring{u})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Á toute application $f$ , élément de $E$, on associe la fonction $F$ telle que, pour tout $x$ réel,

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

L'objet de ce problème est de proposer l'étude de

— quelques propriétés des fonctions $F$,

— quelques propriétés de l'application $T$ qui, à $f$, associe $F$,

— quelques fonctions $F$ particulières.

Les parties II, III et IV de ce problème sont totalement indépendantes les unes des autres. Le candidat les traitera dans l'ordre de son choix, Toute réponse non correctement justifiée sera considérée comme nulle.

I- 1. On désigne par $\mathscr{F}$ la fonction telle que, pour tout $X$ réel,

$$\mathscr{F}(X)=\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\mathscr{F}$ appartient à $E$ et possède une dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $\nu_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto X$ tel que $X=x+a$, où $a$ est un réel donné. Démontrer que la fonction composée,

$$\mathscr{F}\circ\nu_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\longmapsto(\mathscr{F}\circ\nu_a)(x)=\int_0^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

appartient à $E$ et possède une dérivée continue, telle que pour tout $x$ réel,

$$(\mathscr{F}\circ\nu_a)'(x)=f(x+a).$$

3. En déduire que $F$, définie ci-dessus par (1), appartient à $E$ et possède une dé- rivée continue, telle que, pour tout $x$ réel,

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+1)-f(x-1)\right].$$

II- 1. Vérifier que l'application $T$ est un endomorphisme de $E$. Dans la suite, on utilisera la notation $F=T(f)$.

2. Soit $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto|x-1|$. $G$ appartient-elle à $E$ ? $G$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?
Existe-t-il $g$ , élément de $E$, telle que $T(g)=G$ ? L'application $T$ est-elle surjective ?

3. Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto\sin\pi x$. Déterminer $H=T(h)$. L'application $T$ est-elle injective ?

4. On appelle $E_3$ le sous-espace vectoriel de $E$, ensemble des fonctions polynômes de degré deux au plus. Montrer que $E_3$ est stable par $T$. On note $\hat{T}$ l'application de $E_3$ dans $E_3$ définie par :

$$\hat{T}:f\longmapsto T(f).$$

$\hat{T}$ est-elle bijective ?

III- Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\longmapsto|t|$. $\varphi$ appartient-elle à $E$ ?

1. Démontrer que $\Phi=T(\varphi)$ est donnée par les formules :

$$\Phi(x)=|x| \quad\text{pour}\quad |x|\geqslant 1 \qquad\text{et}\qquad \Phi(x)=\frac{1}{2}(1+x^2) \quad\text{pour}\quad |x|\leqslant 1.$$

En les rapportant à un même repère, représenter graphiquement $\varphi$ et $\Phi$.



Retour page 1

2. Démontrer que, pour tout $x$ réel, $|x| \leqslant \Phi(x)$ et $\frac{1}{2} \leqslant \Phi(x)$, ainsi que, pour tout $x$ réel tel que $|x| \leqslant 1$, $\frac{1}{2}\Phi(x) \leqslant 1$.
3. En distinguant les deux cas :
$$|u+v| \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |u+v| \leqslant 1,$$
démontrer que quels que soient $u$ et $v$ réels,
$$\Phi(u)+\Phi(v) \geqslant \Phi(u+v).$$

IV- Soit $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{2}{1+|t|}$. $\omega$ appartient-elle à $E$ ?
Dessiner la courbe représentative de $\omega$, rapportée à un repère orthonormé.
Démontrer que $\Omega = T(\omega)$ est donnée par les formules :
$$\Omega(x) = \log(4-x^2) \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant 1$$
et
$$\Omega(x) = \log(1+\frac{2}{|x|}) \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant 1.$$

# XXIV. Liban, série C

**Ex. 1332.** ——— *4 points.* *./1978/libanC/exo-1/texte.tex*

Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal.
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué des entiers $n$ qui possède les propriétés suivantes :

- ▷ 4 divise $n$
- ▷ $n$ admet au moins dix diviseurs appartenant à $\mathbb{N}$ il existe un entier premier $p$ tel que $n = 37p+1$.

1. Quel est le plus petit élément de E ?
2. Existe-t-il un élément $n$, de E, vérifiant $26\ 800 < n < 27\ 800$ ?

**Ex. 1333.** ——— *4 points.* *./1978/libanC/exo-2/texte.tex*

Soit E un plan vectoriel euclidien rapporté à une base $(\vec{a},\ \vec{b})$. (Le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E est noté $\vec{x}.\vec{y}$).
Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans E, telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \cos t\,\vec{a} + \sin t\,\vec{b}$$
et $\varphi'$ sa dérivée.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ constituent une base de E.
2. Pour tout réel $t$, décomposer $\varphi(t)$ dans une telle base.
3. Étudier l'ensemble des réels $u$ tels que $\varphi(u).\varphi'(u) = 0$.

**Ex. 1334.** ——— *12 points.* *./1978/libanC/exo-3/texte.tex*

I- Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
Quelle est la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

II- 1. Montrer que, pour tout réel $b$ strictement positif,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \left[x \leqslant b \Rightarrow \mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^b x^2\right]$$

$$\text{et} \qquad \left[x \geqslant -b \Rightarrow \mathrm{e}^x - 1 - x \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-b} x^2\right].$$

2. Montrer que, pour tout réel $a$, il existe une application $\varphi_a$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en $a$, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \varphi_a(x)\right].$$

En déduire que $f$ est différentiable.
Préciser la dérivée $f'$ de $f$.

III- Soit $P$ une primitive (sur $\mathbb{R}$) de $f$ de l'application $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$.
Á tout réel $x$, on associe l'application $Q_x$, de $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que $Q_x$ est dérivable sur $I$ ; expliciter sa dérivée.
Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

IV- Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x^2).$$

Soit $g'$ sa dérivée.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Que peut-on dire da la fonction $h$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 ?$$

Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

## XXV. Lille remplacement, série E

**Ex. 1335.** *3 points* *./1978/LilleErem/exo-1/texte.tex*

On considère un espace euclidien E rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit $\varphi$ l'application linéaire de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ tel que

$$x' = \frac{1}{9}(4x + y - 8z) \qquad \text{(XX.1)}$$

$$y' = \frac{1}{9}(7x + 4y + 4z) \qquad \text{(XX.2)}$$

$$z' = \frac{1}{9}(4x - 8y + z) \qquad \text{(XX.3)}$$

Retour page 1

**1.** Démontrer que $(\varphi(\vec{i}),\ \varphi(\vec{j}),\ \varphi(\vec{k}))$ est une base orthonormée de E.

**2.** Démontrer que $\varphi$ est une rotation vectorielle et que le plan vectoriel P d'équation cartésienne $2x+2y-z=0$ est invariant par $\varphi$, c'est-à-dire que :

$$\forall \vec{u},\ \vec{u}\in \mathbf{P},\ \varphi(\vec{u})\in \mathbf{P}.$$

Ex. 1336. *4 points* *./1978/LilleErem/exo-2/texte.tex*

Le plan affine est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la famille de courbes $\mathscr{C}_m$ d'équation cartésienne

$$mx^2-6mx+(2-m)y^2-4y(2-m)+4m+9=0$$

où $m$ est un paramètre réel.

**1.** Étudier suivant les valeurs de $m$ la nature de la courbe $\mathscr{C}_m$.

**2.** Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-\frac{2}{3}}$ correspondant à $m=-\dfrac{2}{3}$.

# XXVI. Limoges remplacement, série C

Ex. 1337. *./1978/limogesCrem/exo-1/texte.tex*

**1.** Considérons l'application $\begin{array}{rl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}\end{array}$ Sachant que 2 et 3 sont premiers entre eux : Prouver que l'ensemble $A=\{x\in\mathbb{Z}/f(x)\in\mathbb{Z}\}$ est non vide.

**2.** Déterminer $A$.

**3.** Déterminer l'ensemble $B=\{x\in A/x^2+f^2(x)\in 5\mathbb{Z}\}$.

Ex. 1338. *./1978/limogesCrem/exo-2/texte.tex*

L'espace vectoriel E de dimension 3 est muni d'une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère l'endomorphisme $f$ de E défini par

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= \vec{i}+\vec{j}\\ f(\vec{j}) &= \vec{i}+2\vec{j}\\ f(\vec{k}) &= \vec{i}-\vec{j}\end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau N de $f$ et en donner une base.
   Déterminer l'image E' de $f$ et démontrer que $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base de E'.
2. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'image E'. Donner la matrice $A$ de $g$ sur la base ( $vecteuri,\vec{j}$) ; montrer que $g$ est bijective et déterminer l'application réciproque $g^{-1}$.
3. Déterminer l'unique endomorphisme $h$ de E ayant les propriétés suivantes : la restriction de $h$ à E' est $g^{-1}$ et le noyau de $h$ est la noyau N de $f$.

# XXVII. Lyon, série C

Ex. 1339. *./1978/lyonC/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation

$$13x-84y=7.$$

**2.** Déterminer les solutions $(x,\ y)$ de cette équation telles que $x$ et $y$ soient premiers entre eux (on pourra montrer que si $(x,\ y)$ est une solution de cette équation, alors le PGCD de $x$ et de $y$ est 1 ou 7).

Retour page 1

# XXVIII. Lyon, série E

**Ex. 1340.** ./1978/lyonE/exo-1/texte.tex

On donne l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe $z$ associe le nombre complexe

$$Z = z^2 + z + 1.$$

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, construire l'enssemble $\mathscr{E}$ des points $M$ imades des nombres $z$ tels que $\frac{\pi}{2}$ soit un représentant de l'argument de $Z$.

**Ex. 1341.** ./1978/lyonE/exo-2/texte.tex

**1.** Étudier la fonction numérique qui, au réel $x$ associe : $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$. Puis tracer son graphe dans un repère orthonormé.

**2.** Déterminer l'aire du domaine constitué des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} \mathrm{e} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

# XXIX. Montpellier Extrème Orient, série C

**Ex. 1342.** *5 points* ./1978/montpellierC/exo-1/texte.tex

P est un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $a$ un nombre réel.
On considère l'application affine notée $f_a$ définie par :

$$\begin{aligned} f_a : \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{P} \\ M(x\ ;\ y) &\longmapsto M'(x'\ ;\ y') \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} x' &= \quad ax + a - 1 \\ y' &= (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{aligned}.$$

**1.** Montrer qu'il existe une valeur de $a$ pour laquelle $f_a$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

**2.** Existe-t-il $a$ tel que $f_a$ soit involutive ? Montrer qu'alors $f_a$ est une symétrie que l'on précisera.

**3.** Déterminer avec précision l'ensemble $f_a(\mathrm{P})$ suivant les valeurs de $a$.
On suppose $a = 0$. soit $t$ la translation de vecteur $3\vec{\jmath}$. Montrer qu'il existe une projection $p$ que l'on déterminera telle que :

$$f_0 = t \circ p = p \circ t.$$

**Ex. 1343.** *3 points.* ./1978/montpellierC/exo-2/texte.tex

Dans un jeu de hasard, un joueur a misé 1 F sur le numéro 5. Le jeu consiste à jeter deux dés parfaits. Si le numéro 5 est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4 F. S'il est obtenu sur un seul dé, le joueur reçoit 3 F. S'il n'est obtenu sur aucun dé, le joueur perd sa mise.

**1.** Quelles sont les probabilités respectives de ces événements ?

**2.** Le gain du joueur (somme reçue diminuée de la mise) est une variable aléatoire. Quelle est son espérance mathématique ?

## Problème 469 *12 points.* ./1978/montpellierC/pb/texte

A - Soit la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \end{aligned}.$$

1. Démontrer que $\varphi$ est impaire. Étudier les variations de la fonction $\varphi$ et tracer as courbe représentative.



Retour page 1

2. On désigne par $I$ l'intervalle $]-1\,;1[$. Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I$. Déterminer l'application réciproque $\varphi^{-1}$.
3. Démontrer que si $a$ et $b$ sont deux nombres réels, alors :

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1+\varphi(a)\varphi(b)}.$$

4. En déduire que si $\alpha$ et $\beta$ appartiennent à l'intervalle $I$, alors :

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \quad \text{appartient à } I.$$

B - Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \quad |z| < 1\}.$$

Soit $\alpha$ un réel appartenant à $I$.

1. En supposant $z \in$D, comparer $|z-\alpha|$ et $|1-\alpha z|$.
   En déduire que si $z$ appartient à D, alors $\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ est défini et appartient à D.
2. Pour tout $\alpha$ de $I$, on a ainsi défini une application $f_\alpha$ :

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathrm{D} \\ z &\longmapsto \frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \end{aligned}.$$

   Montrer que $f_\alpha$ est une bijection de déterminer la bijection réciproque.
3. On pose : $\mathscr{F} = \{f_\alpha \;\; |\alpha \in I\}$.
   Montrer que la composition des applications (notée $\circ$) est une loi de composition interne dans $\mathscr{F}$.
   Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathscr{F} \\ a &\longmapsto f_{\varphi(a)} \end{aligned}$$

   ($\varphi$ désignant l'application définie au A) est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(\mathscr{F},\ \circ)$.
   Montrer que cet isomorphisme permet de retrouver les propriétés de $f_\alpha$.

## XXX. Nancy Metz, série C

**Ex. 1344.** ———— *4 points.* *./1978/nancyC/exo-1/texte.tex*

**1.** Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division de $3^n$ par 11.

**2.** En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer suivant les valeurs des entiers naturels $k$ et $m$, les restes de la division par 11 des deux nombres

$$A = 1978^k$$

$$B = 421^{5m} + 421^{4m} + 421^{3m} + 421^{2m} + 421^{m}.$$

**Ex. 1345.** ———— *4 points.* *./1978/nancyC/exo-2/texte.tex*

Une urne contient $N$ boules numÃ©rotÃ©es de 1 Ã  $N$ $(N > 1)$.
On effectue dans cette urne deux tirages au hasard avec remise (le numÃ©ro de chaque boule tirÃ©e est notÃ© et la boule est remise dans l'urne).
On considÃ¨re deux variables alÃ©atoires : $X_1$ prenant le pour valeur le numÃ©ro de la boule tirÃ©e en premier, et $X_2$, prenant la valeur de la boule tirÃ©e en second.

**1.** DÃ©terminer la loi de probabilitÃ© de chacune des variables $X_1$ et $X_2$. Calculer l'espÃ©rance mathÃ©matique de $X_1$ et $X_2$.

**2.** On suppose dÃ©sormais que $N = 5$.



Retour page 1

a) Calculer et reprÃ©senter graphiquement la fonction de rÃ©partition $F$ de $X_1$.

b) On considÃ¨re la variable alÃ©atoire $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi de probabilitÃ© de $Y$ ? Calculer l'espÃ©rance mathÃ©matique de $Y$ ainsi que sa variance.

c) Calculer le probabilitÃ© de l'Ã©vÃ©nement $\{2 < Y < 10\}$ et comparer le rÃ©sultat avec un minorant de cette probabilitÃ© obteny en utilisant l'inÃ©galitÃ© de BienaymÃ©-Tchebycheff.

## XXXI. Nantes, série C

Ex. 1346. ———— *3 points.* *./1978/nantesC/exo-1/texte.tex*

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue $x$ :

$$3x^2 + 4x \equiv 0 \; [\quad \text{modulo } 21].$$

Ex. 1347. ———— *4 points.* *./1978/nantesC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24\mathrm{i}$$

où $a$ et $b$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer $a$ et $b$ sachant que :

$$\begin{cases} f(1) = -44 + 32\mathrm{i} \\ f(-1) = -30 + 16\mathrm{i}. \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que : $a = 5$ et $b = -8 + 8\mathrm{i}$.
   Démontrer qu'il existe un réel $r$, et un seul, tel que $f(r) = 0$
   et résoudre dans $\mathbb{C}$ alors l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$f(z) = 0. \tag{E}$$

   On appelle $z_1,\ z_2$ et $z_3$ les solutions de (E) ; on note $Z$ le complexe

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

   Calculer $Z$. Déterminer le module et un argument de $Z$.

## XXXII. Nice, série C

Ex. 1348. ———— *4 points.* *./1978/niceC/exo-1/texte.tex*

**1.** Trouver toutes les paires d'entiers naturels $a$ et $b$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{pgcd } (a,\ b) \quad = \quad 42 \\ \text{et} \\ \text{ppcm } (a,\ b) = 1680. \end{cases}$$

**2.** Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ tels que

$$8x \;=\; 7 \qquad (\text{modulo } \; 5).$$

**3.** Résoudre l'équation :

$$(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad 336x + 210y = 294.$$

La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée.

Retour page 1

**Ex. 1349.** ./1978/niceC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $s$, la transformation du plan complexe dans lui-même, qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 3\mathrm{i}.$$

Déterminer la nature de $s$ et les éléments géométriques qui la caractérisent.

**2.** Soit $O$ l'origine du repère. On considère la rotation $r$ de centre O et de mesure $-\frac{\pi}{2}$. On pose $f = r \circ s$. Déterminer la nature de $f$ et les éléments géométriques qui la caractérisent. Quelle est l'image par f du point A d'affixe $-3$ ?

## Problème 470

./1978/niceC/pb/texte

La partie A est indépendante des parties **??** et **??** et la partie **??** peut être traitée en utilisant le dernier résultat de A.

Dans tout le problème $a$ est un nombre réel donné strictement positif.

A- Soit $f_a$ la fonction définie pour tout réel $x$ par

$$f_a(x) = (a-x)\mathrm{e}^x$$

et soit $\mathscr{C}_a$ sa représentation graphique dans un plan P rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de la fonction $f_a$. Montrer que $f_a$ a un maximum pour une valeur $x_a$ que l'on déterminera. Soit $M_a$ le point de coordonnées $(x_a\ ;\ f(x_a))$. Quel est l'ensemble des points $M_a$ quand $a$ décrit $\mathbb{R}^+$. Le construire dans P.
2. En déduire le tableau de variations et la représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de $f_1$.

B- 1. Par une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^a t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = a\mathrm{e}^a - \int_0^a \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\mathrm{e}^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose :

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} expot\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que

$$I_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_n.$$

3. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$\mathrm{e}^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n.$$

4. a) Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{a^n}{n!}(\mathrm{e}^a - 1)$.

b) On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$.

En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$



Retour page 1

c) En déduire les limites de $u_n$ et de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^a.$$

C- Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$. On définit $A^n$ par $A^1=A$ et $A^n=A^{n-1}\times A$ pour $n\geqslant 2$.

1. Calculer $A^2,\ A^3,\ A^4$. En déduire par récurrence $A^n$ en fonction de $n$.
2. Soit $B_n=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n$, où $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. On pose $B_n=\begin{pmatrix}\alpha_n&\gamma_n\\\beta_n&\delta_n\end{pmatrix}$. . Expliciter $\alpha_n,\ \gamma_n,\ \beta_n,\ \delta_n$. Montrer que les suites $(\alpha_n),(\beta_n),\ (\gamma_n),\ (\delta_n)$ ont des limites, que l'on déterminera, quand $n$ tend vers $+\infty$.

# XXXIII. Nice remplacement, série C

**Ex. 1350.** *3 points.* ./1978/niceCrem/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{E}$, un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})=\mathscr{R}$.
Soit $D$ la droite d'équation $x+y-1=0$,
et $\Delta$ la droite d'équation $x-y-1=0$.
Soit $M$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Déterminer les coordonnées $xyp$ du point $M'$ image du point $M$ dans la symétrie orthogonale $s$ par rapport à la droite $D$.
2. Déterminer les coordonnées $(x''\ ;\ y'')$ du point $M''$ image du point $M$ dans la symétrie orthogonale $\sigma$ par rapport à la droite $\Delta$.
3. Soit $f=\sigma\circ s$. Quelle est la nature de f ? Pouvait-on prévoir le résultat ?
3.

**Ex. 1351.** *4 points* ./1978/niceCrem/exo-2/texte.tex

1. Établir la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Résoudre les équations :
   a) $x^2=0$
   b) $x^2=x$
   c) $\dot{3}x=\dot{0}$
   où $x$ est un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\begin{cases}\dot{2}x-\dot{4}y=\dot{2}\\x+\dot{5}y=\dot{2}.\end{cases}$$

**Problème 471** *13 points.* ./1978/niceCrem/pb/texte

On désigne par « a » un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$, et on considère la fonction numérique $f_a$ définie par

$$f_a(x)=(\log x^2-2x\cos a+1).$$

On appelle $(\mathscr{C}_a)$ la représentation graphique de $f_a$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- 1. Déterminer l'ensemble de définition de $f_a$ suivant les valeurs de « a ».

2. Trouver les limites, quand $x$ tend vers $+\infty$,de $f_a(x)$ et de la fonction :

$$x\longmapsto\frac{f_a(x)}{x}.$$

3. a) Montrer que $(\mathscr{C}_a)$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\cos a$.



Retour page 1

b) Montrer que $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\pi-a})$ sont symétriques par rapport à la droite $(O,\ \vec{j})$.

c) $a$ et $a'$ étant deux réels distincts de l'intervalle $[0\,;\pi]$, déterminer l'intersection de $(\mathscr{C}_a)$ et de $(\mathscr{C}_{a'})$.

4. a) Étudier les variations de $f_0$ et tracer $(\mathscr{C}_0)$.

b) En déduire $(\mathscr{C}_\pi)$.

5. a) Quand « $a$ » est différent de 0 et de $\pi$, étudier les variations de $f_a$.

b) Tracer ensuite $(\mathscr{C}_a)$ pour $a = \dfrac{\pi}{3}$.

B- Soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$.

C- 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 1 = 0$.

b) Soit $z_k$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{k\pi}{n}$, où $k$ appartient à $I = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 2n?1\}$.

$k$ appartenant à $I - \{0,\ n\}$, soit $k'$ tel que $k + k' = 2n$ ; à quel ensemble appartient à appartient alors $k'$ ?

Montrer que le polynôme $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ a des coefficients réels que l'on déterminera en fonction de $k$ et $n$.

c) On admettra que :

$$\forall z,\ z \in \mathbb{C}, \qquad z^{2n} - 1 = (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_k)\dots(z - z_{2n?1}).$$

En utilisant C(1)b montrer que $z_{2n} - 1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels.

2. On considère $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$ où $x$ est un réel et où $f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \log(x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1)$.

a) Montrer que $S_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Déduire de C(1)c que si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$S_n(x) = \log\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}.$$

c) En déduire alors $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

3. $x$ étant un réel fixé, différent de $1$ et de $-1$, on considère la fonction $g_x$ telle que : $g_x(t) = \log(x^2 - 2x\cos t + 1)$pour tout $t$ appartenant à $[0\,;\pi]$.

*i.* Vérifier que $g_x$ est bien définie sur $[0\,;\pi]$, et qu'elle est intégrable sur $[0\,;\pi]$.

*ii.* Comparer $S_n(x)$ à une somme de Riemann de la fonction $g_x$.

*iii.* En déduire la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\pi \log(x^2 - 2x\cos t + 1)\,\mathrm{d}t.$$

## XXXIV. Orléans-Tours remplacement, série C

Ex. 1352. ——————— *3 points.* *./1978/orleanscrem/exo-1/texte.tex*

**1.** Calculer la somme $S_k = 1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k}$, $k \in \mathbb{N}^\star$.

**2.** Exprimer le nombre qui s'écrit en base 10 $\overline{\text{ababab}}$, à l'aide de $\overline{\text{ab}}$ et de puissances de 10.

**3.** En déduire la somme $29 + 2929 + 292929 + \dots + \underbrace{292929\dots29}_{n \text{ fois } 29}$.

Retour page 1

Ex. 1353. ———— *4 points* ./1978/orleanscrem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction réelle de variable réelle, telle que :

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}.$$

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$, et construire la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que cette courbe admet un centre de symétrie $I$, dont on précisera les coordonnées.

**2.** En déduire l'aire du domaine $E$ du plan affine euclidien, ensemble des points $M$ de coordonnées $x$ et $y$, telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant y \leqslant f(x)$$

## Problème 472 *13 points.* ./1978/orleanscrem/pb/texte

On appelle E le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, et P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$\mathscr{L}$(E) étant l'ensemble des endomorphismes de E (applications linéaires de E dans E), on rappelle que :

- $\mathscr{L}$(E), muni de l'addition et de la loi externe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ;
- $\mathscr{L}$(E), muni de l'addition et de la loi de composition des applications (notée $\circ$) est un anneau unitaire, et que, quels que soient le réel $\alpha$ et les endomorphismes $f$ et $g$ de E on a :

$$(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g).$$

On notera $e$ l'application identique de E dans E.

A- Soit $\varphi$ un endomorphisme de E tel que $\varphi^2 = -e$ ($\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$), c'est-à-dire que :

$$\forall \vec{u} \in \text{E}, \qquad \varphi^2(\vec{u}) = -e(\vec{u}) = -\vec{u}.$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ si, et seulement si : $a+d = 0$ et $a^2+bc = -1$.
2. Montrer que $\varphi$ est une application bijective de E dans E. Exprimer l'application réciproque $\varphi^{-1}$ de $\varphi$ en fonction de $\varphi$.
3. Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de E, montrer que $(\vec{u},\ \varphi(\vec{u}))$ est une base de E.
   Quelle est la matrice de $\varphi$ dans cette base ?
4. Exprimer en fonction de $\varphi$ ou de $e$ l'endomorphisme $\varphi^n$ pour tout entier naturel $n$. (On posera $\varphi^0 = e$ et $\varphi^1 = \varphi$.)
   Déterminer les éléments de $H = \{\varphi^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   Montrer que $H$ est un groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications, isomorphe au groupe multiplicatif
   $$H' = \{\text{i}^n | n \in \mathbb{N}\}, \quad (i^2 = -1).$$
5. Soit $\Phi$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$(E) constitué par l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $e$ et $\varphi$ où $\varphi$ est un endomorphisme donné tel que $\varphi^2 = -e$.
   a) Montrer que les endomorphismes $e$ et $\varphi$ sont linéairement indépendants.
   b) Soit $h$ l'application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\Phi$ définie par
   $$h(1) = e \qquad \text{et} \qquad h(\text{i}) = \varphi$$
   $(1,\ \text{i})$ étant la base canonique de $\mathbb{C}$ espace vectoriel des nombres complexes. Montrer que $h$ est bijective.
   c) Montrer que $\Phi$ est stable pour la loi $\circ$, loi de composition des applications.
   d) En déduire que $h$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C},\ \times)$ dans $(\Phi,\ \circ)$ et que $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$ et $(\Phi,\ +,\ \circ)$ sont deux corps isomorphes.
   e) Déterminer les couples de nombres réels $(\alpha,\ \beta)$ tels que $(\alpha e + \beta\varphi)^6 = e$.



Retour page 1

B- Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{P} & \to & \mathrm{P} \\ & M & \longmapsto & M' \end{array}$ l'application affine qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, associe le point $M' = f(M)$ dont les coordonnées dans le même repère sont

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = x - y + 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est un application bijective dont l'endomorphisme associé $\varphi$ est tel que $\varphi^2 = -e$. Montrer que $f$ n'admet qu'un seul point invariant $A$ dont on précisera les coordonnées.
2. Démontrer qu'il existe deux droites affines $D$ passant par $A$ telles que $D$ soit perpendiculaire à son image $f(D)$.
3. On prend $M = M_0$ et on note $M_n = f(M_{n-1})$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.
   a) Montrer que l'ensemble des points $M_n$ ainsi définis est réduit à quatre points si $M_0 \neq A$.
   b) Montrer que les quatre points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ sont les sommets d'un parallélogramme dont on précisera le centre.
   c) Déterminer, en utilisant les résultats de la question B2, l'ensemble des points $M_0$ pour que ce parallélogramme soit un losange.
   d) Ce parallélogramme peut-il être un carré ?
4. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe qui, dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ a pour équation
$$x^2 - 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$
   a) Préciser la nature de $(\mathscr{C})$, donner ses éléments caractéristiques et construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   b) Déterminer une équation de la courbe $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$. Préciser la nature de $(\mathscr{C}')$, donner ses éléments caractéristiques et la construire dans la même repère que $(\mathscr{C})$.
   c) Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ ont les mêmes asymptotes $\Delta_1$ et $\Delta_2$. Déterminer l'image par $f$ du couple $(\Delta_1,\ \Delta_2)$.

## XXXV. Orléans-Tours & Rouen remplacement, série E

**Ex. 1354.** ——— *3 points.* *./1978/orleansErem/exo-1/texte.tex*

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$.
Représenter graphiquement les solutions de cette équation dans le plan complexe.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations
$8\mathrm{e}^{4x} + 8\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = 0$
$8\sin^3\theta - 2\sin\theta sin 3\theta - \sin\theta - 3\cos 2\theta + 2 = 0.$

**Ex. 1355.** ——— *4 points* *./1978/orleansErem/exo-2/texte.tex*

On considère un plan vectoriel $\mathscr{P}$ dont $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base.
Soit $f$ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \dfrac{1}{3}\left(\vec{i} + 4\vec{j}\right) \\ f(\vec{j}) = \dfrac{1}{3}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right) \end{cases}$$

**1.** Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ est une droite vectorielle $\mathscr{D}$ dont on donnera une base $\{\vec{u}\}$.

**2.** Montrer que l'ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés par $f$ est une droite vectorielle $\mathscr{D}'$ dont on donnera une base $\{\vec{v}\}$.

**3.** Vérifier que $(\vec{u},\ \vec{v})$ est une base de $\mathscr{P}$ et déterminer la matrice $M$ de $f$ dans cette base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

**4.** Reconnaître et caractériser l'application linéaire $f$.

# XXXVI. Paris, série C

**Ex. 1356.** ——— *4 points.* ./1978/parisC/exo-1/texte.tex

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont notés $\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dots,\ \dot{90}$),

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, l'équation

$$ax = \dot{0}.$$

2. résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}.$$

**Ex. 1357.** ——— *4 points.* ./1978/parisC/exo-2/texte.tex

Soit un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ d'axes $Ox$, $Oy$.

1. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel $\lambda$, la nature de la courbe $C_\lambda$ dont l'équation dans le repère $\mathscr{R}$ est

$$\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + \lambda^2 - \lambda = 0.$$

2. Soit $M_0$ un point quelconque du plan. Discuter, suivant la position de $M_0$, le nombre et la nature des courbes $C_\lambda$ passant par ce point ; dessiner les régions trouvées.

## Problème 473 *12 points* ./1978/parisC/pb/texte

Soit $m$ un paramètre pouvant prendre toute valeur réelle. Pour chaque valeur de m, on considère la fonction $f_m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m|+m}.$$

A- 1. Déterminer dans chacun des cas $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$

a) l'ensemble $\mathscr{D}$ des points où $f_m$ est définie,

b) l'ensemble $\mathscr{C}_m$ des points où $f_m$ est continue,

c) l'ensemble $\mathscr{F}_m$ des points où $f_m$ est dérivable.

2. Soit $C_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

Quelles sont les asymptotes de $C_m$ ? La courbe $C_m$ admet-elle un centre de symétrie ? Dessiner $C_{-1}$, $C_0$, $C_1$.

3. a) Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes $C_m$ correspondant aux $m$ strictement positifs.

b) Montrer que, pour chaque m strictement positif, il existe une application af?ne transformant $C_1$ en $C_m$ et $C_{-1}$ en $C_{-m}$.

B- Dans toute cette partie, $m$ est strictement positif.

1. a) Calculer l'intégrale

$$\int_0^a [2 - f_m(x)]\,\mathrm{d}x$$

où $a$ est un réel vérifiant $0 < m \leqslant a.$.

b) En déduire que, $a$ étant fixé, cette intégrale tend vers une limite lorsque $m$ tend vers 0 par valeurs positives.

2. Soit un entier $p \geqslant 2$.

a) a. Montrer que, pour chaque $m > 0$,

$$\int_0^m [2 - f_m(x)]^p\,\mathrm{d}x \leqslant 3^p m$$

sans chercher à calculer l'intégrale.



Retour page 1

b) Calculer

$$\int_m^a [2 - f_m(x)]^p \, \mathrm{d}x$$

lorsque $0 < m \leqslant a$.

c) En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_0^a [2 - f_m(x)]^p \, \mathrm{d}x.$$

d)

3. a) Montrer que, pour chaque $x$ réel, $f_m(x)$ tend vers une limite finie $\lambda(x)$ lorsque $m$ tend vers 0 par valeurs positives ; comparer les fonctions $\lambda$ et $f_0$.

b) Existe-t-il un réel $m > 0$ tel qu'on ait :

pour tout $x > 0$, $\qquad 2 - f_m(x) < \dfrac{1}{10}$ ?

c) Soit un réel $\epsilon > 0$. Existe-t-il un réel $\alpha > 0$ tel qu'on ait :

pour tout $m$ tel que à $< m < \alpha$, pour tout $x \geqslant \epsilon$, $\qquad 2 - f_m(x) < \epsilon$ ?

d) En déduire une autre démonstration du résultat trouvé au B(2)c.

## XXXVII. Paris remplacement, série C & E

**Ex. 1358.** ——— *4 points* ./1978/parisCrem/exo-1/texte.tex

Soit $M = \{1, j, j^2\}$ l'ensemble des racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{C}$.
On donne deux nombres complexes $a$ et $b$.

**1.** On considère E l'ensemble des nombres $(\lambda a + \mu b)^3$ obtenus quand $(\lambda, \mu)$ décrit $M^2$.
Montrer que E contient au plus trois éléments.

**2.** Vérifier que $z = (a + b)^3$ est racine de l'équation dans $\mathbb{C}$

$$(z - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3z = 0.$$

**3.** Résoudre l'équation

$$(z - 2 - 6\mathrm{i})^3 - 432(1 + \mathrm{i})z = 0$$

en utilisant ce qui précède et en prenant
$\begin{cases} a^3 = 2 - 2\mathrm{i} \\ b^3 = 8\mathrm{i}. \end{cases}$

**Ex. 1359.** ——— *4 points.* ./1978/parisCrem/exo-2/texte.tex

1. Soit $E$ l'ensemble des points du plan affine dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $y \geqslant x^2$. $A_1$ de coordonnées $(a_1\ ;\ b_1)$ et $A_2$ de coordonnées $(a_2\ ;\ b_2)$ étant deux points de E, on considère le barycentre $G$ de ces points affectés des coefficients $\lambda$ et$1 - \lambda$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Calculer les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $G$ et montrer que $G \in$E.

2. a) Établir par récurrence sans nouveau calcul que, si $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartiennent à E, la barycentre de ces points affectés de coefficients égaux, appartient à E.

b) On considère la cas où les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'abscisses $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont sur la courbe d'équation $y = x^2$. Déduire de 2a l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

## 🏛Problème 474 *12 points.*

./1978/parisCrem/pb/texte

On désigne par I l'intervalle $]1\,;+\infty[$ de $\mathbb{R}$, par $\mathrm{e}$ la base des logarithmes népériens : $\log \mathrm{e} = 1$.
Les courbes seront tracées dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (unité : 1 cm).

I- 1. Étudier l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Tracer sa courbe représentative.

2. a) Démontrer que l'équation dans I

$$\varphi(x) = \mathrm{e}$$

admet deux solutions que l'on comparera à $\mathrm{e}$, $\mathrm{e}^2$, $\mathrm{e}^3$, $\mathrm{e}^4$.

b) Résoudre dans I l'inéquation

$$\varphi(x) < x.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \varphi(x)}{\log x} = 1.$$

II- 1. On considère l'application $F$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

(on ne cherchera pas à « calculer » cette intégrale).
Justifier l'existence de $F$. Étudier son sens de variation.

2. a) Démontrer que, pur tout $x \in I$,

$$\log t < t - 1.$$

b) En déduire

$$\lim_{x\to+\infty} F(x), \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} F(x).$$

3. a) Montrer que, pour $\mathrm{e} \leqslant a < b$,

$$\frac{b-a}{\log b} \leqslant \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \leqslant \frac{b-a}{\log a}.$$

b) En écrivant

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \int_{\mathrm{e}}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \int_{u}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

montrer que, pour tout $x > \mathrm{e}$ et tout réel $u$ tel que $\mathrm{e} < u < x$,

$$\frac{x-u}{\log x} \leqslant F(x) \leqslant u + \frac{x-u}{\log u}. \tag{1}$$

c) Montrer que, si $x > \mathrm{e}^4$, on peut prendre dans les inégalités (1) $u = \varphi(x)$ où $\varphi$ est la fonction étudiée dans la partie I. De l'encadrement ainsi obtenu pour $F(x)$, déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} F(x).$$

4. a) Donner une valeur approchée de $F(2)$ en substituant à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\log x}$, la fonction affine $h$ telle que

$$h(2) = \frac{1}{\log 2} \qquad \text{et} \qquad h(\mathrm{e}) = 1.$$

Calculer par la même méthode une valeur approchée de $F(3)$.

b) Préciser les branches infinies de la courbe représentative de $F$ et tracer cette courbe.

Retour page 1

# XXXVIII. Paris, série E

**Ex. 1360.** *4 points.* ./1978/parisE/exo-1/texte.tex

Pour chaque entier naturel $n$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x \, \mathrm{d}x.$$

1. sans calculer $I_n$,
   a) montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   b) Comparer $I_n$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \, \mathrm{d}x$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on déterminera.
2. Calculer $I_0$ et $I_1$. Exprimer $I_{n+2}$ en fonction de $I_n$ et de $n$.

**Ex. 1361.** *4 points.* ./1978/parisE/exo-2/texte.tex

L'espace affine est rapporté à un repère orthonormé d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ ; l'unité est le centimètre.
La ligne de terre $y'Oy$ est parallèle au petit côté de la feuille à 12 cm du bord inférieur de la partie quadrillée.
L'origine $O$ est à 6 cm du bord gauche de la partie quadrillée.
Les plans $xOy$ et $yOz$ sont respectivement le plan horizontal de projection et le plan frontal de projection.
L'axe $Ox$ est dirigé vers le bas de la feuille, l'axe $Oy$ vers la droite, l'axe $Oz$ vers la haut.
On considère les points suivants, définis par leurs coordonnées :

$$A(4\ ;\ 12\ ;\ 8),\qquad B(2\ ;\ 4\ ;\ 4),\qquad C(8\ ;\ -2\ ;\ -4),\qquad S(8\ ;\ 2\ ;\ 10).$$

1. Faire l'épure du tétraèdre $SABC$.
2. Construire
   a) les traces du plan $ABC$ ;
   b) les projections de la droite $\Delta$, passant par $S$, orthogonale au plan $ABC$ ;
   c) les projections du point $H$ intersection de la droite $\Delta$ et du plan $ABC$.

## Problème 475 *12 points.* ./1978/parisE/pb/texte

I- 1. Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}.$$

a) Étudier $f$.

b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ d'axes $Ox$, $Oy$. On précisera les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points remarquables.
Soit $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à $Ox$.
On pose $\Gamma = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$. Tracer $\Gamma$.

II- 1. On considère le point $A(-1\ ;\ 0)$ et la droite $\Delta$ d'équation $x = -2$.
Soit $m$ un paramètre réel, différent de zéro. On considère la droite $D$ d'équation $y = mx$ et la droite $D'$ perpendiculaire en $O$ à $D$. Les droites $D$ et $D'$ coupent $\Delta$ respectivement en $P$ et $P'$. Soit $K$ le milieu du segment $[PP']$.
Le droite $(AK)$ coupe $D$ et $D'$ respectivement en $M$ et $M'$.

a) Déterminer les coordonnées de $M$ et de $M'$ en fonction de $m$.

b) Soit $\Gamma_1$ l'ensemble des points $M$, $\Gamma_1'$ l'ensemble des points $M'$ obtenus quand $m$ décrit $\mathbb{R}^\star$. Vérifier que $\Gamma_1 = \Gamma_1'$.

c) Déterminer une fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Gamma_1 \cup \{A\}$ soit l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $y^2 = \varphi(x)$.

2. Montrer qu'il existe une application affine du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui transforme $\Gamma_1 \cup \{A\}$ en $\Gamma$.

III- On considère le point mobile $M$ de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont données en fonction du temps $t$ par :

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos 3t. \end{cases}$$

1. Montrer que la trajectoire de $M$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$ est une partie de $\Gamma$ que l'on déterminera.
2. Préciser les valeurs de $t$ correspondant :
   a) aux points où la trajectoire rencontre les axes ;
   b) aux points d'abscisses 1 ;
   c) aux points où le vecteur vitesse est colinéaire au vecteur unitaire de $Ox$.
3. Expliquer comment le point $M$ parcourt sa trajectoire lorsque $t$ décrit $[0\,;2\pi]$.

# XXXIX. Poitiers, série C

**Ex. 1362.** ./1978/poitiersC/exo-1/texte.tex

Étant donné deux entiers naturels non nuls $a$ et $b$, on désigne respectivement par $d$ et $m$ le PGCD et Le PPCM de $a$ et $b$.
Déterminer l'ensemble $S$ des paires $\{a,\ b\}$ telles que

$$d + m = 126 \qquad \text{et} \qquad 5 < d < 10.$$

**Ex. 1363.** ./1978/poitiersC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} & f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} \quad \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \text{et} \quad & f(x) = ax^2 + bx \quad \text{si} \quad x > 1 \quad \text{où } (a,\ b) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**1.** Déterminer $a$ et $b$ pour que $f$ soit continue et dérivable au point 1.

**2.** Étudier alors les variations de $f$ et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**3.** On désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x,\ y)$ sont telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$.

## Problème 476

./1978/poitiersC/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{V}$ le plan vectoriel associé à $\mathscr{P}$ et $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.

I - Vérifier que le sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{P}$ d'équation $4x^2 + 9x^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ est une ellipse dont on précisera le centre $\omega$, les foyers, les directrices et l'excentricité. Représenter $\mathscr{E}$.

II - Soit $g$ l'application affine admettant $\omega$ comme point invariant et dont l'endomorphisme associé $\varphi$ a pour matrice par rapport à la base $(\vec{i},\ \vec{j})$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

vérifier que $g$ est bijective. Calculer les coordonnées de $g(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$. Montrer que $g(\mathscr{E})$, l'image de $\mathscr{E}$ par $g$, est le cercle C ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse $\mathscr{E}$.

III - $K$ étant un sous-ensemble de $\mathscr{P}$, on dit qu'une bijection affine de $\mathscr{P}$ laisse $K$ invariant si et seulement si $f(K) = K$.
Montrer que l'ensemble $F$ des bijections affines $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ laissant $K$ invariant, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

IV - 1. On appelle $G$ le groupe des applications affines de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent $\mathscr{E}$ invariant. Donner des exemples d'éléments de $G$.

2. On appelle $G_1$ le groupe des applications affines de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent C invariant.

a) Montrer que $f_1$ appartient à $G_1$ si et seulement si

$$g^{-1} \circ f_1 \circ g \quad \text{appartient à G.}$$

b) Soit $h$ l'application de $G_1$ dans $G$ définie par :

$$h(f_1) = g^{-1} \circ f_1 \circ g.$$

Montrer que $h$ est un isomorphisme de $G_1$ sur $G$.

V - Soit $f_1$ une bijection affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laisse C invariant.

1. On pose $\omega_1 = f_1(\omega)$. Un diamètre de C passant par $\omega_1$ coupe C en $A_1$ et $B_1$.
Soient $A = f_1^{-1}(A_1)$ et $B = f_1^{-1}(B_1)$. En utilisant les propriétés des bijections affines, montrer que $\omega_1 = \omega$.

2. Soit $\varphi_1$ l'endomorphisme associé à $f_1$. Montrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de $\mathscr{V}$, le point $M$ tel que $\overrightarrow{\omega M} = \dfrac{3\overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$ appartient au cercle C, et en déduire que $\left\|\varphi_1(\overrightarrow{V})\right\| = \left\|\overrightarrow{V}\right\|$.

3. En déduire que les éléments de $G_1$ sont des isométries affines que l'on déterminera.

VI - 1. Déduire des questions précédentes que les bijections affines $f$ appartenant à $G$ laissent $\omega$ invariant.

2. Donner la forme générale des matrices par rapport à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ des endomorphismes qui leur sont associés.

3. Quelles sont les isométries affines de $G$ ?

# XL. Rouen, série C

**Ex. 1364.** ./1978/rouenC/exo-1/texte.tex

**1.** Linéariser l'expression : $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$.

**2.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Ex. 1365.** ./1978/rouenC/exo-2/texte.tex

Pour tout entier naturel $n$, calculer le reste de la division par 7 de $5^n$ et $4^n$.
Comment faut-il choisir $n$ pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

## Problème 477 ./1978/rouenC/pb/texte

**Partie I-**

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Á tout couple $(a,\ b)$ élément de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, on associe l'application $\varphi_{a,b}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad \left[\varphi_{a,b}(z) = az + b(\overline{z})\right] \qquad (\overline{z} \text{ étant le conjugué de } z).$$

**1.** Donner la nature de $\varphi_{1,0}$ et de $\varphi_{-1,0}$.

**2.** Démontrer que $\varphi_{a,b} = \varphi_{a',b'}$, si et seulement si $(a,\ b) = (a',\ b')$.

**3.** Démontrer que $\varphi_{a,b}$ est involutive si et seulement si $a,\ b,\ a',\ b'$ vérifient simultanément deux relations que l'on précisera.

**Partie II-**
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté et $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.
Soit le nombre complexe $u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1+2\mathrm{i})$.
On désigne par $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe complexe $z$ associe le point $M_1$ d'affixe complexe $z_1 = \varphi_{\frac{3}{4}\mathrm{i},1+\frac{3}{4}\mathrm{i}}(z)$ et par $h$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe complexe $z$ associe le point $M_2$ d'affixe complexe $z_2 = \varphi_{0,u}(z)$.

A) 1. Calculer pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $M_1 = f(M)$ et les coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$ de $M_2 = h(M)$.

2. Démontrer que $f$ est une application affine involutive. Donner la nature de $f$ et ses éléments caractéristiques.

3. Démontrer que $h$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera une équation.

B) Á tout nombre réel $\theta$ on associe $g_\theta = f \circ r_\theta \circ f$, où $r_\theta$ est la rotation de centre $O$ et dont une détermination de la mesure de l'angle est $\theta$. Soit
$$\mathscr{G} = \{g_\theta \mid \quad \theta \in \mathbb{R}\}.$$

1. a) Montrer que $\mathscr{G}$ est stable pour la loi $\circ$.

   b) Démontrer que $\mathscr{G}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

2. On définit dans $\mathscr{P}$ la relation $\mathscr{R}$ par :
$$(\forall (M,\ N) \in \mathscr{P}^2 \quad \left[M \mathscr{R} N \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad N = g_\theta(M)\right].$$
   Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

3. Déterminer la classe d'équivalence du point $O$ par la relation $\mathscr{R}$.

4. Soit $A$ le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

   a) Démontrer que les coordonnées de $g_\theta(A)$ sont
$$(2\sin\theta\ ;\ 3\sin\theta + 2\cos\theta).$$

   b) Donner une équation de la classe d'équivalence $\Gamma_A$ du point $A$ par la relation $\mathscr{R}$.

   c) On considère les deux fonctions numériques de variable réelle $F_1$ et $F_2$ définies par : $F_1(x) = \dfrac{3}{2}x + \sqrt{4-x^2}$ et $F_2(x) = \dfrac{3}{2}x - \sqrt{4-x^2}$.
   On appelle $C_1$ et $C_2$ leurs courbes représentatives respectives dans $\mathscr{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$.
   Montrer que $\Gamma_A = C_1 \cup C_2$. Étudier $F_1$ et $F_2$ et tracer $\Gamma_A$. (On prendra $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 2$, (unité le cm) et 3,6 comme valeur approchée à $10^{-1}$ près par défaut de $\sqrt{13}$).

5. Déterminer une équation de $\Gamma'$, transformée de $\Gamma$ par $h$.
   Quelle est la nature de $\Gamma'_A$ ? Tracer $\Gamma'_A$ sur la même feuille que $\Gamma_A$.
   Quelle est la nature de $\Gamma_A$ ?

# XLI. Strasbourg, série C

**Ex. 1366.** ./1978/strasbourgC/exo-1/texte.tex

$n$ désigne un entier naturel.

**1.** Démontrer que $n^2+5n+4$ et $n^2+3n+2$ sont divisibles par $n+1$.

**2.** Déterminer les entiers naturels $n$ pour lesquels $3n^2+15n+19$ est divisible par $n+1$.

**3.** En déduire que, quel que soit $n$, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par $n^2+3n+2$.



Retour page 1

**Ex. 1367.** ./1978/strasbourgC/exo-2/texte.tex

e représente la base des logarithmes népériens.

**1.** Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ qu'on notera $I$.

**2.** Calculer $I$.

**3.** $n$ étant un entier naturel non nul, on pose

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}=\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}+\cdots+\frac{n}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{n}}.$$

Montrer que $S(n)$ a une limite lorsqu'on fait tendre $n$ tend vers $+\infty$. Préciser cette limite.

# XLII. Toulouse remplacement, série C

**Ex. 1368.** *4 points.* ./1978/toulouseCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction réelle de variable réelle qui, à $x$, associe

$$f(x)=\left|\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{-x}\right|.$$

1. Étudier les variations de $f$. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ au point $x_0=-\log 2$. Construire la courbe représentative $C$ de $f$ dans un repère orthonormé.
2. $\lambda$ étant un réel supérieur ou égal à $\log 2$, calculer l'aire de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\;;\;y)$ vérifiant

$$\begin{cases}-\log 2\leqslant x\leqslant\lambda\\ 0\leqslant y\leqslant f(x).\end{cases}$$

   Soit $\mathscr{A}(\lambda)$ cette aire.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 1369.** *4 points.* ./1978/toulouseCrem/exo-2/texte.tex

Une urne contient $n+8$ boules distinctes de trois couleurs : $n$ boules bleues ($n$ entier $\geqslant 2$)
5 boules rouges
3 boules vertes.

1. On tire deux boules de l'urne sans remise et on se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité.
   Une règle du jeu a été établie de la façon suivante :
   — on gagne quand on tire deux boules de la même couleur
   — on perd quand on tire deux boules de couleurs distinctes.
   Calculer en fonction de $n$ la probabilité $p_n$ de gain puis la probabilité $q_n$ de perte. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}p_n$. Ce résultat était-il prévisible ?
2. On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules comme au 1 en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne. Calculer en fonction de $n$ la probabilité $P_n$ pour obtenir 9 fois et 9 fois seule- ment un tirage de deux boules de la même couleur.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_n$ . Ce résultat était-il prévisible ?

## 🏛Problème 478 *12 points.* ./1978/toulouseCrem/pb/texte

On donne :
$\mathscr{P}$ plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$
$\mathscr{D}_1$ , droite vectorielle de $\mathscr{P}$ de base $(\vec{i})$
$\mathscr{D}_2$ , droite vectorielle de $\mathscr{P}$ de base $(\vec{j})$
$\mathscr{A}$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent tout vecteur de $\mathscr{D}_1$ invariant et la droite vectorielle $\mathscr{D}_2$ globalement invariante.

I- 1. Montrer que toute application de $\mathscr{A}$ a une matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a$ paramètre de $\mathbb{R}-\{0\}$.

On notera $\varphi_a$ l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

2. Donner l'image par $\varphi_a$ de la droite vectorielle d'équation cartésienne dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$\alpha x+\beta y=0 \quad \text{avec} \quad (\alpha,\ \beta)\neq(0,\ 0) \quad \text{et} \quad (\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^2.$$

En déduire que les seules droites laissées globalement invariantes par $\varphi_a$ avec $a\neq 1$ sont $\mathscr{D}_1$ , et $\mathscr{D}$.

II- On donne :
$P$ plan affine euclidien, associé à $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient les points $A(1\ ;\ 0)$ ; $B(-1\ ;\ 0)$ ; $C(0\ ;\ 1)$. Soit $\mathscr{B}_b$ l'ensemble des applications affines de $P$ dans $P$ qui laissent $O$ et $A$ invariants et qui transforment $C$ en $C'$ tel que $\overrightarrow{OC}=b\overrightarrow{OC'}$ avec $b$ paramètre fixe de $\mathbb{R}-\{0\}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}_b$ ne contient qu'une seule application que l'on notera $f_b$ dont on donnera l'expression analytique dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Caractériser cette application pour $b=1$ ; puis pour $b=-1$.
2. $m$ étant la projection orthogonale d'un point $M$ quelconque de $P$ sur la droite $(AB)$ ; $M'$ étant l'image de $M$ par $f_b$ calculer $\overrightarrow{mM'}$ en fonction de $\overrightarrow{mM}$.
3. On désigne par $E_b$ l'image par $f_b$ du cercle$\Omega$ de centre $O$ de rayon $OA$. Déterminer $E_b$ pour $|b|=1$.
Déterminer $E_b$ pour $|b|\neq 1$ ; préciser les éléments remarquables.

III- Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications affines de $P$ dans $P$ conservant globalement le cercle $\Omega$ et conservant globalement la droite $(AB)$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est non vide et que toute application de $\mathscr{C}$ est bijective.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux ensembles non vides notés $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$, $\mathscr{C}_A$ étant l'ensemble des applications de $\mathscr{C}$ pour lesquelles $A$ est invariant et $\mathscr{C}_B$ l'ensemble des applications de $\mathscr{C}$ pour lesquelles $A$ est transformé en $B$.
En déduire que toute application de $\mathscr{C}$ laisse $O$ invariant.
3. Soit $F$ une application quelconque de $\mathscr{C}$ et $u$ son endomorphisme associé. Montrer que $u$ transforme tout vecteur de norme 1 en un vecteur de norme 1. En déduire que $u$ conserve la norme de tout vecteur de $\mathscr{P}$ (c'est-à-dire $\forall\vec{V}\in\mathscr{P}$, $\left\|u(\vec{V})\right\|=\left\|\vec{V}\right\|$.)
Quelle est la nature de $F$ ?
4. En déduire que $\mathscr{C}$ ne contient que quatre applications que l'on caractérisera.

IV- Soit $\mathscr{E}_b$ l'ensemble des applications affines de $P$ dans $P$ transformant le cercle $\Omega$ en $E_b$ et qui laissent la droite $(AB)$ globalement invariante.

1. Montrer que l'application $f_b$ du II est une application de $\mathscr{E}_b$.
2. Soit $\varphi$ une application de $\mathscr{E}_b$ , montrer que $f_b^{-1}\circ\varphi$ est une isométrie ponctuelle de $P$.
3. Démontrer que $\mathscr{E}_b$ ne contient que quatre applications affines que l'on déterminera.



Retour page 1

# Chapitre XXI

# 1979.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, série C

Ex. 1370. *4 points.* *./1979/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $f$ l'application de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que $f$ applique bijectivement $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C}-\{1\}$.
2. Quelle est l'image par $f$ de l'ensemble **P** des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive ?

Ex. 1371. *4 points.* *./1979/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Soit C la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. $x$ étant un réel strictement positif on considère le point $M$ de C qui a pour abscisse $x$ et l'on désigne par $m$ le coefficient directeur de la droite $(OM)$.
   Construire la tableau de variation de la fonction continue
   $$\begin{aligned}\mu:\mathbb{R}_+^{\star}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto m\end{aligned}.$$
2. Soient $A$ et $B$ deux points de C d'abscisses respectives $a$ et $b$ telles que $a<b$.
   Démontrer que, si $a^b=b^a$, $A$ et $B$ sont alignés avec $O$ et que $a<\mathrm{e}$.
3. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,\ b)$ tels que
   $$a<b\quad\text{et}\quad a^b=b^a.$$

Retour page 1

**PROBLÈME 479** *12 points.* *./1979/aixmarseilleC/pb/texte*

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E orthonormé directe, $\mathbf{I}_E$ l'application identité de E et $r$ la rotation vectorielle de E qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{j}$.
Dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E, muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(1~;~0)$ et $B(-1~;~0)$ et les cercles $a$ et $b$ passant par $O$ de centres respectifs $A$ et $B$.
Dans tout le problème on associe à chaque point $P$ du cercle $a$ le point $Q$ du cercle $b$ tel que les angles $\left(\widehat{\vec{i}\,;\overrightarrow{AP}}\right)$ et $\left(\widehat{\vec{j}\,;\overrightarrow{BQ}}\right)$ soient égaux. On notera $M$ le milieu du segment $[PQ]$.

I- 1. Montrer que : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}\right)$ et que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{AP}$ par l'application linéaire : $\sigma = \dfrac{1}{2}(\mathbf{I}_E + r)$.
Former la matrice de $\sigma$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et reconnaître que $\sigma$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation vectorielle.
2. Démontrer que, quel que soit le point $P$ sur le cercle $a$, le point $M$ s'en déduit par une similitude directe fixe $\Sigma$ dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.
Étudier l'ensemble des points $M$ associés aux points $P$ du cercle $a$.

II- Soit $\theta$ une détermination de la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}\,;\overrightarrow{AP}}\right)$. Calculer en fonction de $\theta$ les coordonnées $(x~;~y)$, $(x'~;~y')$, $(X~;~Y)$ des points $P$, $Q$, $M$.
Puis calculer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$. Retrouver les résultats de la question I2

III- Étudier l'ensemble $S$ des distances $PQ$ associées aux points $P$ de cercle $a$. Démontrer que $S$ est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

IV- Étudier l'ensemble $T$ des coefficients directeurs des droites $(PQ)$ associées aux points $P$ du cercle $a$.
Démontrer que $T$ est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

V- Soit $K$ un point fixe de $\mathscr{E}$ et $k$ le nombre de droites $(PQ)$ passant par $K$.
1. Quel est l'ensemble des nombres $k$ ainsi associés aux points $K$ de $\mathscr{E}$ ?
2. Déterminer l'ensemble des points $K$ de $\mathscr{E}$ pour lesquels $k = 1$.

N.B. *Les questions III, IV et V sont indépendantes les unes des autres.*
*Les questions III et IV peuvent être étudiées géométriquement ou par le calcul.*

## II. Aix Marseille, La Réunion remplacement, série C

**Ex. 1372.** *3 points.* *./1979/aixmarseillecrem/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, orienté par le choix d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et E l'espace vectoriel associé.
Soit $F$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, qui à tout point $M(x~;~y~;~z)$ associé le point $M'\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = z-1 \\ z' = -x+1. \end{cases}$$

Montrer que $F$ est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et l'angle par un couple de vecteurs le représentant.

**Ex. 1373.** *3 points.* *./1979/aixmarseillecrem/exo-2/texte.tex*

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges.

**1.** On extrait *simultanément* 3 boules.
On admet l'équiprobabilité des tirages de chaque ensemble de trois boules.
a) Donner un espace probabilisé décrivant la situation.
b) Calculer le probabilité des événements suivants :
— A : « on obtient 2 boules blanches au moins »

— B : « on obtient une boule rouge au plus ».

**2.** On extrait *successivement* 3 boules.
On admet l'équiprobabilité des tirages de chaque triplet de boules.
On examinera les deux types de tirages possibles (sans remise ; avec remise).

a) Donner un espace probabilisé décrivant la situation.

b) Calculer la probabilité de l'événement C suivant :
C :« on obtient une boule blanche au 1er tirage, une boule rouge au 2e et une boule blanche au 3e tirage.

## PROBLÈME 480 *14 points.*

*./1979/aixmarseillecrem/pb/texte*

I- 1. a) Étudier les variations de la fonction numérique $\varphi$ définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\qquad \varphi(x)=\tan x - x.$$

b) En déduire les variations de la fonction numérique $f$ définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\qquad f(x)=\tan x - x-\frac{x^3}{3}.$$

2. a) Étudier les variations de la fonction numérique $\psi$ définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\qquad \psi(x)=\tan x - x.$$

On désignera par $\alpha$ le réel unique de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan\alpha=\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

b) En déduire qu'il existe un réel unique $\beta$ de l'intervalle $\left]\aleph\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\psi(\beta)=0.$$

3. a) Étudier les variations de la fonction numérique $g$ définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\qquad g(x)=\tan x - x-\frac{2x^3}{3}.$$

b) En déduire qu'il existe un réel unique $\gamma$ de l'intervalle $\left]\beta\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$g(\gamma)=0.$$

4. Montrer que $\frac{\pi}{3}\in\,]0\,;\gamma[$. (on donne $0{,}76<\frac{2\pi^3}{81}<0{,}77$.)
En déduire que :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right],\qquad x+\frac{x^3}{3}\leqslant \tan x\leqslant x+\frac{2x^3}{3}.$$

5. Soit $h$ la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^-, & h(x)=1\\ \forall x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[, & h(x)=\dfrac{\tan x}{x}.\end{cases}$$

a) $h$ est-elle continue en $0$ ?

b) déduire de la question I4 un encadrement de $h(t)$ pour $t$ appartenant à $[0\,;1]$. $h$ est-elle dérivable en $0$ ?



Retour page 1

II- 1. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \tan t \, \mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de $I$ et calculer $I$. Déduire du I4 un encadrement de $I$.

2. Soit $H = \displaystyle\int_0^1 h(t) \, \mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de $H$. Donner un encadrement de $H$.

3. Soit $\Phi$ et $\Psi$ les fonctions numériques définies par :

$$\forall x \in [0\,;1], \qquad \Phi(x) = \int_x^1 h(t) \, \mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in ]0\,;1], \qquad \Psi(x) = \int_x^1 \frac{\cos^2 t \log(\cos t) - t^2 \log t}{t^2 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence des réels $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.

En intégrant par parties de deux manières différentes $\displaystyle\int_x^t h(t) \, \mathrm{d}t$, en déduire une expression de $\Psi(x)$.

4. Soit $\sigma$ la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sigma(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}.$$

Définir les fonctions dérivées $\sigma'$, $\sigma''$, $\sigma'''$, $\sigma''''$.
Dresser le tableau de variation de $\sigma'''$, $\sigma''$, $\sigma'$, $\sigma$.
En déduire que :

$$\forall x \in ]0\,;1], \qquad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Calculer les limites lorsque $x$ tend vers $0$ par valeurs positives des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{\log(\cos x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \Psi(x).$$

## III. Aix Marseille, Montpellier, Nice, Toulouse, série E

Ex. 1374. ——— *4 points.* *./1979/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2. $\lambda$ étant un réel tel que $0 < \lambda \leqslant 1$, déterminer en fonction de $\lambda$, l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Cette aire a-t-elle une limite lorsque $x$ tend vers $0$ ? Si oui, calculer cette limite.

Retour page 1

**Ex. 1375.** ———— *4 points.* ./1979/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

*Descriptive.*

Les données sont en centimètres ; l'axe $\overrightarrow{y'y}$, parallèle au petit axe de la feuille, est situé à 3 cm au dessus de cette axe. L'origine est à 8 cm du bord droit de la feuille.
On donne les points :
$A$, de coordonnées $x=5$, $y=-10$, $z=6$.
$B$, de coordonnées $x=8$, $y=-8$, $z=2$.
$C$, de coordonnées $x=4$, $y=-6$, $z=5$.

**1.** Construire l'éqpure du triangle $ABC$.

**2.** Construie l'épure horizontale du plan du triangle issue de $B$.

**3.** Construire l'épure de l'orthocentre $H$ du triangle $ABC$.

- Sur une notice jointe de l'épure, on indiquera brièvement les propriétés géométriques utilisées et les constructions effectuées.

## Problème 481 *12 points.* ./1979/aixmarseilleE/pb/texte

Dans ce problème on désigne par :
$P$ un plan vectoriel euclidien orienté, rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
$\mathscr{P}$ le plan affine associé à $P$, rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées d'un point $I$ de $\mathscr{P}$, non situé sur les axes de coordonnées.
$\mathscr{D}$ est la droite affine d'équation $y-x=0$ et $\mathscr{D}'$ celle d'équation $y+x=0$.
$T_I$ l'application de $\mathscr{P}$ vers lui-même qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\overrightarrow{OM'}=\alpha\overrightarrow{Om}+\beta\overrightarrow{On},$$

où $m$ est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $x$ et $n$ le point de $\mathscr{D}'$ d'ordonnée $y$.

1. Montrer que $T_I$ est une application affine et que la matrice de l'endomorphisme de $P$ associé est, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$,
$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$$
2. Montrer que $T_I$ est bijective et déterminer son application réciproque $T_I^{-1}$.
3. Comment choisir $I(\alpha\ ;\ \beta)$ pour que $T_I$ soit involutive ? Préciser la nature et les éléments des involutions obtenues.
4. Comment choisir $I(\alpha\ ;\ \beta)$ pour que $T_I$ soit une isométrie affine ? Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chaque solution trouvée.
5. Comment choisir $I(\alpha\ ;\ \beta)$ pour que $T_I$ soit une similitude ? Préciser alors :
   a) le centre, le rapport et l'angle de celles qui sont directes
   b) l'axe et le rapport de celles qui sont indirectes.
6. Lorsque le point $I$ n'est pas élément de $\mathscr{D}\cup\mathscr{D}'$, quelle est la nature de la courbe $(\Gamma)$ d'équation
$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2\beta^2=0\ ?$$
Quelle est l'équation et la nature de la courbe $(C)$ image de $(\Gamma)$ par $T_I$ ?
On dessinera $(\Gamma)$ et $(C)$ lorsque $\alpha=2$ et $\beta=\sqrt{2}$.
7. On se place dans le cas particulier où $\beta=-\alpha$. Alors $I$ est un point de $\mathscr{D}'$.
on choisit un point $A_0$ de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ et on pose :
$$A_1=T_I(A_0)\qquad\text{et}\qquad\text{si } n>1,\qquad A_n=T_I(A_{n-1}).$$
Calculer, en fonction de $(x_0\ ;\ y_0)$ les coordonnées de $A_1$, $A_2$, puis celles de $A_n$.

Retour page 1

# IV. Aix Marseille, Nice & La Réunion remplacement, série E

**Ex. 1376.** ——— *3 points.* *./1979/aixmarseilleerem/exo-1/texte.tex*

Un plan affine orienté P est rapporté à un repère orthonormal direct. Le point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ est l'image du nombre complexe $z = x + \text{i}y$.

**1.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de P tels que :

$$|\text{i}z + 1 + \text{i}| = 1.$$

**2.** Soit $f$ la similitude directe définie par $z' = \text{i}z + 1 + \text{i}$. Déterminer les éléments de cette similitude et l'utiliser pour trouver le résultat de la première question.

**Ex. 1377.** ——— *5 points.* *./1979/aixmarseilleerem/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien de dimension trois rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne $A$ le point de coordonnées $(5~;~4~;~5)$ et la droite $D$ intersection des plans d'équations cartésiennes $x + y = 0$ et $3y + 2z = 0$.
On appelle $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $D$.
Construire $H$ sur une épure de géométrie descriptive, les plans de projection horizontal et frontal étant respectivement les plans $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\left(O;\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, et déterminer la distance du point $A$ à la droite $D$.
On prendra le point $O$ au centre de l'épure.

## Problème 482 *12 points.* *./1979/aixmarseilleerem/pb/texte*

A- Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{-x}\sin x$.

1. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0~;\pi]$ et tracer la représentation graphique correspondante dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Á l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer l'intégrale
$$\int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$
3. Calculer l'aire de l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont telles que :
$$0 \leqslant x \leqslant \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

B- On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications numériques définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction numérique $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-x}\cos x$ et l'ensemble $\mathscr{E}$ des combinaisons linéaires de $f$ et $g$, $f$ étant la fonction définie au A :

$$\mathscr{E} = \{h \in \mathscr{F} | \exists (a,~b) \in \mathbb{R}^2, \quad h = af + bg\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ et que $(f,~g)$ est une base de $\mathscr{E}$ ;
2. Démontrer que tout élément $h$ de $\mathscr{E}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $h'$ est élément de $\mathscr{E}$.
3. On considère l'application $D$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout élément $h$ de $\mathscr{E}$, associe sa dérivée $h'$. Montrer que $D$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ dont on donnera la matrice relativement à la base $(f,~g)$.
4. Montrer que $D$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}$ et donner la matrice, relativement à la base $(f,~g)$, de l'automorphisme réciproque $D^{-1}$ de $D$. En déduire que tout élément de $\mathscr{E}$ admet, dans $\mathscr{E}$, une primitive et une seule et retrouver le résultat de la question A2.

C- On considère la fonction $F$ de la variable réelle $x$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$



Retour page 1

1. Montrer que $F$ admet une limite $\ell$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{p} u_n$ et $\sum_{n=0}^{p} v_n$ admettent lorsque $p$ tend vers $+\infty$ des limites notées $U$ et $V$. Comparer $U+V$ à $\ell$.

## V. Aix Marseille, série D

**Ex. 1378.** ———— *4 points.* *./1979/aixmarseilleD/exo-1/texte.tex*

Soit la fonction $f$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \left(\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t.$$

**1.** Étudier la variation de $f$.

**2.** $m$ désignant un nombre réel donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x) = m.$$

En déduire que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective et surjective et admet donc une fonction réciproque notée $f^{-1}$.

**Ex. 1379.** ———— *4 points.* *./1979/aixmarseilleD/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe $P$, on donne les points $A$, $B$, $C$ d'affixes respectives :

$$z_A = \mathrm{i}, \qquad z_B = 3+2\mathrm{i}, \qquad z_C = -4+3\mathrm{i}.$$

Soit $M$ un point quelconque de $P$, d'affixe $z$.

1. Soit $S_1$ la similitude directe associant au point $M$ le point $M_1$ d'affixe $z_1$ telle que

$$z_1 = (-1+\mathrm{i})z + 1 + 2\mathrm{i}.$$

Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude $S_1$.

2. Soit $S_2$ la similitude de centre $B$ telle que $S_2(C) = A$.
Soit $S_3$ la similitude de centre $C$ telle que $S_2(A) = B$.
On pose : $S = S_1 \circ S_2 \circ S_3$ ; la loi $\circ$ étant la loi de composition des applications.
Déterminer les points $S(A)$ et $S(C)$.

### Problème 483 *12 points.* *./1979/aixmarseilleD/pb/texte*

I. Soit la fonction numérique d'une variable réelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{0,\ 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-2}{x(x-1)} \end{aligned}$$

1. Étudier la variation de $f$.
2. Soit $n$ un nombre entier strictement supérieur à 2.
Une urne contient $n$ boules dont deux (et deux seulement) sont rouges.
Soit l'épreuve qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne. On associe à cette épreuve un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ p)$.
a) Préciser l'univers $\Omega$.

b) La probabilité $p$ étant telle que les événements élémentaires soient équiprobables., calculer la probabilité de l'événement $A$ : « une seule des deux boules tirées est rouge ».

c) Pour quelles valeurs de $n$ la probabilité $p(A)$ a-t-elle la plus grande valeur possible ?

II. Soit la fonction numérique d'une variable réelle

$$\begin{aligned} F : ]1\,;+\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

(log désigne la fonction logarithme népérien).

1. a) Vérifier que $F$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$ de définition de $F$.

   b) Étudier la variation de $F$.

   c) On donne, pour les nombres $\log 2$ et $\log 3$, les valeurs approchées respectives $0{,}693$ et $1{,}099$. Calculer des valeurs approchées de $F(2)$, $F(3)$ et $F(4)$.

2. Soit $\varphi$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ donnée par

$$\varphi(x) = F(x) - \log x.$$

   a) Étudier le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $I$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

3. Dans le plan affine euclidien $P$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (unité de longueur : 2 cm), construire la courbe (C) représentative de la fonction log et la courbe $(\Gamma)$ représentative de la fonction $F$.

4. Á tout nombre entier $k$ strictement supérieur à 1, on associe les points $A_k$, $M_k$ et $M'_k$ d'abscisse $k$ situés respectivement sur l'axe $x'Ox$, la courbe $(\Gamma)$ et la courbe (C). Démontrer que

$$\sum_{j=2}^{k} \overrightarrow{M'_jM_j} = \overrightarrow{A_kM'_k}.$$

III. Soit $a$ un réel donné tel que $0 \leqslant a < 2$ et soit $x$ un réel quelconque de l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I_a(x) = \int_2^x \log(t-a)\,\mathrm{d}t.$$

2. L'unité d'aire étant le centimètre carré, soit $S$ l'aire de l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ du plan P tels que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \log x \leqslant y \leqslant F(x). \end{cases}$$

   a) Exprimer $S$ à l'aide de $I_0(3)$ et $I_1(3)$.

   b) Calculer la valeur exacte et une valeur décimale approchée de $S$.

# VI. Amérique du Sud, série C

**Ex. 1380.** *3 points.* *./1979/ameriquesusudC/exo-1/texte.tex*

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 1977. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{N}^2$ vérifiant :

$$x^2 - y^2 = 1977.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ :

$$x^2 - y^2 = 1978.$$



Retour page 1

**Ex. 1381.** ——— *4 points.* ./1979/ameriquesusudC/exo-2/texte.tex

La plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les coordonnées dans ce repère d'un point mobile $M$ sont données en fonction du temps $t$ par :

$$\begin{cases} x = 2 - \sin t \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de $M$.
2. Trouver une équation cartésienne su support P de la trajectoire de $M$. Construire P.
3. Définir de manière précise la trajectoire de $M$. Le mouvement de ce mobile est-il périodique ? Quelle est sa période ?
4. Décrire le mouvement de $M$ lorsque $t$ varie de $0$ à $\dfrac{\pi}{2}$ en précisant s'il est accéléré ou retardé.

## VII. Amiens, séries C & E

**Ex. 1382.** ——— *4 points.* ./1979/amiensCE/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (3+4\mathrm{i})z + (-1+5\mathrm{i}) = 0.$$

On désigne par $z'$ et $z''$ les racines de cette équation.

**2.** Soit P un plan affine orienté rapporté à un repère orthonormé direct. Au point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

Soit A le point d'affixe $z'$ et B celui d'affixe $z''$. Déterminer les points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

**Ex. 1383.** ——— *4 points.* ./1979/amiensCE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{si } x \leqslant 0$$

$$f(x) = x \log x \qquad \text{si } x > 0.$$

**1.** Déterminer la limite de $f$ lorsque $x$ tend vers zéro par valeurs positives.

Étudier la continuité de $f$.

Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe $(C)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On précisera les demi-tangentes en $O$.

**2.** Montrer que la restriction $\varphi$ de $f$ à $I = \left[-1\,;\mathrm{e}^{-1}\right]$ permet de définir une bijection de $I$ sur $\varphi(I)$.

Tracer la courbe représentative $(\Gamma)$ de $\varphi^{-1}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de $\varphi^{-1}$ et calculer la valeur de la dérivée de $\varphi^{-1}$ en $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

**PROBLÈME 484** *12 points.* ./1979/amiensCE/pb/texte

On désigne par P un plan vectoriel euclidien dont une base orthonormée est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et par $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P ; soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de $\mathscr{P}$.

On considère une application affine $f$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ de $\mathscr{P}$ associe le point $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ de $\mathscr{P}$ et on désigne par $F$ l'endomorphisme associé à $f$ :

soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de $F$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$ on note $M_1 = f(M)$ ; $M_2 = f(M_1)$ ; $M_3 = f(M_2)$ ; $M_4 = f(M_3)$ et $G$ l'isobarycentre des points $M,\ M_1,\ M_2$ et $M_3$.

-A- 1° Démontrer que $F^2 = -\mathrm{I}_p$ si et seulement si

$$a + d = 0 \qquad \text{et} \qquad a^2 + bc = -1.$$

($\mathrm{I}_p$ désigne l'application identique de $P$, et $F^2 = F \circ F$.)



Retour page 1

2° Dans cette partie, $a = 2,\ b = 1$ et $F^2 = -\mathrm{I}_p$.

a) Écrire la matrice de $F$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. En déduire que l'application affine $f$ admettant $F$ comme endomorphisme associé et telle que $f(O) = O'$, $O'$ étant le point de coordonnées $(2\ ;\ 0)$, est définie par :

$$\begin{cases} x_1 = 2x - 5y + 2 \\ y_1 = x - 2y. \end{cases}$$

Démontrer que $f$ est bijective.

b) On désigne par $\mathscr{D}' = f(\mathscr{D})$ l'image par $f$ d'une droite quelconque $\mathscr{D}$ du plan $\mathscr{P}$. Démontrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. En déduire que, quel que soit le point $M$ de $\mathscr{P}$, les points $M,\ M_1,\ M_2$, lorsqu'ils sont distincts, ne sont pas alignés.

c) Préciser la nature des applications :

— $f^2 = f \circ f$,

— $f^4 = f^2 \circ f^2$.

d) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de $\mathscr{P}$. En utilisant le A(2)c), déterminer les coordonnées du point $G$ isobarycentre de $M,\ M_1,\ M_2$ et $M_3$.

En déduire que le point $G$ est indépendant du choix de $M$ et que $G$ est le seul point invariant par $f$.

e) Faire une figure en indiquant les situations respectives des points $M,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ lorsque $M$ est le point de coordonnées $(2\ ;\ 1)$.

-B- Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications affines $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telles que $f^4 = \mathrm{I}_{\mathscr{P}}$.

($\mathrm{I}_{\mathscr{P}}$ est l'application identique de $\mathscr{P}$.)

Soit $F$ l'endomorphisme associé à $f$.

1° Quelle propriété doit vérifier l'endomorphisme $F^2$ ? Quelle peut-être par suite sa nature ?

Démontrer que $F^2$ ne peut pas être une symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle $D$ (de base $\vec{u}$) de direction une droite vectorielle $D$ (de base $\vec{v}$) ($D'$ étant distincte de $D$).

(On pourra utiliser le déterminant de la matrice $F^2$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$).

En déduire les possibilités pour $F^2$.

2° Démontrer que le point $G$ défini dans la question A(2)d est invariant par toute application $f$ de $\mathscr{E}$.

-C- On considère l'application $f$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ laissant invariant le point $O$ et telle que l'endomorphisme associé $F$ ait pour matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1° Vérifier que $f$ est un élément de $\mathscr{E}$. Exprimer $x_1$ et $y_1$ en fonction de $x$ et $y$.

2° Soit les courbes $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}$ d'équation $\alpha x^2 + \beta xy + y^2 = 1$ ($\alpha$ et $\beta$ étant deux réels donnés).

a) Déterminer l'équation des courbes $\mathscr{C}'_{\alpha,\beta}$, images par $f$ des courbes $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}$.

b) Déterminer $\alpha$ et $\beta$ pour que la courbe $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}$ soit globalement invariante par $f$.

Démontrer que la courbe ainsi obtenue est la réunion de deux courbes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ d'équations respectives :

$$y = g_1(x) = -x + \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour } \gamma_1$$
$$y = g_2(x) = -x - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour } \gamma_2.$$

Étudier la fonction $g_1$. Construire $\gamma_1$.

En déduire $\gamma_2$ par une transformation simple que l'on précisera.

$M$ étant un point quelconque de $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, indiquer sur la figure les points $M,\ f(M),\ f^2(M),\ f^3(M)$.

Retour page 1

3° De façon générale, on recherche les courbes $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}$ telles que leurs images par $f$ aient pour équation :

$$k(\alpha x^2 + \beta xy + y^2) = 1.$$

Démontrer que deux valeurs seulement sont possibles pour $k$. En déduire qu'on obtient d'une part la courbe obtenue au **??** et d'autre part un ensemble de courbes dont on donnera l'équation en fonction d'un seul paramètre ($\alpha$ par exemple).

N.B. – Les parties B et C sont indépendantes.

## VIII. Amiens remplacement, série C

**Ex. 1384.** ———— *4 points.* *./1979/amiensCrem/exo-1/texte.tex*

**1.** Démontrer qu'il existe au moins deux entiers relatifs $k$ et $\ell$ tels que :

$$13k - 23\ell = 1.$$

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$-156x + 256y = 24.$$

**Ex. 1385.** ———— *4 points.* *./1979/amiensCrem/exo-2/texte.tex*

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\operatorname{Log}|x+1| \text{ si } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = 0.$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de en $-1$.

Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que $(C)$ admet un centre de symétrie $I$.

**2.** Déterminer, lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$F(x) = (x+1)^2 \operatorname{Log}|x+1|,$$

$\alpha$ étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire $A_\alpha$ de la partie du plan limitée par la courbe $(C)$ et les droites d'équations $x = -1+\alpha$ et $y = 0$. Montrer que cette aire admet une limite lorsque $\alpha$ tend vers $0$ et interpréter ce résultat.

### Problème 485 *12 points.* *./1979/amiensCrem/pb/texte*

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté dont une base orthonormée directe est $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et $\mathcal{E}$ un espace affine associé à $E$ et rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

–I–

Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi\left(\vec{i}\right) & = & -\dfrac{1}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \\ \varphi\left(\vec{j}\right) & = & \dfrac{1}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \vec{k} \end{array}\right.$$

**1.** Dans $\mathcal{B}$, un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ et son image $\varphi\left(\vec{V}\right)$ a pour coordonnées $(x';y';z')$.

Calculer $x', y'$ et $z'$ en fonction de $x, y$ et $z$.

**2.** Montrer que le noyau de $\varphi$ est la droite vectorielle $\Delta$ de base $\vec{i} + \vec{j}$ et que l'image de $\varphi$ est le plan vectoriel $P$ orthogonal à $\Delta$.



Retour page 1

**3.** a) Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de $E$ tels que $\vec{V}$ et $\varphi\left(\vec{V}\right)$ soient linéairement dépendants est la réunion de trois droites vectorielles deux à deux orthogonales et dont l'une est $\Delta$.

b) Quelle est la restriction, $\varphi_1$ de $\varphi$ à $P$ ?

**4.** Soit $\mathcal{B}' = \left(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right)$ la base orthonormée directe telle que

$$\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right).$$

a) Déterminer $\vec{j}'$ , $\varphi\left(\vec{i}'\right)$ et $\varphi\left(\vec{j}'\right)$.

b) Dans $\mathcal{B}'$, un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(X;Y;Z)$ et $\varphi\left(\vec{V}\right)$ a pour coordonnées $(X';Y';Z')$. Calculer $X'$ , $Y'$ et $Z'$ en fonction de $X$ , $Y$ et $Z$.

c) Montrer que $\varphi$ s'écrit $\varphi = \psi\circ\sigma = \sigma\circ\psi$ où $\sigma$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel $P$ orthogonal à $\vec{i}'$ , et $\psi$ une projection vectorielle orthogonale à déterminer.

–II–

On considère l'application $f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x;y;z)$ dans $\mathcal{R}$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x';y';z')$ dans $\mathcal{R}$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ z' = z \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi$.

**2.** Quel est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par $f$ ?

**3.** a) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1;1;1)$ et de direction $P$ est globalement invariant par $f$.

b) Quelle est la restriction, $f_1$, de $f$ au plan $\mathcal{P}$ ?

c) Montrer que $f$ s'écrit $f = s\circ p$ où $s$ et $p$ sont respectivement une symétrie orthogonale et une projection orthogonale à préciser.

d) Soit le repère $\mathcal{R}' = \left(A; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\right)$. Calculer les coordonnées $X';Y';Z'$ de $M' = f(M)$, dans $\mathcal{R}'$ en fonction des coordonnées $(X;Y;Z)$ de $M$ dans $\mathcal{R}'$.

**4.** Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $A$ et rayon $R$ et $\mathcal{C}$ le cercle intersection de cette sphère avec le plan $\mathcal{Q}$ passant par $A$ et dont la direction est orthogonale à $\vec{i}$.

a) Quelle est, l'image de $\mathcal{S}$ par $f$ ?

b) Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ puis dans le repère $\mathcal{R}' = \left(A; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\right)$.

c) Quelle est l'image de $\mathcal{C}$ par $f$ ? Vérifier que cette image est bien incluse dans l'image de $\mathcal{S}$.
Faire une figure dans le plan $\mathcal{P}$.

# IX. Amiens remplacement, série E

**A**Ex. 1386. ———— *4 points.* *./1979/amienserem/exo-1/texte.tex*

Dans un espace affine euclidien rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite affine $D$ dont une représentation paramétrique est donné par :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \qquad (\lambda \text{ étant un paramètre réel})$$

et $I$ le point de coordonnées $(5~;~9~;~2)$.



Retour page 1

1. Géométrie descriptive : Le plan horizontal de projection a pour repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ plan frontal de projection $(O; \vec{\jmath}, \vec{k})$ et la ligne de terre $(O; \vec{\jmath})$. le point $O$ sera placé près du bord gauche de la feuille et l'unité choisie le centimètre. Construire l'épure de la droite $D$ et du point $I$.

   En utilisant un rabattement sur le plan horizontal passant par $I$, déterminer sur l'épure la distance du point $I$ à la droite $D$, ainsi que le pied de la perpendiculaire abaissée de $I$s ur $D$.

   Mesurer sur l'épure à 1 mm près par défaut la distance de $I$ à $D$.

2. Soit $M$ le point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ étant un point quelconque de la droite $D$, déterminer en fonction de $\lambda$ la distance de $I$ à $M$ et montrer que cette distance admet une valeur minimum pour $\lambda = \lambda_0$ que l'on précisera.

   En déduire la mesure exacte de la distance de $I$ à $D$ ainsi que les coordonnées du pied $L$ de la perpendiculaire abaissée de $I$ sur $D$.

**Ex. 1387.** ——— *4 points.* ./1979/amienserem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\log|x+1| \quad \text{si } x \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $-1$ Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ relativement au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie $I$.
2. Déterminer lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$F(x) = (x+1)^2\log|x+1|.$$

   $\alpha$ étant un réel $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = -1+\alpha$ et $y = 0$.

   Montrer que cette aire admet une limite lorsque $\alpha$ tend vers 0 et interpréter ce résultat.

## Problème 486 *12 points.* ./1979/amienserem/pb/texte

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté dont une base orthonormée directe est $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E et rapporté au repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

A- Soit $\varphi$ l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\dfrac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \varphi(\vec{j}) = \dfrac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \varphi(k) = \vec{k}. \end{cases}$$

1. Dans $\mathscr{B}$ , un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et son image $\varphi(\vec{V})$ a pour coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$. Calculer $x'$, $y'$ et $z'$ en fonction de $x$, $y$ et $z$.
2. Montrer que le noyau de $\varphi$ est la droite vectorielle $\Delta$ de base $\vec{i} + \vec{j}$ et que l'image de $\varphi$ est la plan vectoriel P orthogonal à $\Delta$.
3. a) Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de E tels que $\vec{V}$ et $\varphi(\vec{V})$ soient linéairement dépendants est la réunion de trois droites vectorielles deux à deux orthogonales dont l'une est $\Delta$.

   b) Quelle est la restriction, $\varphi_1$, de $\varphi$ à P?
4. Soit $\mathscr{B}' = (\vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{k})$ la base orthonormée directe telle que

$$\vec{i}\,' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}).$$

   a) Déterminer $\vec{j}\,'$, $\varphi(\vec{i}\,')$ et $\varphi(\vec{j}\,')$.

   b) Dans $\mathscr{B}'$, un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$, et $\varphi(\vec{V})$ a pour coordonnées $\left(X'\ ;\ Y'\ ;\ Z'\right)$. Calculer $X'$, $Y'$ et $Z'$ en fonction de $X$, $Y$ et $Z$.



Retour page 1

c) Montrer que $\varphi$ s'écrit $\varphi = \psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi$ où $\sigma$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan P' orthogonal à $\vec{i}\,'$ et $\psi$ une projection orthogonale à déterminer.

On considère l'application $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{R}$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ dan s$\mathscr{R}$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1 \\ z' = z. \end{cases}$$

B- a) Montrer que $f$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est $\varphi$.

b) Quel est l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ invariants par $f$ ?

c) a) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et de direction P est globalement invariant par $f$.

b) Quelle est la restriction, $f_1$, de $f$ au plan $\mathscr{P}$ ?

c) Montrer que $f$ s'écrit $f = s \circ p$ où $s$ et $p$ sont respectivement une symétrie orthogonale et une projection orthogonale à préciser.

d) Soit le repère $\mathscr{R}' = (A,\ \vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{k})$. Calculer les coordonnées $(X'\ ;\ Y'\ ;\ Z')$ de $M' = f(M)$ dans $\mathscr{R}'$ en fonction des coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ de $M$ dans $\mathscr{R}'$.

d) Soir $(\mathscr{S})$ la sphère de centre $A$ et rayon $R$ et $(\mathscr{C})$ le cercle intersection de cette sphère avec le plan $\mathscr{Q}$ passant par $A$ et dont la direction est orthogonale à $\vec{i}$.

a) Quelle est l'image de $(\mathscr{S})$ par $f$ ?

b) Donner une équation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(A,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ puis dans le repère $\mathscr{R}' = (A,\ \vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{k})$.

c) Quelle est l'image de $\mathscr{C}$ par $f$ ? Vérifier que cette image est bien incluse dans l'image de $(\mathscr{S})$. Faire une figure dans le plan $\mathscr{P}$.

## X. Besançon, série C

**Ex. 1388.** ——— *4 points.* *./1979/besanconC/exo-1/texte.tex*

**1.** On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 0$.
Donner chaque racine sous sa forme trigonométrique. Trouver la somme et le produit des deux racines qui ne sont pas imaginaires pures.

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 6(z + \mathrm{i})$.

**Ex. 1389.** ——— *4 points.* *./1979/besanconC/exo-2/texte.tex*

On considère une fonction numérique $f$ définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et la fonction $G$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

**1.** Justifier rapidement que $G$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. A quoi est égal $G'(0)$ ?

**2.** a) On considère la fonction $F$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}G(x) \qquad \text{si } x > 0 \\ F(0) = f(0). \end{cases}$$

Démontrer que $F$ est continue sur $[0\,;+\infty[$. (Pour démontrer la continuité de $F$ au point $0$, on pourra utiliser le fait que $G$ est dérivable en $0$.)

b) Démontrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $F$ est dérivable et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$.

Retour page 1

**3.** Déterminer $F$ dans les cas suivants :

$$f(t)=t\sin t \qquad ; \qquad f(t)=\frac{2t+\mathrm{e}^t}{t^2+\mathrm{e}^t}.$$

## Problème 487 — *12 points.*

./1979/besanconC/pb/texte

Soit $E$ l'espace vectoriel euclidien réel rapporté à la base orthonormé direct $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit $(H)$ l'ensemble des vecteurs de $E$ dont les coordonnées vérifient :

$$x^2+y^2-z^2=1 \qquad \text{où} \qquad \vec{V}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}.$$

-A- 1° Soit $r$ la rotation vectorielle de $E$ d'axe $\vec{k}$ et dont la restriction au plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ a pour matrice dans cette base $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$.

Exprimer $x'$, $y'$, $z'$ de $r(\vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $\vec{v}$ appartenant à $E$.

2° Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ défini analytiquement dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ par

$$\begin{cases} x'=ax+by\\ y'=bx-ay\\ z'=z.\end{cases} \qquad \text{avec } a^2+b^2=1$$

Vérifier que $s$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant $\vec{k}$.

-B- 1° a) Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des isométries vectorielles $f$ conservant globalement $(H)$.
Montrer que l'image $f(\vec{V})$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ d'un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $(H)$ est telle que $z'=z$ ou $z'=-z$.

b) Soit $P$ le plan d'équation engendré par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Montrer que si $f$ appartient à $\mathcal{J}$, $f$ transforme un vecteur de $P$ en un vecteur de $P$. En déduire que $f(\vec{k})$ vaut $\vec{k}$ ou $-\vec{k}$.

2° $\mathcal{J}_1$ étant le sous-ensemble de $\mathcal{J}$ des isométries telles que $z'=z$, quelle est la nature des éléments de $\mathcal{J}_1$ ? (On pourra classer ces isométries suivant le sous-espace de leurs invariants).

3° Soit $\mathcal{J}_2$ le complémentaire de $\mathcal{J}_1$ dans $\mathcal{J}$.

a) On appelle $\delta$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\left[\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right]$. $g$ étant une application quelconque de $\mathcal{J}_2$, donner les natures à priori possibles $\delta\circ g$. (On regardera à quoi est égal $\delta\circ g(\vec{k})$).

b) En déduire la nature des éléments de $\mathcal{J}_2$.

4° a) Montrer que $(\mathcal{J}_1,\ \circ)$ a une structure de groupe, $\circ$ étant la loi de composition des applications. Ce groupe est-il commutatif ?

b) En est-il de même pour $(\mathcal{J}_2,\ \circ)$ ?

-C- 1° On considère l'application linéaire $\psi$ de $E$ dans $E$ définie par

$$\begin{aligned}\psi(\vec{\imath}) &= 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}\\ \psi(\vec{\jmath}) &= \vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}\\ \psi(\vec{k}) &= 2\vec{\imath}+2vecteurj+3\vec{k}\end{aligned}$$

Vérifier que l'image $(H)$ par $\psi$ est incluse dans $(H)$.

2° Soit $\vec{V}$ de $(H)$ à coordonnées entières. Que peut-on dire des coordonnées de $\psi(\vec{V})$ ?

3° Montrer qu'il existe une infinité de points de $(H)$ dont les coordonnées sont des entiers naturels strictement supérieur à 1.

# XI. Besançon, Nancy, Metz, Reims, Strasbourg remplacement, série C

**Ex. 1390.** ./1979/besanconCrem/exo-1/texte.tex

Soient $u$, $v$ et $\alpha$ trois nombres réels. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on affecte les quatre points

$$A_1 = (1\ ;\ 0)\ ;\ A_2 = (0\ ;\ 1)\ ;\ A_3 = (-1\ ;\ 0)\ ;\ A_4 = (0\ ;\ -1)$$

respectivement des coefficients

$$m_1 = \alpha \cos^2 \frac{u}{2}\ ;\ m_2 = (1-\alpha)\cos^2 \frac{v}{2}\ ;\ m_3 = \alpha \sin^2 \frac{u}{2}\ ;\ m_4 = (1-\alpha)\sin^2 \frac{v}{2}.$$

**1.** Quelles sont les coordonnées de leur barycentre $G$ ?

**2.** $\alpha$ étant fixé, on suppose que $u$ et $v$ varient de façon que $u + v = \frac{\pi}{2}$.
Indiquer la nature géométrique de l'ensemble parcouru par le point $G$, et représenter graphiquement cet ensemble pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$.

**Ex. 1391.** ./1979/besanconCrem/exo-2/texte.tex

On admettra que le nombre 1979 est premier.
Les éléments de $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ seront notés $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{1978}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{2}x = \overline{1}$.
2. On considère l'équation
$$x^2 - x + \overline{494} = \overline{0}. \qquad (1)$$
   a) Si $x$ est solution de (1), calculer $(x - \overline{990})^2$.
   b) En déduire les solutions de (1).

**Problème 488** *12 points.* ./1979/besanconCrem/pb/texte

Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel E engendré par les fonctions $u_1$, $u_2$, $u_3$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par les formules :
$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x}$ ;
$u_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ ;
$u_3(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.
Si $f$ et $g$ appartiennent à E, on pose :

$$\langle f,\ g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

I- Calculer les six intégrales $\langle u1,\ u2\rangle$ ; $\langle u1,\ u3\rangle$ ; $\langle u2,\ u3\rangle$ ; $\langle u1,\ u1\rangle$ ; $\langle u2,\ u2\rangle$ ; $\langle u3,\ u3\rangle$.

II- 1. Montrer que l'application qui, à tout couple $(f, g)$ d'éléments de E, associe le nombre $\langle f,\ g\rangle$, est un produit scalaire sur E, et que $(u1,\ u2,\ u3)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien E ainsi défini. Dans la suite du problème, cette base sera considérée comme directe, ce qui oriente l'espace E.

III- Soit $D$ l'application qui, à tout $f$ appartenant à E, associe la fonction $Df = f'$ dérivée de $f$.
1. Montrer que $D$ applique E dans E.
2. Est-ce que $D$ est une isométrie de E ?

IV- 1. Soit $h$ un nombre réel donné. Soit $f = au_1 + bu_2 + cu_3$ un élément quelconque de E, où $a$, $b$, $c$ sont des nombres réels.
Montrer que la fonction $x \longmapsto g(x) = f(x-h)$ peut s'écrire $g = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$, où $a'$, $b'$, $c'$ sont trois nombres réels qu'on calculera en fonction de $a$, $b$, $c$ et de $h$.

2. On a ainsi défini une application linéaire $T_h$ de E dans E, celle qui transforme $f$ en $g$. Montrer que $T_h$ est la composée d'une homothétie vectorielle, dont on précisera le rapport, et d'une rotation de E, dont on précisera les éléments.

V- 1. Calculer les trois intégrales

$$v_i(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} u_i(t)\,\mathrm{d}t$$

où $i = 1,\ 2,\ 3$. (`Nota Bene` : pour calculer $v_2$ et $v_3$, on pourra intégrer deux fois par parties.)

2. En déduire que, pour tout $f$ appartenant à E, la fonction

$$x \longmapsto F(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appartient à E.
On note $L$ l'application linéaire de E dans E qui transforme $f$ en $F$.

3. Soit P le plan vectoriel engendré dans E par $u_2$ et $u_3$. Quelle est l'image de P par $L$ ?
4. Montrer que l'application $L$ est bijective de E sur E.

## XII. Besançon Nancy Metz Reims & Strasbourg, série E

**Ex. 1392.** *4 points.* *./1979/besanconE/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique$f$ de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

**1.** Étudier $f$ et faire la représentation graphique (C) de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité : 1 cm).

**2.** Montrer qu'une primitive de $f$ sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ où $0 < \alpha < \beta < \pi$ est la fonction $F$ définie par

$$F(x) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - g(x)$$

où $g$ désigne une fonction simple que l'on déterminera.

**3.** En déduire l'aire, en centimètres carrés, du domaine $(\Delta)$ défini par

$$\left\{M\,(x\ ;\ y)\ \middle|\ \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}.$$

**Ex. 1393.** *4 points.* *./1979/besanconE/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble des primitives de $f$.

**2.** Soit $A,\ B,\ C$ trois éléments d'un ensemble $\Omega$, $F$ une primitive de $f$, $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$.
On définit une application $P$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par

$$P(\{A\}) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad P(\{B\}) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad P(\{C\}) = 1 - F(\beta).$$

Retour page 1

$$P(\{A,\ B\}) = P(\{A\}) + P(\{B\})$$
$$P(\{B,\ C\}) = P(\{B\}) + P(\{C\})$$
$$P(\{A,\ C\}) = P(\{A\}) + P(\{C\})$$
$$P(\{\Omega\}) = P(\{A\}) + P(\{B\}) + P(\{C\})$$
$$P(\{\emptyset\}) = 0 \quad (\emptyset = \text{ ensemble vide}).$$

Déterminer $F$ pour que $P$ définisse une probabilité sur $\Omega$.

## Problème 489 *12 points.*

*./1979/besanconE/pb/texte*

-A- L'espace vectoriel $\vec{\mathrm{E}}$ de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$.
On considère l'endomorphisme $\Phi$ de $\vec{\mathrm{E}}$ défini par :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{I}) = -\vec{I} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\vec{J} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\vec{K}, \\ \Phi(\vec{J}) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\vec{I} - \dfrac{1}{2}\vec{J} + \dfrac{1}{2}\vec{K}, \\ \Phi(\vec{K}) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\vec{I} + \dfrac{1}{2}\vec{J} - \dfrac{1}{2}\vec{K}. \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau $\ker\Phi$ et l'image $\mathrm{Im}\phi$ de $\Phi$.
2. Déterminer une base orthonormée $B_1$ de $\ker\phi$ et une base orthonormée $B_2$ de $\mathrm{Im}\phi$.
   Avec les vecteurs obtenus, trouver une base orthonormée directe de $\vec{\mathrm{E}}$.
3. Soit $\varphi$ la restriction de $\Phi$ à $\mathrm{Im}\Phi$.
   a) Donner, dans la base $B_2$, les formules analytiques de $\varphi$.
   b) En déduire que $\varphi$ est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation que l'on précisera.

-B- L'espace affine euclidien E associé à $\vec{\mathrm{E}}$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$.
Soit $f$ l'application affine dont l'endomorphisme associé est l'application $\Phi$ de la partie A et qui transforme le point $O$ en le point $O'$ de coordonnées

$$\left(5\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ -1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\ ;\ 1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

a) donner les formules analytiques de $f$.

b) Déterminer l'ensemble (P) des images par $f$ des points de E.

c) On considère les vecteurs $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ définis par :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{J} + \vec{K})\ ;\ \vec{e_2} = \vec{I}\ ;\ \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{J} - \vec{K}).$$

a) Vérifier que $(O,\ \vec{e}_1),\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ est un repère orthonormé direct de E.

b) Soit $g$ la restriction de $f$ à (P).
- Écrire les formules analytiques de $g$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$.
- Montrer que $g$ admet un seul point invariant $\Omega$ que l'on déterminera.
- Quelle est la nature de $g$ ?

c) Quelle est l'image de la droite $(\Omega,\ \vec{e}_1)$ par $f$ ?
Décrire $f$ dans le repère $(O,\ \vec{e}_1),\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$.

-C- `Descriptive.`
On prend pour plan horizontal de projection (H), le plan $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$, pour plan frontal (F), le plan $(\Omega,\ \vec{J},\ \vec{K})$. Le point $\Omega$ set au centre de la feuille ; la ligne de terre $(\Omega,\ \vec{J})$ est le petit axe ed la feuille orienté vers la droite.
Soit (P) le plan passant par $\Omega$ et normal au vecteur $\vec{N} = \vec{J} + \vec{K}$ : on conviendra que $\vec{N}$ définit la demi-normale positive de (P) et oriente (P).



Retour page 1

a) Donner l'équation de (P) et construire ses traces.

b) Soit $M$ le point de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 6)$. Placer $M$ sur l'épure. Construire le point $M_1$, projection orthogonale de $M$ sur le plan (P).
(On notera $(m_1,\ m_1')$ les projections respectives de $M$ sur (H) et sur (F).)

# XIII. Besançon Nancy Metz Reims & Strasbourg remplacement, série E

**Ex. 1394.** 3 points. ./1979/besanconErem/exo-1/texte.tex

Soit dans le corps des nombres complexes l'équation :

$$Z^4 - \mathrm{i}\sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}(\mathrm{i}-1)Z - 8 - 8\mathrm{i} = 0.$$

1. Sachant que cette équation admet une solution imaginaire pure $Z_1$, déterminer celle-ci.
2. Trouver des nombres complexes $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ pour que l'équation ci-dessus soit puisse être mise sous la forme :
$$(Z - Z_1)(\alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta).$$
3. Achever de résoudre cette équation. On donnera les solutions $Z_2,\ Z_3$ et $Z_4$ sous forme trigonométrique.

**Ex. 1395.** 5 points. ./1979/besanconErem/exo-2/texte.tex

L'espace affine $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé.
Le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est le plan horizontal de projection et le plan $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection.
On représente l'axe $(O;\vec{\jmath})$ par le petit axe de la feuille; l'axe $(O;\vec{\imath})$ et l'axe $\left(O;\vec{k}\right)$ par le grand axe de la feuille; $O$ est à 10 cm du bord gauche de la feuille. L'unité est le centimètre.
Soit P le plan affine passant par le point $M(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

1. Construire les traces du plan P.
2. Construire l'épure de la perpendiculaire menée du point $A(2\ ;\ 4\ ;\ 2)$ au plan P.
3. Faire apparaître sur l'épure la distance du point $A$ au plan P et mesurer cette distance.

**Problème 490** *12 points.* ./1979/besanconErem/pb/texte

Le plan affine $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé.

I- On considère la fonction $\begin{array}{rl} g : [0\,;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \pi x + \tan(\pi x)\end{array}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $g$ et étudier les variations de $g$. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans le plan $\mathscr{E}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.
Donner les valeurs approchées de $g\left(\frac{7}{12}\right)$ et $g\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire un encadrement de $\alpha$. Donner alors le signe de $g(x)$.

II- On considère l'application $\begin{array}{rl} f : [0\,;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x\sin(\pi x)\end{array}$.

1. Étudier $f$.
2. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans $\mathscr{E}$.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est tangente à la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ au point $A$ d'abscisse $\frac{1}{2}$. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\Delta)$. Construire $\mathscr{C}_f$.

III- On considère la fonction $\begin{array}{rl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x\sin(\pi x)\end{array}$.

Retour page 1

1. Étudier la parité de $\varphi$.
   $\varphi$ est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ?
2. Soit $\Gamma$ la courbe représentative de $\varphi$ dans le plan $\mathscr{E}$.
   On désigne par $M$, $M_1$, $M_2$ les points de $(\Gamma)$ d'abscisses respectives $x$ ; $x_1 = x+1$ ; $x_2 = x+2$ avec $x \in [0\,;1]$.
   Soit $M'$ le symétrique de $M$ par rapport à la droite $(O;\vec{u})$.
   Montrer que les points $O$, $M'$ et $M_1$ sont alignés, de même que les points $O$, $M$ et $M_2$.
   En déduire alors une construction de la courbe $(\Gamma)$ à partir de $\mathscr{C}_f$. Construire $(\Gamma)$ en se limitant à l'intervalle $[-3\,;3]$.
3. Montrer que la courbe $(\Gamma)$ est tangente à la droite $(\Delta)$ aux points d'abscisses
   $$x_{2k} = \frac{1}{2} + 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
   et à la droite $(\Delta')$ d'équation $y = -x$ aux points d'abscisses
   $$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + (2k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

IV- 1. On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par
   $$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p}{n^2} \sin\left(\pi \frac{p}{n}\right).$$
   Vérifier que $U - n$ est une somme de Riemann relative à la fonction $f$ pour la subdivision de $[0\,;1]$ en $n$ parties égales. Montrer que $(U_n)$ converge.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on considère
   $$\text{pour tout } n \neq 0 \qquad \begin{array}{rcl} f_n : [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \sin(\pi x) \end{array}.$$
   $$\text{Pour } n = 0 \qquad \begin{array}{rcl} f_0 : [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\pi x) \end{array}.$$
   Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Justifier l'existence de $I_n$.
   b) Calculer $I_0$ et $I_1$.
   c) Á l'aide de deux intégrations successives par parties, trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$. Calculer $I_2$.
   d) En déduire
   $$J = \int_0^1 (3x^2 - 5x + 7)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

# XIV. Bordeaux, série C

**Ex. 1396.** ———— *3 points.* *./1979/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

Trouver les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels $(0 < a < b)$ dont le plus grand commun diviseur $d$ et le plus petit commun multiple $m$ vérifiant
$$2m + 3d = 78$$
et tels que $a$ ne divise pas $b$.

Retour page 1

**Ex. 1397.** ——— *5 points.* ./1979/bordeauxC/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien orienté $E$ de dimension trois est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On désigne par $\Delta$ la droite de $E$, dirigée par $\vec{\imath}$, passant par le point $A$ de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et par $R$ la rotation d'axe $\Delta$ qui transforme le point $O$ en le point $O'$ de coordonnées $(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

Trouver les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ du point $M_1$ transformé d'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ par la rotation $R$.

On désigne par $T$ la translation de vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ et par $V$ la transformation composée $V = T\circ R$.

Trouver les coordonnées $(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$ du point $M_2$ transformé d'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ où $M_2 = V(M)$.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $V$.

## Problème 491 *12 points.* ./1979/bordeauxC/pb/texte

-A- On désigne par $a,\ b,\ t,\ x$ des nombres réels.

1. Déterminer trois constantes réelles $A,\ B$ et $C$ telles, quel que soit $t>0$ :
$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)}.$$
2. Déterminer trois constantes réelles $A',\ B'$ et $C'$ telles, quel que soit $t>0$ :
$$\frac{-1}{t^2(1+t)} = \frac{A'}{t^2}+\frac{B'}{t}+\frac{C'}{(1+t)}.$$
3. Pour $0<a<b$, justifier l'existence des intégrales :
$$I(a,\ b) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2} \qquad J(a,\ b) = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t)}.$$
Montrer que $I(a,\ b)\geqslant 0$ et $J(a,\ b)\leqslant 0$.
Calculer $I(a,\ b)$ et $J(a,\ b)$.
4. Le nombre réel $a>0$ étant fixé, montrer que $I(a,\ b)$ et $J(a,\ b)$ tendent vers des limites réelles $F(a) = \lim\limits_{b\to+\infty} I(a,\ b)$ et $G(a) = \lim\limits_{b\to+\infty} J(a,\ b)$ quand $b$ tend vers $+\infty$ telles que : $G(a)\leqslant 0\leqslant F(a)$.

-B- Dans le suite du problème, on pose, pour $x>0$ :
$$F(x) = \log\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}$$
$$G(x) = \log\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}$$
où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Soit $\theta$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\log(1+x)-x$.
Du signe de $\theta'(x)$ et de la valeur $\theta(0)$, déduire que $\theta(x)<0$ pour $x>0$. ($\theta'$ désigne la dérivée de $\theta$).
Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$.
Du signe de $\varphi'(x)$ et de la valeur $\varphi(0)$, déduire que $\varphi(x)>0$ pour $x>0$. ($\varphi'$ désigne la dérivée de $\varphi$).
Prouver alors que, pour tout $x>0$ : $-\dfrac{1}{2x^2} < G(x) < 0$.
2. Soit $\psi$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$.
Étudier le signe de $\psi$ pour $x>0$, et en déduire que $F(x)>0$ pour $x>0$.
3. Montrer que, quel que soit $x>0$ :
$$F(x)-G(x) < \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad 0<F(x)<\frac{1}{x^2}.$$



Retour page 1

4. Des inégalités $G(x) < 0 < F(x)$ déduire que, pour tout $x > 0$ :

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

-C- 1. Soit $\alpha$ un nombre réel $\geqslant 1$. Montrer que :

a) $0 \leqslant \displaystyle\int_1^\alpha F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$.

b) $-\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_1^\alpha G(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2. Calculer $K(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha F(x)\,\mathrm{d}x$. (On pourra intégrer par parties). En déduire $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} K(\alpha)$.

3. Calculer $L(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha G(x)\,\mathrm{d}x$ et déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} L(\alpha)$.

## XV. Bordeaux, Limoges & Poitiers série E

**Ex. 1398.** *4 points.* *./1979/bordeauxE/exo-1/texte.tex*

Pour $\lambda$ réel, on pose :

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

1. En utilisant une intégration par parties, établir que :

$$A(\lambda) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\cos\lambda.$$

2. Montrer que la fonction, qui à $\lambda$ associe $A(\lambda)$, admet, quand $\lambda$ tend vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.

**Ex. 1399.** *4 points.* *./1979/bordeauxE/exo-2/texte.tex*

Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^\star$.

1. Une urne contient $(n+1)$ boules vertes et $(n-1)$ boules rouges. Un essai consiste à tirer une boule. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Si la boule est rouge, on perd ; si elle est verte, on gagne.
   a) Quelle est la probabilité $P_1$ de gagner ? Quelle est celle $P_2$ de perdre ?
   b) Quand on gagne, on reçoit 2 francs ; quand on perd, on donne 3 francs.
   Soit $X$ la variable aléatoire ainsi définie. Déterminer sa loi de probabilité, calculer son espérance mathématique.
2. L'urne contient maintenant $(n+1)$ boules rouges, $(n-1)$ boules vertes et 2 boules oranges. Un essai consiste à tirer une boule.
   Si elle est rouge, on perd ; si elle est verte, on gagne ; si elle est orange on fait un autre essai sans remettre cette boule dans l'urne. Le jeu est donc terminé après trois essais au plus.
   Quelle est la probabilité $P_1'$ de gagner et celle $P_2'$ de perdre ?
   Comparer avec les résultats obtenus au 1a.

## Problème 492 *12 points.* *./1979/bordeauxE/pb/texte*

*Remarque : les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

On note E l'ensemble des fonctions numériques de variable réelle définies pour tout $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\log x$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

A. 1. On appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$, on rappelle que $(\mathscr{F},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $(E,\ +,\ .)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$, dont une base est $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ avec

$$\begin{aligned} f_1 &: x \longmapsto \frac{1}{x}^2 \\ f_2 &: x \longmapsto \frac{1}{x} \\ f_3 &: x \longmapsto \log x. \end{aligned}$$

2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c\log x$.

Calculer $f'(x),\ f''(x)$.

Exprimer en fonction des réels $a,\ b,\ c$ : $f(1),\ f'(1),\ f''(1)$.

3. On note $\varphi$ l'endomorphisme de E qui, à tout élément $f$ de E, associe l'élément dont les coordonnées $A,\ B,\ C$ dans la base $\mathscr{B}$ sont :

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{3}\left[-f(1) + f'(1) - f''(1)\right] \\ B = \dfrac{1}{3}\left[4f(1) - f'(1) + f''(1)\right] \\ C = \dfrac{1}{3}\left[2f(1) + 4f'(1) - f''(1)\right]. \end{cases}$$

a) Montrer que, si $f$ est l'élément de E de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans $\mathscr{B}$ alors on a

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{3}(-9a - 4b + 2c) \\ B = \dfrac{1}{3}(12a + 7b - 2c) \\ C = \dfrac{1}{3}(-12a - 4b + 5c). \end{cases}$$

b) Soit $E_1$ l'ensemble des éléments de E invariants par $\varphi$.

Montrer que $E_1$ est un plan vectoriel de E.

Vérifier que $E_1$ est l'ensemble des éléments $f$ de E, tels que : $f''(1) = 0$.

c) Soit $E_2$ l'ensemble des éléments de E transformés en leurs opposés par $\varphi$. Montrer que $E_2$ est une droite vectorielle de E.

Vérifier que $E_2$ est l'ensemble des éléments $f$ de E, tels que :

$$f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = 0.$$

d) Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires dans E.

En déduire une caractérisation géométrique de $\varphi$.

Montrer que si, pour $f$ élément de E, on a $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ alors $f$ est le vecteur nul de E.

4. a) $f$ et $g$ étant deux éléments quelconques de E, on pose :

$$\phi(f,\ g) = f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1).$$

Montrer que $\phi$ est un produit scalaire sur E. (Il est conseillé de ne pas exprimer $\phi(f,\ g)$ en fonction des coordonnées de $f$ et de $g$ dans la base $\mathscr{B}$.)

*E muni de ce produit scalaire est, dans la suite du problème, un espace vectoriel euclidien.*

Retour page 1

b) On donne

$$g_1 : x \longmapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 4\log x\right).$$

Vérifier que $g_1$ est élément de $E_1$. Montrer que $\|g_1\| = 1$.
($\|g_1\|$ désigne la norme du vecteur $g_1$.)
Déterminer un élément $g_2$ de $E_1$, différent du vecteur nul de E, orthogonal à $g_1$. En déduire une base orthonormée $(g_1,\ g_2)$ de $E_1$.

c) Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux. En déduire qu'il existe un vecteur $g_3$ de E tel que $(g_1,\ g_2,\ g_3)$ soit une base orthonormée de E.

5. Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ de E, défini au A3, est une isométrie vectorielle. La caractériser géométriquement.

B. On définit les trois fonctions numériques $h_1,\ h_2$ et $d$ par :

$$\begin{aligned} h_1 : x &\longmapsto 4\left(\frac{1}{x}^2 - \frac{1}{x} + \log x\right) \\ h_2 : x &\longmapsto \frac{1}{x}^2 - \frac{4}{x} - 2\log x \\ d : x &\longmapsto h_1(x) - h_2(x). \end{aligned}$$

1. Étudier les fonctions $h_1$ et $h_2$.
2. Étudier le signe de $d'(x)$, en déduire le sens de variation de $d$, puis le signe de $d(x)$.
3. Tracer les courbes représentatives $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de $h_1$ et $h_2$ dans un même repère orthonormé (on utilisera le signe de $d(x)$ pour placer correctement $(\mathscr{C}_1)$ par rapport à $(\mathscr{C}_2)$).

# XVI. Bordeaux remplacement, série C

**Ex. 1400.** ——— *5 points.* *./1979/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex*

Étant donné un entier relatif $n$, on considère les entiers relatifs :

$$A = 3n + 4 \qquad \text{et} \qquad B = 9n - 5.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de $n$, le plus grand commun diviseur de $A$ et $B$.
2. Déterminer les valeurs de $n$ pour que le plus grand commun diviseur de $A$ et $B$ soit 17 et le plus petit commun multiple de $A$ et $B$ soit égal à 884.

**Ex. 1401.** ——— *3 points.* *./1979/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex*

On considère le plan affine $E$ rapporté à un repère affine $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $A$ le point de coordonnées $(1~;~2)$ et $A'$ le point de coordonnées $(3~;~4)$.
On considère l'application affine $f$ de $E$ dans $E$ qui transforme $A$ en $A'$ et dont l'endomorphisme associé $\varphi$ vérifie les deux propriétés :

a) $\varphi$ est involutif

b) $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$.

**1.** $f$ est-elle bijective ?

**2.** Déterminer $\varphi(\vec{j})$.

**3.** Trouver les coordonnées $(x_1~;~y_1)$ d'un point $M_1$ transformé d'un point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ par l'application $f$.

**4.** $f$ est-elle involutive ? $f$ possède-t-elle des points invariants ?

## PROBLÈME 493 *12 points.*

./1979/bordeauxCrem/pb/texte

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle $x$.
On rappelle que cet ensemble, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On notera par $\Theta$ l'élément neutre pour l'addition (pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad \Theta(x) = 0$).
On désigne par $\mathscr{J}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}$ qui sont intégrables sur tout intervalle fermé borné $[-a\,;a]$ ($a > 0$).
On rappelle que, pour tout $f \in \mathscr{J}$, $a > 0$, il existe $M_{a,f} \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in [-a\,;a]$, $\qquad |f(x)| \leqslant M_{a,f}$.

A- 1. Dire pourquoi les fonctions suivantes sont éléments de l'ensemble $\mathscr{J}$ :

$$f_1 : x \longmapsto \mathrm{E}(x)$$

où $\mathrm{E}(x)$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$

$$f_2 : x \longmapsto \sin x$$

$$f_3 : x \longmapsto \cos x$$

$$f_4 : x \longmapsto \sqrt{|x|}.$$

2. Montrer que, pour toute $f \in \mathscr{J}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

détermine un élément $F$ de $\mathscr{F}$ et une application linéaire $\phi$ de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{F}$ $f \longmapsto \phi(f) = F$.
Déterminer l'image par $\phi$ de :

a) la fonction nulle $\Theta$

b) la fonction constante $k : x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)

c) la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$

d) la fonction $f_2$

e) la fonction $f_3$.

3. a) Montrer que, pour tout $x > 0$ :

$$\int_{-x}^{x+1} f_1(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(On pourra utiliser des considérations graphiques en faisant intervenir le point $\omega$ de coordonnées $(1/2\ ;\ 0)$).

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{x}^{x+1} f_1(t)\,\mathrm{d}t = x.$$

c) Déterminer l'image par $\phi$ de la fonction $f_1$.

B- 1. Montrer que, pour toute $f \in \mathscr{J}$, la fonction $F = \phi(f)$ est une fonction continue, impaire.
Prouver que l'application $\phi$ applique $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{J}$.

2. Montrer que si $f \in \mathscr{J}$ est impaire alors $\phi(f) = \Theta$. (On pourra utiliser des considérations graphiques).
En déduire quelle est l'application $\phi \circ \phi$ de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{F}$.

3. On suppose que $f \in \mathscr{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, dans ces conditions, $\phi(f) = F$ est uen fonction dérivable. Exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{J}$ qui sont continues et élément du noyau de $\phi$.

C- On considère l'élément $g$ de $\mathscr{F}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log(2)} & \text{si } |x| \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{\log|x|} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

1. Construire la courbe représentative $\gamma$ de la fonction $g$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonomé. Montrer que $g \in \mathscr{J}$.
2. Soit $G = \phi(g)$. On ne cherchera pas à calculer $G(x)$.

   Démontrer que, pour tout $t > 2$, $\dfrac{1}{\log t} > \dfrac{1}{t}$.

   En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.
3. Soit $h(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$ pour $x \geqslant 2$.

   Soient $A$, $N$, $M$ les points de $\gamma$ d'abscisses respectives $2$, $\sqrt{x}$, $x$ ; $A'$, $N'$, $M'$ leurs projections orthogonales sur l'axe $x'Ox$ pour $x \geqslant 4$.

   En majorant $h(x)$ par la somme des aires de deux trapèzes, montrer que

$$h(x) \leqslant \frac{\sqrt{x}-2}{2}\left[\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log\sqrt{x}}\right] + \frac{x-\sqrt{x}}{2}\left[\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log\sqrt{x}}\right].$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction $G$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

## XVII. Bordeaux, Limoges & Poitiers remplacement, série E

**Ex. 1402.** *4 points.* *./1979/bordeauxErem/exo-1/texte.tex*

On se place dans un plan affine euclidien P où l'on considère un triangle équilatéral $ABC$.
On appelle $A'$ le milieu de $[BC]$.

a) Déterminer le point $G$ tel que l'on ait $-4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

b) Soit $a$ la longueur commune des côtés du triangle.
Discuter suivant $k \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation :

$$-4MA^2 + MB^2 + MC^2 = k.$$

**Ex. 1403.** *4 points.* *./1979/bordeauxErem/exo-2/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4\mathrm{i}z - 4 + 2\mathrm{i} = 0.$$

**2.** Soit $z_1$ la racine d'argument $\dfrac{\pi}{4}$, et $z_2$ l'autre racine.
Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct, déterminer la similitude directe, qui au point d'affixe i, associe le point d'abscisse $-1$, et au point d'affixe $z_1$, le point d'affixe $z_2$.

**3.** Déterminer le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.



Retour page 1

## 🏛Problème 494 *12 points.* *./1979/bordeauxErem/pb/texte*

A- 1. On considère la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de cette fonction et tracer la courbe $(\Gamma)$ représentative de $g$ dans un repère orthonormé (unité de longueur 5 cm).

b) Soit $\alpha$ un nombrev réel supérieur à zéro. Calculer l'aire du domaine délilité par $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant y \leqslant g(x)$.

2. Soit $b$ un paramètre réel. On considère les fonctions $g_b$ définies par :

$$g_b(x) = (x+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

Étudier les variations de ces fonctions (ne pas tracer les courbes représentatives).

3. $a$ et $b$ étant deux paramètres réels, on considère E l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_{a,b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

a) Montrer que relativement aux opérations d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui contient les fonctions $g_b$ définies précédemment.
L'ensemble des fonctions $g_b$ est-il un sous esapce vectoriel de E ?

b) Montrer que B=$(f_{1,0},\ f_{0,1})$ contitue une base de E. Quelles sont les coordonnées de $f_{a,b}$ dans cette base ?

B- On construit une suite de fonctions dérivables $F_0,\ F_1,\ F_2,$
$dots, F_n$ appartenant toutes à l'espace vectoriel E et telles que

$$F_0 = g \qquad \text{et} \qquad F'_n = F_{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^{\star}.$$

On pose pour $n$ supérieur ou égal à zéro :

$$F_n(x) = (a_n x + b_n)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a) Pour $n$ appartenant à $\mathbb{N}^{\star}$, exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $a_{n-1}$ et $b_{n-1}$.
Déduire de ce résultat, qu'il existe uen application linéaire $\Phi$ de l'espace vectoriel E dans lui-même telle que :

$$\Phi(F_{n-1}) = F_n.$$

Écrire la matrice $M$ de $\Phi$ relativement à la base B de E définie dans A(3)b.
En déduire que $\Phi$ est un automorphisme de E.

b) Soit $p$ un réel non nul donné : $\mathrm{E}_p$ est l'ensemble des éléments $f$ de E tels que

$$\Phi(f) = pf.$$

Déterminer $\mathrm{E}_p$ et discuter suivant les valeurs de $p$.

2. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

où $\lambda$ est un réel donné.

a) Calculer $P^2$ et $P^3$ et ensuite $P^n$.
Écrire alors la matrice $M^n$.

b) En déduire les expressions de $a_n$ et $b_n$ à l'aide des coodonnées $a_0$ et $b_0$ de $F_0$.
Connaissant les valeurs numériques de $a_0$ et $b_0$, donner l'expression de $F_n(x)$.

3. Démontrer que

$$F_n(x) = \int_{-n}^{x} F_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Retour page 1

# XVIII. Caen, série C

**Ex. 1404.** *3 points.* *./1979/caenC/exo-1/texte.tex*

1. Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $3^n$ par 8.
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que le nombre $3^n.n-9n+2$ soit divisible par 8 ?

**Ex. 1405.** *4 points.* *./1979/caenC/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine , on donne un triangle $ABC$ rectangle en $A$, tel que $d(A,\ C)=2d(A,\ B)=2a$ où $a$ est un nombre réel positif donné et $d(A,\ C)$ désigne la distance des points $A$ et $C$.

1. Déterminer et construire le point $G$ barycentre du système de points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients 2, -2 et 1.

   Déterminer et construire le point $K$ barycentre du système de points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients $-2, 3et3$.
2. Déterminer et construire l'ensemble $\mathrm{E}_1$ des points $M$ tels que
$$4.\left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathrm{E}_2$ des points $M$ tels que
$$2MA^2-2MB^2+MC^2=-5a^2.$$

## Problème 495 *13 points.* *./1979/caenC/pb/texte*

Soit $m$ un réel quelconque. On précise que pour tout $x$ strictement positif, la nota- tion $x^m$ désigne $\mathrm{e}^{m\log x}$ où $\log x$ représente le logarithme népérien de $x$. $\mathbb{R}_+^\star$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels différents de zéro.

: *Les parties B et C suivantes sont indépendantes.*

A) 1. À tout réel $m$, on associe la fonction $f_m$ de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par
$$f_m(x)=x^m.$$
Étudier, suivant les différentes valeurs de $m$, les variations de cette fonction.

On appelle $C_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer l'équation de la tangente à $C_m$ au point d'abscisse 1.

2. Construire sur une même figure $C_{-1}$, $C_0$, $C_{\frac{1}{2}}$, $C_1$ et $C_2$.
3. Montrer que pour $m\neq 0$ la fonction $f_m$ possède une fonction réciproque égale à $f_{\frac{1}{m}}$. Montrer qu'il existe une application affine du plan qui transforme la courbe $C_m$ en $C_{\frac{1}{m}}$.

B) À tout réel $m$ on associe la fonction $g_m$ de $\mathbb{R}^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :
$$g_m=\mathrm{e}^{m|\log|x||}.$$

1. Montrer que $g_m$ est paire.
2. Déterminer un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ tel que les restrictions de $g_m$ et de $f_m$ à $I$ soient égales.
3. Étudier, suivant les différentes valeurs de $m$, les variations de la fonction $g_m$.
4. $g_m$ est-elle continue en $x=1$ ? Est-elle dérivable en ce point ?
5. Donner, sur des figures différentes, dans des plans rapportés à des repères orthonormés, les allures des courbes représentatives des fonctions $g_{-2},\ g_{-1},\ g_{-\frac{1}{2}},\ g_0,\ g_{\frac{1}{2}},\ g_1$ et $g_2$.
6. Comparer, pour tout $x$ réel non nul, $g_m\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g_m(x)$.

Retour page 1

C) On oriente le plan affine euclidien P en considérant que le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est direct. Soit $V$ le plan vectoriel euclidien orienté associé. Soit $m$ un nombre réel non nul et $\psi_m$ l'endomorphisme de $V$ défini par sa matrice $A_m$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & \dfrac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}.$$

Soit $F_m$ l'application affine de P associée à $\psi_m$ et qui laisse le point $J$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ invariant.

1. Montrer que $\psi_m$ est involutive.
2. Quelle est la nature de l'application $F_m$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit $\Gamma_m$ l'image de $C_m$ par l'application $F_m$ ($C_m$ est la courbe définie, en A1.). Montrer qu'il existe une rotation $R_m$ telle que $\Gamma_m$ soit l'image de $C_{\frac{1}{m}}$ par cette rotation (on pourra utiliser le résultat de A3.) Quel est le centre de cette rotation ?
4. Soit $\theta_m$ l'angle de la rotation $R_m$. Déterminer$\tan\theta_m$ en fonction de $m$.

## XIX. Caen Nantes Orléans-Tours & Rennes, série E

**Ex. 1406.** ——— *4 points.* *./1979/caenE/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien $E_3$ est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les plans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ sont respectivement le plan horizontal et le plan frontal de projection. L'origine est placée au centre de la feuille. La ligne de terre $(O; \vec{\jmath})$ est parallèle au petit côté. Le centimètre est l'unité de longueur.
On donne le point $A(5\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et le plan P d'équation :

$$2x - y + z - 2 = 0.$$

1. Déterminer par leurs équations les traces du plan P sur les plans de projections et les représenter sur l'épure.
2. Soit D la droite contenant $A$ et orthogonale à P. Construire l'épure $(a,\ a')$ de $A$ et celle $(d,\ d')$ de D.
3. Construire l'intersection $H$ $(h,\ h')$ de P et de D.
4. Par la méthode de votre choix, faire apparaître en vraie grandeur sur l'épure, la distance de $A$ à$H$.

- L'épure sera accompagnée d'une courte notice justifiant les procédés et constructions utilisés.

**Ex. 1407.** ——— *3 points.* *./1979/caenE/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes vers lui-même définie par

$$f(z) = z^3 - (2+3\mathrm{i})z^2 + (-3+5\mathrm{i})z + 6 + 2\mathrm{i}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle et une seule que l'on notera $a$. Achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

   On désignera par $b$ et $c$ les deux racines autres que $a$, $b$ étant celle dont la partie réelle est positive.
2. Soit $A,\ B,\ C$ les points images des nombres complexes $a,\ b,\ c$ dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Démontrer que le triangle $(A,\ B,\ C)$ est rectangle en $B$ et isocèle.

**Problème 496** *13 points.* *./1979/caenE/pb/texte*

Soit $m$ un réel quelconque. On précise que pour tout $x$ strictement positif, la notation $x^m$ désigne $\mathrm{e}^{m\log x}$ où $\log x$ désigne la logarithme népérien de $x$.
$\mathbb{R}_+^\star$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels différents de zéro.
Les parties II et III suivantes sont indépendantes.

-I- 1. Á tout réel $m$, on associe la fonction $f_m$ de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f_m(x) = x^m.$$

Étudier, suivant les différentes valeurs de $m$, les variations de cette fonction.
On appelle $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de la la fonction $f_m$ dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1.

2. Construire sur la même figure $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$, $C_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
3. Montrer que, pour $m \neq 0$, la fonction $f_m$ possède une fonction réciproque égale à $f_{\frac{1}{m}}$. Montrer qu'il existe une application affine du plan qui transforme $\mathscr{C}_m$ en $\mathscr{C}_{\frac{1}{m}}$.

-II- Á tout réel $m$ on associe la fonction $g_m$ de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :

$$g_m(x) = \mathrm{e}^{m|\log|x||}.$$

1. Montrer que $g_m$ est paire.
2. Déterminer l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ tel que les restrictions de $g_m$ et de $f_m$ à I soient égales.
3. Étudier, suivant les différentes valeurs de $m$, les variations de la fonction $g_m$.
4. $g_m$ est-elle continue en $x = 1$ ? Est-elle dérivable en ce point ?
5. Donner, sur des figures différentes, dans des plans rapportés à des repères orthonormés, les allures des courbes représentatives des fonctions $g_{-2}$, $g_{-1}$, $g_{-\frac{1}{2}}$, $g_0$, $g_{\frac{1}{2}}$, $g_1$, $g_2$.
6. Comparer, pour tout $x$ réel non nul, $g_m\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g_m(x)$.

-III- On oriente la plan affine euclidien P en considérant que le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est direct.
Soit $V$ le plan vectoriel euclidien orienté associé.
Soit $m$ un nombre réel non nul et $\psi_m$ l'endomorphisme de V défini par sa matrice $A_m$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & \dfrac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}.$$

Soit $F_m$ l'application affine de P associe à $\psi_m$ et qui laisse le point $J$ de coordonnées $(1 ; 1)$ invariant.

1. Montrer que $\psi_m$ est involutive.
2. Quelle est la nature de l'application $F_m$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit $\Gamma_m$ l'image de $\mathscr{C}_m$ par l'application $F_m$ ($\mathscr{C}_m$ est la courbe définie en I1.
Montrer qu'il existe une rotation $R_m$ telle que $\Gamma_m$ soit l'image de $\mathscr{C}_{\frac{1}{m}}$ par cette rotation (on pourra utiliser le résultat de la question I3). Quel est le centre de cette rotation ?
4. Soit $\theta_m$ l'angle de la rotation $R_m$. Déterminer $\tan\theta_m$ en fonction de $m$.

## XX. Caen, Nantes, Poitiers, Rennes remplacement, série C

Ex. 1408. ——— *4 points.* *./1979/caenCrem/exo-1/texte.tex*

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 - 2(1-5\mathrm{i})z^3 + 11 + 2\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation en substituant $t$ à $z^3$ dans (E).
2. Calculer $(2-\mathrm{i})^3$.
3. Résoudre l'équation (E).



Retour page 1

**Ex. 1409.** ——— *4 points.* *./1979/caenCrem/exo-2/texte.tex*

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
$$f(x) = x\ \log x + \frac{1}{x}.$$
Démontrer que $f$ possède des primitives sur $\mathbb{R}_+^\star$ et déterminer celle qui s'annule pour $x = 1$.
2. Étudier (sans tracer la courbe correspondante) la variation de $xf(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en déduire le signe de $f(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
$$F(x) = \frac{x^2}{2}(\log x - \frac{1}{2}) + \log x + \frac{1}{4}$$
et en tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

## Problème 497 *12 points.* *./1979/caenCrem/pb/texte*

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et par $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2.
On rappelle que : $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel que $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles et que $\mathscr{P}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$, dont une base est $(P_0,\ P_1,\ P_2)$ avec
$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,\ P_2(x) = x$$
pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.
Soit $\Phi$ l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\Phi(F) = f$ où $f$ est définie par
$$f(x) = F(x+1) - F(x)$$
pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$.

I- 1. a) Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathscr{F}$.
   b) Quelle est l'image par $\Phi$ d'un polynôme de degré $n$ ?
   En déduire que $\Phi(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$.
2. Soit $\varphi$ la restriction de $\Phi$ à $\mathscr{P}$.
   a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{P}$, et déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$ en fonction de $P_0$, $P_1$ et $P_2$.
   En déduire le noyau et l'image de $\varphi$.
   b) Existe-t-il des droites $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ telles que $\varphi(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ ?
3. Soit $F_0$ l'élément de $\mathscr{F}$ défini par $F_0(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x$ dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer $f_0 = \Phi(F_0)$. En déduire que la droite vectorielle engendrée par $F_0$ est globalement invariante par $\Phi$. Quelle est la restriction de $\Phi$ à cette droite ?

II- Dans cette partie, on se propose, pour tout nombre réel $\lambda$, de déterminer l'ensemble $S_\lambda$ :
$$S_\lambda = \{F \in \mathscr{F} \qquad , \qquad \Phi(F) = \lambda F\}.$$
1. a) Trouver un nombre réel $\lambda_0$ tel que le noyau de $\Phi$ soit égal à $S_{\lambda_0}$.
   b) Vérifier que
$$(F \in S_\lambda) \Longleftrightarrow [\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x+1) = (\lambda+1)F(x)].$$
   Quel est l'ensemble $S_{-1}$ ?
   c) Soit $J$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad J(x) = \mathrm{e}^x \sin \pi x.$$
   Démontrer qu'il existe une valeur $\lambda_1$, unique, telle que $J$ appartienne à $S_{\lambda_1}$.
2. Pour $\lambda$ différent de $-1$, on notera $u_\lambda$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_\lambda(x) = |1+\lambda|^x$.
   Démontrer que si $Fin\mathscr{F}$, la fonction $G = \dfrac{F}{u_\lambda}$ appartient à $\mathscr{F}$.

Retour page 1

3. On suppose $\lambda > -1$.
   Démontrer que $F$ appartient à $S_\lambda$ si, et seulement si, $G$ appartient au noyau de $\Phi$.
   En déduire qu'il existe un réel $a$, indépendant de $\lambda$ tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H,\ H \in S_a\}.$$

4. On suppose maintenant que $\lambda < -1$.
   Démontrer qu'il existe un réel $b$, indépendant de $\lambda$ tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H,\ H \in S_b\}.$$

## XXI. Caen, Nantes, Orléans-Tours, Rennes remplacement, série E

Ex. 1410. *4 points.* *./1979/caenErem/exo-1/texte.tex*

Une urne contient dix boules : deux sont rouges, cinq sont blanches et trois sont noires.
On tire simultanément trois boules et on suppose que les tirages ainsi effectués sont équiprobables.
Le tirage d'une boule rouge rapporte deux points, le tirage d'une boule blanche rapporte 1point et le tirage d'une boule noire ne rapporte aucun point.
On désigne par $X$ la variable aléatoire réelle qui à tout tirage associe le total des points correspondant aux trois boules tirées.

**1.** Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $X$ ?

**2.** Calculer l'espérance mathématique et la variance de $X$.

Ex. 1411. *4 points.* *./1979/caenErem/exo-2/texte.tex*

Soit un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $m$ un nombre réel.
Déterminer selon les valeurs de $m$ la nature de $\Gamma_m$, ensemble des points $M$ du plan de coordonnées $x$ et $y$ telles que :

$$(m-1)y^2 + mx^2 + 2y + 3 = 0.$$

Tracer la courbe $\Gamma_{\frac{1}{2}}$.

### Problème 498 *12 points.* *./1979/caenErem/pb/texte*

A- 1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

a) Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Démontrer que $\mathscr{C}$ a un centre de symétrie. Construire la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse nulle.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie $A$ du plan définie par :

$$A = \left\{M \in \mathrm{P} \quad / \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda, \quad -1 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

puis l'aire $\mathscr{B}(\lambda)$ de la partie $B$ du plan définie par :

$$B = \left\{M \in \mathrm{P} \quad / \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda, \quad f(x) \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

$\mathscr{B}(\lambda)$ a-t-elle une limite lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ ?
Si oui, calculer cette limite.

2. Démontrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$. On appelle $g$ la bijection réciproque de $f$.
   $g$ est-elle dérivable sur $]-1\,;1[$ ?
   Démontrer que pour tout $x$ réel, on a $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
   En déduire qu'en tout point où $g$ est dérivable, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$



Retour page 1

3. Soit $m$ un réel de l'intervalle $]-1\,;1[$. Résoudre l'équation $f(x)=m$. En déduire $g(x)$ pour tout $x$ de $]-1\,;1[$.
   Démontrer que :
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \log 3.$$

B- Pour $n$ entier naturel et $x$ réel, on pose
$$h_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \sum_{i=0}^{n} x^{2i}.$$

1. Calculer, pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$,
$$\frac{1}{1-x^2} - h_n(x).$$
2. Démontrer que pour $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$,
$$0 \leqslant frac11 - x^2 - h_n(x) \leqslant \frac{4}{3}x^{2n+2}.$$
3. On pose
$$U_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?
4. `Application numérique` : calculer $U_2$ et en déduire un encadrement de $\log 3$.

## XXII. Canada USA, série C

**Ex. 1412.** ./1979/canada-usaC/exo-1/texte.tex

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation en $z$
$$z^6 - 9\mathrm{i}z + 18 - 26\mathrm{i} = 0 \tag{1}$$
et l'équation en $Z$ :
$$Z^3 - 1 = 0. \tag{2}$$

**1.** Montrer que $(2+\mathrm{i})$ et $(1-\mathrm{i})$ sont des racines de l'équation (1).

**2.** Résoudre l'équation (2).

**3.** Montrer que si $z_0$ est racine de (1) et $Z_0$ est une racine de (2), alors $z_0Z_0$ est racine de (1). En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

## XXIII. Centre Outre Mer, série C

**Ex. 1413.** *4 points.* ./1979/centreoutremerC/exo-1/texte.tex

Soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trois réels donnés, deux à deux distincts ; $a$, $b$, $c$ sont trois paramètres réels ; on leur associe la fonction numérique $f$ de variable réelle :
$$x \longmapsto f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma}.$$

Retour page 1

1. Former des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur $a$, $b$, $c$, pour que la fonction $f$ admette une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.
   (Aucune autre étude concernant la fonction $f$ n'est demandée).
2. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^3.\left[\frac{\beta-\gamma}{x+\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{x+\beta}+\frac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right]\right)$.
3. Considérant à nouveau la fonction $f$, montrer que

$$\text{si}\quad \lim_{x\to+\infty} f=0,\qquad \text{alors}\quad (a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0).$$

**Ex. 1414.** ——— *4 points.* ./1979/centreoutremerC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{e}^x\cos x.$$

1. Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et mettre $f'(x)$ sous la forme :

$$f'(x)=A\mathrm{e}^x\cos(x+a),$$

   $A$ et $a$ étant des constantes que l'on calculera.
2. Calculer la dérivée huitième de $f$.
3. Déterminer une fonction $F$ vérifiant :

$$\text{pour tout } x \text{ réel},\quad F'(x)=f(x)\qquad\text{et}\qquad F(0)=\frac{1}{2}.$$

   *Application :*

   Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x}\mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

## Problème 499 *12 points.* ./1979/centreoutremerC/pb/texte

Le plan affine euclidien

I. Le plan affine euclidien $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, noté $(\omega)$.
On désigne par $\mathscr{H}$ la courbe du plan $P$ dont une équation dans $(\omega)$ est

$$y^2-3x^2=1.$$

1. Sur une figure réalisée avec l'unité 1 cm, tracer $\mathscr{H}$.

$$\text{soit}\qquad \vec{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath}+\vec{\jmath}\right),\qquad \vec{v}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath}+\vec{\jmath}\right).$$

   Que représentent les droites $(O,\ \vec{u})$ et $(O,\ \vec{v})$ pour $\mathscr{H}$ ?
   Le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ sera noté $(\Omega)$, écrire les relations de passage entre les coordonnées $x$, $y$ d'un point $M$ de $P$ dans $(\omega)$ et les coordonnées $X$, $Y$ de ce point dans $(\Omega)$. Former une équation de $\mathscr{H}$ dans $(\Omega)$.
2. On désigne par $\mathscr{H}^+$ la partie de $\mathscr{H}$ située dans le demi-plan $y>0$ ; à chaque point $M$ de $\mathscr{H}^+$ on associe son abscisse $X=\varphi(M)$ dans $(\Omega)$.
   Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathscr{H}^+$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ ; exprimer inversement en fonction de $X$ les coordonnées $x$, $y$ dans $(\omega)$ du point $\varphi^{-1}(X)$.
3. Soit $(M,\ M')$ un bipoint de $\mathscr{H}^+$, $M$ (resp. $M'$) admettant dans $(\omega)$ les coordonnées $(x\ ;\ y)$ (resp. $(x'\ ;\ y')$). On pose

$$\delta(M,\ M')=xy'-x'y. \tag{1}$$

   Si $X=\varphi(M)$, $X'=\varphi(M')$, démontrer

$$\delta(M,\ M')=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{X}{X'}-\frac{X'}{X}\right). \tag{2}$$



Retour page 1

II. L'objet de cette partie est d'étudier l'ensemble $E$ de $\mathscr{H}^+$ formé des points de $\mathscr{H}^+$ dont les coordonnées dans $(\omega)$ sont entières $\left[(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+\right]$.
On placera à titre d'essai les points de $E$ dont les carrés des deux coordonnées sont inférieurs à 50.
Soit $\tau$ l'application affine de $P$ dans $P$ dont les équations dans $(\omega)$ sont :

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

On pose $a = 2 + \sqrt{3}$.
Si $A,\ B,\ C$ sont trois points de $\mathscr{H}^+$, on covient de dire que $B$ est « entre $A$ et $C$ » si le réel $\varphi(B)$ est compris entre les réels $\varphi(A)$ et $\varphi(C)$.

1. Démontrer que $\tau$ conserve $\mathscr{H}$, que $\tau$ conserve $\mathscr{H}^+$, que $\tau$ conserve $E$.
   Vérifier que :
   $$(\forall M \in \mathscr{H}^+), \quad \varphi[\tau(M)] = a.\varphi(M).$$
2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, on pose $A_k = \varphi^{-1}(a^k)$.
   Montrer que tous les points $A_k$ appartiennent à $E$.
   Calculer $\delta(A_k,\ A_{k-1})$ et $\delta(A_k,\ A_{k+1})$.
3. L'entier $k$ étant fixé, utiliser $\delta(A_k,\ M)$ pour prouver que $A_k$ est le seul point de $E$ entre $A_{k-1}$ et $A_{k+1}$ sur $\mathscr{H}^+$. (On observera, sous la forme (1), que si $M \in E$, $\delta(A_k,\ M)$ est entier, et sous la forme (2) que $X = \varphi(M)$ et $\delta(A_k,\ M)$ varient en sens contraires).
   Quelle est l'image de $E$ par $\varphi$ ?

III. L'objet de cette partie est d'examiner l'ensemble $\mathscr{G}$ des bijections affines $g$ de $P$ telles que $g(O) = O$ et $g(E) = E$.

1. Montrer que $(\mathscr{G},\ \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que les seuls éléments de $\mathscr{G}$ conservant le point $A_0$ sont l'application identique de $P$ et la symétrie orthogonale $\sigma$ d'axe $(O,\ \vec{j})$. A cet effet, en supposant que $g \in \mathscr{G}$ et $g(A_0) = A_0$, on étudiera l'action de $g$ sur un bipoint $(A_k,\ A_{-k})$.
3. Soit $g$ un élément quelconque de $\mathscr{G}$. On désigne par $A_m$ l'image $g(A_0)$. Que peut-on dire de $\tau^{-m} \circ g$ ? Montrer que $g$ est, soit $\tau^m$, soit $\tau^m \circ \sigma$.

## XXIV. Centre Outre Mer, série E

**Ex. 1415.** ./1979/centreoutremerE/exo-1/texte.tex

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$. A tout point $M$ de $\mathscr{P}$ on associe :

$$I \ = \ \text{milieu de } (A,\ M)\,; \qquad J \ = \ \text{milieu de } (B,\ M)\ ;$$

$$E \ = \ \text{milieu de } (A,\ J)\,; \qquad F \ = \ \text{milieu de } (B,\ I).$$

soit $f$ l'application affine qui à $M$ associe $E$ et $g$ l'application qui à $M$ associe $F$.

**1.** Montrer que $f$ et $g$ sont des homothéties affines dont on donnera les centres et les rapports.

**2.** Soit $C$ un point de $\mathscr{P}$.
On pose :

$$\begin{aligned} E_0 &= C \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ E_n = f(E_{n-1}) \\ F_0 &= C \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_n = g(F_{n-1}). \end{aligned}$$

On pose également $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \ = \ \text{distance de } E_n \text{ à } F_n$.
Calculer la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

**Ex. 1416.** ./1979/centreoutremerE/exo-2/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère un point mobile $M$ dont la position, au temps $t$, est définie par ses coordonnées :

$$t\in\mathbb{R}\begin{cases}x(t)=1+\cos 2t\\ y(t)=\cos 2t\\ z(t)=\sin^2 t.\end{cases}$$

**1.** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ au temps $t$.
Ces vecteurs sont-ils liés ? (On pourra écrire la relation indépendante de $t$ entre $y$ et $z$.)

**2.** Préciser la trajectoire $(\mathscr{C})$ du point mobile $M$ et retrouver le résultat précédent.

**3.** Décrire le mouvement du point mobile $M$ pour $t\in[0\,;\pi]$.

# XXV. Clermont, série C

**Ex. 1417.** ./1979/clermontC/exo-1/texte.tex

A tout réel $m$, élément de $]0\,;1[$ on associe, dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la conique $(E_m)$ d'équation

$$y^2=2x-\frac{x^2}{m}.$$

**1.** Construire la courbe $(E_{\frac{3}{4}})$.

**2.** Quelle est la nature de $(E_m)$ ?
Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ le centre et les sommets de $(E_m)$.
Déterminer et tracer la courbe $(S)$ constituant l'ensemble des sommets du grand axe de $(E_m)$ quand $m$ varie dans l'intervalle indiqué.

**3.** Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ les foyers de $(E_m)$.
Déterminer et tracer la courbe $(C)$ constituant l'ensemble de ces foyers quand $m$ varie dans l'intervalle indiqué.

**Ex. 1418.** ./1979/clermontC/exo-2/texte.tex

Deux urnes A et B contiennent des boules numérotées. Dans l'urne A, il y a deux boules : une porte le numéro $a$, l'autre porte le numéro 1. Dans l'urne B, il y a trois boules : une porte le numéro $b$, les deux autres le numéro $-1$. $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs.
On tire au hasard [1] une boule de l'urne A et une boule de l'urne B et on calcule la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées.
On définit ainsi une variable aléatoire réelle $X$.

**1.** Calculer, en fonction de $a$ et $b$, l'espérance mathématique de $X$.

**2.** Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers relatifs tels que l'espérance mathématique de $X$ soit nulle.

**3.** Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers relatifs tels que les deux condition suivantes soient remplies :

— l'espérance mathématique de $X$ est nulle ;

— l'écart type de $X$ est inférieur ou égal à 2.

1. Cela signifie que les couples de numéros possibles sont d'égale probabilité.



Retour page 1

### 🏛 Problème 500

./1979/clermontC/pb/texte

N.B- *les parties A, B et C sont indépendantes* Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère cartésien du plan affine $(P)$. On désigne par $f$ une application affine de $(P)$ dans $(P)$ telle que $\varphi$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ du plan vectoriel $(\vec{P})$ associé à $(P)$.

**A** *Dans cette partie,* on suppose que $\varphi(\vec{i}+\vec{j}) = (a+b)(\vec{i}+\vec{j})$ et que $b \neq 0$.

1° Calculer $c$ et $d$ en fonction de $a$ et $b$.

2° Trouver une équation de l'ensemble des points $M$ de $(P)$ tels que $M$, $f(M)$ et le point $A$ défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ soient alignés.
Discuter la nature de cet ensemble suivant la valeur de $a$ et $b$ en supposant le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

3° Soit $\vec{E}_k = \{\vec{u} \in (\vec{P})\ /\ \varphi(\vec{u}) = k\vec{u},\quad k \in \mathbb{R}\}$. Calculer $k$ pour que $\vec{E}_k$ soit différent de $\{\vec{0}\}$. Déterminer $\vec{E}_k$ pour ces valeurs de $k$.

4° On pose $\vec{I} = \vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i}-\vec{j}$. Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$ ?
On pose $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi$ et, plus généralement $\varphi^n = \varphi^{n-1}\circ\varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star - \{1\}$.
Donner en fonction de $\alpha = a+b$ et $\beta = a-b$ la matrice de $\varphi^n$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$.
En déduire les coordonnées de $f^n(A)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en fonction de $a$, $b$ et $n$.

**B** *Dans cette partie*, on suppose que $f\circ f = f_0$ et que $f \neq f_0$, $f_0$ étant l'application affine qui à tout point $M$ de $(P)$ fait correspondre le point $O$.

1° Lorsque $b = 1$, calculer $c$ et $d$ en fonction de $a$ et démontrer que l'image de $(P)$ par $f$ est une droite $(\Delta)$ passant par $O$ telle que sa droite vectorielle associée soit le noyau de $\varphi$ noté $\ker\varphi$.

2° Dans le cas général, démontrer que $\varphi(\vec{P})$, image de $\varphi$, est incluse dans $\ker\varphi$.
En déduire que $\ker\varphi$ puis $\varphi(\vec{P})$ sont de dimension 1. Retrouver ainsi le résultat du B1.

3° Soit $M_0$ un point de $(P)$ et $(D)$ la droite de $(P)$, parallèle à $(\Delta)$ passant par $M_0$.
Montrer que, quel que soit le point $M$ de $(D)$, $\varphi(\overrightarrow{M_0M}) = \vec{0}$.
En déduire l'image de $(D)$ par $f$.

**C** On suppose dans cette partie que

$$f\circ f\circ f = f^3 = f_0 \qquad \text{et} \qquad f\circ f = f^2 \neq f_0.$$

1° $\vec{u}$ étant un vecteur de $(\vec{P})$ tel que $\varphi^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$, prouver qu'il n'existe pas de réel $k$ tel que $\varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$.
En déduire qu'il existe deux réels $\lambda$ et $\lambda'$ tels que

$$\varphi^2(\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \lambda'\vec{u}.$$

2° Calculer $\varphi^3(\vec{u})$ en fonction de $\lambda$, $\lambda'$, $\vec{u}$ et $\varphi(\vec{u})$.
Que peut-on en déduire pour $\lambda$ et $\lambda'$ puis $\varphi^2(\vec{u})$ ?
Existe-t-il une application $f$ telle que l'on ait à la fois $f^3 = f_0$ et $f^2 \neq f_0$ ?

## XXVI. Clermont & Grenoble remplacement, série C

**Ex. 1419.** *5 points.*

./1979/clermontCrem/exo-1/texte.tex

On considère l'équation

$$z^3 + (\mathrm{i}-2)z^2 + 3(1-\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 2 = 0,$$

où l'inconnue $z$ est un nombre complexe.

1. Démontrer que cette équation admet une solution réelle $z_1$ que l'on calculera.
2. Déterminer les deux autres solutions $z_2$ et $z_3$ de cette équation.
3. Déterminer un nombre complexe $a$ tel que les trois nombres $z_1 - a$, $z_2 - a$ et $z_3 - a$ aient même module.

Retour page 1

**Ex. 1420.** ——— *4 points.* *./1979/clermontCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $[-2\,;0]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.

1. On désigne par $F$ la primitive de $f$ sur $[-2\,;0]$ qui s'annule en 0. Justifier l'existence de $F$ et déterminer $F$. (On pourra se servir de la formule d'intégration par parties.)
2. Démontrer que $F$ est une bijection de $[-2\,;0]$ sur un intervalle $I$ que l'on déterminera.
3. On désigne âr $G$ l'application réciproque de $F$. Montrer que $G$ est définie sur $I$ at admet une dérivée $G'$ sur $I - \{0\}$.

## Problème 501 *11 points.*

*./1979/clermontCrem/pb/texte*

On désignera par E l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ des couples de nombres réels, et par $F$ l'ensemble $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ des couples d'entiers relatifs.

On considère l'application $f$ de $E$ dans $E$ qui au couple $(x\ ;\ y)$ fait correspondre le couple $(X\ ;\ Y)$ défini par

$$\begin{cases} X = 3x+4y,\\ Y = 2x+3y. \end{cases}$$

I-
1. Montrer que l'application $f$ est bijective et déterminer son application réciproque.
2. Montrer que l'image de $F$ par $f$ est égale à $F$.
3. Soit $H$ l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de $E$ pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$.
   Montrer que l'image de $H$ par $f$ est égale à $H$.
4. Soit S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de $F$ pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$.
   Montrer que l'image de $S$ par $f$ est égale à $S$.
5. On pose $s_0 = (1\ ;\ 1)$ et, par récurrence, $s_{n+1} = f(s_n)$, pour tout entier naturel $n$.
   Montrer que $s_n$ appartient à $S$, pour tout entier naturel $n$.
6. On désigne par $x_n$ et $y_n$ les entiers définis par $s_n = (x_n\ ;\ y_n)$.
   Calculer $x_1,\ x_2,\ x_3$ et $y_1,\ y_2,\ y_3$.
7. Montrer que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.

II- On considère la fonction numérique $h$ définie, pour tout nombre réel $t$, par

$$h(t) = 3t+4\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}.$$

1. Montrer que la fonction $h$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que $h(-1) = x_0$ et $h(x_n) = x_{n+1}$, pour tout entier naturel $n$ ; (les $x_n$ on été définis au I6).
3. Montrer qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de $S$ pour lesquels $-1 < x < 1$.
4. En déduire qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de $S$ pour lequel $x_0 < x < x_1$.
   Plus généralement, montrer qu'il n'y a aucun couple $(x\ ;\ y)$ de $S$ pour lequel $x_n < x < x_{n+1}$.
5. Déduire des questions I7 et II4 que $S$ est l'ensemble de tous les couples

$$(x_n\ ;\ y_n),\ (x_n\ ;\ -y_n),\ (-x_n\ ;\ y_n),\ (-x_n\ ;\ -y_n)$$

   pour $n$ entier naturel.

# XXVII. Clermont Dijon & Lyon, série E

**Ex. 1421.** ——— *4 points.* *./1979/clermontE/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \longmapsto \dfrac{1+\log x}{x} \end{cases}$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$).

1. Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Soit $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ les points suivants de $(\mathscr{C})$ :
   $M_1$ d'abscisse $x_1$, le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe $(O;\vec{\imath})$ ;
   $M_2$ d'abscisse $x_2$, le point où la tangente à $(\mathscr{C})$ passe par $O$ ;
   $M_3$ d'abscisse $x_3$, le point où la tangente est parallèle à l'axe $(O;\vec{\imath})$.
   $M_4$ d'abscisse $x_4$, le point où la dérivée seconde fe $f$ s'annule.
   Vérifier que $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ forment une suite géométrique.

**Ex. 1422.** ——— *4 points.* ./1979/clermontE/exo-2/texte.tex

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x + \sin^4 x)\,\mathrm{d}x.$$

## Problème 502 *12 points.* ./1979/clermontE/pb/texte

Première partie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ étant quatre endomorphismes de E, on considère les endomorphismes

$$\varphi_1 = f_1\circ f_2 - g_1\circ g_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = g_1\circ f_2 + f_1\circ g_2.$$

1. Dans cette question, on suppose que :
   — E est un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ ;
   — $f_1$ et $f_2$ sont des rotations vectorielles dont les angles ont respectivement pour mesure $+\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{6}$ ;
   — $g_1$ et $g_2$ sont les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites vectorielles d'équations $y = x$ et $y = -x$.

   a) Écrire les matrices de $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2,\ \varphi_1,\ \varphi_2$ dans la base $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

   b) Caractériser $\varphi_1$.

   c) Montrer que $\varphi_2$ est le produit commutatif d'une homothétie vectorielle de rapport positif et d'une symétrie vectorielle orthogonale. Préciser le rapport de l'homothétie et l'axe de la symétrie.
2. On suppose dans cette question que E= $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes. On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, de base $(1,\ \mathrm{i})$.
   Soit $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ quatre nombres complexes. On définit les applications $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par :

   $$z \overset{f_1}{\longmapsto} a_1 z,\quad z \overset{f_2}{\longmapsto} a_2 z,\quad z \overset{g_1}{\longmapsto} b_1\overline{z},\quad z \overset{g_2}{\longmapsto} b_2\overline{z}.$$

   a) Montrer que $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}$.

   b) Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont définis par :

   $$z \longmapsto (a_1a_2 - b_1\overline{b_2})z \qquad \text{et} \qquad z \longmapsto (b_1\overline{a}2 + a_1b_2)\overline{z}.$$

Deuxième partie

On munit $\mathbb{C}\times\mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ des lois de compositions internes suivantes :
addition : $(a_1,\ b_1)+(a_2,\ b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2)$
Loi $\star$ : $(a_1,\ b_1)+(a_2,\ b_2) = (a_1a_2 - b_1\overline{b}_2,\ b_1\overline{a}_2 + a_1b_2)$.
le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère le point $\Omega$ d'affixe $\omega$ et on définit les nombres complexes $r$ et $s$ par

   $$(r,\ s) = (\omega,\ 3+4\mathrm{i})\star(\omega,\ 3+4\mathrm{i}).$$

   a) Calculer $r$ et $s$.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points $\Omega$ pour lesquels $r$ est imaginaire pur.

2. On considère le point $A$ d'affixe $a$. Soit $P$ et $Q$ les points dont les affixes $p$ et $q$ sont définies par :

$$(p,\ q) = (a,\ a) * (a,\ a).$$

Déterminer et construire l'ensemble des points $P$ et l'ensemble des points $Q$ lorsque $A$ décrit la droite d'équation $x = 1$.

3. En admettant l'associativité de $\star$, et la distributivité de $\star$ par rapport à l'addition, montrer que $(\mathbb{C}^2,\ +, \star)$ est un corps non commutatif (on l'appelle corps de quaternions) .

## XXVIII. Clermont, Grenoble & Lyon remplacement, série E

**Ex. 1423.** *4 points.* *./1979/clermontErem/exo-1/texte.tex*

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, déterminer l'ensemble des points $M$ du plan, images des nombres complexes $Z$ tels que

$$|Z| = 2|Z - \mathrm{i}|$$

($|Z|$ désignant le module du nombre complexe $Z$).

**Ex. 1424.** *4 points.* *./1979/clermontErem/exo-2/texte.tex*

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$.
L'unité de longueur est le centimètre. $O$ est à 3 cm du bord gauche de la feuille. $xOy$ est la plan horizontal de projection et $yOz$ est la plan frontal.
L'axe $Oy$ est orienté positivement de gauche à droite, $Ox$ est dirigé vers le bas de la feuille, $Oz$ vers le haut.
On donne les points $A(2~;~2~;~2)$, $B(4~;~7~;~2)$, $C(1~;~6~;~1)$.

1. Construire l'épure des points $A$, $B$, $C$. Effectuer le rabattement du triangle $ABC$ sur le plan horizontal contenant $AB$. Quelle propriété semble avoir le triangle $ABC$ ? Vérifier par le calcul l'hypothèse faite.
2. Construire la perpendiculaire au plan du triangle $ABC$ qui passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

### Problème 503 *12 points.* *./1979/clermontErem/pb/texte*

I- 1. Étudier les variations de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^x.$$

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, construire la représentation graphique de $f$.

2. Déduire de l'étude précédente, suivant les valeurs du paramètre réel $a$, le nombre de racines réelles de l'équation :

$$1 - ax\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

II- On se propose d'étudier la famille de fonctions $g_m$ de la variable réelle $x$ ; définies de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$,

$$g_m : x \longmapsto g_m(x) = x^m\mathrm{e}^{-x},$$

où $m$ désigne un paramètre réel, $m > 0$.
Le plan affine étant rapporté u repère orthogonal $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on prendra pour unités de longueurs : 5 cm pour l'axe des abscisses et 10 cm pour l'axe des ordonnées.

1. Étudier la limite de $g_m$ à droite, au point $x_0 = 0$.
2. Soit la famille de fonctions $f_m$, définie de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\begin{cases} f_m(x) = g_m(x) & \text{pour } x > 0,\\ f_m(0) = 0. \end{cases}$$

On désignera par $\Gamma_m$ la courbe représentative de $f_m$.
Déduire du II1 que les fonctions $f_m$ sont continues à droite au point $x_0 = 0$.



Retour page 1

3. Montrer que la limite de $f_m$ quand $x \to +\infty$ est 0, et ne déduire que les courbes $\Gamma_m$ ont une asymptote commune.
4. Étudier les variations de $f_m$.
5. En considérant la définition de la dérivée à droite, étudier la tangente à $\Gamma_m$ au point $x_0$. 5on sera ramené à distinguer les cas suivants : $0 < m < 1,\ m = 1,\ m > 1$.)
6. Étudier les cas particuliers $m = 1,\ m = \dfrac{1}{2},\ m = 2$.

   Tracer les courbes $\Gamma_1,\ \Gamma_1\dfrac{1}{2},\ \Gamma_2$ dans le repère $\mathscr{R}$.

   On rappelle que :
$$\mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}367879, \qquad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}606531, \qquad \mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}135335.$$
7. Montrer que toutes les courbes $\Gamma_m$ passent par un point fixe autre que l'origine.
8. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\Gamma_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. On exprimera le résultat en cm$^2$.

# XXIX. Côte D'Ivoire série C

**Ex. 1425.** *4 points.* *./1979/coteivoireC/exo-1/texte.tex*

Une urne contient 2 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules vertes, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire une boule de l'urne au hasard :

— si elle est blanche, il reçoit $x$ francs $(x \in \mathbb{N}^\star)$ et le jeu s'arrête.

— Si elle est rouge, il donne $y$ francs $(y \in \mathbb{N}^\star)$ et le jeu s'arrête.

— Si elle est verte, il tire une autre boule au hasard, sans remettre la première : si cette dernière boule tirée est blanche, il reçoit $x$ francs et le jeu s'arrête ; si non il donne $x$ francs et le jeu s'arrête.

On désigne par $X$ le gain en francs (positif ou négatif suivant qu'il a reçu ou donné de l'argent).

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ ainsi définie ?
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de $x$ et de $y$.
3. Pour participer au jeu précédent, le joueur a dû verser 5 francs.

   Trouver les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels tous deux inférieurs à 100 tels que l'espérance de gain du joueur soit égale à sa mise.

**Ex. 1426.** *4 points.* *./1979/coteivoireC/exo-2/texte.tex*

On appelle $Q$ l'ensemble des entiers naturels de la forme $q = 2^a.p$ où $p$ désigne un nombre premier arbitraire autre que 2 et $a$ un entier quelconque.

**1.** Calculer en fonction de $p$ et de $a$, le nombre $n$ et la somme $s$ des diviseurs d'un nombre $q$.

**2.** Montrer que si l'égalité $s = 2q$ est vérifiée, le nombre $2^{a+1} - 1$ est premier.

**3.** Montrer que si $a + 1$ n'est pas premier, il en est de même pour $2^{a+1} - 1$. (On montrera que si $b$ et $c$ sont deux entiers strictement supérieurs à 1, alors $2^{bc} - 1$ est divisible par $2^b - 1$).

**4.** Trouver les éléments de $Q$ pour lesquels $a < 10$ et $s = 2q$.

## **Problème 504** *12 points.* *./1979/coteivoireC/pb/texte*

:

— *La partie III peut être abordée sans que la partie II ait été traitée.*

— *Dans tout le problème, $P$ désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

I. Pour tout réel $k$ strictement positif, on considère l'application $T_k$ de $P$ dans lui-même, qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que :
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y + \log k \end{cases}$$
où $\log$ désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que $T_k$ est une application affine bijective.
2. Soit $G$ l'ensemble des applications $T_k$ où $k$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$. La loi de composition des applications étant notée $\circ$, montrer que $(G,\ \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^\star,\ \times)$ et que $(G,\ \circ)$ est un groupe.
   Préciser si ce groupe est commutatif ou non, indiquer son élément neutre et le symétrique de l'élément $T_k$.

II. Pour tout réel $k$ strictement positif, on considère la fonction numérique $f_k$ de la variable réelle $x$ telle que, pour tout réel $x$ :

$$f_k(x) = \frac{\mathrm{e}^x - k^2\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Étudier les variations de $f_k$.
2. Montrer que $f_k$ admet une application réciproque que l'on notera $g_k$. Calculer $g_k(x)$ pour tout réel $x$ de l'ensemble de définition de $g_k$.
3. On appelle $\mathscr{C}_k$ et $\Gamma_k$ les courbes représentatives de $f_k$ et $g_k$ dans $\mathscr{R}$.
   a) Construire $\mathscr{C}_1$ et $\Gamma_1$.
   b) Montrer que le point $O$ est centre de symétrie pour chacune des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\Gamma_1$.
   c) Calculer, en fonction du réel $a$ positif, l'aire du domaine du plan $D$ défini par :

$$M \in D \iff \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant g_1(x). \end{cases}$$

4. Montrer que l'image de $\Gamma_1$ par l'application $T_k$ définie au I est la courbe $\Gamma_k$.
5. En utilisant les résultats II(3)b et II4, montrer que $\Gamma_k$ admet un centre de symétrie.
   Quel est l'ensemble de ces centres de symétrie quand $k$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$ ?
6. Montrer que deux courbes quelconques $\Gamma_{k_1}$ et $\Gamma_{k_2}$ se déduisent l'une de l'autre par une application de l'ensemble $G$ que l'on précisera.

III. Pour tout réel $t$ de $[0\,;2\pi]$, on considère le point $M$ de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature du mouvement de $M$ quand $t$ varie ?
2. $k$ étant un réel strictement positif arbitrairement choisi, soit $m$ le point de $P$ tel que $m = T_k(M)$.
   a) Donner une équation cartésienne de la trajectoire de $m$ quand $t$ varie.
   Préciser la nature de cette courbe, ses éléments de symétrie et les points remarquables qui s'y trouvent.
   b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point $m$ à la date $t$.
   Le mouvement est-il accéléré ou retardé ?
3. On suppose que $k = 2$. Construire, sur un même croquis, les trajectoires de $M$ et $m$. Placer les positions $M_0$ et $m_0$ de ces points à la date $t = 0$, ainsi que les représentants, d'origines respectives $M_0$ et $m_0$, des vecteurs vitesse et accélération de chacun de ces mobiles à la date $t = 0$.
   On donne $\log 2 \approx 0{,}7$.

## XXX. Côte D'Ivoire série E

**Ex. 1427.** ———— *4 points.* *./1979/coteivoireE/exo-1/texte.tex*

Dans l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans $P$ et $P_1$ d'équations respectives

$$\begin{aligned} P\ &:\ 7x+5y+5z-35=0\\ P_1 &: 36x-9y+8z-72=0\end{aligned}$$

En utilisant les conventions de représentation de la géométrie descriptive, en plaçant l'origine au centre de la feuille et en choisissant le centimètre comme unité de longueur, réaliser :

**1.** L'épure des plans $P$ et $P_1$ par leurs traces sur les plans de projection.

**2.** L'épure de la droite $D$, intersection de $P$ et $P_1$.

**3.** L'épure du plan $Q$ perpendiculaire à $D$ et passant par le point $A$ de coordonnées données $(2, -\frac{3}{2}, 3)$ .

**4.** L'épure du point $B$, intersection de $D$ et $Q$.

**Ex. 1428.** ———— *3 points.* *./1979/coteivoireE/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on associe à tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ son affixe $z = x + iy$.
$\theta$ et $\theta'$ étant deux nombres réels, on pose

$$a = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et} \qquad a' = \cos\theta' + i\sin\theta'.$$

**1.** Soit $r$ la rotation de centre $A(0,1)$ et dont l'angle a pour mesure $\theta$.
Écrire l'affixe $z_1$ du point $r(M)$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$.

**2.** Soit $r'$ la rotation de centre $B(1,0)$ et dont l'angle a pour mesure $\theta'$
Écrire l'affixe $z'$ du point $r'(M)$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$.

**3.** Pour quelles valeurs de $a$ et $a'$ a-t-on $r \circ r' = r' \circ r$ ?
Que deviennent $r$ et $r'$ pour les valeurs trouvées ?

## Problème 505 *13 points.* *./1979/coteivoireE/pb/texte*

- La partie II du problème est indépendante de la partie I, à la seule exception de la question II(3)b

I- $a$ est un réel strictement positif donné. On définit la suite réelle $u$, application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, par son premier terme $u_0$, réel strictement positif, et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Pour quelle valeur de $u_0$ la suite $u$ est-elle constante ?
2. On suppose dans toute la suite du problème que $u_0^2 - a \neq 0$.
   a) Démontrer les relations :
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + \sqrt{a} &= \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2\end{aligned}$$
   b) Montrer que la suite $u$ est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$. En déduire que la suite $u$ admet une limite. (On ne demande pas dans cette question de calculer cette limite).
3. On définit la suite réelle $v$ par la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$
   a) Calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
   b) Calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_1$ et de $n$. En déduire la limite de la suite $v$. (On pourra montrer que $\operatorname{Log} v_{n+1}$ tend vers $-\infty$ lorsque $n \to \infty$)
4. Trouver la limite de la suite $u$.



Retour page 1

5. On fixe dans cette question $u_0 = 2$ et $a = 2$. Calculer $u_1, u_2$ et $u_3$ (laisser le résultat sous forme de fractions). Montrer que $u_1 - \sqrt{2} < 10^{-1}$. En déduire que $u_2 - \sqrt{2} < 10^{-2}$. Trouver une majoration de l'erreur commise en prenant $u_3$ comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

II- $a$ est un réel strictement positif. Soit $f_a$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Soit $C_a$ la courbe représentative de $f_a$ dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que la courbe $C_a$ possède deux asymptotes indépendantes de $a$, dont on donnera les équations.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $k > \dfrac{1}{2}$ ; on appelle $D_k$ la droite d'équation $y = kx$. Soit $a_1$ et $a_2$ deux réels positifs. Déterminer les points d'intersection de $D_k$ avec les courbes $C_{a_1}$ et $C_{a_2}$. Montrer que $C_{a_2}$ est l'image de $C_{a_1}$ par une homothétie positive de centre $O$ dont on donnera le rapport.
3. Dans toute la suite du problème, on fixe $a = 4$.
   a) Représenter la courbe $C_4$ en choisissant comme unité le centimètre.
   b) Utiliser la courbe $C_4$ pour placer les points d'abscisses $u_0, u_1$ et $u_2$ lorsque $u$ est la suite étudiée au I - avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $a = 4$.
4. Calculer, en cm$^2$, avec la précision permise par les tables de logarithmes, l'aire du domaine plan limité par la courbe $C_4$ et les droites d'équations $y = x$ et $y = 2x$.

## XXXI. Dijon, série C

**Ex. 1429.** ./1979/dijonC/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'application affine $f$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'$ dont les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ sont données par

$$\begin{aligned} x' &= y + 2 \\ y' &= x - 1 \\ z' &= -z. \end{aligned}$$

Démontrer que l'application linéaire associée à $f$ est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle. En déduire que $f$ est un vissage.

**Ex. 1430.** ./1979/dijonC/exo-2/texte.tex

Soit $\alpha$ un entier relatif non nul. Pour tout couple $(a,\ b)$ d'entiers relatifs, on pose

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on note $A_\alpha$ l'ensemble de ces matrices quand $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{Z}^2$.

**1.** Montrer que $A_\alpha$ est stable par l'addition et le multiplication des matrices. La multiplication est-elle commutative dans $A_\alpha$ ?

**2.** Montrer qu'il existe $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ et $(c,\ d) \neq (0,\ 0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ tels que

$$M_{a,\ b} \times M_{c,\ d} = M_{0,\ 0}$$

si et seulement si $\alpha$ est le carré d'un élément de $\mathbb{Z}$.

**3.** On suppose qu'il existe $\beta$, élément de $\mathbb{Z}$, tel que $\alpha = \beta^2$. Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels qu'il existe $(c,\ d)$ différent de $(0,\ 0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ avec

$$M_{a,\ b} \times M_{c,\ d} = M_{0,\ 0}.$$



Retour page 1

## PROBLÈME 506

./1979/dijonC/pb/texte

Dans ce problème, $\mathrm{e}$ désigne la base des logarithmes népériens.

A) Soit $x_0$ un réel. On note $I(x_0)$ l'intégrale

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{(x_0-t)^2}{2}\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1° a) Sachant que $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{x_0}$ si $t \leqslant x_0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que

$$0 \leqslant I(x_0) \leqslant \exp x_0.\frac{x_0^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est positif ou nul.}$$

b) Sachant que $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, si $t \leqslant 0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que

$$0 \leqslant |I(x_0)| \leqslant \frac{|x_0|^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est négatif ou nul.}$$

2° En calculer $I(x_0)$ par intégrations par parties, démontrer que l'on a

$$\mathrm{e}^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + I(x_0).$$

B) On note $f$ la fonction numérique de variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & \text{si } x_0 \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser son nombre dérivé en $0$. (On utilisera les résultats de la partie A.)
Démontrer que $f'$, fonction dérivée de $f$, est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier le signe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$).
En déduire que $f(x)$ est toujours strictement positif.

3° Tracer la courbe représentative de $f$ dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

C) 1° Démontrer que pour tout réel $x$ non nul, on a

$$xf(x) > x \qquad \text{et} \qquad x\mathrm{e}^x > xf(x).$$

En déduire qu'il existe un unique réel $y$, compris strictement entre $0$ et $x$ tel que

$$f(x) = \mathrm{e}^y \qquad \text{si } x \text{ est différent de } 0.$$

2° On définit une application $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(x) = y, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Démontrer que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations (on ne demande pas de représentation graphique).

3° Démontrer que, pour tout réel $x$ non nul, on peut trouver un réel $\theta$ et un seul, compris strictement entre $0$ et $1$, tel que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^{\theta x}.$$

Vérifier que $\theta = \dfrac{1}{x}\log[f(x)]$.

4° Soit $\hat{\theta}$ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\hat{\theta}(x) = \frac{1}{x}\log[f(x)].$$

En remarquant que $\log[f(0)] = 0$, trouver la limite de $\hat{\theta}$ lorsque $x$ tend vers $0$.



Retour page 1

# XXXII. Dijon remplacement, série C

**Ex. 1431.** *5 points.* ./1979/dijonCrem/exo-1/texte.tex

Soit $E$ l'anneau $\mathbb{Z}/39\mathbb{Z}$. La classe modulo 39 d'un entier $n$ sera notée $\overline{n}$.

1. Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ définie par

$$f(x) = \overline{20}x.$$

   a) Résoudre dans $E$ l'équation

$$f(x) = \overline{1}.$$

   b) Démontrer que l'application $f$ est bijective.

2. Soit $g$ l'application de $E$ dans $E$ définie par

$$g(x) = \overline{26}x.$$

   a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ l'équation

$$2n - 3p = 0.$$

   Résoudre alors dans $E$ l'équation

$$g(x) = \overline{0}.$$

   b) L'application $g$ est-elle bijective ?

**Ex. 1432.** *4 points.* ./1979/dijonCrem/exo-2/texte.tex

Le plan affine $(P)$ est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Á tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ (i désigne un nombre complexe dont le carré est ègal à -1).

1. On appelle $f$ l'application de $(P)$ dans $(P)$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = -2\mathrm{i}\overline{z} + 1 + 2\mathrm{i}$, où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$.
   Démontrer que $f$ est une similitude indirecte ayant un centre, le déterminer ainsi que l'axe et le rapport.
2. Soit $\Omega$ le point d'affixe 1, déterminer l'ensemble $(C)$ des points $M$ de $(P)$ tels que $\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = 2$.

## Problème 507 *11 points.* ./1979/dijonC/pb/texte

Dans ce problème, e désigne la base des logarithmes népériens.

A) Soit $x_0$ un réel. On note $I(x_0)$ l'intégrale

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{(x_0 - t)^2}{2} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1° a) Sachant que $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{x_0}$ si $t \leqslant x_0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que

$$0 \leqslant I(x_0) \leqslant \exp x_0 . \frac{x_0^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est positif ou nul.}$$

b) Sachant que $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, si $t \leqslant 0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que

$$0 \leqslant |I(x_0)| \leqslant \frac{|x_0|^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est négatif ou nul.}$$

2° En calculer $I(x_0)$ par intégrations par parties, démontrer que l'on a

$$\mathrm{e}^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + I(x_0).$$



Retour page 1

B) On note $f$ la fonction numérique de variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & \text{si } x_0 \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1° Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser son nombre dérivé en $0$. (On utilisera les résultats de la partie A.)

Démontrer que $f'$, fonction dérivée de $f$, est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra étudier le signe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$).

En déduire que $f(x)$ est toujours strictement positif.

3° Tracer la courbe représentative de $f$ dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

C) 1° Démontrer que pour tout réel $x$ non nul, on a

$$xf(x) > x \qquad \text{et} \qquad x\mathrm{e}^x > xf(x).$$

En déduire qu'il existe un unique réel $y$, compris strictement entre $0$ et $x$ tel que

$$f(x) = \mathrm{e}^y \qquad \text{si } x \text{ est différent de } 0.$$

2° On définit une application $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(x) = y, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Démontrer que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations (on ne demande pas de représentation graphique).

3° Démontrer que, pour tout réel $x$ non nul, on peut trouver un réel $\theta$ et un seul, compris strictement entre $0$ et $1$, tel que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^{\theta x}.$$

Vérifier que $\theta = \dfrac{1}{x}\log[f(x)]$.

4° Soit $\hat{\theta}$ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\hat{\theta}(x) = \frac{1}{x}\log[f(x)].$$

En remarquant que $\log[f(0)] = 0$, trouver la limite de $\hat{\theta}$ lorsque $x$ tend vers $0$.

## XXXIII. Grenoble, série C

**Ex. 1433.** *3,5 points.* *./1979/grenobleC/exo-1/texte.tex*

Le plan affine orienté des rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $a$ un réel strictement positif, $A$ le point de coordonnées $(a\ ;\ 0)$ et $B$ le point de coordonnées $(a\ ;\ a)$.
On désigne par $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle droit direct, par $S$ la symétrie par rapport au point $B$ et par $R'$ la rotation de centre $A$ et d'angle droit rétrograde. On pose $F = R' \circ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation $F$ ? Préciser ses éléments caractéristiques (on pourra construire l'image par $F$ du point $C$ défini par $C = R^{-1}(B)$).
2. Soit $D$ la droite d'équation $x + y = a$ et $S_D$ la symétrie orthogonale par rapport à $D$. Déterminer la composée $S_D \circ F$.



Retour page 1

**Ex. 1434.** ______ *3,5 points.* ./1979/grenobleC/exo-2/texte.tex

1. Soit $p$ un entier naturel premier. Trouver tous les entiers relatifs $\alpha$ vérifiant la congruence
$$\alpha^2 \equiv 0\,[p^2].$$
En déduire la résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 = \dot{0}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \dot{16}x + \dot{15} = \dot{0}$.

## Problème 508 *13 points.* ./1979/grenobleC/pb/texte

*Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment, sauf indication contraire du texte.*
*Il sera tenu compte de la précision de la rédaction.*
Soit $E$ l'ensemble des nombres complexes différents de $-1$, $0$ et $1$.

–A– 1. On pose
$$e(z) = z\ ;\ f(z) = -\frac{1}{z}\ ;\ g(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}\ ;\ h(z) = \frac{z+1}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}.$$
Montrer que ces relations définissent des applications bijectives $e,\ f,\ g,\ h$ de $E$ dans $E$.

2. Soit $G$ l'ensemble de ces quatre applications. Démontrer que $G$ est un groupe commutatif pour la composition des applications.
3. On définit l'application $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{C}$ par $\varphi = e+f+g+h$. Quelles sont les applications composées : $\varphi\circ f$ ; $\varphi\circ g$ ; $\varphi\circ h$ ? L'application $\varphi$ est-elle bijective ?
4. Étant donné un élément $a$ de $E$, on veut résoudre l'équation
$$\varphi(z) = \varphi(a). \tag{1}$$
   a) Indiquer sans calcul quatre solutions, distinctes ou non, de l'équation (1).
   b) Montrer que l'équation (1) ne peut avoir plus de quatre solutions (on pourra admettre qu'un polynôme de degré $n$ à coefficients complexes a au plus $n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.)
   c) Montrer que, suivant la valeur de $a$, l'équation (1) admet, soit quatre solutions distinctes, soit une seule solution.

–B– On désigne par $\psi$ la restriction à l'ensemble $\mathbb{R}\cap E$ de l'application $\varphi$ étudiée en A3.

1. Étudier les variations de la fonction $\psi$.
2. Dessiner avec soin sa représentation graphique $\Gamma$ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Dans le cas où $a$ est réel, retrouver le résultat obtenu à la question A(4)c.
   Dans le cas particulier $a = 2$, vérifier graphiquement les valeurs de solutions de l'équation (1).
4. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\Gamma$ et par les droites d'équations respectives : $y = x$ ; $x = 3$ ; $x = 5$.

–C– Étant donné un nombre complexe $z$, on définit les nombres complexes :
$$z_1 = f(z) \quad ; \quad z_2 = g(z) \quad ; \quad z_3 = h(z) \quad : \quad z_4 = \varphi(z)$$
où $f,\ g,\ h, \varphi$ sont les fonctions définies dans la partie A. On désigne respectivement par $M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ les images de $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ dans un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(\Omega,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

1. Soit F l'ensemble des éléments de $E$ qui ont pour module 1. Si $z$ est un élément de F, on désigne par $\theta$ la détermination de son argument appartenant à l'ensemble $]0\,;\pi[\cap]\pi\,;2\pi[$.
   Exprimer, en fonction de $\theta$, les nombres complexes $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et donner pour chacun d'eux le module et une détermination de l'argument.
2. En déduire les ensembles décrits par les points $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ quand $M$ décrit le cercle de centre $\Omega$ et de rayon 1, privés des points d'affixes $-1$ et 1.

Retour page 1

# XXXIV. Grenoble, série E

**Ex. 1435.** *4 points.* *./1979/grenobleE/exo-1/texte.tex*

1. Soit dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3\mathrm{i})z - 20 = 0.$$

   a) Montrer que $z_0 = 2\mathrm{i}$ est une des racines de cette équation.

   b) Calculer alors les deux autres racines $z_1$ et $z_2$.

2. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $A$, $B$ et $C$ les points de (P) d'affixes respectives $z_0$, $z_1$, $z_2$.

   1. Déterminer l'affixe du barycentre $G$ des points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients $-1$, $1$, $1$.
   2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan (P) tels que :

$$-\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 36.$$

**Ex. 1436.** *4 points.* *./1979/grenobleE/exo-2/texte.tex*

On considère la suite réelle $U$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n, \qquad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Soit $V$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que la suite $V$ est géométrique. Calculer le terme général en fonction de $n$.
2. En déduire le terme général $u_n$ en fonction de $n$. Quelle est la limite de la suite $U$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
3. Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que :
   pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $n_0$ on ait : $|u_n - 3| < 10^{-5}$.

## Problème 509 *12 points.* *./1979/grenobleE/pb/texte*

-A- Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^3}{1+x}}$.

   1. Étudier les variations de la fonction $f$.
   2. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$. On précisera la demi-tangente à l'origine du repère.
   3. En déduire la courbe $(\Gamma)$ ensemble des points dont les coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $\mathscr{R}$ vérifient :

$$x^3 + xy^2 + y^2 = 0.$$

-B- Soit un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère l'application $\varphi_{a,\,b}$ de (P) vers (P) qui, au point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $(x' ; y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = (1+a)x - y \\ y' = x + (1+a)y + b \end{cases}$$

où $(a,\, b)$ est élément de $\mathbb{R}^2$.

   1. Démontrer que pour tout couple $(a,\, b)$, l'application $\varphi_{a,\,b}$ admet un point invariant $I$ dont on calculera les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ en fonction de $a$ et $b$.
   Quel est le point $I$ dans le cas où $b$ est nul ?

Retour page 1

2. On suppose, dans cette question, le réel $b$ fixé et non nul.
   Calculer le rapport $\dfrac{\beta}{\alpha}$ et en déduire une relation indépendante de $a$ liant $\alpha$ set $\beta$.
   Déterminer alors l'ensemble des points $I$ quand $a$ décrit $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question, que $b^2 = a$, $a$ décrivant $\mathbb{R}$.
   Trouver une relation indépendante de $a$ qui lie les coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ du point $I$.
   Quel est l'ensemble des points $I$ quand $a$ décrit $\mathbb{R}$ ?

-C- $(a,\ b)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la nature de l'application $\varphi_{a,\ b}$ définie au B. On n'en précisera pas les éléments.
2. Pour quelle valeur de $a$, $\varphi_{a,\ b}$ est-elle une isométrie affine de (P) ?
   En donner alors les éléments caractéristiques.
3. Déterminer le couple $(a\ ;\ b)$ pour que $\varphi_{a,\ b}$ soit une similitude directe dont le centre est le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$. Préciser alors les éléments caractéristiques de cette similitude.
4. a) Construire relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (E) d'équation :

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 27 = 0.$$

   b) Déterminer une équation de la courbe (E') image de (E) par l'application $\varphi_{0,\ 1} \circ \varphi_{0,\ 1}$ et construire cette courbe (E'). ($\varphi_{0,\ 1}$ étant l'application $\varphi_{a,\ b}$ où $a = 0$ et $b = 1$).

# XXXV. Groupe I bis, série C

**Ex. 1437.** ———— *4 points* *./1979/portugalC/exo-1/texte.tex*

On donne la suite $(q_n)$, $n \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme $q_0$ est supérieur ou égal à 2.
On construit la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{q_0}\\
u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1}\\
&\vdots\\
u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

**1.** Montrer que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant pas exemple que de $q_0$).
En déduire que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, a un limite, qui appartient à l'intervalle $]0\,;1]$ de $\mathbb{R}$.

**2.** Montrer que si, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à l'entier $k$, $q_n = q_k$, la limite de la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est un rationnel.

**Ex. 1438.** ———— *4 points.* *./1979/portugalC/exo-2/texte.tex*

**1.** Dans le plan affine affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par : $2ay = x^2$, $a$ réel positif donné.

**2.** Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point $M_1$ d'abscisse $x_1$. Quelle relation doivent vérifier $x_1$ et $x_2$ de deux points $M_1$ et $M_2$ de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales ?

**3.** Démontrer que la droite $M_1M_2$ déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en $M_1$ et $M_2$.

## PROBLÈME 510 *12 points.*



A) $\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, on pose

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1 + j + j^2 = 0$.
Soit $F$ l'application polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)(z-j^2) + \frac{2}{9}(j-4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes $a$ et $b$ de façon que l'application $\sigma$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ :

$$z \longmapsto \sigma(z) = az + b$$

   vérifie les deux conditions :

$$\sigma(j^2) = 0, \qquad \sigma(0) = -1.$$

   Comparer alors $\sigma(-1)$ et $j^2$.

2. On considère l'application $s$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dépendant du paramètre complexe $m$ :

$$z \longmapsto s(z) = mz - 1.$$

   Peut-on déterminer $m$ de façon que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) F[s(z)] = F(z) \text{ ?}$$

   (On admet que deux applications polynômes sont égales si, et seulement si, les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients.)
   Comparer au résultat du A1

3. Soit $r$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ : $z \longmapsto jz - 1$.
   Déterminer l'unique complexe $z_0$ invariant par $r$. Vérifier que $z_0^2 = -\dfrac{1}{3}j^2$.
   Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure d'espace affine réel, $z_0$ est l'isobarycentre du triplet $(z,\ r(z),\ r^2(z))$.

4. Pour $\lambda$ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$. En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et le situer sur une figure du plan complexe.

B) Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Un endomorphisme $f$ de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$, application identique de E. (Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$,etc.)

1. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme ternaire de E, et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E tel que le système $(\vec{u},\ f(\vec{u})$ soit lié. Montrer que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de $f$ soit de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $h,\ k$ étant deux réels.
   Démontrer que $f$ est nécessairement l'application identique. (On calculera $A^3$.)

2. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de E et que pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, le système $(\vec{u},\ f(\vec{u})$ soit libre. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E, et $\vec{v} = f(\vec{u})$ ; alors il existe deux réels $p$, $q$ tel que la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit $B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$.
   Calculer $p$ et $q$ de façon que $f$ soit ternaire.
   $p$ et $q$ ayant les valeurs trouvées, et $\Pi$ désignant un plan affine attaché à E, démontrer analytiquement ou par tout autre procédé, que l'application affine $g$ de $\Pi$ dans $\Pi$ admettant $f$ comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ gg = \mathrm{Id}_{\Pi}$

Retour page 1

3. Plus généralement, soit $F$ l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $(\vec{u},\ \vec{v})$ de E, est $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta$ est un réel donné de l'intervalle $]0\,;\pi[$.
   On définit sur E une forme bilinéaire symétrique $\Phi$ par

$$\Phi(\vec{u},\ \vec{u}) = 1, \qquad \Phi(\vec{v},\ \vec{v}) = 1, \qquad \Phi(\vec{u},\ \vec{v}) = \cos\theta.$$

   Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire sur E, et que $F$ est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(\mathrm{E},\ \Phi)$.
   E étant supposé orienté par la base $(\vec{u},\ \vec{v})$, déterminer le vecteur $\vec{w}$ de E de façon que $(\vec{u},\ \vec{w})$ soit une base directe et orthonormée relativement à $\Phi$. Former la matrice de $F$ dans cette nouvelle base.
   Quelle est la nature de $F$ dans $(\mathrm{E},\ \Phi)$ ? Á quelle condition, $n$ étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ ?

## XXXVI. Guyane, séries C et E

**Ex. 1439.** ./1979/guyaneCE/exo-1/texte.tex

Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^3 + z^2(\mathrm{i} - 9) + 2z(13 - 3\mathrm{i}) - 24 + 9\mathrm{i} = 0.$$

**1.** Démontrer que cette équation admet une solution réelle. En déduire l'ensemble des solutions.

**2.** Montrer que les images des solutions de l'équation, dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, forment un triangle isocèle.

## XXXVII. Ho-Chi-Minh ville, série C

**Ex. 1440.** *4,5 points.* ./1979/ho-chi-minhC/exo-1/texte.tex

1. a) $p$ étant un entier naturel supérieur ou égal à ? 2, on définit la suite

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \qquad \text{par :} \qquad V_n = \frac{p^n}{n+1}.$$

   Démontrer que cette suite est strictement croissante.
   En déduire que : $(\forall p \geqslant 2) \quad (\forall n \geqslant 1) \qquad \dfrac{p^n}{n+1} \geqslant 1.$
   et : $(\forall p \geqslant 5) \quad (\forall n \geqslant 1) \qquad \dfrac{p^n}{n+1} > 2.$

   b) Trouver, à l'aide du résultat précédent, tous les couples $(p\ ;\ n)$ où $p$ est un entier naturel premier, et n un entier strictement positif, qui vérifient :

$$1 \leqslant \frac{p^n}{p+1} \leqslant 2.$$

2. Soit $a$ un entier naturel non nul, qui s'écrit :

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

   où $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$ sont des entiers naturels premiers, deux à deux distincts, et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k$ des entiers naturels non nuls. On admettra que le nombre de diviseurs de $a$ dans $\mathbb{N}$ est

$$d(a) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k).$$

   En utilisant 1b, déterminer les entiers naturels non nuls $a$ tels que $a = 2d(a)$.

**Ex. 1441.** ______ *4,5 points.* *./1979/ho-chi-minhC/exo-2/texte.tex*

Soit ABC un triangle, non équilatéral, d'un plan affine euclidien P et soit $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Soit $G$ le centre de gravité du triangle.

1. Démontrer que $GA^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$.
2. Déduire du 1, la valeur de :
$$(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2.$$
3. Déterminer l'ensemble D des points $M$ du plan P tels que :
$$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0.$$
(On mettra en évidence deux points de D.)

## PROBLÈME 511 *11 points.* *./1979/ho-chi-minhC/pb/texte*

A- Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}.$$
On appelle P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra pour unité : 1 cm).

1. a) Étudier la fonction $f$.
   b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ représentant $f$ dans le repère $\mathscr{R}$ du plan P.
2. a) Soit $\mathscr{C}'$ la courbe représentative dans $\mathscr{R}$ de la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}.$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport au point $\Omega$ de coordonnées $(-2\ ;\ -1)$. (On ne demande pas d'étudier $g$).
   b) Comment obtient-on à partir de la courbe $\mathscr{C}$ la courbe $\Gamma$, ensemble des points du plan P dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ vérifient :
$$y^2 - 2(x+1)y - 2x + 1 = 0\ ?$$
Représenter $\Gamma$ sur le dessin fait au A1.
3. a) Démontrer que $f$ définit une bijection de $[0\,; +\infty[$ sur $[1\,; +\infty[$, dont la bijection réciproque est l'application $h$, qui peut s'écrire sur $[1\,; +\infty[$ :
$$h(x) = \frac{(x+1)^2 - 4(x+1) + 4}{2(x+1)}.$$
   b) Calculer $\displaystyle\int_1^{2+\sqrt{5}} h(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire en cm$^2$ du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
()On donnera le résultat à $10^{-2}$ près).

B- On considère à présent le repère $\mathscr{R}' = (\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$ du plan, où $\Omega$ est le point de coordonnées $(-2\ ;\ -1)$, et où $\vec{I} = \vec{\imath}$, $\vec{J} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

1. a) Étant donné un point $M$ du plan P, on note $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}$, $(X\ ;\ Y)$ ses coordonnées dans $\mathscr{R}'$. Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.
   b) Écrire l'équation de $\Gamma$ dans le repère $\mathscr{R}'$ ,et reconnaître cette courbe.
2. Pour tout nombre réel non nul $k$, on note $\Delta_k$ la droite d'équation $Y = kX$ dans $\mathscr{R}'$.
   a) $k$ et $k'$ étant deux réels non nuls distincts, exprimer analytiquement dans $\mathscr{R}'$, la symétrie d'axe $\Delta_k$ parallèlement à $\Delta_{k'}$.
   b) Démontrer que pour tout nombre réel non nul $k$, il existe $k' \in \mathbb{R}^\star$, unique tel que la symétrie par rapport à $\Delta_k$ parallèlement à $\Delta_{k'}$ échange le support des axes du repère $\mathscr{R}'$. On note $S_k$ cette symétrie.
   c) Vérifier que, quel que soit le réel $k$ non nul, $S_k$ conserve la courbe $\Gamma$.



Retour page 1

# XXXVIII. Lille série C

**Ex. 1442.** ——— *3 points.* ./1979/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère l'équation $36x - 25y = 5 \qquad (x\ ;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour toute solution $(x\ ;\ y)$, $x$ est multiple de 5.
2. Déterminer une solution particulière de ll'équation. Puis la résoudre.
3. Soit $d$ le plus grand commun diviseur de $x$ et de $y$ lorsque $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation.
   Quelles sont les valeurs possibles de $d$ ?
   Quelles sont les solutions pour lesquelles $x$ tel $y$ sont premiers entre eux ?

# XXXIX. Lille série E

**Ex. 1443.** ——— *3 points.* ./1979/lilleE/exo-1/texte.tex

Une suite de nombres réels $(Uun)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. Étudier le cas où $u_0 = 3$. (On pourra calculer $u_1$, puis $u_n$ pour tout $n$ supérieur à 1).
2. On suppose que $u_0 \neq 3$.
   Pour tout réel $\alpha$, on définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n + \alpha.$$
   Montrer qu'il existe une valeur de $\alpha$ pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Exprimer $u_n$ en fonction de $u_0$ et $n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

**Ex. 1444.** ——— *4 points.* ./1979/lilleE/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, et dans ce plan un triangle $ABC$ rectangle en $A$, tel que $AB = 2$ et $AC = 4$.

1. Á quelle condition $A$, $B$, $C$ munis respectivement des coefficients $\lambda$, $\lambda+3$, $4-\lambda$, ont-il un barycentre $G_\lambda$ ?
2. Déterminer suivant les valeurs de $k$ :
   $$\text{E} = \left\{M \in \mathscr{E} | \overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = k\right\}.$$
3. Soit : $textF = \left\{M \in \mathscr{E} | -7\overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 + 11\overrightarrow{MC}^2 = 160\right\}$.
   a) Vérifier que $A$ est élément de F.
   b) Déterminer F.

**PROBLÈME 512** *13 points* ./1979/lilleE/pb/texte

$\mathscr{P}$ désigne un plan vectoriel euclidien de base orthonormé $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $(P)$ un plan affine associé à $\mathscr{P}$ de repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- Si le couple $(a,\ b)$ appartient à $\mathbb{R}^2$, on note $\varphi_{a,b}$ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont la matrice est

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -a+b \\ a+b & -a \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. a) Déterminer les couples de réels $(a,\underline{\ })$ pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est bijective.
   b) Pour quels couples $(a,\ b)$, $\varphi_{a,b}$ est-elle involutive ?

Retour page 1

c) Caractériser $\varphi_{0,1}$.

2. $k$ étant un réel quelconque, soit $\sigma_k$ l'application affine de $(P)$ dans $(P)$ d'application linéaire associée $\varphi_{0,1}$ et telle que $\sigma_k(O)$ soit le point de coordonnées $(k\ ;\ 0)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point $M$ de $(P)$, les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point $M'$ image de $M$ par $\sigma_k$.

b) Démontrer qu'il existe une symétrie affine orthogonale $s$ par rapport à une droite D et une translation $t_k$ dont la direction appartient à la direction de D telles que :

$$\sigma_k = s \circ t_k = t_k \circ s.$$

B- 1. Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \log \frac{x}{1-x}.$$

Étudier les variations de $f$ et construire la représentation graphique $(\gamma)$ de $f$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $(P)$.

Montrer que $f$ est une bijection de $]0\,;1[$ sur $\mathbb{R}$. Soit $f^{-1}$ sa bijection réciproque. Pour tout réel $x$ calculer $f^{-1}(x)$.

2. Pour tout réel $k$, soit la fonction $g_k$ de la variable réelle $x$ définie par

$$g_k(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^k}.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_k)$ la représentation graphique de $g_k$ dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Construire $(\mathscr{C}_0)$

b) Calculer et simplifier $g_k(x+k)$. En déduire que $(\mathscr{C}_k)$ est l'image de $(\mathscr{C}_0)$ par une translation ponctuelle de vecteur colinéaire $\vec{\imath}$.

Établir que $(\mathscr{C}_k)$ est l'image de $(\gamma)$ par $\sigma_k$.

c) Calculer l'aire de l'ensemble E des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que

$$0 \leqslant x \leqslant \log 2 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant g_0(x).$$

3. a) Démontrer que la fonction $g_0$ est intégrable sur tout intervalle $[\alpha\,;\beta]$ de $\mathbb{R}$.

b) Soit $G$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$G(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $G(x)$.

Étudier les variations de la fonction $G$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(G(x)-x) = -\log 2$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = -\log 2$.

En déduire l'existence de deux asymptotes à la courbe $(\Gamma)$ représentative de la fonction $G$.

d) Construire $(\Gamma)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

C- Á tout réel $t$ strictement positif, on associe les points $M_1$ et $M_2$ du plan $(P)$ de coordonnées respectives dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$\begin{cases} x_1 = \log t \\ y_1 = \log \dfrac{t+1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \log \dfrac{1}{t} \\ y_2 = \log \dfrac{1}{2t} \end{cases}.$$

Lorsque $t$ décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$, déterminer l'ensemble des points $M_1$, l'ensemble des points $M_2$ et l'ensemble des milieux $I$ des bipoints $(M_1,\ M_2)$.

# XL. Lille remplacement, série E

**Ex. 1445.** 3 points. ./1979/lilleErem/exo-1/texte.tex

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul $n$, la somme des carrés des $n$ premiers entiers naturels non nuls est égale à
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Un sac contient $n$ jetons, numérotés de 1 à $n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$).
On extrait simultanément deux jetons du sac.
Soit $X$ la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe le plus grand des deux nombres inscrits sur les deux jetons tirés.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**Ex. 1446.** 4 points. ./1979/lilleErem/exo-2/texte.tex

$\theta$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Résoudre dans le corps$\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue $u$ :
$$u^2 - 2\sin\theta u + \tan^2\theta = 0.$$
Donner le module et l'argument des deux solutions quand elles sont distinctes.
2. Résoudre dans le corps$\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue $z$ :
$$z^4 - 2\sin\theta z^2 + \tan^2\theta = 0.$$

## Problème 513 — 13 points

./1979/lilleErem/pb/texte

Le plan affine $\mathscr{E}_2$ est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $\mathbb{R}_+^\star$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

-I- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$. On note $f_\alpha$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par
$$f_\alpha(x) = \frac{x^2 + (\alpha+1)x + 2\alpha}{x+1},$$
et $(\mathscr{C}_\alpha)$ la courbe représentative de $f_\alpha$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de $f_\alpha$.
On appelle $A$ et $B$ les points de $(\mathscr{C}_\alpha)$ correspondant respectivement au maximum et au minimum relatif de $f$. Quelle est, lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$, la réunion E de l'ensemble des points $A$ et de l'ensemble des points $B$ ?
2. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_\alpha)$. Démontrer que $(\mathscr{C}_\alpha)$ admet une asymptote oblique $(D_\alpha)$ d'équation $y = x + \alpha$, et étudier la position de $(\mathscr{C}_\alpha)$ par rapport à $(D_\alpha)$.
3. Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_\alpha)$ ont un point commun $I$.
4. Construire dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$, et étudier la position relative de $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.
5. Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $[-2\,;1[$. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{E}_2$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que
$$-2 \leqslant x \leqslant \lambda \qquad \text{et} \qquad f_4(x) \leqslant y \leqslant f_2(x).$$
Calculer $\mathscr{A}\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

-II- Á tout réel $a$ différent de 1, on associe l'application affine $T_a$ de $\mathscr{E}_2$ dans lui-même, définie par
$$T_a : M\,(x\ ;\ y) \longmapsto M'\,(x'\ ;\ y') \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + (1-a)y. \end{cases}$$



Retour page 1

1. Montrer que $T_a$ est bijective. Définir analytiquement l'application réciproque de $T_a$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des applications $T_a$ est un groupe commutatif pour la loi de composition de applications, notée $\circ$.
3. Quel est l'ensemble des points invariants par $T_a$ ?
   Montrer que, si l'on note $m$ l'image d'un point quelconque $M$ par la projection sur la droite d'équation $y = x$ parallèlement à l'axe $(O;\vec{\jmath})$, et $M'$ l'image de $M$ par $T_a$, on a $\overrightarrow{mM'} = k\overrightarrow{mM}$, $k$ étant un réel que l'on exprimera en fonction de $a$.
4. Montrer que la transformée par $T_a$ d'une courbe $(\mathscr{C}_\alpha)$ est une courbe $(\mathscr{C}_{\alpha'})$.
   Par quelle application $T_A$, $(\mathscr{C}_4)$ est-elle l'image de $(\mathscr{C}_2)$ ?

-III- $t$ étant un paramètre réel représentant le temps, on considère le point $M$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t - 1 \\ y = \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t} + 1 \end{cases} \quad \text{dans le repère } (O;\vec{\imath},\vec{\jmath}).$$

1. Montrer que la trajectoire de $M$ est une partie de $(\mathscr{C}_2)$ que l'on précisera.
2. Reconnaître pour quelle valeur de $t$ le mouvement de $M$ est accéléré ou retardé.

# XLI. Limoges, série C

**Ex. 1447.** *3 points.* ./1979/limogesC/exo-1/texte.tex

Montrer que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

**Ex. 1448.** *5 points.* ./1979/limogesC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{pour} & x \leqslant -\dfrac{1}{2} & f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \text{pour} & -\dfrac{1}{2} < x < 1 & f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} \\ \text{pour} & x \geqslant 1 & f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} + \log x \end{cases}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

**1.** Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels $f$ est dérivable.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. (Unité : 2 cm).

**3.** Calculer l'aire du domaine limité par $(C)$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. En donner une valeur approchée avec deux décimales.

## Problème 514 *12 points.* ./1979/limogesC/pb/texte

**Partie A**

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, un plan affine euclidien orienté $P$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et un réel arbitraire $m$.
Soit l'application $F_m$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe $\alpha$, associe le complexe $\alpha'$ défini par $\alpha' = m\mathrm{i}\alpha + 1$ et l'application $f_m$ de $P$ dans $P$ qui, à tout point $M$ d'affixe $\alpha$, associe le point $M'$ d'affixe $\alpha' = m\mathrm{i}\alpha + 1$.

**1.** Discuter suivant la valeur du réel $m$ la nature de $f_m$. Préciser dans chaque cas ses éléments géométriques caractéristiques.

**2.** Soit la conique $(C)$ du plan $P$ d'équation $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$.
Soit $(C'_m)$ l'image de $(C)$ par $f_m$, $m$ étant dans cette question un réel non nul.
Donner une équation de $(C'_m)$. Préciser la nature de $(C)$ et de $(C'_m)$.
Tracer sur une même figure $(C)$ et $(C'_2)$.
Démontrer que les foyers de $(C'_m)$ sont les images par $f_m$ des foyers de $(C)$.

**3.** Soit $\omega_m$ le point de $P$ invariant par $f_m$ ($m$ réel quelconque).

On pose $m = \tan\varphi$ avec $-\frac{\pi}{2} < m < \frac{\pi}{2}$.

Montrer que les coordonnées de $\omega_m$ s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2} \\ y = \dfrac{\sin 2\varphi}{2}. \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $\omega_m$ quand $\varphi$ varie dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Préciser la nature de cet ensemble.

**4.** On considère dans le plan $P$ muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point mobile $N$. Ses coordonnées sont données en fonction du temps $t$ par

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{avec } t \in [-1\,;1].$$

En utilisant les résultats de la question précédente, préciser la trajectoire de $N$ et la construire. Construire sur la même figure les vecteurs vitesse et accélération aux dates $t = 1$ et $t = -1$.

Décrire le mouvement entre les dates $t = -1$ et $t = 1$ et préciser les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

**Partie B**

$E$ est un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le plan $P$ de la partie $A$ est le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $g_m$ l'application de $E$ dans $E$ qui, à tout point $M$ de $E$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ définies par :

$$F_m(x+\mathrm{i}y) = (x' + \mathrm{i}y'),$$

($F_m$ étant l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie au début de la partie A) et par

$$z' = mz.$$

Dans cette partie $m$ est un réel non nul.

**1.** Donner la définition analytique de $g_m$.

**2.** Déterminer l'image par $g_m$ de l'hyperbole $(H)$ du plan de repère $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ qui a pour équation dans ce repère $y^2 - z^2 = 1$.

Tracer l'hyperbole $(H)$ et son image $g_m(H)$ dans un repère convenable à préciser.

**3.** Démontrer que $g_m$ est la composée dans un ordre quelconque de l'homothétie de centre $\omega_m$ et de rapport $m$, et d'une rotation que l'on précisera ($\omega_m$ étant le point de $P$ défini au 3.A).

# XLII. Limoges remplacement, série C

**Ex. 1449.** ———— *4 points.* *./1979/limogesCrem/exo-1/texte.tex*

$\mathbb{C}$ étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = az + b\overline{z} \end{aligned}.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$), où $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et ou $b$ est le nombre complexe de module $a$ et d'argument $\theta$, $\theta$ étant différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

**1.** Montrer que $f$ est une application linéaire dont on donnera la matrice dans la base $(1,\ ic)$ de $\mathbb{C}$.

**2.** Déterminer le noyau $\ker f$ et l'image $\mathbf{Im}f$ (on exprimera un vecteur de $\ker f$ et un vecteur de $\mathbf{Im}f$ en fonction de $\theta$ seul).

**3.** Montrer que $\ker f \oplus \mathbf{Im}f = \mathbb{C}$.



Retour page 1

# XLIII. Lyon, série C

**Ex. 1450.** 3,5 *points.* ./1979/lyonC/exo-1/texte.tex

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme $\varphi$ de $E$ défini par

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{i} &= -6\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{k}\\ \varphi(\vec{j}) &= -4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}\\ \varphi(\vec{k}) &= \vec{0}_E\end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau de $\varphi$, en donner une équation cartésienne.
   Déterminer l'image de $\varphi$, en donner une base.
   Démontrer que le noyau et l'image de $\varphi$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.
2. Démontrer que $\varphi$ est l'endomorphisme composé d'une projection orthogonale et d'une homothétie vectorielle à déterminer.

**Ex. 1451.** 3,5 *points.* ./1979/lyonC/exo-2/texte.tex

On considère le système d'inconnue $(x~;~y)$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x-2y=3\\ ax-by=c\end{cases}$$

où $a,~b,~c$ désignent trois paramètres éléments de l ?ensemble $\{1~;~2~;~3;~4~;~5~;~6\}$.
Pour déterminer $a,~b,~c$ on lance trois fois un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 a? 6.
Le premier numéro sorti donne $a$, le second $b$ et le troisième $c$.

1. Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.
2. Calculer les probabilités :
   a) $p_1$ pour que le système ait une infinité de solutions ;
   b) $p_2$ pour qu'il n'ait aucune solution ;
   c) $p_3$ pour qu'il ait une solution unique ;
   d) $p_4$ pour qu ?il admette la solution unique $(3~;~0)$.

   **i** On donnera les résultats sous forme de fractions ayant 108 pour dénominateur.

## Problème 515 *13 points.* ./1979/lyonC/pb/texte

Soit $a$ un réel strictement positif. Dans ce problème on cherche à résoudre dans $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation

$$a^x = x^a \qquad (E_a)$$

d'inconnue $x$ et de paramètre $a$, équation qui admet évidemment la solution $x=a$. Pour cela on utilise les fonctions

$$f_a : x \longmapsto x^a \qquad ; \qquad g_a : x \longmapsto a^x \qquad ; \qquad h_a : x?? \longmapsto x\log a - a\log x.$$

L'étude des fonctions $f_a$ et $_a$ figurant au programme de Terminale C, le candidat pourra utiliser sans justification tout résultat concernant ces fonctions. Au besoin, il considèrera que la fonction $f_a$ est prolongée par continuité au point 0 et que $f_a(0)=0$.

I **Étude de cas particuliers**

1. On suppose $a=\mathrm{e}$.
   a) Dresser le tableau des variations de la fonction $h_\mathrm{e}$.
   b) En déduire la résolution de l'équation $(E_a)$.
   c) Démontrer que l'on a $\dfrac{x}{\log x} \geqslant \mathrm{e}$ pour tout $x>1$.



Retour page 1

2. On suppose $a = 2$.

   a) Dresser le tableau des variations de la fonction $h_2$ et la représenter graphiquement dans un plan muni d'un repère orthonormé en prenant 2 cm pour unité de longueur. On placera en particulier les points d'abscisses entières $n \leqslant 5$.

   b) En déduire que l'équation $(E_2)$admet exactement deux solutions.

   c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les courbes représentatives de $f_2$ et $g_2$ (supposées tracées avec le même repère orthonormé, mais on ne demande pas les courbes) et situé entre les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

II **Étude du cas** $0 < a < 1$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction $f_a - g_a$.
2. En déduire que l'équation $(E_a)$n'a pas d'autre solution que la solution $a$.

III **Étude du cas** $a > 1$ **et** $a \neq \mathrm{e}$

IV - E ?tude des solutions entières de $(E_a)$ lorsque $a \in \mathbb{N}^\star - \{1\}$ Le cas $a = 2$ ayant été traité au 515, on suppose ici que $a$ est un naturel strictement supérieur à 2. Dans ce cas l'étude faite au 515 prouve l'existence d'un réel $b$ vérifiant $a^b = b^a$ et $1 < b < a$.

On se propose de chercher si $b$ est aussi un naturel.

1. Pour quelle valeur de $a$ peut-on avoir $b = 2$ ? On suppose désormais $b \in \mathbb{N}$ et $b \geqslant 3$.
2. a) Prouver que $a$ et $b$ ont les mêmes diviseurs premiers.

   b) Soit $p$ un diviseur premier commun à $a$ et $b$, $\alpha$ et $\beta$ ses exposants dans les décompositions respectives de $a$ et $b$ en facteurs premiers. Démontrer que $\alpha b = \beta a$.

   c) Déduire de 2a et 2b que $a$ est un multiple de $b$ et que si $a = kb$,alors $b^{k-1} = b$. .
3. Démontrer que l'on a $b^{n?1} > n$ pour tout naturel $n \geqslant 2$.
4. Conclure

# XLIV. Lyon remplacement, série C

**Ex. 1452.** 3 *points.* *./1979/lyonCrem/exo-1/texte.tex*

Soit $k$ un élément de $\mathbb{Z}$.

1. Démontrer que les nombres $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
2. Démontrer que la PGCD des nombres $2k-1$ et $9k+1$ est nécessairement 1 ou 17.
3. Pour quelles valeurs de $k$ ce PGCD est-il égal à 17 ?

**Ex. 1453.** 5 *points.* *./1979/lyonCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On identifiera $\mathscr{P}$ au plan complexe en associant à tout point $M \in \mathscr{P}$, de coordonnées $x$ et $y$,le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
Soit $u$ un nombre complexe et $f_u$ l'application, de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, associant à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ où $z' = -u^2\overline{z} + 2\overline{u}$.

1. Trouver la nature et les éléments géométriques caractéristiques de chacune des applications suivantes :

   a) $f = f_u$ pour $u = \mathrm{i}$.

   b) $g = f_u$ pour $u = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
2. On pose $h = g \circ f$.

   a) Déduire la nature de $h$ de celles de $f$ et $g$.

   b) Construire géométriquement le centre de $h$.

   c) Retrouver par le calcul les éléments de $h$.

# XLV. Montpellier, série C

**Ex. 1454.** 5 points. ./1979/montpellierC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} f(x) = x\mathrm{e}^{1+2x} & \text{pour } x \leqslant 0 \\ f(x) = x(1-\operatorname{Log} x) & \text{pour } x > 0 \end{array}$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative.

**Ex. 1455.** 3 points. ./1979/montpellierC/exo-2/texte.tex

Quatre nombres entiers strictement positifs $a$, $b$, $c$, $d$ forment, dans cet ordre, une suite géométrique dont la raison est un nombre entier premier avec $a$.

Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation :

$$10a^2 = d - b.$$

## Problème 516 12 points. ./1979/montpellierC/pb/texte

– I –

**1.** Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul. On considère la suite des nombres complexes :

$$\begin{array}{rl} S\ :\ \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ n & \longmapsto z_n \end{array}$$

définie par $z_0 = 0$ et la relation :

$$z_{n+1} = \lambda z_n + i \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{XXI.1}$$

a) Calculer $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, puis $z_n$ en fonction de $\lambda$ . Étudier particulièrement les cas $\lambda = 1$ , $\lambda = -1$.

b) Deux termes de la suite $S$, d'indices différents, peuvent-ils être égaux ? Montrer que, dans l'affirmative, $S$ est périodique.

c) Démontrer la relation :

$$z_{n+2} = (1+\lambda)z_{n+1} - \lambda z_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{XXI.2}$$

Montrer qu'inversement, toute suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $z_0 = 0$, $z_1 = i$, et la relation (XXI.2) est égale à $S$.

**2.** On considère un plan affine euclidien rapporté a un repère orthonormé. L'affixe d'un point $M$) de coordonnées $(x,y)$ est le nombre complexe $z = x + iy$. On donne des réels $r,\theta$ , tels que $r > 0$ ; $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
On notera $u$) le nombre complexe de module $r$, d'argument $\theta$. On définit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :

$A_0$ est l'origine du repère ; $A_1$ est le point d'affixe $i$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $A_{n+2}$ est l'image de $A_{n+1}$ de centre $A_n$, par la similitude de rapport $r$, d'angle $\theta$. On note $z_n$ l'affixe du point $A_n$.

Écrire une relation entre $z_n$ , $z_{n+1}$, $z_{n+2}$.

Montrer, en utilisant la question 1, que $A_{n+2}$ est l'image de $A_n$ par une similitude $\Psi$, indépendante de $n$ dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

**3.** On suppose $r = 2\cos\theta$. Que peut-on dire de la similitude $\Psi$ ? La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être périodique ?

**4.** On suppose maintenant $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Préciser dans ce cas les caractéristiques de la similitude $\Psi$. Démontrer que tous les points $A_n$ appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites perpendiculaires, et que les vecteurs $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ , $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ sont orthogonaux.

Représenter sur un dessin les points $A_0, A_l, \dots, A_5$ , en supposant $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et en prenant 2 cm pour unité de longueur.

– II –

Soit la fonction réelle $g$ de la variable réelle $x$ définie par $\quad g(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x x + 1}$.

**1.** Étudier les variations de $g$ et tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le même repère que pour $(C)$.

**2.** Montrer que la fonction $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ ; déterminer $g^{-1}(x)$. En déduire une particularité géométrique entre les courbes $(\Gamma)$ et $(C)$.

– III –

**1.** Vérifier que la fonction $G$ définie par $G(x) = -2x + 6\mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$ est une primitive de $g$.

**2.** Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des $x$, la courbe $(\Gamma)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \mathrm{Log}\,(4)$. En donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

– IV –

Soit le mouvement du point $M$ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 2\mathrm{Log}\,t \\ y(t) = \dfrac{4t^2 - 2}{t^2 + 1} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est strictement, positif.}$$

**1.** Quelle est la trajectoire du mouvement du point $M$ ?

**2.** Donner les coordonnées des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ du mouvement du point $M$ à l'instant $t$.

**3.** Pour quelle valeur $t_0$ de $t$ le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t_0)$ est-il parallèle à l'axe des $x$ ? Déterminer alors la position $M(t_0)$ du point $M$ sur la trajectoire, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t_0)$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t_0)$ à l'instant $t_0$.

## XLVI. Montpellier remplacement, série C

**Ex. 1456.** ——— *3 points.* *./1979/montpellierCrem/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :
$$5x - 4y = 1.$$

2. Un entier naturel $n$ s'écrit $\overline{52}$ dans un système de numération de base $x$ et $\overline{43}$ dans un autre système de base $y$.
Quelles sont les valeurs possibles de $x$ et de $y$ ?

**Ex. 1457.** ——— *4 points.* *./1979/montpellierCrem/exo-2/texte.tex*

A tout nombre complexe $z$, on associe son image $m$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal.
Pour tout nombre complexe $z$ différent de i, on pose :

$$Z = \frac{2z - 4}{z - \mathrm{i}}.$$

a) Comment choisir l'image de $m$ pour que $Z$ soit réel ?

b) Comment choisir l'image de $m$ pour que $Z$ ait pour argument $-\dfrac{\pi}{2}$ ?

On pourra traiter cet exercice par le calcul ou par un raisonnement géométrique.

Retour page 1

## PROBLÈME 517 *13 points.*

*./1979/montpellierCrem/pb/texte*

*Les parties A et B sont deux exemples d'une même situation mathématique, dans un plan affine euclidien d'une part, en analyse d'autre part. Elles peuvent être traitées indépendamment.*

A. On donne un plan vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On dira qu'un endomorphisme $\varphi$ de E possède la propriété **(A)** lorsqu'il existe un réel $k \in ]0\,;1[$ tel que, pour tout $\vec{u}\in$E,

$$\|\varphi(\vec{u})\| \leqslant k\|\vec{u}\|.$$

1. $\varphi$ est défini par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On pose $\vec{u} = r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath} \qquad (r>0\ ;\ 0 \leqslant \theta < 2\pi)$.

Calculer en fonction de $r$ et $\theta$ :

$$F(r,\ \theta) = \left\|\varphi(r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath})\right\|^2$$

et démontrer que $\varphi$ possède la propriété **(A)**, par exemple pour $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra mettre $F(r,\ \theta)$ sous la forme $A + B\cos^2\theta + C\sin\theta\cos\theta$.

2. Soit p un plan affine euclidien associé au plan vectoriel E, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $f$ une application affine de P dans £ dont l'endomorphisme associé, noté $\varphi$, possède la propriété **(A)**. $1_{\mathrm{E}}$ est l'application identique de E.

Démontrer que $\varphi - 1_{\mathrm{E}}$ est bijectif. En déduire que $f$ possède un point invariant et un seul, $\Omega$, déterminer par l'équation :

$$\varphi(\overrightarrow{O\Omega}) - \overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{O'O} \qquad \text{où} \quad O' = f(O).$$

Soit $M_0$ un point du plan P. On définit la suite $M_0,\ M_1,\ \dots$ par :

$$M_n = f(M_{n-1}) \qquad n = 1,\ 2,\ \dots$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| = 0$.

3. On considère les suites numériques $(x_n,\ y_n)$ définies par

$$x_0 = y_0 = 0$$
$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-1} + 2$$
$$y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} - 1.$$

Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

B. $a$ est un réel strictement positif. On donne l'application :

$$f : ]0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2}{3}x + \frac{a^3}{3x^2}$$

1. Construire la courbe représentative. On étudiera particulièrement le point d'intersection avec la droite $y = x$ et la tangente en ce point.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}\,;\ x_0 > a$. On pose

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Démontrer que l'on a

$$a < x_n < x_{n-1} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$



Retour page 1

Établir l'inégalité :

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{a}(x-a) \qquad \text{pour } x \geqslant a.$$

En déduire l'inégalité :

$$x_n - a \leqslant \frac{2}{a}(x_{n-1}-a)^2 \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$

3. Démontrer une inégalité de la forme :

$$\frac{x_n - a}{a} \leqslant \left(A_n \frac{x_0 - a}{a}\right)^{u_n} \qquad n \in \mathbb{N}^\star$$

où les $A_n$ et les $u_n$ sont des entiers que l'on déterminera en fonction de $n$.
On suppose que $\frac{x_0 - a}{a} \leqslant \frac{1}{10}$. Quel est le plus petit entier $n$ pour lequel $\frac{x_n - a}{a} \leqslant 10^{-8}$ ?

# XLVII. Montpellier, série C

**Ex. 1458.** ——— *3 points.* *./1979/montrealC/exo-1/texte.tex*

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation en $z$ :

$$z^6 - 9\mathrm{i}z^3 + 18 - 26\mathrm{i} = 0, \tag{1}$$

et l'équation en $Z$ :

$$Z^3 - 1 = 0. \tag{1}$$

**1.** Montrer que $(2+\mathrm{i})$ et $(1-\mathrm{i})$ sont des racines de l'équation (1).

**2.** Résoudre l'équation (1).

**3.** Montrer que si $z_0$ est une racine de (1) et $Z_0$ une racine de (1), alors $z_0 Z_0$ est une racine de l'équation (1).
En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

**Ex. 1459.** ——— *4 points.* *./1979/montrealC/exo-2/texte.tex*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($\log$ désignant le logarithme népérien).

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé (unité : 2cm).

**2.** Calculer les abscisses $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ des points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ suivants :

- $M_1$ : intersection de $(C)$ et de l'axe $x'Ox$.
- $M_2$ : point de $(C)$ où la tangente à $(C)$ passe par l'origine $O$ du repère.
- $M_3$ : point de $(C)$ où la tangente est parallèle à $x'Ox$.
- $M_4$ : en $x_4$ la dérivée seconde de $f$ s'annule.

Démontrer que les nombres $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

# XLVIII. Nancy Metz, série C

**Ex. 1460.** ——— *./1979/nancyC/exo-1/texte.tex*

**1.** Trouver les nombres complexes $z$ tels que

$$z^2 + (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i} = 0.$$

**2.** Déduire du 1 les solutions dans $\mathbb{C}$ des trois équations suivantes :

a) $z^2 + (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$ ;
b) $1 + (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}z^2 = 0$ ;
c) $z^4 + (1+\mathrm{i})z^2 + \mathrm{i} = 0$.



Retour page 1

**Ex. 1461.** ./1979/nancyC/exo-2/texte.tex

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, et soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de E.
On désigne par P la plan affine de E d'équation

$$x+y+z=3,$$

et par D la droite affine passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et dirigée par $\vec{\jmath}-\vec{k}$.

**1.** Montrer que D est située dans P.

**2.** Montrer qu'il existe un unique plan affine $\mathrm{P}_1$ tel que la symétrie $s_\mathrm{D}$ orthogonale d'axe D soit la composée de la symétrie $s_\mathrm{P}$ orthogonale par rapport à P par la symétrie $s_{\mathrm{P}_1}$ orthogonale par rapport à $\mathrm{P}_1$.
Donner une équation cartésienne de $\mathrm{P}_1$.

**3.** Soit $\mathrm{P}_2$ le plan parallèle à $\mathrm{P}_1$ passant par $O$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathrm{P}_2$.

b) Déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur $\mathrm{P}_2$.

c) Déterminer sans nouveaux calculs $s_{\mathrm{P}_2}\circ s_{\mathrm{P}_1}$ où l'on désigne par $s_{\mathrm{P}_2}$ la symétrie par rapport à $\mathrm{P}_2$.

## Problème 518

./1979/nancyC/pb/texte

A) Pour tout $x>0$, on pose

$$f(x)=x-1-\log x,$$

où la notation $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

1° Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé $Oxy$, en précisant notamment les branches infinies.

2° Soit $h$ un nombre réel donné tel que $0<h\leqslant 1$.

*i.* Calculer l'aire $A(h)$ du domaine $D_h$ formé des points dont les coordonnées $(x,\ y)$ vérifient les inégalités

$$h\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$

*ii.* Calculer la limite de $A(h)$ quand $h>0$ tend vers $0$.

3° De l'étude de $f$, déduire que pour tout $x>0$, on a l'inégalité

$$\log x\leqslant x-1. \tag{1}$$

B) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On donne $n$ nombres réels strictement positifs $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ et on pose

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\ ;\\ v &= \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\ ;\\ \frac{n}{w} &= \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Les nombres $u$, $v$ et $w$ sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des $n$ nombres $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$.

1° a) En appliquant l'inégalité (1) successivement pour

$$x=\frac{a_1}{u},\ x=\frac{a_2}{u},\ \dots,\ x=\frac{a_n}{u}$$

et en combinant les $n$ inégalités obtenues, montrer que

$$v\leqslant u. \tag{2}$$

b) Dans quel cas a-t-on $v=u$ ?



Retour page 1

2° a) En remplaçant dans (2) les $n$ nombres $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$ par leurs inverses, prouver que

$$w \leqslant v. \tag{3}$$

b) Dans quel cas a-t-on $w = v$ ?

N.B. – les parties C) et D) ci-après sont indépendantes.

C) Soit $x$ un nombre réel supérieur à zéro. On prend

$$n = 2,\ a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_2 = x.$$

Dans ce cas les inégalités (2) et (3) donnent

$$\frac{2x}{1+x} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}.$$

On se propose prendre comme valeur approchée de $\sqrt{x}$ la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$.

1° Pour étudier la précision de cette approximation, tracer la courbe représentative de la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} - \sqrt{x},$$

pour $x$ réel supérieur à zéro. N.B. –*Pour discuter du signe de la dérivée de $g$, on pourra poser $\sqrt{x} = 1+t$ et constater que $g(x)$ passe par un minimum pour $x = 1$.*

2° En déduire que, pour $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, on a

$$0 \leqslant m(x) \leqslant \frac{3}{1\ 000}.$$

D) 1° En appliquant l'inégalité (2), montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{n}.$$

2° a) Par des considérations d'aires, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{n}{1+\log n} \leqslant \sqrt[n]{n!}.$$

# XLIX. Nantes, série C

**Ex. 1462.** *4 points.* *./1979/nantesC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 + (-7+3\mathrm{i})z^2 + (12-16\mathrm{i})z + 4(1+7\mathrm{i}).$$

On considère

$$E = \{z\ ;\ z \in \mathbb{C},\quad f(z) = 0\}.$$

**1.** Montrer que $E$ contient un élément de la forme $z_0 = \lambda\mathrm{i}$ où $\lambda$ est un réel.

**2.** Déterminer les éléments $z_0,\ z_1,\ z_2$, de $E$ : on notera $z_1$ l'élément de $E$, autre que $z_0$, qui a une même partie imaginaire que $z_0$.

**3.** Soit $A,\ B,\ C$ les images respectives de $z_0,\ z_1,\ z_2$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Déterminer les éléments de la similitude directe qui transforme le bipoint $(A,\ B)$ en le bipoint $(A,\ C)$.

Retour page 1

**Ex. 1463.** ———— *4 points.* *./1979/nantesC/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit deux urnes $U_1$ et $U_2$ ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires ; la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une des deux urnes, choisie au hasard ( il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne : si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne.

Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirage sont équiprobables.

Soit $P_n$ la probabilité pour que le $n$-ième tirage de fasse dans l'urne $U_1$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$.

a) Déterminer $P_1$.

b) Déterminer $P_2$ : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans $U_1$ soit parce que le premier tirage a été d'une boule blanche dans $U_1$, soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans $U_2$.

c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P_n)$, de la forme :

$$\forall n,\ n \geqslant 2\ : \qquad P_n = aP_{n-1} + b$$

où $a$ et $b$ sont des réels que l'on déterminera.

**2.** Soit la suite réelle $(u_n)$, dont le terme général est défini pour tout $n$ entier strictement positif par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n,\ n \geqslant 2\ : \qquad u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

**1.** Déterminer le réem $\alpha$ tel que le suite $(V_n)$, dont le terme général est défini pour $n$ entier strictement positif par $V_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.

**2.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente ; trouver alors la limite de $P_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

## Problème 519 *12 points.* *./1979/nantesC/pb/texte*

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels. Si $A$ et $B$ appartiennent à $\mathscr{E}$ et si $\lambda$ est un réel, on note

— $A+B$ la somme des matrices $A$ et $B$

— $A \times B$ le produit de la matrice $B$ par la matrice $A$ dans cet ordre

— $\lambda.A$ le produit de la matrice $A$ par le réel $\lambda$.

On rappelle que $(\mathscr{E},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $(\mathscr{E},\ +,\ \times)$ est un anneau unitaire, non commutatif, non intègre.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont des réels.

-A- 1° Démontrer que $(\mathscr{M},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Préciser la dimension et une base de cet espace vectoriel.

2° Soit $A = M(1,\ 0)$ et $B = M(0,\ 1)$. Calculer $A^2,\ B^2,\ A\times B,\ B\times A$. En déduire que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau unitaire, commutatif. Cet anneau est-il intègre ?

3° Soit $\mathscr{M}_1$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}$.

a) Déterminer $\mathscr{M}_1$.

b) Quelle est la structure de $(\mathscr{M}_1,\ \times)$ ?

-B- Soit $\pi$ un plan vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de ce plan.

On considère $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\pi$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $M(a,\ b)$.

Retour page 1

1° Déterminer, suivant les valeurs de $a$ et $b$, le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$.
Dans chaque cas, on indiquera une base de ces espaces vectoriels, s'il en existe.

2° Déterminer les nombres réels $k$ pour lesquels l'équation

$$\varphi_{a,b}(\vec{u}) - k\vec{u} = \vec{0} \tag{1}$$

(dans laquelle le vecteur $\vec{u}$ de $\pi$ est l'inconnue) admet d'autres solutions que le vecteur $\vec{0}$.
On explicitera, pour chacune des valeurs de $k$ trouvées, l'ensemble des solutions de (1).

3° On pose $\vec{I} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{J} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Vérifier que $\mathscr{B}' = (\vec{I},\ \vec{J})$ est une base de $\pi$. Quelle est la matrice $M'$ de $\varphi_{a,b}$ dans $\mathscr{B}'$ ?

4° Déterminer les applications $\varphi_{a,b}$ qui sont des projections vectorielles.
Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de la projection trouvée en remarquant, le cas échéant, s'il s'agit ou non de sous-espaces vectoriels propres.

5° Déterminer les applications $\varphi_{a,b}$ qui sont des automorphismes involutifs.
Dans chacun des cas, on précisera les éléments caractéristiques de l'involution trouvée.

-C- Soit $P$ un plan affine associé à $\pi$, et soit $O$ un point de $P$. On note respectivement $(\mathscr{R})$ et $(\mathscr{R}')$ les repères cartésiens $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(O\ ;\ \vec{I},\ \vec{J})$.
Soit $O'$ le point de coordonnées $(2\ ;\ -2)$ dans $(\mathscr{R})$. Soit $f$ l'application affine de $P$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{\frac{1}{2},0}$ et qui transforme $O$ en $O'$.

1° Définir la nature de $f$ et donner ses éléments caractéristiques.

2° Si $M$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $(\mathscr{R})$, donner les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans $(\mathscr{R})$ de $f(M)$.

3° Si $M$ a pour coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ dans $(\mathscr{R}')$, donner les coordonnées $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ de $f(M)$ dans $(\mathscr{R}')$.

-D- On suppose maintenant que $\pi$ est euclidien et que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée.
Soit $O''$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans $(\mathscr{R})$.
Soit $g$ l'application affine de $P$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ et qui transforme $O$ en $O''$.

1° a) Définir la nature de $g$ et donner ses élément caractéristiques.

b) Si $M$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $(\mathscr{R})$, donner les coordonnées $(\xi\ ;\ \eta)$ dans $(\mathscr{R})$ de $g(M)$.

2° Soit $(\mathscr{C})$ le sous-ensemble de $P$, d'équation dans $(\mathscr{R})$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

a) Donner une équation dans $(\mathscr{R})$ de l'image $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C})$ par $g$. Représenter sur un même dessin les ensembles $(\Gamma)$ et $(\mathscr{C})$.

b) Démontrer qu'il existe une rotation unique, centrée sur la droite de direction $\vec{\imath}$ et passant par $O$, qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\Gamma)$. Déterminer les éléments caractéristiques de cette rotation.

## L. Nice, série C

**Ex. 1464.** ——— *4 points.* *./1979/niceC/exo-1/texte.tex*

On considère la fonction numérique d'une variable réelle $f$ définie par

$$f(x) = \log\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien.

**1.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On donne $\log 2 \simeq 0{,}7$).

**2.** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\log(2+x) - \log 2}{x}$ admet pour limite $\dfrac{1}{2}$ en $0$.

**3.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $y = \log 2$, et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \lambda$ où $\lambda$ est un nombre réel strictement inférieur à $-1$.
Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $-\infty$.

Retour page 1

**Ex. 1465.** ———— *3 points.* ./1979/niceC/exo-2/texte.tex

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $A$ le point du plan complexe d'affixe $z = a + \mathrm{i}b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).
On considère l'équation :

$$z^2 + (1-b)z + a = 0.$$

**1.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$, pour que l'équation admette une racine double.
Représenter dans le plan complexe l'ensemble $(\Gamma)$ des points $A$ (d'affixe $a + \mathrm{i}b$) correspondants.

**2.** Préciser suivant le position du point $A$ dans le plan la nature des racines de l'équation.

## Problème 520 *13 points.* ./1979/niceC/pb/texte

I. Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres réels. On note $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c.$$

1° a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée $n^{\text{e}}$ de $f$.

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$. Calculer $u_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, est une suite géométrique de raison $-\dfrac{\pi^2}{16}$. Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ en fonction de $a$.

2° On pose $a = 4\alpha$, $b = 7\beta$, $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Écrire l'expression de $f(x)$.
Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha,\ \beta)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tels que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

3° On pose $a = 1$, $b = c = 0$ et on note $\varphi$ la restriction de $f$ à $[0\,;2]$. Écrire l'expression de $\varphi(x)$.

a) Montrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque $\psi$.

b) Quel est l'ensemble de définition de $\psi$ ? Préciser son sens de variation et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

c) Sur quel ensemble $\psi$ est-elle dérivable ?

4° On pose $a = c = 0$, $b = 1$. Écrire l'expression de $f(x)$.
Calculer

$$\int_0^1 [f(x)]^3\,\mathrm{d}x.$$

5° On appelle $f_1$ la fonction $f$ obtenue pour $a = 1$, $b = c = 0$.
On appelle $f_2$ la fonction $f$ obtenue pour $a = c = 0$, $b = 1$.
On considère $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} f_1\left(\frac{4k}{9}\right)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} f_2\left(\frac{4k}{9}\right)$.

a) Exprimer $S_1 + \mathrm{i}S_2$ en fonction du nombre complexe $z$ de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{9}$.

b) En déduire $S_1$.

II. On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b,\,c}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{a,\,b,\,c}(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

avec $(a,\ b,\ c)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$.

1° On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble sera noté $\mathscr{F}$.



Retour page 1

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

b) Déterminer la dimension de E.

2° On note $f \bullet g$ le réel

$$\frac{1}{4}\left[2f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(-1)g(-1)\right].$$

a) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ (f,\ g) & \longmapsto & f\bullet g \end{array}$ est un produit scalaire sur E. Dans toute la suite, on considérera E muni de ce produit scalaire ; le réel $\sqrt{f\bullet f}$ sera noté $\|f\|$.

b) Soit les fonctions :

$\begin{array}{rl} e_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto 1 \end{array}$ $\begin{array}{rl} e_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array}$, $\begin{array}{rl} e_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1 \end{array}$.

Montrer que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée de E.

Montrer que

$$f_{a,\ b,\ c}=\left(\frac{a}{2}+c\right)e_1+\frac{b\sqrt{2}}{2}e_2-\frac{a}{2}e_3.$$

En déduire que

$$f_{a,\ b,\ c}\bullet f_{a',\ b',\ c'}=\left(\frac{a}{2}+c\right)\left(\frac{a'}{2}+c'\right)+\frac{bb'}{2}+\frac{aa'}{4}.$$

3° On suppose que $E$ est orienté et que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée directe.
Soit $\mathscr{T}$ l'endomorphisme de E défini par

$$\mathscr{T}(e_1)=f_{0,\ 0,\ 1},\quad \mathscr{T}(e_2)=f_{-1,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}},\quad \mathscr{T}(e_3)=f_{-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Montrer que $\mathscr{T}$ est une isométrie vectorielle dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

4° Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\mathscr{R})$. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $(\mathscr{R})$ tels que les vecteurs $f_{y,\ x,\ 1}$ et $f_{2y,\ \frac{2}{3}x,\ -\frac{y}{2}}$ de E soient orthogonaux.
Représenter cet ensemble dans $(\mathscr{R})$.

## LI. Outre Mer, série C

**Ex. 1466.** ——— *4 points.* *./1979/outremerC/exo-1/texte.tex*

Soit $\alpha,\beta,\gamma$ trois réels donnés, deux à deux distincts ; $a,b,c$ sont trois paramètres réels ; on leur associe la fonction numérique $f$ de variable réelle :

$$x\longmapsto f(x)=\frac{ax^3}{x+\alpha}+\frac{bx^3}{x+\beta}+\frac{cx^3}{x+\gamma}.$$

**1.** Former des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur $a,b,c$, pour que la fonction $f$ admette une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$. (Aucune autre étude concernant la fonction $f$ n'est demandée).

On posera éventuellement $h(x)=\dfrac{a\alpha^3}{x+\alpha}+\dfrac{b\beta^3}{x+\beta}+\dfrac{c\gamma^3}{x+\gamma}$.

**2.** Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\left[\frac{\beta-\gamma}{x+\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{x+\beta}+\frac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right]\right)$.

**3.** Considérant à nouveau la fonction $f$, montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f=0$, alors $(a,b,c)=(0,0,0)$.

**Ex. 1467.** ——— *4 points.* ./1979/outremerC/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos x.$$

**1.** Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et mettre $f'(x)$ sous la forme :

$$f'(x) = A\mathrm{e}^x \cos(x+a),$$

$A$ et $a$ étant des constantes que l'on calculera,

**2.** Calculer la dérivée huitième de $f$.

**3.** Déterminer une fonction $F$ vérifiant :

$$\text{pour tout } x \text{ réel },\quad F'(x) = f(x), \quad \text{et} \quad F(0) = \frac{1}{2}.$$

Application :

$$\text{Calculer} \qquad \int_0^{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

## Problème 521 *12 points.* ./1979/outremerC/pb/texte

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, noté $(\omega)$. On désigne par $H$ la courbe du plan $P$ dont une équation dans $(\omega)$ est $\quad y^2 - 3x^2 = 1$.

–I–

**1.** Sur une figure réalisée avec l'unité 1 cm, tracer $H$.

$$\text{Soit} \qquad \vec{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) \qquad , \qquad \vec{v} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).$$

Que représentent les droites $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ pour $H$ ?
(On placera sur la figure les représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine $O$).
Le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ étant noté $(\Omega)$, écrire les relations de passage entre les coordonnées $x, y$ d'un point $M$ de $P$ dans $(\omega)$ et les coordonnées $X, Y$ de ce point dans $(\Omega)$. Former une équation de $H$ dans $(\Omega)$.

**2.** On désigne par $H^+$ la partie de $H$ située dans le demi-plan $y > 0$ ; à chaque point $M$ de $H^+$ on associe son abscisse $X = \varphi(M)$ dans $(\omega)$. Montrer que $\varphi$ est une bijection de $H^+$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; exprimer inversement en fonction de $X$ les coordonnées $x, y$ dans $(\omega)$ du point $\varphi^{-1}(X)$.

**3.** Soit $(M, M')$ un bipoint de $H^+$ , $M$ (resp. $M'$ ) admettant dans $(\omega)$ les coordonnées $(x; y)$ (resp. $(x'; y')$. On pose :

$$\delta(M', M) = xy' - x'y \tag{XXI.3}$$

Si $X = \varphi(M), X' = \varphi(M')$ démontrer

$$\delta(M, M) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{X}{X'} - \frac{X'}{X}\right) \tag{XXI.4}$$

–II–

L'objet de cette partie est d'étudier le sous-ensemble $E$ de $H^+$ formé des points de $H^+$ dont les coordonnées dans $(\omega)$ sont entières $[(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+]$.
On placera à titre d'essai les points de $E$ dont les carrés des deux coordonnées sont inférieurs à $50$. Soit $\tau$ l'application affine de $P$ dans $P$ dont les équations dans $(\omega)$ sont :

$$\begin{cases} x' = 2x + \ \ y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

On pose : $a = 2 + \sqrt{3}$.
Si $A, B, C$ sont trois points de $H^+$, on convient de dire que $B$ est « entre $A$ et $C$ » si le réel $\varphi(B)$ est compris entre les réels $\varphi(A)$ et $\varphi(C)$.

**1.** Démontrer que $\tau$ conserve $H$ , que $\tau$ conserve $H^+$, que $\tau$ conserve $E$. Vérifier :

$$(\forall M \in H^+), \qquad \varphi[\tau(M)] = a\,[\varphi(M)].$$

**2.** Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on pose $A_k = \varphi^{-1}(a^k)$.
Montrer que tous les points $A_k$ appartiennent à $E$.
Calculer $\delta(A_k, A_{k-1})$ et $\delta(A_k, A_{k+1})$.

**3.** L'entier $k$ étant fixé, utiliser $\delta(A_k, M)$ pour prouver que $A_k$ est le seul point de $E$ entre $A_{k-1}$ et $A_{k+1}$ sur $H^+$. (On observera, sous la forme (XXI.3) , que si $M \in E, \delta(A_k, M)$ est entier, et sous la forme (XXI.4) que $X = \varphi(M)$ et $(A_k, M)$ varient en sens contraires).
Quelle est l'image de $E$ par $\varphi$ ?

–III–

L'objet de cette partie est d'examiner l'ensemble, $G$ des applications affines $g$ de $P$ telles que $g(O) = O$ et $g(E) = E$.

**1.** Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.

**2.** Montrer que les seuls éléments de $G$ conservant le point $A_0$ sont l'application identique de $P$ et la symétrie orthogonale $\sigma$, d'axe $(O, \vec{\jmath})$. À cet effet, en supposant que $g \in G$ et $g(A_0) = A_0$, on étudiera l'action de $g$ sur un bipoint $(A_k ; A_{-k})$.

**3.** Soit $g$ un élément quelconque de $G$. On désigne par $A_m$ l'image $g(A_0)$.
Que peut-on dire de $\tau^{-m} \circ g$ ?
Montrer que $g$ est, soit $\tau^m$, soit $\tau^{-m} \circ \sigma$.

# LII. Orléans, série C

**Ex. 1468.** ——— *4 points.* *./1979/orleansC/exo-1/texte.tex*

On considère le nombre complexe $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

**1.** On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Montrer que $S$ et $T$ sont conjugués et que la partie imaginaire de $S$ est positive.

**2.** Calculer $S + T$, $ST$ puis en déduire $S$ et $T$

**Ex. 1469.** ——— *points.* *./1979/orleansC/exo-2/texte.tex*

**1.** a) Trouver tous les couples $(p,\ q)$ d'entiers relatifs tels que $11p - 9q = 2$.

b) En déduire les entiers relatifs $X$ qui vérifient

$$\begin{cases} X \equiv -1\ [9] \\ X \equiv -3\ [11]. \end{cases}$$

**2.** Soit $N = \overline{a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base dix.

a) Quelles relations doivent vérifier $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_0$ pour que $N$ soit divisible par 99 ?

b) Déterminer les chiffres $x$ et $y$ pour que l'entier $N = \overline{10x0009y}$ soit divisible par 99.

## Problème 522 *points.* *./1979/orleansC/pb/texte*

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien, $\vec{\mathrm{P}}$ le plan vectoriel associé à P, $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé de P.

A) 1° Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $g$ ; en déduire les variations de $g$, démontrer que $g$ permet de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

2° Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x)=-\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}.$$

Étudier la fonction $f$ ; étudier la position de la courbe représentative de $f$, $C_f$, par rapport à ses asymptotes, puis construire $C_f$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On représentera l'unité par deux centimètres.)

3° Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle E de $\mathbb{R}$, à préciser, tel que $f$ permette de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.

Vérifier que la bijection réciproque (que l'on notera abusivement $f^{-1}$) est telle que, pour tout $x$ de E :

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{4(x-1)}+1-x\ ;$$

tracer la courbe de $C_{f^{-1}}$ représentant $f^{-1}$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4° Justifier l'existence des réels suivants :

$$A=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x,\qquad B=\int_{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}}f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x,\qquad C=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Calculer $B$, interpréter graphiquement le réel $B$.

b) En déduire $C$, puis $A$.

B) Dans cette partie, $\vec{\mathrm{P}}$ est orienté, et $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est une base orthonormé directe.

1° Établir une équation cartésienne de $C'$, image de $C_f$ par la symétrie de centre $\Omega$, $\Omega$ ayant pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

2° En déduire une équation cartésienne de $H=C'\cup C_f$ et construire $H$ dans P rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3° Soit $s$ l'application affine de P dans P qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe

$$z'=\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)z+\mathrm{i}.$$

On note $\varphi$ l'endomorphisme de $\vec{\mathrm{P}}$ associé à $s$.

a) Quelle est la nature de $s$ ? donner ses éléments caractéristiques.

b) Vérifier que $\Omega=s(O)$ ; soit $\vec{I}=\varphi(\vec{\imath})$, $\vec{J}=\varphi(\vec{\jmath})$. Établir une équation cartésienne de $H$ dans le repère $(\Omega,\ \vec{I},\ \vec{J})$.

En déduire la nature de $H$.

## LIII. Orléans remplacement, série C

**Ex. 1470.** ——— *4 points.* *./1979/orleansCrem/exo-1/texte.tex*

**1.** Étudier la fonction $f$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=\frac{\log x}{x}$$

et tracer sa représentation graphique.

**2.** Montrer qu'il existe un unique couple $(x,\ y)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$x^y=y^x\quad\text{et}\quad x<y.$$

**3.** Pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, on pose

$$u_n=\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 4}{4}+\cdots+\frac{\log n}{n}\ ;$$

a) comparer $u_n$ à $\int_3^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ ;

b) en déduire la limite de la suite $(u_n)$, $n \geqslant 3$, lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Ex. 1471.** ______ *points.* *./1979/orleansCrem/exo-2/texte.tex*

**1.** Dans le système décimal, déterminer le chiffre des unités de $2^n$ et de $7^n$, suivant les valeurs de $n$.

**2.** *Application :* Trouver le chiffre des unités du nombre $3\,548^9 \times 2\,537^{31}$.

## PROBLÈME 523 *points.* *./1979/orleansCrem/pb/texte*

Les notations et résultats donnés dans l'énoncé de la partie A) sont utiles dans les questions B2, B3, B4 de la partie B)

Soit $j$ le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité $1+j+j^2=0$.

A) $\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\mathscr{B}(1,\ \mathrm{i})$.
Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe $z=x+\mathrm{i}y$ associe le nombre complexe $\varphi(z)=x+jy$.

1° Montrer que $\varphi$ est une application linéaire bijective.

2° Pour tout $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, on pose $N(z)=|\varphi(z)|^2$.
Montrer que

$$N(x+\mathrm{i}y)=x^2-xy+y^2.$$

3° Soit $\Omega$ l'ensemble des complexes $z$ vérifiant $N(z)=1$

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}\quad ;\quad N(z)=1\}.$$

Soit $\Omega'$ l'ensemble des éléments de $\Omega$ dont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont des entiers relatifs.

$$\Omega'=\{z\in\Omega\quad ;\quad \exists(x,\ y)\in\mathbb{Z},\ z=x+\mathrm{i}y\}.$$

a) Montrer que si $z=x+\mathrm{i}y$ appartient à $\Omega'$, alors

$$|x|\leqslant 1\qquad \text{et}\qquad |y|\leqslant 1.$$

b) En déduire que $\Omega'$ est formé de six éléments que l'on déterminera.

c) Déterminer $\varphi(\Omega')$. Donner le module et un représentant de l'argument de chaque élément de $\varphi(\Omega')$.
Montrer que $\varphi(\Omega')$ est un groupe multiplicatif commutatif.

B) Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(O;\vec{u},\vec{v})$. Un point $M$ de $\mathscr{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x,\ y)$ dans $\mathscr{R}$ ou par son affixe $z=x+\mathrm{i}y$.

1° Montrer que l'image d'une ellipse de foyers $F$ et $F'$, de grand axe de longueur $2a$ par une isométrie affine est une ellipse dont on précisera les foyers et la longueur du grand axe.

2° Soit E l'ellipse dont une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ est

$$\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}y^2=1.$$

a) Déterminer les foyers et la longueur du grand axe de E.

b) Trouver une équation cartésienne dans $\mathscr{R}$ de l'image de E par la rotation de centre $O$et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$ (en radians).

c) On appelle $\Gamma$ (resp. $\Gamma'$) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe appartient à $\Omega$ (resp $\Omega'$) ($\Omega$ et $\Omega'$ définis au A).
Déduire du B(2)b) la nature de $\Gamma$. Dessiner $\Gamma$ et $\Gamma'$.

Retour page 1

3° Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels, de déterminant égal à 1.

Soit $F$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $F(0) = 0$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice $A$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

Si $M$ a pour affixe $z$, on notera $f(z)$ l'affixe de $F(M)$.

a) Montrer que, pour tout $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, $N(f(z)) = N(z)$.
En déduire que $F(\Gamma)$ est inclus dans $\Gamma$.

b) Montrer que pour tout $z$ appartenant à $\mathbb{C}$ on a

$$\varphi(f(z)) = (a + jb)\varphi(z).$$

En déduire que, pour tout $z$ appartenant à $\mathbb{C}$,

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = (a + jb)z.$$

c) Soit $\Phi$ l'application ponctuelle associée à l'application complexe $\varphi$. (Si $M$ a pour affixe $z$, $\Phi(M)$ a pour affixe $\varphi(z)$).
Déduire du B(3)b) la nature de l'application $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. En préciser les éléments caractéristiques.

d) Soit $G$ une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On pose $G^1 = G$ et pour tout entier $n$ appartenant à $\mathbb{N}^\star$, $G^{n+1} = G \circ G^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $G^n$ est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\Phi \circ G^n \circ \Phi^{-1}$ est égale à l'application identique de $\mathscr{P}$.

4° Soit $A_0$ le point de coordonnées $(1,\ 0$ dans $\mathscr{R}$. Pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}^\star$, on pose $A_n = F^n(A_0)$.
Soit S l'ensemble des points $A_n$ quand $n$ décrit $\mathbb{N}$.

a) Montrer que, si $a = b = 1$, alors S$= \Gamma'$.

b) Montrer que S est inclus dans $\Gamma'$ si, et seulement si, $a + ib$ appartient à $\Omega'$.
Préciser l'ensemble des éléments de $\Omega'$ pour lesquels l'inclusion est une égalité.

# LIV. Papeete, série E

**Ex. 1472.** ——— *5 points.* *./1979/papeeteE/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien. Soit $A$et $B$ deux points distincts de $\mathscr{P}$. Á tout point $M$ de $\mathscr{P}$ on associe :
$I$= milieu de $(A,\ M)$ ; $J$= milieu de $(B,\ M)$ ; $E$ = milieu de $(A,\ J)$ ; $F$ = milieu de $(B,\ I)$.
Soit $f$ l'application qui à $M$ associe $E$ et soit $g$ l'application qui à $M$ associe $F$.

**1.** Montrer que $f$ et $g$ sont des homothéties affines dont on déterminera les centres et les rapports.

**2.** Soit $C$ un point de $\mathscr{P}$.
On pose : $E_0 = C$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $E_n = f(E_{n-1})$
$F_0 = C$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $F_n = g(F_{n-1})$
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n$ = distance de $E_n$ à $F_n$.
Calculer la limite de $x_n$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

**Ex. 1473.** ——— *2 points.* *./1979/papeeteE/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$„on
considère un point mobile $M$ dont la position au temps $t$, est définie par ses coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos 2t \\ y(t) = \cos 2t & t \in \mathbb{R} \\ z(t) = \sin^2 t. \end{cases}$$

**1.** Déterminer le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ au temps $t$. Ces vecteurs sont-ils liés ? (On pourra écrire la relation indépendante de $t$ entre $y$ et $z$).

**2.** Préciser la trajectoire $\mathscr{C}$ du point mobile $M$ et retrouver le résultat précédent.

**3.** Décrire le mouvement du point mobile $M$ pour $t \in [0\,;\pi]$.



Retour page 1

## 🏛Problème 524 *13 points.* *./1979/papeeteE/pb/texte*

Dans tout ce qui suit, (P) désigne le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|$. ,
$(\mathscr{P})$ désigne le plan vectoriel euclidien de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ associé à (P).

A- Soit $\omega$ le point de coordonnées $(2\ ;\ -1)$ et $\Omega$ le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

On considère l'application affine $\mathscr{T}$ associée à l'endomorphisme $\tau$ de $(\mathscr{P})$, de matrice

$$M_\tau=\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{5}&\dfrac{1}{5}\\-\dfrac{1}{5}&-\dfrac{2}{5}\end{pmatrix}$$

et telle que $\mathscr{T}(\omega)=\Omega$.

a) Soit $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées du point $M$, image par $\mathscr{T}$, du point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

a) Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$et $y$.

b) Démontrer que $\mathscr{T}$ est une transformation affine (application affine bijective) et déterminer analytiquement la transformation réciproque $\mathscr{T}^{-1}$.

c) Montrer qu'il existe un unique point $I$, invariant par $\mathscr{T}$, dont on déterminera les coordonnées.

b) A tout point $m(x\ ;\ y)$, on associe son affixe $z=x+\mathrm{i}y$. Soit $Z=X+\mathrm{i}Y$ l'affixe de $M=\mathscr{T}(m)$.

a) Démontrer que $Z=\left(-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right)z+\left(1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

b) Reconnaître la transformation $\mathscr{T}$ et préciser ses caractéristiques.

B- Soit $f$, la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par :

$$f(x)=\frac{3x^2-4x}{4(1-x)},$$

et soit (H), sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Étudier La variation de la fonction $f$ et construire la courbe (H), On prendra comme unité 2 cm.

b) Montrer que (H) admet un centre de symétrie.

c) Calculer l'aire arithmétique $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (H), son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=\lambda$ ($\lambda>2$).

d) Résoudre l'équation $\mathscr{A}(\lambda)=0{,}5$.
Calculer $\mathscr{A}(\mathrm{e}^2)$ et en donner une valeur approchée avec la précision permise par les tables logarithmiques à cinq décimales ($\mathrm{e}$ désignant la base des logarithmes népériens.)

C- a) On considère la courbe $(\Gamma)$, d'équation $y^2-4x^2+5=0$ relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Préciser la nature de $(\Gamma)$ ainsi que ses éléments caractéristiques (éléments de symétrie, asymptotes éventuelles).

b) Construire la courbe $(\Gamma)$.

b) a) Montrer que si $m(x\ ;\ y)$ est un point de $(\Gamma)$, alors $M(X\ ;\ Y)$, image de $m$ par l'application $\mathscr{T}$ définie dans la partie A, est un point de (H).

b) En déduire les axes de symétrie et les sommets de (H).



Retour page 1

# LV. Paris, série C

**Ex. 1474.** ./1979/parisC/exo-1/texte.tex

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a,\ b\}$ vérifiant

$$m - 18d = 791$$

où $m$ est le P.P.C.M et $d$ le P.G.C.D des nombres $a$ et $b$.

**Ex. 1475.** ./1979/parisC/exo-2/texte.tex

Le but de cet exercice est le calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x}.$$

Pour tout entier naturel $n$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n+1} x}.$$

**1.** Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$

**2.** Montrer, par une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

**3.** En déduire le calcul de $I$.

N.B. On ne donnera pas de valeur décimale approchée de $I_0$ ou de $I_1$.

## Problème 525

./1979/parisC/pb/texte

Soit un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point $M$ de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère choisi, on associe le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ qu'on appelle son affixe.
Soit $F$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes) qui à $z$ fait correspondre

$$z' = \frac{z}{1+|z|}$$

et soit $\Phi$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$.
Pour les figures et les représentations graphiques on pourra prendre 2 cm d'unité.

A) 1. On pose $z_1 = -2$ et $z_2 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Soit $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes $z_1$ et $z_2$. Déterminer $z_1' = F(z_1)$, $z_2' = F(z_2)$ et placer sur une figure $\mathscr{F}$ les points $M_1,\ M_2,\ M_1' = \Phi(M_1),\ M_2' = \Phi(M_2)$.

2. a) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

Étudier les variations de $f$ ; on étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité. Représenter graphiquement $f$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\Omega,\ \vec{i},\ \vec{j})$ ; déterminer les asymptotes.

b) On désigne par $\mathscr{D}_0$ la droite $(O,\ \vec{u})$ de $\mathscr{P}$. Montrer que $\Phi(\mathscr{D}_0)$ est une partie de $\mathscr{D}_0$ que l'on déterminera ; montrer que la restriction de $\Phi$ à $\mathscr{D}_0$ est une application injective. Si $M$ et $N$ sont deux points distincts de $\mathscr{D}_0$, quelle est l'image par $\Phi$ du segment $[MN]$ ?

3. Soit $r$ une rotation de $\mathscr{P}$ de centre $O$. Montrer que pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$

$$\Phi(r(M)) = r(\Phi(M)).$$

(On pourra associer à $r$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, de la forme $z \longmapsto az$, $a$ nombre complexe convenable).

4. Déterminer $\Phi(\mathscr{P})$ ; montrer que l'application $\Phi$ est injective.
   De même déterminer $F(\mathbb{C})$ et montrer que $F$ est injective.

B) Soit $\Delta$ l'application de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui au couple $(M,\ N)$ de points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectifs $(m,\ n)$ fait correspondre

$$\Delta(M,\ N) = |F(m)-F(n)| = \left|\frac{m}{1+|m|}-\frac{n}{1+|n|}\right|.$$

1. $M_1$ et $M_2$ étant définis en A1, calculer :

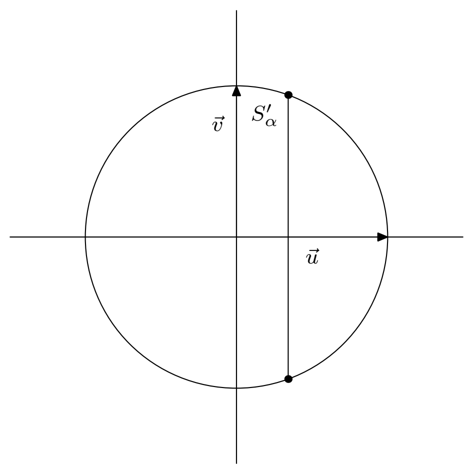
$$\Delta(O,\ M_1),\ \Delta(O,\ M_2),\ \Delta(M_1,\ M_2).$$

   (On pourra contrôler les calculs sur la figure $\mathscr{F}$.)

2. Vérifier que :
   a) Pour tout $(M,\ N)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ :
   $$(\Delta(M,\ N)=0) \iff (M=N)\ ;$$
   b) Pour tout $(M,\ N)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ :
   $$\Delta(M,\ N)=\Delta(N,\ M)\ ;$$
   c) Pour tout $(M,\ N,\ P)$ de $\mathscr{P}\times\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ :
   $$\Delta(M,\ P)\leqslant \Delta(M,\ N)+\Delta(M,\ P).$$

3. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les réels de la forme $\Delta(M,\ N)$ où $M\in\mathscr{P}$, $N\in\mathscr{P}$, admet un plus petit majorant que l(on précisera.

C) Soit C le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Soit un réel $\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et soit $S'_\alpha$ la corde du cercle privée de ses extrémités et perpendiculaire à la droite $(O,\ \vec{u})$ au point d'abscisse $\cos\alpha$. On se propose d'étudier la partie $\mathscr{S}_\alpha$ de $\mathscr{P}$ formée des points dont l'image par $\Phi$ appartient à $S'_\alpha$.




1. $M'$ étant l'image de $M$ par $\Phi$, calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$. Former la relation (E) à vérifier par les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ pour que son image $M'$ appartienne à $S'_\alpha$.

2. Déterminer $\mathscr{S}_\alpha$ et tous ses éléments géométriques. Le candidat au le choix entre les deux méthodes suivantes :

   a) Traduire la relation (C1) en termes de distances. (En particulier on pourra considérer la distance de $M$ à un droite convenable).

   b) $\mathscr{S}_\alpha$ est une partie d'une conique dont on formera une équation cartésienne que l'on réduira.

3. Construire $\mathscr{S}_{\frac{\pi}{3}}$ et placer ses éléments caractéristiques.

Retour page 1

# LVI. Paris remplacement, série C

**Ex. 1476.** *3 points.* *./1979/parisCrem/exo-1/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne par leurs coordonnées le système de points : $A(0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(-1\ ;\ 0)$. Ces points sont pondérés et affectés des coefficients respectifs $1$, $b$, $c$.

1. Discuter l'existence du barycentre $G$ de ce système de points suivant les valeurs de $b$ et $c$. Quelles sont les coordonnées de $G$ ?
2. Le couple $(b,\ c)$ est obtenu de la manière suivante : $b$ est le résultat du premier jet d'un dé dont les faces portent les nombres $-3,\ -2,\ -1,\ +1,\ +2,\ +3$ ; $c$ est le résultat du deuxième jet du même dé. Chaque couple a la même probabilité d'apparition.
3. $\alpha$ Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette une barycentre dont l'ordonnée est égale à 1 ?

   $\beta$ Question analogue en imposant au barycentre $G$ d'avoir une abscisse nulle.

   $\gamma$ Question analogue en imposant au barycentre $G$ d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

**Ex. 1477.** *5 points.* *./1979/parisCrem/exo-2/texte.tex*

Soit un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne le nombre complexe $a = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ et on désigne par $F$ l'application de P dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe le nombre complexe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = z + a\overline{z}$.

1. On désigne par $M_1$ le point d'affixe $a\overline{z}$. Donner la nature et la détermination géométrique de l'application $F_1$ de P dans P qui transforme $M$ en $M_1$.
2. Montrer que $F$ est la composée de deux applications simples que l'on précisera.
   Déterminer $F$(P). (On pourra construire sur une figure les points $M,\ M_1,\ M'$.
3. Déterminer l'ensemble des images dans P des solutions de l'équation :

$$z + a\overline{z} = 2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

   soit en utilisant la transformation $F$, soit par le calcul.

**Problème 526** *12 points.* *./1979/parisCrem/pb/texte*

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$$

où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.

A. 1. Étudier les variations de $f$ et montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   2. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$. Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$.

B. On désigne par $t$ la dérivée de $f$ : $t = f'$.
   1. a) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $|t(x)| < 1$.
      b) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $t'(x) = 1 - [t(x)]^2$, en désignant par $t'$ la dérivée de $t$.
      c) Montrer que si $x \in ]-1\,;+1[$, il existe un réel unique $X$ tel que $t(X) = x$ ; on explicitera $X$ en fonction de $x$ et on notera $X = t^{-1}(x)$. Montrer que

$$t(\mathbb{R}) = ]-1\,;+1[.$$

   2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$I_n(X) = \int_0^X [t_n(u)]^n\ \mathrm{d}u = \int_0^X \left[f'(u)\right]\ \mathrm{d}u$$

   on conviendra que, pour tout $u$ de l'intervalle $[0\,;X]$, $[t(u)]^0 = 1$.

Retour page 1

a) Justifier l'existence de $I_n(X)$.

b) Calculer $I_0(X)$ et $I_1(X)$.

c) La question B(1)b donnant $[t(u)]^2 = 1 - t'(u)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$ :

$$I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1}[t(X)]^{n-1}.$$

d) Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ :

$$I_{2p}(X) = X - \left[t(X) + \frac{1}{3}[t(X)]^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}[t(X)]^{2p-1}\right] \qquad (E_1)$$

$$I_{2p+1}(X) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}[t(X)]^2 + \cdots + \frac{1}{2p}[t(X)]^{2p}\right] \qquad (E_2)$$

e) Montrer que l'on a pour tout entier naturel $p$ :

$$0 \leqslant \int_0^X [t(u)]^{2p}\,\mathrm{d}u \leqslant X\,[t(X)]^{2p}.$$

En déduire, $X$ étant fixé, que la suite :

$$p \longmapsto \int_0^X [t(u)]^{2p}\,\mathrm{d}u$$

est convergente et donner sa limite.

C. 1. En utilisant le relation ($E_1$) et ne posant $X = t^{-1}(x)$, démontrer que pour tout $x$ fixé, $x \in [0\,;1[$, la suite $p \longmapsto \epsilon_p(x)$ définie par :

$$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \epsilon_p(x) \qquad (E_3)$$

a pour limite $0$.
En déduire un résultat analogue pour $x \in ]-1\,;0[$.

2. En utilisant la relation ($E_3$) pour $x = \dfrac{1}{3}$ et $p = 3$, donner une valeur approchée $a$ de $\log 2$ ; comparer à la valeur obtenue dans les tables ; donner une majoration de $\log 2 - a$.

## LVII. Paris, série E

**Ex. 1478.** ———— *4 points.* *./1979/parisE/exo-1/texte.tex*

**1.** Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer l'existence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $u_n$ en fonction de $n$.

c) Étudier la convergence de la suite $u$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i.$$

a) Calculer $S_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de la suite $S$.

b) À l'aide des tables numériques, calculer une valeur approchée de $S_{10}$.

**Ex. 1479.** ——— *4 points.* *./1979/parisE/exo-2/texte.tex*

On considère l'application $P$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (2\sqrt{3} - 3i)z^2 + (1 - 4\sqrt{3}i)z + 21i - 10\sqrt{3}$$

et l'équation $(E)$ :

(E)

**1.** a) Montrer que (E) admet une solution réelle $z_0$.

b) Montrer qu'il existe trois nombres complexes $a, b, c$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

**2.** On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions non réelles de (E) et $M_0, M_1, M_2$ les images des nombres complexes $z_0, z_1, z_2$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Représenter sur un graphique les points $M_0, M_1, M_2$ et montrer que ces points sont sommets d'un triangle équilatéral.

## Problème 527 *12 points.* *./1979/parisE/pb/texte*

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

-A-

Soit $f$ la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$f(x) = \log(\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3)$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans $\mathcal{P}$ relativement au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. ($\log$ désigne le logarithme népérien).

**1.** a) Après avoir étudié le signe de $u^2 - 4u + 3$, où $u$ désigne un réel, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

b) Étudier les variations de la fonction $f$. (Pour étudier la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$, on pourra considérer la fonction $g$ telle que $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3 = \mathrm{e}^{2x}.g(x)$.)

**2.** Construire $\mathcal{C}$ et ses asymptotes. (La figure sera faite en prenant 2 cm pour unité graphique). Déterminer les intersections de $\mathcal{C}$ et de la droite $(O, \overrightarrow{\imath})$ et les intersections de $\mathcal{C}$ et de ses asymptotes. Donner des valeurs approchées des abscisses de ces points et utiliser ces points pour préciser le tracé de $\mathcal{C}$.

-B-

Soit $\varphi$ l'application affine de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui au point $M$ de coordonnées $(x, y)$ associe le point $N$ de coordonnées $(X, Y)$ de façon que :

$$\begin{cases} X &= -x + \log 3 \\ Y &= -2x + y + \log 3 \end{cases}$$

**1.** Démontrer que $\varphi$ est une symétrie. Donner les éléments géométriques qui la définissent.

**2.** a) Démontrer que $\varphi$ conserve globalement $\mathcal{C}$.

b) Démontrer que $\varphi$ échange les asymptotes de $\mathcal{C}$.

-C-

Un point $M$ est en mouvement dans le plan $\mathcal{P}$. Sa position à l'instant $t$ est définie par ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ :

$$\begin{cases} x(t) = \log t \\ x(t) = \log(t^2 - 4t + 3) \end{cases}$$

la variable $t$ décrit l'intervalle $]3, +\infty[$.

**1.** Montrer que la trajectoire du point $M$ est une partie de $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

**2.** Calculer les coordonnées des vecteur-vitesse et vecteur-accélération à l'instant $t$.

**3.** Soit $M_0$ la position du mobile à l'instant $t = 4$. Placer $M_0$ sur $\mathcal{C}$ et tracer les représentants d'origine $M_0$ des vecteur-vitesse et vecteur-accélération à cet instant.

*N.B. – Les parties B et C sont indépendantes.*



Retour page 1

# LVIII. Paris remplacement, série E

**Ex. 1480.** ——— *4 points.* *./1979/parisErem/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. L'unité de longueur est le centimètre.
Le point $O$ sur le petit axe de la feuille est à 5 cm du bord gauche de la partie quadrillée. La ligne de terre $y'Oy$ est parallèle au petit côté de la feuille 0 10 cm du bord supérieur de la partie quadrillée.
Les plans $xOy$ et $yOz$ sont respectivement le plan horizontal de projection et le frontal de projection.
L'axe $Ox$ est dirigé vers le bas de la feuille, l'axe $Oy$ vers la droite et l'axe $Oz$ vers le haut.
On se donne le plan $P$ d'équation $x-y+2z=0$ et le point $A(8~;~2~;~3)$.

**1.** Construire les traces du plan P.

**2.** En utilisant des procédés de géométrie descriptive, construire le symétrique $B$ de $A$ par rapport à $P$. (Il s'agit ici d'une symétrie orthogonale.)

**3.** Déterminer par le calcul les coordonnées de $B$.

**Ex. 1481.** ——— *4 points.* *./1979/parisErem/exo-2/texte.tex*

Soit $P$ un plan affine euclidien muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $f$ l'application affine de $P$ dans lui-même qui au point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ définies par :

$$\begin{cases} x' = -x+y-2\\ y' = -4x+3y-4.\end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est une bijection. Déterminer $O'=f(O)$ et placer ce point.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à l'aide des coordonnées $(x~;~y)$ du point $M$ et du vecteur fixe $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$. En déduire :
   a) L'ensemble $D_0$ des points invariants.
   b) Les droites $D$ telles que $f(D)\subset D$ ; étudier la restriction de $f$ à chacune de ces droites et en déduire qu'elles sont invariantes.
   c) Une construction du point $M'$ image d'un point $M$ donné (on pourra utiliser les points $O$, $O'$ et la droite $D_0$).

## Problème 528 *12 points.* *./1979/parisErem/pb/texte*

Le problème a pour but l'étude de la famille des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_m(x)=x+mx\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\qquad m\in\mathbb{R}_+^\star$$

et les courbes $\mathscr{C}_m$ d'équations $y=f_m(x)$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

A- Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}_+-\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{x^2-1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction $\varphi$.
2. a) Représenter graphiquement la fonction $\varphi$.
   b) Discuter graphiquement suivant les valeurs de $m$ ($m\in\mathbb{R}_+^\star$) le signe de :

$$\varphi(x)-m=\frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{x^2-1}-m.$$

La discussion mettra en évidence que le nombre $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{2}$ que l'on désignera par $m_0$.



Retour page 1

B- 1. Étudier les variations des fonctions $f_m$. L'étude du signe de la dérivée utilisera la fonction $\varphi$ de la partie A. On donnera les tableaux de variations dans les trois cas suivants :

$$0 < m < m_0 \ ; \ m = m_0 \ ; \ m > m_0.$$

2. a)

b) Représenter sur un même graphique $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{m_0}$, $\mathscr{C}_4$.

*Le tracé des courbes sera précisé par l'étude de la suite du problème.*

C- 1. Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (1-x^2)f_m(x) = xf'_m(x) - x^3. \tag{R}$$

2. Soit L l'ensemble des points des courbes $\mathscr{C}_m$ quand $m$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$ où la tangente est parallèle à $(O; \vec{\imath})$. Montrer en utilisant la relation (R), que L est une partie d'une courbe $\Gamma$ dont on donnera une équation cartésienne. Construite L sur le graphique précédent.

*Valeurs numériques pouvant servir :*

| $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ | $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ | $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ | $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ |
|---|---|---|---|
| 0,223 | 0,607 | 1,649 | 4,482 |

*Il sera tenu compte du soin avec lequel la figure sera faite.*

## LIX. Poitiers, série C

**Ex. 1482.** *3 points.* *./1979/poitiersC/exo-1/texte.tex*

Soit $\varphi$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = x + y - \dfrac{1}{a} \\ y' = -x + y - \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Préciser la nature de $\varphi$ et ses éléments caractéristiques.

**Ex. 1483.** *4 points.* *./1979/poitiersC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (x-1) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

**1.** Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le sens de variations de sa fonction dérivée $f'$. En déduire le signe de $f'$.

**2.** Étudier la fonction $f$, et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

**3.** Démontrer que $f$ possède une fonction réciproque $g$, que l'on ne cherchera pas à calculer et dont on précisera les propriétés (ensemble de définition, sens de variations, continuité, dérivabilité).

### Problème 529 *13 points.* *./1979/poitiersC/pb/texte*

Soit $P$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par $B$ l'ensemble des éléments $z$ du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes tels que $|z| < 1$.
Pour tout nombre complexe $a$, on appelle $f_a$ la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_a(z) = \frac{z+a}{az+1}$$

et on désigne par $F_a$ la fonction de $P$ dans $P$ qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = f_a(z)$.
On rappelle que, si $M$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$, son affixe est $z = x + \mathrm{i}y$.

-I- 1° Préciser $F_0$ ; pour quelles valeurs de $a$, $F_a$ est-elle une fonction constante ?



Retour page 1

2° Quel est, suivant les valeurs de $a$, l'ensemble des points invariants par $F_a$ ?

3° On suppose que $a$ est un nombre réel de l'intervalle $]-1\,;1[$.

a) Montrer que la restriction $h_a$ de $f_a$ à $B$ est une fonction de $B$ dans $B$. Vérifier que son ensemble de définition est $B$.

b) On appelle $H$ l'ensemble des applications $h_a$ lorsque $a$ décrit $]-1\,;1[$.
Montrer que $H$ muni de la composition des applications, est un groupe commutatif en précisant l'élément neutre et le symétrique d'un élément $h_a$ quelconque de $H$.

4° Le nombre complexe $a$ étant de nouveau quelconque, montrer que la restriction $g_a$ de $f_a$ à $\mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles si et seulement si $a$ est un réel.

-II- On suppose désormais que $a$ est un nombre réel non nul appartenant à l'intervalle $]-1\,;1[$.
On pose

$$g_a(x) = \frac{x+a}{ax+1} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et on note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de $g_a$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1° Étudier la fonction $g_a$, et tracer sur le même dessin les deux courbes $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathscr{C}_{-\frac{1}{2}}$.

2° Montrer que $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_{-a}$ sont isométriques.

3° Trouver un réel $b$ tel que : $\dfrac{x+a}{ax+1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{ax+1}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

4° Calculer l'aire géométrique de la partie du plan délimitée entre $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_{-a}$.

-III- Soit $\varphi$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui au point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = x+y-\dfrac{1}{a} \\ y' = -x+y-\dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

1° Préciser la nature de $\varphi$ et ses éléments caractéristiques.

2° Déterminer une équation de l'image $\mathscr{C}'_a$ de $\mathscr{C}_a$ par $\varphi$. Quelle est la nature de $\mathscr{C}'_a$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

Construire $\mathscr{C}'_a$ en prenant $a = \dfrac{1}{2}$.

## LX. Pondichéry, série C

**Ex. 1484.** *3 points.* ./1979/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Soit $B$ un entier naturel strictement supérieur à 3.
Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base $B$.

**1.** Montrer que $\overline{132}$ est divisible par $B+1$ et $B+2$. Pour quelles valeurs de $B$, $\overline{132}$ est-il divisible par six ?

**2.** Montrer que $A = \overline{1320}$ est divisible par six.

**3.** On pose $C = \overline{1430}$. Quel est le p.g.c.d. de $A$ et $C$ ?

**Ex. 1485.** *4 points.* ./1979/pondicheryC/exo-2/texte.tex

$A, B, C$ sont trois points non alignés d'un plan affine $P$ et $P'$ le plan $P$ privé de la droite $AB$.

**1.** Soit $E$ l'ensemble des couples $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $a+b+1 \neq 0$. Démontrer que l'application $f$ qui à tout élément $(a,b)$ de $E$ associe le barycentre $G$ de $(A,a),(B,b),(C,1)$ est une bijection de $E$ sur $P'$.

**2.** On considère l'application $g$ de $P'$ dans $P'$ qui au point $G$ associe le point $G'$ barycentre de $(A,b),(B,a),(C,1)$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par $g$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{GG'}$ appartient à une direction indépendante de $G$.

c) Démontrer que le milieu de $(G,G')$ est sur une droite fixe et en déduire la nature de $g$.

## 🏛Problème 530 *13 points.* *./1979/pondicheryC/pb/texte*

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition des applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

–A –

On note $e_1$ et $e_2$ les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $e_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin x$ et $e_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos x$, et on appelle $\mathscr{F}$ le sous- espace vectoriel de $\mathscr{A}$ engendré par $e_1$ et $e_2$.

**1.** Démontrer que $(e_1, e_2)$ est une base de $\mathscr{F}$.

**2.** a) Démontrer que tout élément $f$ de $\mathscr{F}$ est dérivable, et que sa dérivée $f'$ appartient à $\mathscr{F}$.

b) Écrire la matrice dans la base $(e_1, e_2)$ de l'endomorphisme $D$ de $\mathscr{F}$, qui à $f$ associe $f'$. Établir que $D$ est bijective, et définir l'application réciproque $D^{-1}$.

c) Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$$

–B–

Dans cette partie, on désigne par $f$ l'application de $J = \left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ +\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\sin x + \cos x)$ , et par $C$ la courbe représentative de $f$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Résoudre dans $J$ l'équation $f(x) = 0$. Étudier le sens de variation de $f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}\right]$ (On notera $\alpha$ le réel de l'intervalle $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$ et on prendra $\alpha \simeq \frac{\pi}{9}$ ; d'autre part, on ne cherchera pas à déterminer les valeurs maximale et minimale).

**2.** a) Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à $J$, $|f(x)| \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. En déduire que $f$ admet une limite finie en $+\infty$.

b) Soit $\Gamma$ et $\Gamma'$ les représentations graphiques dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ des applications $g$ et $h$ de $J$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad h(x) - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Calculer les abscisses des points communs à $C$ et $\Gamma$ d'une part, à $C$ et $\Gamma'$ d'autre part.
Établir qu'en tout point commun à $C$ et $\Gamma$ (respectivement : à $C$ et $\Gamma'$), les deux courbes admettent la même tangente.

c) Soit $M$ le point de coordonnées $(x, y)$ sur $C$ ; calculer en fonction de $y$ l'ordonnée du point $M'$ d'abscisse $x + 2\pi$ sur $C$.

d) Utiliser les résultats précédents pour construire $C$. On commencera par mettre en place les courbes $\Gamma$ et $\Gamma'$ , puis l'arc de $C$ correspondant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

On donne :

| $x$ | $-\frac{9\pi}{8}$ | $-\pi$ | $-\frac{5\pi}{8}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^x$ | $0,03$ | $0,04$ | $0,14$ | $0,21$ | $0,67$ |

–C–

Les solutions dans l'intervalle $J = \left[-\frac{\pi}{4}\ ,\ +\infty\right[$ de l'équation $f(x) = 0$ forment la suite de réels $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , $k \in \mathbb{N}$. On note comme au A :

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{puis} \quad I_0 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

et d'une manière générale, pour tout entier naturel $k$ :

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Retour page 1

1. En utilisant les résultats du A , trouver une primitive $F$ de $f$ sur $J$, ayant la propriété suivante : il existe un réel $\lambda$ strictement positif tel que, pour tout réel $x$ appartenant à $J$, $F(x+\pi) = -\lambda F(x)$.
   En déduire une expression simple de $I_{k+1}$ en fonction de $I_k$ et de $\lambda$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |I_k|$.
   Exprimer $S_n$ en fonction de $I_0$, $\lambda$ et $n$.
   $S_n$ admet-elle une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

# LXI. Portugal Beyrouth, série C

**Ex. 1486.** ./1979/portugalC/exo-1/texte.tex

On donne la suite $(q_n)$, $n \in \mathbb{N}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme $q_0$ est supérieur ou égal à 2.
On construit la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{q_0} \\ u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 q_1 \ldots q_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant pas exemple que de $q_0$).
   En déduire que la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, a un limite, qui appartient à l'intervalle $]0\,;1]$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à l'entier $k$, $q_n = q_k$, la limite de la suite $(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est un rationnel.

**Ex. 1487.** ./1979/portugalC/exo-2/texte.tex

1. Dans le plan affine affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe C définie par : $2ay = x^2$, $a$ réel positif donné.
2. Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe C au point $M_1$ d'abscisse $x_1$. Quelle relation doivent vérifier $x_1$ et $x_2$ de deux points $M_1$ et $M_2$ de C pour que les tangentes à C en ces points soient orthogonales ?
3. Démontrer que la droite $M_1M_2$ déterminée par deux points de C ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
   Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à C en $M_1$ et $M_2$.

## Problème 531

./1979/portugalC/pb/texte

A) $\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, on pose

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1 + j + j^2 = 0$.
Soit $F$ l'application polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)(z-j^2) + \frac{2}{9}(j-4).$$

1. Déterminer les coefficients complexes $a$ et $b$ de façon que l'application $\sigma$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ :
$$z \longmapsto \sigma(z) = az + b$$
vérifie les deux conditions :
$$\sigma(j^2) = 0, \qquad \sigma(0) = -1.$$
Comparer alors $\sigma(-1)$ et $j^2$.
2. On considère l'application $s$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dépendant du paramètre complexe $m$ :
$$z \longmapsto s(z) = mz - 1.$$
Peut-on déterminer $m$ de façon que
$$(\forall z \in \mathbb{C}) F[s(z)] = F(z) \ ?$$
(On admet que deux applications polynômes sont égales si, et seulement si, les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients.)
Comparer au résultat du A1
3. Soit $r$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ : $z \longmapsto jz - 1$.
Déterminer l'unique complexe $z_0$ invariant par $r$. Vérifier que $z_0^2 = -\frac{1}{3}j^2$.
Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure d'espace affine réel, $z_0$ est l'isobarycentre du triplet $(z,\ r(z),\ r^2(z))$.
4. Pour $\lambda$ complexe, développer et ordonner $F(z_0 + \lambda)$. En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et le situer sur une figure du plan complexe.

B) Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Un endomorphisme $f$ de E est dit ternaire si $f \circ f \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$, application identique de E. (Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$,etc.)

1. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme ternaire de E, et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E tel que le système $(\vec{u},\ f(\vec{u}))$ soit lié. Montrer que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de $f$ soit de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $h,\ k$ étant deux réels.
Démontrer que $f$ est nécessairement l'application identique. (On calculera $A^3$.)
2. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de E et que pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, le système $(\vec{u},\ f(\vec{u}))$ soit libre. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E, et $\vec{v} = f(\vec{u})$ ; alors il existe deux réels $p$, $q$ tel que la matrice de $f$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ soit $B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$.
Calculer $p$ et $q$ de façon que $f$ soit ternaire.
$p$ et $q$ ayant les valeurs trouvées, et $\Pi$ désignant un plan affine attaché à E, démontrer analytiquement ou par tout autre procédé, que l'application affine $g$ de $\Pi$ dans $\Pi$ admettant $f$ comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ gg = \mathrm{Id}_\Pi$
3. Plus généralement, soit $F$ l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $(\vec{u},\ \vec{v})$ de E, est $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta$ est un réel donné de l'intervalle $]0\,;\pi[$.
On définit sur E une forme bilinéaire symétrique $\Phi$ par
$$\Phi(\vec{u},\ \vec{u}) = 1, \qquad \Phi(\vec{v},\ \vec{v}) = 1, \qquad \Phi(\vec{u},\ \vec{v}) = \cos\theta.$$
Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire sur E, et que $F$ est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(\mathrm{E},\ \Phi)$.
E étant supposé orienté par la base $(\vec{u},\ \vec{v})$, déterminer le vecteur $\vec{w}$ de E de façon que $(\vec{u},\ \vec{w})$ soit une base directe et orthonormée relativement à $\Phi$. Former la matrice de $F$ dans cette nouvelle base.
Quelle est la nature de $F$ dans $(\mathrm{E},\ \Phi)$ ? Á quelle condition, $n$ étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ ?



Retour page 1

# LXII. Reims, série C

**Ex. 1488.** ———— *4 points.* *./1979/reimsC/exo-1/texte.tex*

Soit un espace vectoriel euclidien $E$ rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et soit l'endomorphisme $g$ de $E$ dans $E$ défini par :

$$g(\vec{i}) = \frac{1}{3}\left(-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}\right)$$
$$g(\vec{j}) = \frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\right)$$
$$g(\vec{k}) = \frac{1}{3}\left(-2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\right)$$

**1.** Montrer que $g$ est une transformation orthogonale de $E$.
Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $g$. Caractériser $g$.

**2.** Déterminer l'image par $g$ du plan vectoriel engendré par les vecteurs $(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ et $(2\vec{i}-\vec{k})$.

**Ex. 1489.** ———— *4 points.* *./1979/reimsC/exo-2/texte.tex*

$n$ est un entier naturel de $\mathbb{N}^\star$ et $k$ un entier relatif quelconque.
On pose

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

et

$$E_n = \{z_k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

**1.** Quel est le nombre d'éléments de $E_n$ ?
Démontrer que $(E_n,\ \times)$ est un groupe abélien $G$.
Représenter $E_{12}$ dans le plan complexe.

**2.** Soit $G'$ un sous-groupe de $G$.

a) Démonter que si $z_k$ appartient $G'$ et si $p$ est un entier relatif quelconque, alors $z_{kp}$ appartient à $G'$.

b) En déduire que si $G'$ contient $z_{k_1}$ et $z_{k_2}$ il contient $z_d$ où $d$ est le p.g.c.d de $k_1$ et $k_2$.

**3.** Utiliser le 2) pour trouver tous les sous-groupes de $E_{12}$.

## Problème 532

*./1979/reimsC/pb/texte*

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x) = \log\left|\frac{mx+1}{x+m}\right|,$$

où $m$ est un paramètre réel.
On appelle $(\mathscr{C}_m)$ la courbe représentative de $f_m$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On appelle $A$ le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$ et $B$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

A- 1. Étudier les fonctions $f_m$ dans les cas particuliers suivants : $m = 0$, $m = -$ et $m = 1$.
Tracer les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_{-1})$ et $(\mathscr{C}_1)$ dans un repère $\mathscr{R}$.
Dans toute la suite, on supposera $m \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

2. Donner, en les justifiant, les ensembles de définition, de continuité, de dérivabilité de $f_m$.
On désignera par la suite par $\mathscr{D}_{f_m}$ l'ensemble de définition de $f_m$.

3. a) Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par $A$ et $B$.

b) Démontrer que les ensembles de définition de $f_m$ et $f_{\frac{1}{m}}$ sont égaux et que, pour tout $x$ de ces ensembles

$$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x).$$

En déduire que $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Retour page 1

c) Démontrer l'équivalence : $x \in \mathscr{D}_{f_{-m}} \iff (-x) \in \mathscr{D}_{f_m}$.
Démontrer : si $x \in \mathscr{D}_{f_{-m}}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$ ; en déduire que $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{-m})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

d) Déduire des questions précédentes, qu'il suffit d'étudier $f_m$ et de tracer $(\mathscr{C}_m)$ pour $m > 1$ pour obtenir les courbes $(\mathscr{C}_m)$ pour tout $m$ élément de $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$.

4. On supposera dans cette question $m > 1$.

a) Calculer $f'_m(x)$, $f'_m$ étant la fonction dérivée de $f_m$ .

b) Étudier les limites de $f_m$ aux bornes des intervalles de définition de $f_m$ ; en déduire pour $(\mathscr{C}_m)$ l'existence d'asymptotes dont on précisera les équations.

c) Donner le tableau de variations de $f_m$ (on ne tracera pas la courbe $(\mathscr{C}_m)$) .

B- Dans cette question $m = 2$ ;
On pourra prendre $0,7$ comme valeur approché, de $\log 2$..

1. Étudier $f_2$ et tracer $(\mathscr{C}_2)$ dans un repère $\mathscr{R}$. Soit $I_2$ le point d'intersection de $(\mathscr{C}_2)$ et de son asymptote parallèle à la droite$(O; \vec{\imath})$. Démontrer que $I_2$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_2)$.
2. En utilisant A3 déduire alors la construction de $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathscr{C}_{-2})$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_2)$.
3. Soit $g$ la restriction de $f_2$ à $\left]-2 ; -\dfrac{1}{2}\right[$.

*i.* Démontrer que $g$ est une bijection de $\left]-2 ; -\dfrac{1}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

*ii.* Définir analytiquement $g^{-1}$ et construire dans un nouveau repère $\mathscr{R}$ la courbe représentative de $g^{-1}$.

## LXIII. La Réunion, série E

**Ex. 1490.** *4 points* *./1979/reunionE/exo-1/texte.tex*

Dans un plan vectoriel P de base $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère un endomorphisme $f$ défini par $f(\vec{i}) = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j}$.

**1.** Déterminer le noyau de l'endomorphisme $f$ et l'image du plan P par $f$.

**2.** Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $(1 ; 3)$ et $(-1 ; 2)$.

**3.** Montrer que $f$ est le produit d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle de P.

**Ex. 1491.** *4 points* *./1979/reunionE/exo-2/texte.tex*

Une machine remplit automatiquement des sachets en mélangeant deux produits A et B.
Dans chaque sachet, pour le produit A, la machine introduit 50 grammes avec une probabilité de 0,8 ou 51 grammes avec une probabilité de $0,2$ et indépendamment pour le produit B elle introduit 50 grammes avec une probabilité de $0,6$ ou 51 grammes avec une probabilité de $0,4$.

**1.** Quelles sont les masses possibles $X$ d'un sachet ? Établir et présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de $X$.

**2.** Quelle est la probabilité Pour qu'un sachet contienne au plus 101 gram- mes ?

**3.** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**4.** Les sachets sont vendus Par groupes de deux, la constitution des paires étant équiprobable, Calculer la probabilité pour qu'un groupe de deux sachets contienne 202 grammes.

## PROBLÈME 533 *12 points*

*./1979/reunionE/pb/texte*

$\mathscr{P}$ est un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité de longueur sera prise égale à 2 cm.

A- 1. a) On considère l'application affine $f$ associant au point $M(x\ ;\ y)$ le point $M'(x'\ ;\ y')$ au moyen des relations :

$$f : \begin{cases} x' = -y+2 \\ y' = x. \end{cases}$$

Déterminer la nature géométrique et les éléments de $f$ ainsi que la transformée par $f$ de la droite $y'y$.

b) Mêmes questions pour l'application affine

$$g : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x-y)+1 \\ y' = \dfrac{1}{2}(x+y). \end{cases}$$

2. On considère le point fixe $A(2\ ;\ 0)$ , le point variable $P$ tel que $\overrightarrow{AP} = t\vec{\imath}$ et le point variable $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = t\vec{\jmath}$ ; ($t$est un paramètre réel : prendre $t = 1$ pour la figure).

a) Déterminer et construire l'ensemble des milieux $I$ du segment $[MP]$.

b) Établir que la médiatrice du segment $[MP]$ a pour équation :

$$(t+2)x+ty-2(t+1) = 0$$

et montrer, lorsque $t$ varie, que cette médiatrice passe par un point fixe $\omega$ dont on précisera les coordonnées.

c) Vérifier que $P$ est l'image de $M$ par application $f$ ; en déduire une autre résolution de la question 2b.

d) Vérifier que $I$est l'image de $M$par l'application $g$ ; en déduire une autre résolution de la question 2a.

3. Le point fixe $A$ et les points variables $M$ et $P$ restent définis comme à la question 2. Soit $G$ le barycentre des points $O$, $M$, $P$ affectés respectivement des coefficients -1 ; +1 ; +1. Placer G sur la figure.

a) Par quelle application affine simple le point $G$ est-il l'image du point $I$milieu du segment $[MP]$ ?

b) Déterminer l'ensemble des points $G$.

B- **1.** On définit les fonctions $\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+2+2\sqrt{2x} \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} f_2 : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+2-2\sqrt{2x} \end{array}$.

Étudier $f_1$ et $f_2$ et tracer leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Préciser la nature des branches infinies de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

**2.** On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$(y-x-2-2\sqrt{2x})(y-x-2+2\sqrt{2x}) = 0.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est l'union de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et admet comme axe de symétrie orthogonale la droite d'équation $y = x$.

**3.** Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant 2$ , $0 \leqslant y \leqslant x+2-2\sqrt{2x}$.

Retour page 1

# LXIV. Rennes, série C

Ex. 1492. ./1979/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit $K$ l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.
On note $E$ l'ensemble des entiers naturels s'écrivant en base dix $\overline{ababab}$ où $(a,\ b)$ est un couple *quelconque* de $K^2$.

**1.** Quel est le nombre d'éléments de $E$ ?

**2.** Si $n = \overline{ababab}$, démontrer que $\overline{ab}$ divise $n$.

**3.** Quel est le plus grand diviseur commun à tous les éléments de $E$ ?
Quelle est la somme des éléments de $E$ ?

Ex. 1493. ./1979/rennesC/exo-2/texte.tex

On considère dans un plan affine euclidien orienté un triangle isocèle ABc rectangle en A tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ soit $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**1.** Déterminer $\mathrm{F}_1 = \mathrm{R} \circ \mathrm{T}$ et $\mathrm{F}_2 = \mathrm{T} \circ \mathrm{R}$ (nature et éléments caractéristiques).

**2.** Soit $M$ un point du plan, $M_1$ son image par $\mathrm{F}_1$ et $M_2$ son image par $\mathrm{F}_2$. Quelle set la nature du quadrilatère BC$M_1M_2$ ?

## Problème 534 *12 points* ./1979/rennesC/pb/texte

-A- **Préliminaire**

Soit E la fonction qui à tout réel $x$, associe le plus grand entier inférieur ou égal à $x$, et $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - \mathrm{E}(x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{E}(x+k) = \mathrm{E}(x) + k$. En déduire que $g$ est périodique.

Représenter graphiquement g (en repère orthonormé) sur l'intervalle $[-1\,;+1[$ de $\mathbb{R}$. Étudier la continuité de $g$ au point $0$.

-B- **Les parties BI et BII, qui suivent, sont indépendantes**

Soit $F$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que $F$ muni de l'addition des applications, et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $f_1,\ f_2,\ f_3$ les éléments de $F$ définis par :

$$\begin{cases} f_1(t) = \mathrm{E}(t) \\ f_2(t) = 2^{t-\mathrm{E}(t)} \\ f_3(t) = 2^{2(t-\mathrm{E}(t))} \end{cases}$$

où E est la fonction définie dans le préliminaire. On appelle $H$ le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$.

I

1. Soit $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $H$.
2. Soit $\psi$ l'application linéaire de $H$ vers $H$ définie dans la base $\mathscr{B}$ de la façon suivante : un vecteur quelconque $f$ de coordonnées$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ a pour image $\psi(f)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ telles que :
$$\begin{cases} x' = y + 3z \\ y' = -3x + 4y + 9z \\ z' = x - y - 2z. \end{cases}$$
Montrer que $\psi$ est une projection vectorielle dont on précisera les caractéristiques géométriques.
3. Soit $f = xf_1 + yf_2 + zf_3$ un élément de $H$ . Trouver une condition nécessaire et suf?sante sur $x,\ y,\ z$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\psi(H)$ l'image de $H$ par $\psi$ est aussi le sous-espace vectoriel des applications de $H$ continues sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les applications de $H$ dérivables sur $\mathbb{R}$ constituent un sous-espace vectoriel $D$ de $H$ inclus dans $\psi(H)$.



Retour page 1

II Soit $h$ l'élément de $H$ défini par : $h = f_1 - 2f_2 + f_3$ .

1. a) Montrer que, pour tout $k$ élément de $\mathbb{Z}$, la courbe représentative $\Gamma$ de $h$ dans un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est invariante par la translation $T_k$ de vecteur $\overrightarrow{V_k} = k(\vec{i} + \vec{j})$.

   b) Établir le tableau de variations de $h$ sur $[0\,;1]$ et étudier la dérivabilité de $h$ à droite en 0 et à gauche en 1.

   Représenter graphiquement la restriction de $h$ à l'intervalle$[-1\,;3]$ (le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sera orthonormé, et on prendra 2 cm pour unité).

2. Démontrer que $h$ est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et calculer pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$U_n = \int_n^{n+1} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Démontrer que la suite de terme général $U_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

   Retrouver ce dernier résultat en donnant une interprétation graphique de $U_n$.

## LXV. Rouen, série C

**Ex. 1494.** ———— *3 points.* *./1979/rouenC/exo-1/texte.tex*

On dispose de deux dés cubiques dont chaque face a la même probabilité d'apparaître après un lancer.
L'un a une face numérotée 0, deux faces numérotées 1, trois faces numérotées 2 ;
l'autre a trois faces numérotées 0, deux faces numérotées 1, une face numérotée 2.

**1.** On définit une variable aléatoire, X, par la somme des numéros de la face supérieure de chaque dé après un lancer simultané. Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance mathématique et sa variance.

**2.** Pour chaque lancer simultané des deux dés, on appelle succès la réalisation d'une somme égale à 4. On effectue $n$ lancers des deux dés. Calculer $n$ tel que l'espérance mathématique du nombre de succès soit égale à 1.

**Ex. 1495.** ———— *4 points.* *./1979/rouenC/exo-2/texte.tex*

1. Calculer

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2.$$

2. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2.$$

   a) Étudier les variations de $f$. Dessiner la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On se contentera de déterminer les points de la courbe d'abscisses -1, 0 et 1 et les tangentes à la courbe en ces points ; on ne demande pas d'étudier les branches infinies.)

   b) Dire pourquoi $f$ admet une application réciproque $g$ dont on déterminera le nombre dérivé pour la valeur $y_0 = f(x_0)$ en fonction de $y_0$.

   c) $y$ étant un réel fixé, résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$.

   En déduire l'expression de $g$ puis retrouver $g'(y_0)$.

3.

## PROBLÈME 535 *13 points.*

./1979/rouenC/pb/texte

Soit E un plan vectoriel réel, P un plan affine de direction E et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère de P. On considère les vecteurs

$$\vec{e_1}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}),\qquad \vec{e_2}=\frac{1}{2}(\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j})$$

et les points $I$, $A$ et $B$ de coordonnées respectives :

$$\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)\qquad\left(0\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad\left(0\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

On désigne par :

- $\Delta_1$ et $\Delta_2$ les droites vectorielles engendrées respectivement par $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ ;
- $D_1$ et $D_2$ les droites affines contenant $I$ et de directions respectives $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

-A- 1. a) Démontrer que $(\vec{e_1},\ \vec{e_2})$ est une base de E.

b) On appelle $p_1$ la projection vectorielle sur $\Delta_1$ de direction $\Delta_2$ et $p_2$ la projection vectorielle sur $\Delta_2$ de direction $\Delta_1$. Démontrer que :

$$p_1+p_2=\mathrm{Id}_\mathrm{E},\qquad p_1\circ p_2=p_2\circ p_1=\theta_\mathrm{E}\qquad\text{et}\qquad p_1\circ p_1=p_1.$$

($\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est l'application identique de E et $\theta_\mathrm{E}$ l'application nulle de E).

2. À tout nombre réel $k$ non nul, on associe l'endomorphisme de E,

$$\varphi_k=k.p_1+\frac{1}{k}.p_2$$

et on désigne par $\Phi$(E)l'ensemble des $\varphi_k$ lorsque $k$ décrit $\mathbb{R}^\star$.

a) Démontrer que $\varphi_k(\vec{e_1})=k.\vec{e_1}$ et $\varphi_k(\vec{e_2})=\dfrac{1}{k}.\vec{e_2}$.

b) En déduire que l'application $\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^\star&\to&\Phi(\mathrm{E})\\ k&\longmapsto&\varphi_k\end{array}$ est bijective

c) Exprimer $\varphi_k\circ\varphi_{k'}$ en fonction de $k,\ k',\ p_1$ et $p_2$.

-B- On appelle $f_k$ l'application affine de P, d'endomorphisme associé $\varphi_k$ et laissant $I$ invariant. Soit G l 'ensemble des application $f_k$ quand $k$ décrit $\mathbb{R}^\star$.

1. Démontrer que G est stable pour la loi $\circ$ et que $f_1$ est l'application identique de P. (On pourra utiliser des résultats de A).

2. Soit $\psi:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^\star&\longrightarrow&\mathrm{G}\\ k&\longmapsto&f_k\end{array}$.

a) Démontrer que $\psi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^\star,\ \times)$ sur $(\mathrm{G},\ \circ)$ et préciser la structure de $(\mathrm{G},\ \circ)$.

b) Pour tout entier naturel $n$, on définit $f_k^n$ par :

$$\begin{cases}f_k^0=f_k\\ \forall n\in\mathbb{N}^\star f_k^n=f_k^{n-1}\circ f_k.\end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $f_k^n=f_{k^n}$.

-C- Soit H la courbe dont une équation dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est :

$$2x^2-y^2+2x+1=0.$$

1. Démontrer que H est une hyperbole admettant $D_1$ et $D_2$ comme asymptotes. Dessiner H. Indiquer les points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

2. a) Soit $M$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$, démontrer qu'il existe un couple de réels $(\alpha\ ;\ \beta)$ unique, tel que $M$ soit le barycentre du système pondéré : $(A,\ \alpha)\ (B,\ \beta)\ (I,\ 1-\alpha-\beta)$.

b) Démontrer qu'un point $M$ appartient à H, si et seulement si le couple $(\alpha\ ;\ \beta)$ déterminé à la question précédente satisfait à $4\alpha\beta+1=0$.

c) Démontrer que H est globalement invariante par toute application $f_k$ de G.



Retour page 1

-D- 1. Démontrer que toute application $f_k$ de G, transforme tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{4}}{2}\left(k-\dfrac{1}{k}\right)y-\dfrac{1}{2} \\ \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(k-\dfrac{1}{k}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)y. \end{cases}$$

2. On appellera, par la suite, $\mathscr{S}$ l'ensemble des couples d'entiers naturels $(X\ ;\ Y)$ tels que

$$2X^2 - Y^2 + 2X + 1 = 0.$$

a) Démontrer qu'un couple $(X\ ;\ Y)$ appartient à $\mathscr{S}$ et satisfait à $X \leqslant 3$ si et seulement si $(X\ ;\ Y)$ est égal à $(0\ ;\ 1)$ ou $(3\ ;\ 5)$.

b) Soit $J$ et $J'$ les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 1)$ et $(3\ ;\ 5)$. Démontrer qu'il existe un seul réel non nul $k$, tel que $f_k(J) = J'$.
On notera $g$l'application $f_k$ ainsi déterminée. Vérifier que $g$ transforme tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2. \end{cases}$$

3. On définit une application $\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & P \\ n & \longmapsto & Q_n \end{array}$ en posant $Q_0 = J$, $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star) \quad (Q_n = g(Q_{n-1}))$.

On désigne par $(a_n\ ;\ b_n)$ les coordonnées de $Q_n$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $(a_n\ ;\ b_n)$ appartient à $\mathscr{S}$.

b) Calculer, pour tout entier naturel $n$, $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

## LXVI. Rouen remplacement, série C

**Ex. 1496.** ——— *4 points.* *./1979/rouenCrem/exo-1/texte.tex*

**1.** $k$ et $n$ étant deux entiers naturels strictement positifs, calculer

$$F = \int_0^\pi (\sin kx).(\cos nx)\,\mathrm{d}x$$

a) lorsque $k = n$,

b) lorsque $k = 2$, $n = 1$.

**2.** $n$ étant un entier naturel strictement positif, calculer

$$G = \int_0^\pi (x^2 - 2\pi x)(\cos nx)\,\mathrm{d}x$$

en intégrant deux fois par parties.

**Ex. 1497.** ——— *3 points.* *./1979/rouenCrem/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit $x$ un entier relatif. déterminer le reste de la division euclidienne de $x^3$ par 9, en discutant suivant les valeurs de $x$. En déduire que pour tout entier relatif $x$, on a :

$$(x^3 \equiv 0\ [9]) \Leftrightarrow (x \equiv 0\ [3])$$
$$(x^3 \equiv 1\ [9]) \Leftrightarrow (x \equiv 1\ [3])$$
$$(x^3 \equiv 8\ [9]) \Leftrightarrow (x \equiv 2\ [3])$$

**2.** On considère trois entiers relatifs $x$, $y$ et $z$ tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Démontrer que l'un des nombres $x$, $y$, $z$ est divisible par 3.



Retour page 1

## PROBLÈME 536 *13 points.*

*./1979/rouenCrem/pb/texte*

A) On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$, définie par

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$$

et sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer qu'il existe trois constantes réelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ telles qu, pour tout $x$ de l'ensemble de définition de $f$ on ait :

$$f(x) = x - \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x-1} - \frac{\gamma}{x+1}.$$

   b) Étudier les variations de la fonction $f$. Déterminer les asymptotes de la courbe $(\mathscr{C})$ et son centre de symétrie.
   Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

2. On considère la fonction polynôme $P_a$ définie par

$$P_a(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1.$$

   Vérifier, en utilisant les résultats sur les variations de la fonction $f$, que l'équation $P_a(x) = 0$ admet, quel que soit le paramètre $a$, quatre racines réelles distinctes.

B) On considère l'application $\varphi$, de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

On note $\varphi(z) = \mathscr{Z}$.
$m$ désigne le point d'affixe $z$, $M$ celui d'affixe $\mathscr{Z}$, $A$ et $A'$ les points d'affixes respectives $1$ et $-1$. On note $|z|$ le module de $z$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $\mathscr{Z} = X + \mathrm{i}Y$ avec $x$, $y$, $X$, $Y$ réels.

1. a) Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.
   b) Déterminer l'ensemble des points $m$ tels que $\mathscr{Z}$ soit réel.
   c) Déterminer l'ensemble des points $m$ tels que $\mathscr{Z}$ soit imaginaire pur.
2. a) Quelles distances représentent $|1-z|$ et $|1+z|$ ?
   Déterminer l'ensemble des points $m$ tels que $|\mathscr{Z}| = 1$.
   b) Démontrer que l'ensemble $(\mathscr{C}_k)$ des points $m$ tels que $|\mathscr{Z}| = k$, où $k$ est un réel strictement positif et différent de 1, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

C) Soit $z_1$ un nombre complexe autre que $-1$, $0$ et $1$ et :

$$z_2 = \varphi(z_1), \qquad z_3 = \varphi(z_2), \qquad z_4 = \varphi(z_3), \qquad z_5 = \varphi(z_4)$$

où $\varphi$ est définie au B.

1. a) Exprimer $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z_5$ en fonction de $z_1$. Étudier les cas particuliers $z_1 = \mathrm{i}$ et $z_1 = -\mathrm{i}$.
   b) Calculer

$$z_1.z_2\ ;\ z_2.z_4\ ;\ (z_1+z_3).(z_2+z_4).$$

2. On pose $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = a$.
   Développer, réduire et ordonner $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$, exprimer le résultat en fonction de $z$ et $a$.
3. On pose, pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$$

   où $x_n$ et $y_n$ sont réels.
   Montrer en utilisant B(1)a que les quatre nombres $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ sont de même signe.
   Que peut-on dire de $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ si $a$ est réel ?
   Quel résultat du A retrouve-t-on ainsi ?

Retour page 1

# LXVII. Rouen remplacement, série E

**Ex. 1498.** ———— *3 points.* *./1979/rouenerem/exo-1/texte.tex*

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points A d'affixe $1-\mathrm{i}$ et $B$ d'affixe $3+2\mathrm{i}$.
Déterminer les affixes des points $C$ et $D$ tels que l'ensemble ordonnée $(A,\ B,\ C,\ D)$ soit un carré dont une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}}\right)$ est $+\dfrac{\pi}{2}$.

**Ex. 1499.** ———— *4 points.* *./1979/rouenerem/exo-2/texte.tex*

$\mathscr{P}$ est un plan affine euclidien et $A,\ B,\ C$ sont trois points de $\mathscr{P}$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4a$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2a.$, $a$ Ã©tant un rÃ©el strictement positif donnÃ©.
On considÃ¨re le systÃ¨me de points pondÃ©rÃ©s $\{(A,\ x), (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$

**1.** DÃ©terminer l'ensemble des barycentres $G$ de ce systÃ¨me quand $x$ dÃ©crit $\mathbb{R} - \{-2\}$.

**2.** Dans le cas $x = -1$, dÃ©terminer $G$ et l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que :

$$MB^2 + MC^2 = MA^2.$$

**3.** $G$ dÃ©signant le point dÃ©fini au 2, montrer que :

$$\forall M \in \mathscr{P}, \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AG}.$$

En dÃ©duire l'ensemble des points $M$ du plan affine $\mathscr{P}$ vÃ©rifiant :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 32a^2.$$

## Problème 537 *13 points.* *./1979/rouenerem/pb/texte*

les représentations graphiques seront faites dans un plan affine euclidien $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I- Soit $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[ \qquad f(x) = x^2 - 2\log x,$$

et $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative dans $(\mathscr{P})$. Étudier les variations de $f$ et vérifier que :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[ \qquad f(x) \geqslant 1.$$

Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_1)$ et tracer $(\mathscr{C}_1)$. (On déterminera les équations des tangentes à $(\mathscr{C}_1)$ aux points $A$ et $B$ d'abscisses respectives $1$ et $\mathrm{e}$).

II- $g$ est la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[ \qquad g(x) = x^2 - 2(\log x)^2,$$

et $(\mathscr{C}_2)$ est sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction $g$.(On remarquera que $g'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$).
   Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C}_2)$ (On ne demande pas de tracer $(\mathscr{C}_2)$ immédiatement).
2. Calculer $g''(x)$, puis $g''(1)$ et $g''(\mathrm{e})$. Calculer $g'''(x)$ et vérifier que

$$\forall x \in [1\,;\mathrm{e}] \qquad g'''(x) \geqslant 0.$$

   En déduire qu'il existe un nombre réel unique $\alpha$ de $]1\,;\mathrm{e}[$ tel que $g''(\alpha) = 0$.

III- 1. Étudier selon les valeurs de $x$, le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire les points d'intersection de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ainsi que les positions relatives des deux courbes. On tracera maintenant $(\mathscr{C}_2)$sur le même graphique que $(\mathscr{C}_1)$. On désigne par $A$ et $B$ les deux points d'intersection.
   Construire la tangente à $(\mathscr{C}_2)$ au point d'abscisse 1.

2. Un parallèle à $Oy$ d'abscisse $x$ strictement positive coupe $(\mathscr{C}_1)$ en $M_1$ et $(\mathscr{C}_2)$ en $M_2$ montrer que

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[ \qquad \overline{M_1M_2} < 1.$$

Retour page 1

3. Calculer l'aire du domaine compris entre les arcs $AB$ des deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

IV- $M$ est point mobile du plan $(\mathscr{P})$ dont les coordonnées sont définies à l'instant $t$ par

$$\forall t \in [0\,;1] \qquad \begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{t} \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t} - 2t \end{cases}$$

$$\forall t \in ]1\,;+\infty[ \qquad \begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ \\ y(t) = \mathrm{e}^{\frac{2}{t}} - \dfrac{2}{t^2}. \end{cases}$$

Indiquer la trajectoire du point $M$, le sens de parcours sur cette trajectoire et la position limite (si elle existe) du point $M$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

🛈 : e désigne la base de la fonction logarithme népérien notée

$$\log$$

## LXVIII. Strasbourg, série C

**Ex. 1500.** ——— *4 points.* *./1979/strasbourgC/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(2+\sqrt{3}\mathrm{i})z-2+\sqrt{3}\mathrm{i}=0$.
2. Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct. On considère l'application $f$ de P dans P qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}+\frac{5}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a) Montrer que $f$ est un antidéplacement. Montrer que $f = s_D \circ t_{\vec{\omega}}$ où $s_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite $D$ et $t_{\vec{\omega}}$ la translation de vecteur $\omega$, $\omega$ appartenant à la direction de$D$ ; déterminer $D$ et $\vec{\omega}$.

b) Soit C le cercle de centre $\Omega$ de coordonnées $\left(0\ ;\ -\sqrt{3}\right)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de rayon 1. Déterminer l'image de C par $f$.

**Ex. 1501.** ——— *3 points.* *./1979/strasbourgC/exo-2/texte.tex*

Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels qui vérifient

$$\begin{cases} \delta = 60 \\ \mu = 3\ 600 \end{cases}$$

où $\delta$ désigne le pgcd de $x$ et $y$, $\mu$ leur ppcm.

**PROBLÈME 538** *13 points.* *./1979/strasbourgC/pb/texte*

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathscr{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.
Pour tout $m$ réel, on note $C_m$ l'ensemble des points $M$, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$, strictement positives dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ , vérifient la relation :

$$\log x.\log y = m.$$

1. Montrer que pour tout $m$ réel, $C_m$ est non vide.
2. Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$. Montrer que pour tout $m$ de $\mathbb{R}$, $C_m$ est globalement invariant dans cette symétrie.
3. Déterminer $C_0$.



Retour page 1

4. a) Montrer que si $m$ est non nul, $C_m$ est la représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f_m : \mathbb{R}_{+\star} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}} \end{aligned}$$

   et vérifier que $f_m$ est involutive.

   b) Étudier les limites de $f_m$ aux bornes de son ensemble de définition.

   c) Pour tout réel m non nul, on considère la fonction $g_m$ définie par

$$\begin{array}{rcll} g_m : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & f_m(x) & \quad\text{pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}_{+\star}^{+\star} - \{1\}. \\ 0 & \longmapsto & 1 & \\ 1 & \longmapsto & 0 & \end{array}$$

   Dresser dans chaque cas ($m$ étant strictement positif et $m$ strictement négatif) le tableau de variation de $g_m$.

5. Étudier la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}-1}}{\frac{m}{\log x}}$, quand $m$ tend vers zéro par valeurs positives ($m$ est un réel non nul).

   Étudier la limite de $\dfrac{m}{\log x}\mathrm{e}^{\frac{m}{\log x}}$, quand $x$ tend vers 1, par valeurs inférieures pour $m$ strictement positif, par valeurs supérieures pour $m$ strictement négatif.

   En déduire que

   - pour $m > 0$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = -\infty$ ;
   - pour $m < 0$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g_m(x) - g_m(0)}{x} = +\infty$ ;
   - pour $m > 0$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x-1} = 0$ ;
   - pour $m < 0$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g_m(x) - g_m(1)}{x-1} = 0$.

   Donner des vecteurs directeurs des demi-tangentes à la courbe représentative de $g_m$ aux points d'abscisse 0 et 1.

6. a) Représenter graphiquement $C_1$, $C_{-1}$ et $C_0$ sur une même figure.
   Préciser les intersections de $C_1$ et de la droite d'équation $y = x$ et donner un vecteur directeur des tangentes en ces points.

   b) Soit $C$ l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifient la relation :

$$\log^2|x|\,.\log^2|y| = 1.$$

   Montrer que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont axes de symétrie de $C$et que l'ensemble des points de $C$, dont les deux coordonnées sont positives est égal à $C_1 \cup C_{-1}$. En déduire la représentation graphique de $C$.

7. On considère le point mobile $M_1$ dont les coordonnées à tout instant $t$ supérieur ou égal à 1 sont données dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par :

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

   a) Donner la trajectoire du mouvement et préciser le sens de parcours.

   b) Préciser si le mouvement est uniforme, accéléré ou retardé sur l'intervalle de temps $[1\,;+\infty[$.

   c)

   d) On considère le point $M_2$ mobile sur $C_1$ qui à tout instant t a même abscisse que $M_1$.
   Donner les coordonnées $(x_2(t)\ ;\ y_2(t))$ de $M_2$ à tout instant $t$ supérieur ou égal à 1.
   Donner la trajectoire de $M_2$ et préciser le sens de parcours.
   On appelle $\vec{V}_1(t)$ la vitesse de $M_1$ à l'instant $t$ et $\vec{V}_2(t)$ la vitesse de $M_2$ à l'instant $t$.
   Comparer $\|\vec{V}_1(t)\|$ et $\|\vec{V}_2(t)\|$ à tout instant $t$.



Retour page 1

# LXIX. La Réunion, série C

**Ex. 1502.** *4 points.* ./1979/reunionC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer les entiers relatifs $x$ congrus à -1 modulo 5 et 0 modulo 3 :

$$x \equiv -1\ (5) \qquad \text{et} \qquad x \equiv 0\ quad(3).$$

2. Déterminer les entiers relatifs $x$ tels que :

$$x \equiv 2\ (5) \qquad \text{et} \qquad x \equiv -1\ quad(3).$$

3. Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$l'équation :

$$x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = \dot{0}.$$

**Ex. 1503.** *4 points.* ./1979/reunionC/exo-2/texte.tex

Étudier la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - |x\log x| & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

**1.** La fonction $f$ est-elle continue sur $[0\,;+\infty[$?
est-elle dérivable sur $[0\,;+\infty[$?

**2.** Construire la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser en particulier les tangentes à la courbe aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

## Problème 539 *12 points.* ./1979/reunionC/pb/texte

*Rappels* : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$. L'application $p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ qui au couple $(z,\ z')$ associe la partie réelle de $z\overline{z}'$ est un produit scalaire ; une base orthonormée de $\mathbb{C}$ muni de ce produit scalaire est $(1,\ \mathrm{i})$.

1. On donne un nombre complexe $u$ et l'on considère l'ensemble D des complexes $z$ tels que $z + u\overline{z} = 0$.

   a) Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

   b) Démontrer que si $|u| \neq 1$, D est de dimension 0.

   c) Démontrer que si $|u| = 1$ et $u \neq 1$, D est la droite vectorielle de base $(1,\ u)$.
   Étudier le cas $u = 1$.

2. $a$ est un réel non nul, et $b$ un élément de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.
   On considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(z) = az + b\overline{z}.$$

   a) Montrer que $\varphi$ est linéaire.

   b) Étudier le noyau de $\varphi$. En déduire que $\varphi$ est bijective si, et seulement si, $|a| \neq |b|$.

3. Dans cette question on suppose que $\varphi$ est bijective.
   Étudier suivant les valeurs du réel $\lambda$ l'ensemble $E_\lambda$ des nombres $z$ tels que $\varphi(z) = \lambda z$. Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}$ deux droites vectorielles globalement invariantes par $\varphi$ et que ces deux droites sont orthogonales.

4. Dans cette question on suppose que $a = |b|$.

   a) Déterminer l'image de $\varphi$.

   b) Montrer que suivant les valeurs de $a$, $\varphi$ est soit une projection vectorielle, soit la composée d'une projection vectorielle par une homothétie vectorielle.

5. On considère la plan affine euclidien P, muni d'un repère orthonormé $O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.
   Á tout point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.



Retour page 1

a) Définir avec précision l'application $f$ de P dans P dans laquelle $m$ d'affixe $z$ a pour image $m'$ d'affixe

$$z = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$m$ étant donné, construire $m'$ puis $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{Om'})$.
Quelle est la nature de l'application $g$ de P dans P telle que $M = g(m)$.
Quelle application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut-on lui associer ?

b) Utiliser les résultats de la troisième question pour étudier l'application $\ell$ de P dans P, qui, à tout point $m$ d'affixe $z$, associe le point $M$ d'affixe $Z = -z + 2\mathrm{i}z$.
Dessiner l'image du cercle de centre $O$ et de rayon par cette transformation.

# LXX. Togo, série C

**Ex. 1504.** ——— *4 points.* *./1979/togoc/exo-1/texte.tex*

On considère dans le plan affine euclidien E, le carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ de diagonale $[A,\ C]$ et $[B,\ D]$.
Soit $I$ le point de $I$ défini pat : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC}$.

**1.** Déterminer trois réels $m,\ n,\ p$, tels que $I$ soit la barycentre des points $A,\ B,\ D$ affectés des coefficients respectifs $m,\ n,\ p$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de E tels que :

$$3\overrightarrow{MA}^2 = 2\overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MD}^2.$$

**3.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de E tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MC}^2 + 2\overrightarrow{MD}^2.$$

**Ex. 1505.** ——— *4 points* *./1979/togoc/exo-2/texte.tex*

On considère l'ensemble $A$ des entiers naturels $n$ tels que si l'on divise $n$ par $p$ on obtient pour reste $p-1$, avec

$$p \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}.$$

Déterminer le plus petit élément de $A$.

**PROBLÈME 540** *12 points.* *./1979/togoc/pb/texte*

Soit $P$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
A tout couple de points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$, on associe le point noté $M \star M'$ de coordonnées $(xx' + 4yy'\ ;\ xy' + yx')$

$$(M,\ M') \longmapsto M \star M'.$$

On définit ainsi une loi de composition interne dans $P$ notée $\star$.

-A-

**1.** Montrer que $\star$ est associative.

**2.** $(P,\ \star)$ est-il un groupe commutatif ?
Déterminer les éléments de $P$ inversibles pour $\star$.

**3.** Soit $\mathscr{H}$ la courbe d'équation $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$.
Représenter $\mathscr{H}$ et démontrer que $(\mathscr{H},\ \star)$ possède une structure de groupe commutatif.

-B-

Soit $I$ un point fixe de $P$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$.
On définit une application $f_I$ du plan $P$ dans lui-même par :

$$f_I(M) = M' = I \star M.$$

**1.** Montrer que $f_I$ est une application affine.
Comment doit-on choisir $I$ pour que $f_I$ soit bijective ?

**2.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f_I$ ; discuter.

**3.** Déterminer $I$ pour que $f_I$ soit une involution.
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacun des applications obtenues.

**4.** On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f_I$ bijectives. Démontrer que $(\mathscr{F},\ \circ)$ possède une structure de groupe commutatif.

-C-

Soit $\varphi_I$ l'endomorphisme associé à $f_I$.

**1.** Déterminer une base $(\vec{u},\ \vec{v})$ du plan vectoriel associé à $P$ telle que la matrice de $\varphi_I$ dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de réels définies par $u_0,\ v_O$ et les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 4v_{n-1}\\ v_n = u_{n-1} + v_{n-1}\end{cases}$$

Donner en fonction de $u_0,\ v_0$ et $n$ les valeurs de $u_n$ et $v_n$.

# LXXI. Togo, série E

**Ex. 1506.** ———— *4 points.* *./1979/togoE/exo-1/texte.tex*

Soit $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{B},\ P)$ tels que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

1. Démontrer que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$, $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de $A$.
En Déduire que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times P(\overline{B})$, $\overline{B}$ désigne l'événement contraire de $B$.
On pose $P(A) = a$ et $P(B) = b$, calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.
Étudier les variations de $f$.
Démontrer que pour tout $x$ réel, $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
3. On suppose que $a + b = \dfrac{1}{2}$.
Démontrer que l'on a $\dfrac{1}{2} \leqslant P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

**Ex. 1507.** ———— *3 points* *./1979/togoE/exo-2/texte.tex*

On considère l'espace vectoriel euclidien $E_3$ rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $E_3$ qui à tout vecteur $\vec{u}\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u})\vec{u}'\left((x'\ ;\ y'\ ;\ z')\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2b}{3a}y - \dfrac{2}{3a}z\\ y' = -\dfrac{2a}{3b}x + \dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{3b}z \qquad a \in \mathbb{R}^\star,\ b \in \mathbb{R}^\star\\ z' = -\dfrac{2a}{3}x - \dfrac{2b}{3}y + \dfrac{1}{3}z.\end{cases}$$

**1.** Déterminer les couple s$(a,\ b)$ tels que $\varphi_{a,b}$ soit une isométrie vectorielle.

**2.** Pour chacun des couples trouvés, définir avec précision l'isométrie vectorielle correspondante.

Retour page 1

## Problème 541 *13 points.* ./1979/togoE/pb/texte

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle et on rappelle que $\mathscr{F}$ muni de l'addition des fonctions et le la multiplication d'une fonction par un nombre réel, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que $\mathscr{P}_n$, ensemble des polynômes de degré au plus égal à $n$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F},\ +,\ .)$

Soit $E_{m,n}$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ défini par :

$$E_{m,n}=\{f\in\mathscr{F}/|\ f(x)=\mathrm{e}^{mx}P_n(x)\}$$

$m$ étant un entier relatif non nul fixé et $P_n$ un élément de $\mathscr{P}_n$.

A- On suppose dans cette question que $n=2$.

1. Démontrer que $E_{m,2}$ possède un structure d'espace vectoriel pour l'addition des fonctions et le la multiplication d'une fonction par un nombre réel.
   Donner en la justifiant la dimension de $E_{m,2}$.
2. Soit $\varphi$ l'application de $E_{m,2}$ dans $\mathscr{F}$ définie par :
   $$\begin{aligned}\varphi : E_{m,2} &\longrightarrow \mathscr{F}\ ,\\ f &\longmapsto f'\end{aligned}$$
   où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
   Démontrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E_{m,2}$.
3. Soit $g$ un élément de $E_{m,2}$ défini par $g(x)=\mathrm{e}^{mx}P(x)$.
   Résoudre dans $E_{m,2}$ l'équation $\varphi(f)=g$.
   Que peut-on en déduire pour $\varphi$ ?
   Soit $f$ la solution obtenue ; on a donc $f(x)=\mathrm{e}^{mx}Q(x)$ avec $Q\in\mathscr{P}_2$.
   Montrer que $Q$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $P$, $P'$ et $P''$.
4. Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les éléments de $E_{m,2}$ définis par
   $$f_1(x)=x\mathrm{e}^{mx}\ ,\ f_2(x)=(1-x)\mathrm{e}^{mx}\ ,\ f_3(x)=x(1-x)\mathrm{e}^{mx}.$$
   Démontrer que $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est une base de $E_{m,2}$.
   Démontrer que le plan engendré par $(f_1,\ f_2)$ est stable par $\varphi$.

B- On suppose dans cette question $m=-1$ et $n=2$.
On a donc $E_{-1,2}=\left\{f\in\mathscr{F}/|\ f(x)=\mathrm{e}^{-x}(ax^2+bx+c)\right\}$.

1. Soit $g$ l'élément de $E_{-1,2}$ défini par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x^2)$.
   Déterminer les coordonnées de $g$ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ définie en A4.
   Étudier les variations de $g$ et tracer la courbe représentative de $g$, soit $\mathscr{C}_g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Déterminer $f\in E_{-1,2}$ telle que $\varphi(f)=g$. ($\varphi$ est définie au A2). Donner les coordonnées de $f$ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.
   Étudier les variations de $f$ et construire la courbe représentative de $f$, soit $\mathscr{C}_f$, dans le même repère que $\mathscr{C}_g$.
3. Déterminer l'aire du domaine du plan $K$ déterminé par
   $$K=\left\{M(x\ ;\ y)\ |\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\right.\quad .$$
   On donne une valeur approchée décimale de $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ : 4,1.

C- On suppose dans cette question $m=-1$ et $n\in\mathbb{N}$.
On pose $G_n=E_{-1,n}=\left\{f\in\mathscr{F}\ |\ f(x)=\mathrm{e}^{-x}P_n(x)\right\}$.



Retour page 1

1. Montrer que $G_n$ muni de muni de l'addition des fonctions et le la multiplication d'une fonction par un nombre réel, possède une structure d'espace vectoriel. Quelle est la dimension de $G_n$ ?
   Soit $\begin{array}{rl}\psi : G_n & \longrightarrow \mathscr{F} \\ f & \longmapsto f'\end{array}$, $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
   Démontrer que $\psi$ est un endomorphisme de $G_n$.
   Démontrer que $\psi$ est injective. En déduire que $\psi$ est bijective.
2. Soit $h_n$ l'élément de $G_n$ défini par $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x}x^n$.
   Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t$
   Démontrer sans la calculer explicitement que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^\star$).
   En déduire que
   $$\frac{I_n}{n!} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\right) + I_0.$$
3. Démontrer que
   $$1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\right) \leqslant \frac{1}{n!(n+1)}.$$
   En déduire que e est la limite de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

# LXXII. Toulouse, série C

**Ex. 1508.** ———— *3 points.* *./1979/toulouseC/exo-1/texte.tex*

Soit un plan affine $P$, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Dans $P$, on considère les $n$ points $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ dont les affixes dans ce repère sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2). \tag{1}$$
On désigne par $z_1$ le nombre complexe $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

**1.** Exprimer en fonction de $z_1$ les $n$ racines de l'équation (**??**).
Déterminer l'isobarycentre des points $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$.
(On rappelle que l'isobarycentre d'un ensemble de points est le barycentre de ces points affectés de coefficients tous égaux).

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de $P$ tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n}\right\| = n.$$

**3.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de $P$ tels que
$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 = 2n.$$

**Ex. 1509.** ———— *3 points* *./1979/toulouseC/exo-2/texte.tex*

On considère l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ d'un plan affine euclidien dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ par rapport à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ satisfont à la relation :
$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1.$$
Démontrer que $\Gamma$ est la réunion de deux coniques.
On dessinera ces deux coniques après avoir déterminé leurs axes, leurs sommets, leurs foyers et les asymptotes éventuelles.

## Problème 542 *14 points.*

*./1979/toulouseC/pb/texte*

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

A) 1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $D = ]-1\,;1[$.
Démontrer que $f$ est une fonction continue sur $D$.
Démontrer que $f$ est une fonction impaire.

2. Étudier les variations de $f$.
Démontrer que $f$ est une bijection de $D$ sur $\mathbb{R}$. On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$. Exprimer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour cela, on résoudra l'équation d'inconnue $y$, $x = f(y)$, $x$ étant un réel donné.

3. Soit respectivement $C$ et $C'$ les courbes représentatives de $f$ et $f^{-1}$ par rapport à un même repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Écrire une équation de la tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse $x = 0$. Étudier la position de $C$ par rapport à cette tangente : on pourra étudier les variations de la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$, $(x \in D)$.
Tracer les courbes $C$ et $C'$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. (On prendra comme unité de longueur : 4 cm).

B) 1. Démontrer que, quels que soient les réels $x$ et $y$ appartenant à $D$, on a

$$\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1.$$

Ceci permet de définir dans $D$ une loi de composition interne, notée $I$, telle que :

$$\forall (x\ ;\ y) \in D^2, \qquad xIy = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Démontrer que $\forall (x\ ;\ y) \in D^2, \qquad f(xIy) = f(x) + f(y)$. Quelle est la structure de $(D,\ I)$ ?

2. Soit $a$ un réel quelconque de $D$. On pose $a^{(1)} = a$, $a^{(2)} = aIa$ et pour tout $n$, entier naturel non nul $a^{(n+1)} = a^{(n)}Ia$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad f\left[a^{(n)}\right] = nf(a)$. En déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \left[\frac{1+a^{(n)}}{1-a^{(n)}}\right] = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^n. \tag{1}$$

Démontrer que la suite terme général $a^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^\star$ ) a une limite quand $n$ tend vers $+\infty$, et étudier sa limite suivant les valeurs de $a$ (On pourra utiliser la relation **??**).

C) 1. Soit $g$ une fonction numérique de variable réelle, continue, dérivable, strictement monotone sur un intervalle ouvert $J$. On désigne par $g$ sa fonction dérivée sur $J$ et par $g^{-1}$ la fonction réciproque de $g$. Soit Id la fonction définie par : $\forall x \in J \qquad J$, $\text{Id}(x) = x$.
Pourquoi la fonction $g^{-1}$ admet-elle des primitives sur $g(J)$ ? Soit $\Gamma$ une primitive de $g^{-1}$ . Démontrer que $\Gamma \circ g$ est une primitive de $\text{Id}.g'$. En déduire que :

$$\forall (x\ ;\ y) \in J^2 \qquad \int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y t.g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. $f$ étant la fonction étudiée dans la partie A et $x$ un nombre quelconque de $D$, calculer

$$\int_0^x t.f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \log\frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2}.$$



Retour page 1

3. Soit $\mathscr{A}$ le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient les conditions

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

Soit $\mathscr{B}$ le domaine plan, ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient les conditions :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|f^{-1}(x)\right| \leqslant y \leqslant |f(x)|.$$

a) Utiliser le dessin de A3 pour hâchurer les domaines $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ainsi définis.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$. f?1 dt .

c) En déduire, en cm$^2$ , l'aire du domaine $\mathscr{A}$ et l'aire du domaine $\mathscr{B}$.

## LXXIII. Toulouse remplacement, série C

**Ex. 1510.** ——— *3 points.* *./1979/toulouseCrem/exo-1/texte.tex*

Soit S l'ensemble des entiers relatifs $n$ solutions de l'équation :

$$3n^2+2n-1 \equiv 0\ [\text{mod } 5].$$

1. Déterminer $S$.
2. Quel peut être, en base 5, le chiffre des unités de l'écriture d'un entier *naturel* appartenant à $S$ ? Même question en base 10.

EXERCICE 2 4

**Ex. 1511.** ——— *4 points* *./1979/toulouseCrem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $P$, on considère un carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ; on pourra utiliser les points $I$ et $J$, milieux respectifs des segments $[B,\ C]$ et $[A,\ D]$.

1. Déterminer le barycentre $G$ du système $(A,1)$, $(B,?3)$, $(C,?3)$, $(D,1)$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ de $P$ tels que :
$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = 0.$$
3. Soit $f$ l'application de $P$ dans $P$ qui, au point $M$, fait correspondre le point $M'$ défini par :
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$
L'application $f$ est-elle une application classique ? Si oui, en préciser les éléments caractéristiques.

**PROBLÈME 543** *13 points.* *./1979/toulouseCrem/pb/texte*

Les parties II et III sont indépendantes Dans tout le problème, $\mathfrak{M}$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et on considère les quatre éléments de $M$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

et $A = aI + bJ$, où $(a\ ;\ b)$ est fixé dans $\mathbb{R}^2$.

I. 1. On considère l'application linéaire $\varphi$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathfrak{M}$ définie par :
$$(x\ ;\ y) \longmapsto \varphi(x,\ y) = xI + yJ.$$
Montrer que $\varphi$ est injective, que l'image, $\mathscr{E}$, de $\varphi$ est un plan vectoriel de base$(I,\ J)$.

2. Montrer que $J^2 = \Omega$.
Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $X = xI + yJ$ et $X' = x'I + y'J$.
Montrer que le produit des matrices $X$ et $X'$, noté $X.X'$, est élément de $\mathscr{E}$, et calculer ses coordonnées dans la base $(I,\ J)$en fonction de $x$, $y$, $x'$ et $y'$.
Est-ce que $X.X' = X'.X$ ? Quels sont tous les $X$ de $\mathscr{E}$ tels que $X^2 = \Omega$ ?

3. On considère l'application linéaire $\psi$ de $\mathscr{E}$ dans lui-même définie par :

$$X \longmapsto \psi(X) = A.X$$

Trouver le noyau de $\psi$ (on distinguera les trois cas : $a \neq 0$, $a = 0$ et $b \neq 0$, $a = b = 0$).
Montrer que $I$ appartient à l'image de $psi$ si et seulement si $a \neq 0$.

4. Soit un entier $n > 0$. Montrer que $A = a^n I + na^{n-1}bJ$ (on pourra raisonner par récurrence sur $n$).
Donner une expression simple de chacune des sommes suivantes :

$$P(a) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}, \qquad \text{pour } n > 0 \text{ et } a \neq 0$$

$$P'(a) = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots + (n-1)a^{n-2}, \qquad \text{pour } n > 1 \text{ et } a \neq 0$$

(on distinguera les cas : $a \neq 1$ et $a = 1$.)
En déduire $(\alpha_n \ ; \ \beta_n)$, élément de $\mathbb{R}^2$, défini par :

$$\alpha_n I + \beta_n J = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

Si on suppose $|a| < 1$, montrer que les limites suivantes :

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{n \to +\infty} \beta_n$$

$|a| < 1$ existent et les calculer. (On rappelle que, si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} na^n = 0$).

II. On suppose, dans cette partie, que $a > 0$ et que $\mathscr{E}$ est muni d'une structure euclidienne telle que $(I, \ J)$ soit une base orthonormée. On définit la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{E}$ :

$$t \longmapsto E(t) = a^t I + ta^{t-1}bJ.$$

1. Montrer que pour tout $(t, \ s)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$ , la matrice $E(t+s)$ est le produit $E(t)\mathring{u}E(s)$ des matrices $E(t)$ et $E(s)$. Que sont $E(0)$ et $E(1)$ ? Retrouver l'expression de $A^n$ du I4 pour $n$ entier positif.
Montrer que $E(-t)$ est l'inverse de $E(t)$.
2. Calculer $E'(t)$, $E'$ étant la fonction vectorielle dérivée de $E$.
Montrer qu'il existe $B$ appartenant à $\mathscr{E}$ tel que $E'(t) = B.E(t)$ pour tout $t$ ; on exprimera $B$ en fonction de $a$ et de $b$.
3. On suppose $a = b = \mathrm{e}$ où $\mathrm{e}$ est la base des logarithmes népériens. Montrer que l'ensemble des couples $(x \ ; \ y)$ de $\mathbb{R}^2$tels qu'il existe un réel $t$ satisfaisant à $E(t) = xI + yJ$ est l'ensemble $\{(x \ ; \ y) \ ; \ x > 0, \ y = x^l ogx\}$.

III. 1. On considère $A_1 = a_1 I + b_1 J$ et $A_2 = a_2 I + b_2 J$, éléments de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que $A_1 \mathring{u} A_2 = \Omega$ si et seulement si : ou bien $A_1 = \Omega$, ou bien $A_2 = \Omega$, ou bien $a_1 = a_2 = 0$.
b) Trouver tous les $X = xI + yJ$ de $\mathscr{E}$ tels que $(X - A_1)\mathring{u}(X - A_2) = \Omega$ (on distinguera les cas $a_1 \neq a_2$ et $a_1 = a_2$).

2. Soient $a_j$ et $b_j$ ($j \in \mathbb{N}^\star$) deux suites de réels. On pose

$$A_j = a_j I + b_j J.$$

a) On considère l'application linéaire $f$ définie de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(X) = x \quad \text{avec} \quad X = xI + yJ.$$

Montrer que $f(X.X') = f(X).f(X')$ pour tout $X$ et $X'$ de $\mathscr{E}$.
En déduire par récurrence sur $n$ que$f(A_1 \mathring{u} A_2 \dots A_n) = a_1 a_2 \dots a_n$.

b) On suppose que $\forall j, \ A_j \neq \Omega$. Montrer par récurrence sur $n$ que si $A_1.A_2 \dots A_n = \Omega$, il existe $i$ et $j$ éléments distincts de$\{1, \ 2, \ \dots, \ n\}$ tels que $a_i = a_j = 0$ ; (on utilisera le III(1)a et le III(2)a.)

c) Réciproquement, montrer que s'il existe $i$ et $j$, avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $a_i = a_j = 0$, alors $A_1 \mathring{u} A_2 \dots A_n = \Omega$.

# LXXIV. Vietnam, série C

**Ex. 1512.** ./1979/vietnamC/exo-1/texte.tex

**1.** a) $p$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, par : $V_n = \dfrac{p^n}{n+1}$.

Démontrer que cette suite est strictement croissante.

En déduire que

$$(\forall p \geqslant 2),\quad (\forall n \geqslant 1),\qquad \frac{p^n}{n+1} \geqslant 1$$

et

$$(\forall p \geqslant 5),\quad (\forall n \geqslant 1),\qquad \frac{p^n}{n+1} > 2.$$

b) Trouver, à l'aide du résultat précédent, tous les couples $(p,\ n)$ où $p$ est un entier naturel *premier*, et $n$ un entier strictement positif, qui vérifient

$$1 \leqslant \frac{p^n}{n+1} \leqslant 2.$$

**2.** Soit $a$ un entier naturel non nul, qui s'écrit $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$ sont des entiers naturels premiers, deux à deux distincts, et $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

On admettra que le nombre de diviseurs de $a$ dans $\mathbb{N}$ est

$$d(a) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1).$$

En utilisant 1b), déterminer les entiers naturels non nuls $a$ tels que $a = 2d(a)$.

**Ex. 1513.** ./1979/vietnamC/exo-2/texte.tex

Soit $ABC$ un triangle, non équilatéral, d'un plan affine euclidien P et soit $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
Soit $G$ le centre de gravité du triangle.

**1.** Démontrer que

$$GA^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}.$$

**2.** Déduire du 1 la valeur de

$$(b^2-c^2)GA^2 + (c^2-a^2)GB^2 + (a^2-b^2)GC^2.$$

**3.** Déterminer l'ensemble D des points $M$ du plan P tels que

$$(b^2-c^2)MA^2 + (c^2-a^2)MB^2 + (a^2-b^2)MC^2 = 0.$$

(On mettra en évidence deux points de D.)

# LXXV. Baccalauréat Algérien, séries Mathématiques et Technique.

**Ex. 1514.** ./1979/algeriemath/exo-1/texte.tex

**1.** Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(z-p)^2 = p^2-1,$$

où $z$ est l'inconnue et $p$ un paramètre réel ; on appelle $S_P$ l'ensemble des solutions de cette équation. Exprimer, suivant les valeurs de $p$, les éléments de $S_p$.

**2.** $p$ est un paramètre complexe et $\varphi$ un paramètre réel satisfaisant à $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ ; l'équation d'inconnue $z$

$$(z-p)^2 = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi\ ;$$

i est le nombre complexe défini par $\mathrm{i}^2 = -1$ ; on appelle $z_1$ et $z_2$ les solutions complexes de cette équation.

a) Calculer $z_1$ et $z_2$.

b) On considère les points $M$ du plan dont l'affixe est $(z_1 - z_2)$ ou $(z_2 - z_1)$ ; quel est l'ensemble des points $M$ quand $\varphi$ varie ?

c) On suppose que $p$ est un complexe non nul et d'argument $\theta$ constant ; quel est l'ensemble des points $N$ d'affixe $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$ ?

**Ex. 1515.** ./1979/algeriemath/exo-2/texte.tex

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation

$$90(x-3) = 36(2-y).$$

En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et satisfaisant à

$$90(x-3) = 36(2-y) \quad \text{et} \quad xy \geqslant -15.$$

# LXXVI. Baccalauréat Marocain, série Mathématiques et Technique

**Ex. 1516.** ./1979/marocmath/exo-1/texte.tex

On considère l'application $f$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^\star \\ (n,\ p) &\longmapsto (2p+1)2^n \end{aligned}.$$

**1.** Démontrer que $f$ est injective. (On utilisera le théorème de Gauss.)

**2.** Démontrer que $f$ est surjective. (On peut utiliser la décomposition des entiers naturels non nuls en produit de facteurs premiers.)

**3.** En déduire que les ensembles $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotants.

# Chapitre XXII

# 1980.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, série C

**Ex. 1517.** ——— *4 points.* *./1980/aixC/exo-1/texte.tex*

E désigne un espace affine euclidien de dimension trois. La distance entre deux points quelconques $M$ et $N$ de E est notée $MN$.

**1.** Soit trois points $A$, $B$ et $C$ non alignés et le point $I$ défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De quels coefficients $a$, $b$, $c$ faut-il affecter respectivement les points $A$, $B$, $C$ pour que $I$ soit leur barycentre ?

**2.** On suppose désormais que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ et $AB = 2$ et $AC = 1$.

On pose $S = \left\{M \mid M \in \text{E}, \quad MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\right\}$.

Démontrer que $S$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

**Ex. 1518.** ——— *4 points.* *./1980/aixC/exo-2/texte.tex*

Deux amis A et B organisent un jeu comprenant cinq parties. Ils décident de disputer une partie par jour, durant cinq jours.

Á chaque partie, il y a un gagnant et un perdant. Chaque jour, la probabilité que A gagne est 0,6. Celui qui remporte le plus grand nombre de partie est déclaré vainqueur.

**1.** Définir un espace probabilisé fini $(\Omega_0,\ B_0,\ P_0)$ associé à chacune des parties.

**2.** Associer au jeu un nouvel espace probabilisé fini $(\Omega,\ B,\ P)$ et introduire une variable aléatoire réelle $X$ dont l'image est égale au nombre de parties gagnés par A au cours du jeu.

a) Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

b) Quelle est la probabilité que A ne soit pas vainqueur à ce jeu ?

## Problème 544 *12 points.* *./1980/aixC/pb/texte*

**Partie I.**

$\lambda$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(x) = -x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

**1.** Étudier $\lambda$. On admettra que $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ tend vers l'infini quand $x$ tend vers l'infini.

**2.** Construire la courbe $\Gamma$ représentative de $\lambda$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

**3.** L'étude des variations de $\lambda$ fait apparaître trois intervalles sur lesquels le fonction est monotone ; soient $D_1$, $D_2$ et $D_3$ ces intervalles avec $\forall (x_1,\ x_2,\ x_3) \in D_1 \times D_2 \times D_3,\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.

En notant $D_1'$, $D_2'$ et $D_3'$ les images par $\lambda$ de $D_1$, $D_2$ et $D_3$, démontrer que les trois applications $\lambda_i$ $(i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ $\begin{aligned}\lambda_i : D_i &\longrightarrow D_i' \\ x &\longmapsto \lambda(x)\end{aligned}$ sont des bijections.

Étudier les réciproques $\mu_i = \lambda_i^{-1}$.

**Partie II.**

$\alpha$ étant un nombre réel, on définit une application $f_\alpha$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = x^2 + \alpha \mathrm{e}^x$.

On note $\mathscr{C}_\alpha$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

**1.** Démontrer que pour tout point $M$ du plan, de coordonnées $a$ et $b$, il passe une et seulement une, courbe $\mathscr{C}\alpha$.

**2.** Démontrer que ceux des nombres $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ qui existent pour une valeur donné de $\alpha$, sont les abscisses des points communs à $\mathscr{C}_\alpha$ et à la droite définie par $O$ et $\vec{\imath}$.

**3.** Soit $J$ l'intervalle $\left[-4\mathrm{e}^{-2}\,;0\right[$.

a) Montrer que $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ existent simultanément si, et seulement si, $\alpha$ appartient à $J$.

b) Étudier les variations de $f_\alpha$ pour une valeur quelconque de $\alpha$ appartenant à $J$.

(Pour étudier le signe de la fonction dérivée $f_\alpha'$ on sera amené à étudier celui de $f_\alpha''$). Dessiner une ébauche de $\mathscr{C}_\alpha$.

**4.** On pose :

$$\forall \alpha \in J, \qquad I(\alpha) = \int_{\mu_1(\alpha)}^{\mu_3(\alpha)} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = 2x - x^2$.

b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad I(\alpha) = \left[\frac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)\right] - \left[\frac{1}{3}\mu_1^3(\alpha) - \mu_1^2(\alpha)\right]$.

c) En déduire que $\forall x \in J, \quad I(\alpha) > \frac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)$.
Quel est le signe de $I(\alpha)$ si $\alpha$ est tel que $\mu_3(\alpha) = 3$ ?

d) Donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$. Quel est le signe de $I(-4\mathrm{e}^{-2})$ ?

e) En utilisant cette interprétation, établir que $I$ est une application strictement croissante.

f) Combien d'éléments contient l'ensemble $\{\alpha \; |\alpha \in J, \quad I(\alpha) = 0\}$ ?

## II. Aix Marseille, série E

**Ex. 1519.** ./1980/aixE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation (E)

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (7+\mathrm{i})z - 4 = 0 \tag{E}$$

où $z$ représente un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle, notée $z_1$.
2. Mettre l'équation (E) sous la forme
$$(z - z_1)f(z) = 0$$
et résoudre cette équation. On notera $z_2$ et $z_3$ les solutions non réelles de manière que $|z_2| > |z_3|$.
Déterminer le module et l'argument de $z_2$ et $z_3$.
3. Dans un plan affine muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter les points $M_2$ et $M_3$, images des racines $z_2$ et $z_3$.
Déterminer le module et l'argument de $\frac{z_2}{z_3}$. En déduire que le triangle $OM_2M_3$ est rectangle en $O$.

## III. Amiens, série C

**Ex. 1520.** *4 points.* ./1980/amiensC/exo-1/texte.tex

Deux urnes contiennent dix boules indiscernables au toucher. Sur les boules de la première urne sont inscrits respectivement les nombres : 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5 et sur celles de la deuxième urne les nombres 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5.

**1.** On tire une boule dans chaque urne et on définit la variable aléatoire $X$ qui, au couple de boules tirées, fait correspondre la somme des nombres inscrits sur ces deux boules.

— Étudier la loi de probabilité de $X$.

— Calculer l'espérance mathématique de la variable $X$.

**2.** On effectue dix fois le tirage décrit à la question précédente, les boules étant remise dans leurs urnes respectives après chaque tirage.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement sept fois une somme paire au cours des dix tirages ?

Ex. 1521. ———— *4 points.* ./1980/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x - x \quad \textbf{si } x < 0 \\ f(x) &= \cos^2 \pi x \quad \textbf{si } x \in [0\,;1] \\ f(x) &= 1 + \frac{\log x}{x} \quad \textbf{si } x > 1 \end{aligned}$$

**1.** Étudier la continuité de la fonction $f$.

**2.** Étudier la dérivabilité de la fonction $f$.

**3.** Étudier les variations de la fonction $f$.

**4.** Construire la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra 3 cm pour unité.

**5.** On appelle $D$ le domaine plan, ensemble des points $M$ de coordonnées $x$ et $y$ tels que :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Calculer en $\text{cm}^2$, l'aire du domaine $D$.

## Problème 545 *12 points.* ./1980/amiensC/pb/texte

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois et $B = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E.

On considère l'endomorphisme $\varphi$ de E qui à tout vecteur $\vec{v}\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le vecteur $\vec{v}\,'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\begin{aligned} 3x' &= x + (1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})z \\ 3y' &= (1+\sqrt{3})x + y + (1-\sqrt{3})z \\ 3z' &= (1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y + z \end{aligned}$$

A. 1° Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme orthogonal de E.

2° Etudier l'ensemble F des vecteurs invariants par l'application $\varphi$ et en déduire que $\varphi$ est une rotation vectorielle.

3° Montrer que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E orthogonaux à $\varphi(\vec{v})$ est un plan vectoriel G. Préciser la position relative de F et G.

4° Montrer que le plan vectoriel G est globalement invariant par $\varphi$.
Quel renseignement peut-on en déduire sur l'angle de la rotation de $\varphi$?

B. On se propose, à l'aide d'un changement de base, dé définir $\varphi$ avec précision.
On considère, pour cela, les trois vecteurs $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ de E tels que :

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \vec{e_2} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(a\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \\ \vec{e_3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \end{aligned}$$

où $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$.

1° Déterminer les réels $a,\ b$ et $c$ pour que $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ soit une base orthonormée.
Dans la suite du problème on donnera à $a,\ b$ et $c$ les valeurs trouvées.

2° Montrer que la base orthonormée $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ est directe.



Retour page 1

3° Exprimer les vecteurs $\varphi(\overrightarrow{e_1})$, $\varphi(\overrightarrow{e_2})$ et $\varphi(\overrightarrow{e_3})$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, puis dans la base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$.
Le plan vectoriel de base $(\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ étant orienté par la vecteur $\overrightarrow{e_2}$, étudier la restriction de $\varphi$ à ce plan.
Achever alors la détermination de $\varphi$.

4° On pose $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^n = \varphi \circ \varphi^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a) Déterminer, avec précision, les éléments de l'ensemble

$$\Omega = \{\varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4\}.$$

b) Soit K l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité. Montrer que l'ensemble K muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe commutatif.

c) On considère l'application $\Phi$ de K dans $\Omega$ définie pour tout $k$, élément de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ par :

$$\Phi\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right) = \varphi^k.$$

Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme de K muni de la multiplication dans $\Omega$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications.
En déduire la structure de l'ensemble $\Omega$ muni de la loi $\circ$ et déterminer $\varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

5° On considère les plans vectoriels P et P' engendrés respectivement par les systèmes de vecteurs $\{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3}\}$ et $\{\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$.
Soient $\sigma$ et $\sigma'$ les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux plans P et P' respectivement.
Déterminer les vecteurs suivants :

$$\sigma(\overrightarrow{e_i})\ ;\ \sigma'(\overrightarrow{e_i})\ ;\ \sigma'\circ\sigma(\overrightarrow{e_i}) \qquad \text{pour } i \in \{1,\ 2,\ 3\}.$$

En déduire que : $\sigma' \circ \sigma = \varphi$.

C. On appelle $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ et $g$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1 \\ z' &= z + 1. \end{aligned}$$

1° a) Montrer que $g$ est isométrie affine dont on déterminera, avec précision, l'endomorphisme associé $\gamma$.

b) Etudier l'ensemble des points invariants de l'application $g$. En déduire que $g$ est un vissage. On montrera que $g$ peut se mettre sous la forme :

$$g = r \circ t = t \circ r$$

où $t$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{e_3}$ et $r$ une rotation affine que l'on déterminera.

2° Montrer que l'application $g \circ g$ est un vissage dont l'endomorphisme associé est l'application $\varphi$ étudiée dans la partie A.
Préciser les éléments de ce vissage.

## IV. Besançon, série C

**Ex. 1522.** ———— *5 points* *./1980/besanconC/exo-1/texte.tex*

Si $a$ et $b$ sont deux entiers, le plus grand diviseur commun de $a$ et de $b$ est noté $\Delta(a,\ b)$.
Soit $(U)$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

**1.** Calculer les termes $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6$ de la suite $U$.

**2.** Montrer que le suite $U$ vérifie :
pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
En déduire le plus grand diviseur commun de deux termes consécutifs de cette suite $U$.

**3.** a) Montrer que la suite $U$ vérifie :
pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2^n - 1$.
Les nombres $2^n - 1$ et $2^{n+1} - 1$ sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel $n$ ?

b) Vérifier que, pour tout couple d'entiers naturels $(n,\ p)$

$$u_{n+p} = u_n(u_p + 1) + u_p.$$

En déduire que, pour tout couple d'entiers naturels $(n,\ p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\Delta(u_n,\ u_p) = \Delta(u_n,\ u_{n+p}). \tag{1}$$

c) Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls, $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, déduire de la propriété (1) que

$$\Delta(u_b,\ u_r) = \Delta(u_a,\ u_b)$$

et que

$$\Delta(u_a,\ u_b) = u_{\Delta(a,\ b)}.$$

(on pourra utiliser l'algorithme d'EUCLIDE, méthode des divisions successives).

d) Calculer alors $\Delta(u_{1982},\ u_{312})$.

**Ex. 1523.** *3 points.* *./1980/besanconC/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan vectoriel V rapporté à une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ l'endomorphisme $g_{\alpha,\ \beta}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ associe le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $xyp$ dans la même base définies par

$$\begin{cases} x' = \alpha x - 2\alpha y \\ y' = 2\beta x + \beta y \end{cases}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux réels.

**1.** Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ pour que $g_{\alpha,\ \beta}$ soit une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

**2.** Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ pour que $g_{\alpha,\ \beta}$ soit une involution que l'on précisera.

## PROBLÈME 546

*./1980/besanconC/pb/texte*

On se propose d'étudier des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes) définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{C}^4, \quad (c,\ d) \neq (0,\ 0).$$

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on désigne par $M$ et $M'$ les points d'affixes $z$ et $f(z)$ et par $F$ la fonction de P dans P qui au point $M$ associe le point $M'$.
$F$ sera appelée fonction ponctuelle associée à $f$.

I. Montrer que $f$ est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

1. On pose $a = 1$, $c = 0$, $d = 1$ et on note $f_1$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.

   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $F_1$.

   b) Déterminer l'image par $F_1$ :

   — d'une droite $D$ quelconque de P

   — d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.

2. On pose $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $a \neq 0$ et on note $f_2$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.

   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $F_2$.



Retour page 1

b) Déterminer l'image par $F_2$ :

— d'une droite $D$ quelconque de P

— d'un cercle $\mathscr{C}$ quelconque de P.

3. On pose $a = d = 0$, $b = c = 1$ et on note $f_3$ l'application de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ obtenue.
   a) Montrer que $F_3$ est une involution de $\mathrm{P}_{\{O\}}$ dans $\mathrm{P}_{\{O\}}$.
   Quels sont les points invariants de $F_3$ ?
   b) Soit $\Sigma$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(O,\ \overrightarrow{i})$ et $K = \Sigma \circ F_3$.
   Déterminer l'affixe $z''$ de $K(M)$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$. (On suppose $\neq 0$).
   En déduire que les points $M$ et $M''$ appartiennent à une même demi-droite d'origine $O$ et que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OM''}\right\| = 1$.
   c) Déterminer l'image par $F_3$ :

   — d'une droite passant par $O$, privée de ce point

   — d'un cercle de centre $O$

   — de la droite d'équation $x = 1$.

4. On considère la fonction $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\mathrm{i}}{z-1}$.

   a) Soit A le point d'affixe 1. Montrer que $F$ est une bijection de $\mathrm{P}-\{A\}$ sur $\mathrm{P}-\{O\}$.
   b) Montrer qu'il existe des valeurs de $a$ et $b$ telles que $F$ soit la composée de fonctions ponctuelles définies au 1, 2 et 3.
   c) En déduire l'image par $F$ :

   — de la droite d'équation $x = 1$, privée de A

   — du cercle de centre $A$ et rayon 1

   — de la droite d'équation $x = 2$.

II. On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions $f$ définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{tel que } ad - bc \neq 0.$$

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est aussi l'ensemble des fonctions $f$ définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{tel que } |ad - bc| = 1.$$

(On montrera que si $k \in \mathbb{R}^\star$, $(a,\ b,\ c,\ b)$ et $(ka,\ kb,\ kc,\ kd)$ définissent la même fonction $f$).

b) On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $|ad - bc| = 1$.

Montrer que $(\mathscr{A},\ \times)$ est un groupe et que $u : \begin{array}{rcl} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ m & \longmapsto & f \end{array}$ si $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $u(m) = f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathscr{A}, \times)$ dans $(\mathscr{F},\ \circ)$.
Définir alors la structure de $(\mathscr{F},\ \circ)$.

c) Déterminer tous les éléments de $\mathscr{F}$ tels que

$$a = 4, \quad b = 3, \quad (c,\ d) \in \mathbb{Z}^2.$$

*Les questions I et II sont indépendantes.*

Retour page 1

# V. Besançon-Polynésie, série C

**Ex. 1524.** 4 points. ./1980/bes-polynesieC/exo-2/texte.tex

**1.** a) Chercher le polynôme $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ de degré 2 tel que pour tout élément $x$ de $\mathbb{N}$ l'égalité suivante soit vraie

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=[P(x)]^2.$$

b) En déduire pour $x>3$ l'écriture en base $x$ du nombre entier naturel dont le carré est

$$A=\overline{10}_x\times\overline{11}_x\times\overline{12}_x\times\overline{13}_x+\overline{1}_x.$$

**2.** Écrire en base $x$ (où $x>3$), la carré de $\overline{11}_x$, le cube de $\overline{11}_x$

**3.** Quels sont les diviseurs du nombre $B=\overline{1320}_x$ dans quelle base $x$ où $x>3$.

**4.** Vérifier que pour $x=3$ le nombre $\overline{111}_x$ est divisible par $13$. En déduire quelles sont toutes les bases $x\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ pour lesquelles $\overline{111}_x$ est divisible par $13$.

# VI. Bordeaux, série C

**Ex. 1525.** 5 points. ./1980/bordeauxC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer, pour tout entier $n>0$ :

$$I_n=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

**2.** Soit $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, soit $\alpha$ un nombre réel, et soit $p$ l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$p(n)=n^2\alpha I_n,\qquad \text{pour tout } n \text{ de } \Omega.$$

Déterminer $\alpha$ pour qu'il existe une probabilité $P$ sur $(\Omega,\ P(\Omega))$ telle que, pour tout $n\in\Omega$, on ait $P(\{n\})=p(n)$.

**Ex. 1526.** 4 points. ./1980/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Á tout nombre réel $a$, on associe la fonction numérique $f_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x)=\mathrm{e}^{-x}+ax.$$

Soit $C_a$ la représentation graphique de cette fonction dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Étudier les variations de $f_a$. Quel est l'ensemble $A$ des valeurs de $a$ pour lesquelles les $f_a$ présentent un extremum ?

**2.** Pour tout élément $a\in A$, on désigne par $I_a$ le point de $C_a$ correspondant à l'extremum.
Déterminer en fonction de $a$ les coordonnées de $I_a$.

**3.** Démontrer que l'ensemble E des points $I_a$ lorsque $a$ décrit $A$, est la représentation graphique d'une fonction $g$ que l'on déterminera.
Étudier les variations de $g$, et construire E.

**Problème 547** *11 points.* ./1980/bordeauxC/pb/texte

Soit E un plan vectoriel et soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de E. Pour tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels, soit $F_{a,\ b}$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est $\begin{pmatrix}a & 2(a-1)\\ b & 1+2b\end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des endomorphismes $F_{a,\ b}$, lorsque $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

Dans tout le problème, on désignera par $\vec{V}$ le vecteur

$$\vec{V}=-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}.$$



Retour page 1

1. a) Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier le couple $(a,\ b)$ pour que $F_{a,\ b}$ soit une application bijective ?

   b) Montrer que pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on a $F_{a,\ b}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V}$.
   Quel est l'ensemble $\mathrm{E}_1$ des éléments de E invariants par $F_{a,\ b}$ ?
   Étudier en particulier le cas $a = 1,\ b = 0$.

   c) Fixons $a$ et $b$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Montrer que pour qu'il existe $\overrightarrow{W} \in \mathrm{E}$, $\overrightarrow{W} \neq \overrightarrow{0}$, tel que $F_{a,\ b}(\overrightarrow{W}) = \lambda \overrightarrow{W}$, il faut et il suffit que $\lambda = 1$, ou que $\lambda = a + 2b$.
   Quel est l'ensemble $\mathrm{E}_{a+2b}$ des éléments $\overrightarrow{W} \in \mathrm{E}$ tels que $F_{a,\ b}(\overrightarrow{W}) = (a+2b)\overrightarrow{W}$ ?
   Montrer que si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, $\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_{a+2b}$ sont des droites vectorielles, et que si $a + 2b \neq 1$, on a $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{a+2b}$.

   d) Montrer que $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{V})$ est une base de E, et écrire la matrice de $F_{a,\ b}$ dans cette base.

2. Dans cette question, ainsi que dans la question 3, nous désignerons par $\mathscr{E}$ un plan affine associé à E. Soit $O$ un point de $\mathscr{E}$. On désigne par $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, d'endomorphisme associé $F_{-3,\ 2}$, et telle que $f(O)$ soit le point $O_1$, de coordonnées $(-1\ ;\ 1)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

   a) Montrer que $f$ est une application bijective.

   b) Soit $M$ un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et soit $(x_1\ ;\ y_1)$ les coordonnées dans ce repère de $M_1 = f(M)$.
   Exprimer $x_1$ et $y_1$ en fonction de $x$ et $y$. Existe-t-il un point $M$ invariant par $f$ ?

   c) Existe-t-il des droites affines parallèles à leur image par $f$ ?
   Existe-t-il un point $M$ de $\mathscr{E}$, tel que le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{V}$ ?
   Montrer qu'il n'existe pas de droite globalement invariante par $f$.

3. On désigne par $\varphi$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, d'endomorphisme associé $F_{-3,\ 2}$, et qui laisse le point $O$ invariant.
   Soit $M$ un point de $\mathscr{E}$, et soit $M' = \varphi(M)$.
   Exprimer les coordonnées $\left(X'\ ;\ Y'\right)$ de $M'$, dans le repère $(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{V})$, en fonction des coordonnées de $M$ dans ce repère.
   Soit $D$ la droite affine dirigée par $\overrightarrow{V}$, et soit $m$ l'intersection de cette droite avec la droite $L$ passant par $O$, et dirigée par $\overrightarrow{i}$.
   Montrer que pour tout $M \in D$, le transformé $M' = \varphi(M)$ appartient à $D$, et que $\overline{MM'} = 2\overline{Om}$ (les droites $D$ et $L$ étant munies des vecteurs unités $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{i}$ respectivement).
   Quels sont les points invariants, et les droites globalement invariantes par $\varphi$ ?

4. On considère les endomorphismes $G$ de $E$, satisfaisant aux conditions :

$$G(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V} \qquad (C_1)$$

   il existe un nombre réel $\gamma$ tel que $\mathbf{Im}(G - \gamma \mathrm{id}_E) \subset \Delta$ où $\Delta$ est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{V}$. $(C_2)$

   a) Montrer que pour un endomorphisme $H$ satisfaisant à $(C_2)$, le réel $\gamma$, tel que $\mathbf{Im}(H - \gamma \mathrm{id}_E) \subset \Delta$, est unique.

   b) Soient $a$ et $b$ des nombres réels. Quelle est la matrice représentant $F_{a,\ b} - (a+2b)\mathrm{id}_E$ dans la base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{V})$ de E ? (Utiliser 1d).
   En déduire que $F_{a,\ b}$ satisfait aux conditions $(C_1)$ et $(C_2)$.

   c) Réciproquement, soit $G$ un endomorphisme de E satisfaisant $(C_1)$ et $(C_2)$. Il existe donc $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $G(\overrightarrow{i}) = \gamma \overrightarrow{i} + \delta \overrightarrow{V}$. Exprimer, en fonction de $\gamma$ et $\delta$, la matrice de $G$ dans la base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{V})$ de E. Comparant à 1d), en déduire qu'il existe des nombres réels $a$ et $b$, tels que $G = F_{a,\ b}$.
   Déterminer $a$ et $b$ en fonction de $\gamma$ et $\delta$.

   d) Démontrer à l'aide des conditions $(C_1)$ et $(C_2)$ que le composé de deux endomorphismes de $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{F}$, et que l'ensemble $\mathscr{F}$ des endomorphismes de la forme $F_{a,\ b}$, où $a+2b \neq 0$, est un sous-groupe du groupe groupe linéaire de E.

Retour page 1

# VII. Bordeaux remplacement, série C

Ex. 1527. *4 points* ./1980/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

1. Décomposer le nombre premier $469$ en produit des facteurs premiers.
2. Trouver tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers positifs tels que $x^3 - y^3 = 469$.

Ex. 1528. *4 points* ./1980/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère :

- le point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ ; $x$ et $y$ réels
- le point $M'$ d'affixe $z' = x + 4\mathrm{i}y$
- le point $A$ d'affixe -7
- le point $B$ d'affixe $5$

Quelles conditions doit vérifier $z$ pour qu'on ait :

$$M \neq A \qquad \text{et} \qquad M' \neq B\ ?$$

Ces conditions étant remplies, on appelle $(D)$ la droite contenant les points $A$ et $M$ et $(D')$ la droite contenant les points $B$ et $M'$.

1. Montrer que $(D)$ est parallèle à $(D')$ si, et seulement si, $\dfrac{z+7}{z'-5} \in \mathbb{R}^\star$.

   En déduire l'ensemble $(C_1)$ des points $M$ tels que les droites $(D)$ et $(D')$ soient parallèles. Construire $(C_1)$.
2. Déterminer de la même manière, l'ensemble $(C_2)$ des points $M$ tels que les droites $(D)$ et $(D')$ soient perpendiculaires. Construire $(C_2)$.

## Problème 548 *12 points* ./1980/bordeauxCrem/pb/texte

A- 1. a) Étudier les variations sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $f : x \longmapsto \tan^3 x$.

b) Démontrer que cette fonction admet uen fonction réciproque $g$ sur un intervelle $J$ à déterminer. Montrer que la fonction $g$ est dérivable en tout point $y \in J$, $y \neq 0$, et calculer $g'(y)$ en fonction de $y$. (Ce calcul n'est pas nécessaire pour traiter la suite du problème.)

c) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ (dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé).
Préciser les demi-tangentes aux courbes aux extrémités des intervalles de définition.

2. a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \log\cos x$ est définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, et est dérivable sur cet intervalle. Calculer sa dérivée.

b) Quelle est la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^2 x$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ ?

c) Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont telles que

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$. (On pourra utiliser un argment géométrique ; il n'est pas demandé de trouver une primitive de la fonction $g$.)

B- 1. a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \qquad \varphi(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x.$$



Retour page 1

Montrer que el fonction $\varphi$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$.

Étudier le sens des variations de $\varphi$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et en déduire l'inégalité

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \qquad \tan x \leqslant \frac{4}{\pi}x.$$

b) Pour $n$ entier $\geqslant 1$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ pour tout $n$. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ?

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie au B(1)b.

a) Calculer $I_1$ et $I_2$.

b) Soit $U$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $V$, définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $V(x) = U(\tan x)$ est dérivable, et exprimer sa dérivée à l'aide de celle de $U$.

c) Pour $n$ entier $\geqslant 3$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n-2} x + \tan x\right)\mathrm{d}x.$$

d) Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de nombres réesl définie pour tout $k$ entier, $k \geqslant 1$, par

$$v_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k},$$

(donc $v_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $v_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, etc ...).

Déduire du B(2)c, que pour tout entier $n \geqslant 5$, on a

$$I_n = I_{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3},$$

et en conclure que pour tout entier $k \geqslant 1$

$$I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2}v_k.$$

Montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers une limite que l'on déterminera.

## VIII. Bordeaux, série E

Ex. 1529. ./1980/bordeauxE/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation définie par

$$z^2 - \left[(\sqrt{3}+\mathrm{i}) + (-1+\mathrm{i})\right]z + (\sqrt{3}+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) = 0.$$

On désignera par $a$ et $b$ les solutions de cette équation.

**2.** On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension deux dont une base orthonormée directe est $(1\ ;\ \mathrm{i})$.

Soit P un plan affin euclidien orienté associé à $\mathbb{C}$. On désigne par A le point de P d'affixe $a$ et par B celui d'affixe $b$.

Déterminer les affixes $c$ et $d$ des sommets C et D des triangles équilatéraux de base AB.



Retour page 1

**Ex. 1530.** ./1980/bordeauxE/exo-2/texte.tex

Soit E un espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, l'unité de longueur est le centimètre. On considère le plan $\pi$ de E dont une équation cartésienne est

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0.$$

1. Construire les traces du plan $\pi$ en prenant pour plan horizontal de projection le plan d'équation $z = 0$ et pour plan frontal le plan d'équation $x = 0$.
2. Soit $M$ le point de $\pi$ dont les coordonnées sont $(3\ ;\ 2\ ;\ 2)$.
   a) Construire les projections $(h,\ h')$ de l'horizontale $H$ de $\pi$ passant par $M$ et celles $(\delta,\ \delta')$ de la perpendiculaire $\Delta$ à $H$ contenue dans $\pi$ et passant par $M$.
   b) Construire les projections $ABCD$ du carré de centre $M$ ayant ses diagonales « portées » par $H$ et $\Delta$ sachant que $A$ et $B$ appartiennent à $H$ et $d(A,\ M) = 3$ cm. On pourra utiliser un rabbatement en expliquant brièvement les constructions effectuées.

## Problème 549

./1980/bordeauxE/pb/texte

A- Soit $f_n$ la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel $n$ non nul par

$$f_n(x) = x^n \log x.$$

Montrer que $f_n$ admet à droite de 0 un prolongement par continuité que l'on définira. Calculer

$$\varphi(\lambda) = \int_\lambda^1 x^{2p+1} \log x \,\mathrm{d}x \qquad (p \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \lambda \in\, ]0\,;1[).$$

Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \varphi$. On pose

$$\lim_{\lambda \to 0^+} = \int_0^1 x^{2p+1} \log x \,\mathrm{d}x.$$

B- Soit $g$ la fonction définie par

$$g(x) = 2\log x + \frac{1}{x} - x, \qquad x > 0.$$

1. Étudier les variations de la fonction $g$ et construire sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité de longueur étant égale à 2 cm, en précisant :
   a) les branches infinies ;
   b) la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1 ;
   c) la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = -x + 1$ pour $x \geqslant 1$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(\Gamma)$, la droite d'équation $y = -x + 1$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ $(\alpha > 1)$.
3. Déduire du B1 que
$$0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{x \log x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}.$$

C- Soit $h_p$ l'application de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_p(x) = \frac{x^{2p+1} \log x}{x^2 - 1} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que $h_p$ admet un prolongement par continuité à droite de 0 et à gauche de 1, $\left(\text{écrire } h_p(x) = \dfrac{x^{2p+1}}{x+1} \dfrac{\log x}{x-1}\right)$ ; désignons par $H_p$ ce prolongement de $h_p$.



Retour page 1

2. On définit la suite réelle $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par son terme général

$$I_p = \int_0^1 H_p(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{p+1} - I_p = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2.$$

En utilisant le résultat établi en B3, calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p$.

b) Montrer que $I_0 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=p}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + I_p$ ; utiliser cette relation pour calculer une valeur approchée $I'_0$ de $I_0$ telle que $\left|I_0 - I'_0\right| < \dfrac{1}{20}$.

# IX. Bordeaux Clermont Nantes Orléans Potiers & et Rennes remplacement, série E

**Ex. 1531.** ./1980/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

Étant donn, dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $2x-2y+z-2=0$, à tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ la symétrie orthogonale par rapport à (P) associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$. Soit $\mathscr{S}(P)$ cette transformation.

**1.** Calculer les coordonnées de l'image $A_1$ du point $A(8\ ;\ 3)1$ par $\mathscr{S}(P)$. Quelles sont les coordonnées du point $H$, intersection de $(AA_1)$ avec (P) ?

**2.** L'espace étant rapporté au repère orthonormé précédent, l'unité étant le centimètre, l'origine étant à 2 cm du bord gauche de la feuille, eu milieu de celle-ci dans le sens vertical, $Ox$ dirigé vers le bas, $Oy$ vers la droite et $Oz$ vers le haut :

a) Faire l'épure du plan (P) par ses traces.

b) Faire l'épure de la perpendiculaire menée de $A$ au plan (P).

c) Préciser l'intersection de $(AA_1)$ et du plan (P).

d) En déduire l'épure de $A_1$ symétrique de $A$ par rapport à (P) et vérifier ainsi le calcul précédent.

**Ex. 1532.** ./1980/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

1. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère le produit

$$P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Constater que $P_n$ s'exprime très simplement en fonction de $n$.
En déduire la valeur de

$$P'_n = \log 2 + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Les suites $(P_n)_{n\geqslant 1}$ et $(P'_n)_{n\geqslant 1}$ tendent-elles vers une limite ? si oui, laquelle ?

2. Soit le produit

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \cdots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}}.$$

Constater que $R_n$ s'exprime très simplement ne fonction de $n$.
En déduire la valeur de

$$R'_n = \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Les suites $(R_n)_{n\geqslant 1}$ et $(R'_n)_{n\geqslant 1}$ tendent-elles vers une limite ? si oui, laquelle ?



Retour page 1

3. Calculer

$$Q'_n = \log\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

La suite $(Q'_n)_{n\geqslant 1}$ tend-elle vers une limite ? si oui, laquelle ?
En déduire la limite, si elle existe de

$$Q_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

quand $n$ tend vers l'infini.

🛈- $\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$.

### Problème 550

./1980/bordeauxErem/pb/texte

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère cartésien du plan affine $\mathscr{P}$.

$$\vec{I}=\frac{1}{2}\vec{\imath}\ ;\qquad \vec{J}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}\ ;\qquad \overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{2}\vec{\imath}.$$

$(\Gamma)$ est la courbe d'équation $x^2-y^2-2xy-x+y=0$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Donner l'équation de $(\Gamma)$ dans $(\Omega;\ \vec{I},\ \vec{J})$ et en déduire sa nature géométrique.

**2.** On définit la transformation $f$ de $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ dans ce même repère où

$$\begin{cases} x'=5x+2y-2\\ y'=2x+y-1.\end{cases}$$

Montrer que $f$ est une bijection affine laissant $(\Gamma)$ globalement invariante.

**3.** $M_0$ est le point de coordonnées $(3\ ;\ 1)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On définit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad M_{n+1}=f(M_n).$$

Montrer que : $[\forall n\in\mathbb{N},\ M_n\in(\Gamma)]$. On note $(x_n\ ;\ y_n)$ le couple des coordonnées de $M_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites strictement croissantes d'entiers naturels et que

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty.$$

## X. Bordeaux, série D

**Ex. 1533.** 3 points. ./1980/bordeauxD/exo-1/texte.tex

**1.** On se propose de résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^3-3\sqrt{3i}z^2-\left(9-3\sqrt{3i}\right)z+8=0 \tag{1}$$

où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

a) Montrer qu'elle possède une racine réelle $z_1$ qu'on déterminera.

b) Montrer que l'équation (1) s'écrit $(z-z_1)(Az^2+Bz+C)=0$ où $A$, $B$ et $C$ sont trois nombres complexes qu'on déterminera. Achever alors la résolution.

c) Mettre les trois racines $z_1$, $z_2$, $z_3$ sous forme trigonométrique (on désignera par $z_3$ la racine qui a le plus grand module).

**2.** Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère les trois points : $M_l$ d'affixe $z_1$, $M_2$ d'affixe $z_2$ et $M_3$ d'affixe $z_3$. Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe transformant $M_1$ en $M_2$ et $M_2$ en $M_3$.
Préciser les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.



Retour page 1

**Ex. 1534.** ———— *5 points.* ./1980/bordeauxD/exo-2/texte.tex

Un cirque possède 12 fauves, dont cinq mâles.
Pour chaque représentation le dompteur choisit cinq fauves. On admet que tous les choix de cinq fauves ont la même probabilité.
Soit $X$ la variable aléatoire qui décompte le nombre de mâles présentés au cours d'une représentation.

**1.** Définir la loi de probabilité de $X$.

**2.** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**3.** Quelle est la probabilité pour qu'au cours de trois représentations successives, l'événement « il n'y a pas de mâle » se produise une fois seulement. (Donner le résultat sous forme de fraction).

## Problème 551 *12 points.* ./1980/bordeauxD/pb/texte

– A –

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^x - 1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on prendra 1 cm pour unité de longueur).

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $D_f$ de $f$ et montrer que $f$ est une fonction impaire. (On pourra montrer que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$ et $f(x) + f(-x) = 0$).

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$.

**3.** Montrer que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ d'équations $y = x - 1$ et $y + x + 1$ sont deux asymptotes de la courbe (C) .

**4.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une racine $x_0$ comprise entre 1 et 2 . (On admettra que $x_0$ est proche de 1,5).

**5.** Construire la courbe (C) .

– B –

**1.** Soit $f_1$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty[$. Montrer que $f_1$ admet une application réciproque $f_1^{-1}$ et construire la courbe $(\Gamma)$ représentative de $f_1^{-1}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On ne demande pas l'étude de $f_1^{-1}$).

**2.** Montrer que le point Q de coordonnées $(-3 + \mathrm{Log}2, \mathrm{Log}2)$ appartient à $(\Gamma)$ et déterminer le coefficient directeur de la tangente à $(\Gamma)$ en ce point.

– C –

Soit M un point du plan P dont les coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont définies en fonction du temps $t > 1$ par

$$X_M = \mathrm{Log}t \qquad Y_M = \mathrm{Log}t - 1 - \frac{2}{t-1}$$

**1.** Déterminer la trajectoire de M.

**2.** Calculer, en fonction de $t$, les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération.

**3.** Montrer que le mouvement est retardé.

Retour page 1

## XI. Caen, série C

**Ex. 1535.** ——— *4 points.* ./1980/caenC/exo-1/texte.tex

**1.** Soit $f$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (\log|x|)^2 + \log|x| + 1.$$

a) Trouver la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (on pourra étudier d'abord la limite éventuelle de $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$).

b) Etudier $f$ et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**2.** Soit $\epsilon \in ]0\,;1[$. On appelle A($\epsilon$) l'aire de l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $\begin{cases} \epsilon \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.

Calculer A($\epsilon$). Montrer que A($\epsilon$) a une limite finie quand $\epsilon$ tend vers $0$.

**Ex. 1536.** ——— *4 points.* ./1980/caenC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$5x - 11y = 4.$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système :

$$\begin{cases} 3z \equiv 1\ [5] \\ 7z \equiv 9\ [11]. \end{cases}$$

### Problème 552 *12 points.* ./1980/caenC/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ un(espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On munira $\mathscr{L}(\mathscr{P})$, ensemble des endomorphismes de $\mathscr{P}$ , de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
, Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, on notera dans tout le problème $t(M)$ le réel $\alpha + \delta$ . On appellera E l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $B$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels quelconques.

A- 1. Soit $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ les endomorphismes de $\mathscr{P}$ de matrices respectives dans la base B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ de base $f_1,\ f_2,\ f_3$. Est-il stable pour la composition des applications ?

2. 2. Soit $T : f \longmapsto t(M)$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ où $M$ est la matrice de $f$ relativement à $B$. Démontrer que le noyau de $T$ est un plan vectoriel $F$ de $E$.

3. Soit $\varphi : (f,\ g) \longmapsto t(MN)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, $M$ et $N$ étant les matrices respectives de $f$ et $g$ dans $B$.
Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
Dans la suite du problème, $E$ sera muni de la structure euclidienne définie par $\varphi$.

4. Déterminer une base orthonormée $B' = g_1,\ g_2,\ g_3$ de $E$ telle que $g_1,\ g_2$ soit une base de $F$.

B- Soit $\lambda$ un réel. On appelle $\theta_\lambda$ l'endomorphisme de $E$ dont l'expression analytique dans la base $B'$ est



Retour page 1

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}\left[\lambda x + (\lambda+1)z\right] \\ \\ y' = \dfrac{1}{3}\left[(\lambda+1)x - \lambda y - 2z\right] \\ \\ z' = \dfrac{1}{3}\left[2x + (\lambda+1)y + \lambda z\right]. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $\lambda$ réel, $\theta_\lambda$ est bijectif. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $\theta_\lambda$ est une isométrie vectorielle de E .
2. Démontrer que si $\lambda = -2$, $\theta_\lambda$ est une rotation vectorielle. Donner son axe et un couple de vecteurs représentant son angle. (On pourra supposer $(E,\ \varphi)$orienté par la base $B'$ ).

C- Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de $\mathscr{P}$, on appelle $s_{vecteuru}$ la symétrie vectorielle orthogonale de $\mathscr{P}$ par rapport à la droite de base $\vec{u}$. I désigne l'application identique de ($\mathscr{P}$ ).

1. Montrer que $s_{\vec{u}} \in E$ et calculer $\varphi(s_{vecteuru},\ \mathrm{I})$.
2. Soit $(\vec{u},\ \vec{v})$un couple de vecteurs non nuls de $\mathscr{P}$, on désigne par $\alpha$ l'angle du couple de vecteurs $(\vec{u},\ \vec{v})$ ; exprimer $\varphi(s_{\vec{u}},\ s_{\vec{v}})$ en fonction de $\cos\alpha$..
3. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul fixé, déterminer les vecteurs $\vec{v}$ tels que $\varphi(s_{\vec{u}},\ s_{\vec{v}}) = 0$ et le nombre de symétries $s_{\vec{v}}$ correspondantes.
4. Déterminer une base de l'orthogonal, dans $E$, de la droite de base $s_{\vec{u}}$.

# XII. Cameroun, série C

**Ex. 1537.** ./1980/camerounC/exo-1/texte.tex

On désigne par **P** l'ensemble des entiers naturels *premiers*. On se propose de résoudre dans **P** × **P** l'équation :

$$x^2 - y^2 = pq \qquad (1)$$

où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels *premiers*.

**1.** Étudier le cas $p = q = 2$.

**2.** On suppose $q = 2$ et $p > 2$.
Démontrer que $x$ et $y$ sont nécessairement tous les deux impairs. En posant $x = 2x' + 1$ et $y = 2y' + 1$, en déduire que l'équation (1) n'a pas de solution.

**3.** On suppose $2 < q \leqslant p$.

a) Démontrer que $y$ est nécessairement égal à 2.

b) Démontrer que, si $p - q \neq 4$, l'équation (1) n'a pas de solution.

c) On se place dans le cas où $p - q = 4$.
Démontrer que $(q,\ x,\ p)$ forme une suite arithmétique de raison 2.
En déduire que l'équation (1) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.
(Indication : on démontrera que, quel que soit $n$ entier naturel, l'un des trois nombres $n,\ n+2,\ n+4$ est divisible par 3).
Quelle est la solution dans ce cas ?



Retour page 1

# XIII. Centre d'Outre-Mer remplacement, série C

Ex. 1538. ./1980/centreoutremerCrem/exo-1/texte.tex

P est le plan affine euclidien muni d'un repère $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. $M$ est un point quelconque de P, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer l'ensemble des points $M$ de P tels que
$$|(1+\mathrm{i})\overline{z} - 2\mathrm{i}| = 2. \qquad (1)$$
2. Soit $s$ l'application affine de P dans P qui, au point $M$ d'affixe $z$, fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par :
$$z' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 2\mathrm{i}. \qquad (2)$$
Caractériser géométriquement $s$. Interpréter géométriquement le résultat du (1).

Ex. 1539. ./1980/centreoutremerCrem/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par
$$x \neq 0, \qquad f(x) = [\log(x+1)] \times \mathrm{E}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0,$$
où $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier relatif $n$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

1. $f$ est-elle continue pour $x = 0$ ?
2. Étudier la restriction $\hat{f}$ de $f$ à $I = \left[\frac{1}{2}\,;4\right]$ et étudier la continuité de $\hat{f}$. Construire la représentation graphique de $\hat{f}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Prendre 3 cm comme unité de longueur.)

## Problème 553 ./1980/centreoutremerCrem/pb/texte

A) $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel dont une base est $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $t$ un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$, et $\varphi$, est l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est
$$M = \begin{pmatrix} 2+\cos t & -\cos t \\ 5+3\cos t & 3+\cos t \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs de $t$, $\varphi$ est-il bijectif ? Non bijectif ?
2. On suppose $t = \pi$. Déterminer l'image $D$ de $\varphi$, et son noyau $D'$. Montrer que $D \oplus D' = \mathscr{P}$.
Soit $\vec{i'}$ une base de $D$, et $\vec{j'}$ une base de $D'$. Quelle est la matrice de $\varphi$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$ ? Montrer qu'il existe une projection vectorielle $p$, et une homothétie vectorielle $h$, telle que $p \circ h = h \circ p = \varphi$. Définir avec précision $p$ et $h$.
3. $a$ est un réel quelconque. Soit $\varphi_{(a)}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par :
$$\varphi_{(a)}(\vec{\imath}) = \varphi_{(a)}(\vec{\jmath}) = a(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}).$$
Montrer que, pour tout $a \neq 0$, $\mathbf{Im}\varphi_{(a)} = D$ et $\ker\varphi_{(a)} = D'$. ($D$ et $D'$ étant les droites vectorielles définies au A2.) Calculer la matrice de $\varphi_{(a)}$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$.
4. Soit $\Phi$ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{(a)}$, lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}$.
Montrer que le composition des endomorphismes de $\mathscr{P}$ est un loi interne commutative dans $\Phi$. Cette loi est notée $\circ$. $\Phi - \{\varphi_{(0)}\}$ a-t-il une structure de groupe pour la loi $\circ$ ? $\Phi$ a-t-il une structure de corps vis à vis de l'addition et de la composition des endomorphismes ?
Résoudre dans $\Phi$ l'équation
$$2x^2 + 3x + \varphi_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \varphi_{(0)}.$$
(Pour $x \in Phi$, on pose $x \circ x = x^2$ et on désigne par $\lambda x$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ tel que quel que soit $\vec{v} \in \mathscr{P}$
$$(\lambda x)(\vec{v}) = \lambda(x(\vec{v})).)$$



Retour page 1

B) Dans cette partie, on appelle $\Psi$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par : $\Psi = \varphi_{(2)} - 3\mathrm{I}$ ($a = 2$, et I est l'application identique dans $\mathscr{P}$).

1. Montrer que les droites vectorielles $D$ et $D'$ de la partie A sont globalement invariantes par $\Psi$. Quelle est la matrice de $\Psi$ dans la base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$? Montrer qu'il existe une symétrie vectorielle $s$ et une homothétie vectorielle $h'$ telle que
$$\Psi = s \circ h' = h' \circ s.$$
Préciser les éléments caractéristiques de $s$ et de $h'$, sachant que le rapport $k$ de $h'$ est positif.
2. Soit $\overrightarrow{U_0} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$. On pose $\overrightarrow{U_1} = \Psi(\overrightarrow{U_0}) = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{U_2} = \Psi\circ\Psi(\overrightarrow{U_0}) = \Psi^{(2)}(\overrightarrow{U_0})$, $\dots$, $\overrightarrow{U_n} = \Psi(\overrightarrow{U_{n-1}}) = \Psi^{(n)}(\overrightarrow{U_0})$.
   a) Calculer les coordonnées $X_0$ et $Y_0$ de $\overrightarrow{U_0}$ dans la base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$, en fonction de $x_0$ et $y_0$.
   b) Calculer en fonction de $X_0$ et $Y_0$, et de $n$, les coordonnées $X_n$ et $Y_n$ dans la base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. En déduire les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $\overrightarrow{U_n}$ en fonction de $x_0$ et $y_0$ et de $n$.

C) P est le plan affine de direction $\mathscr{P}$ et dont $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est un repère. Soit $f$ l'application affine de P dont l'endomorphisme associé est $\Psi$ et telle que $f(O) = O'$ avec $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j}$.
1. Montrer que P admet un point invariant unique $A$ par $f$. Donner les coordonnées de $A$.
2. Montrer qu'il existe une symétrie affine $S$ d'endomorphisme associé $s$ et une homothétie affine $H$ d'endomorphisme associé $h'$ telles que
$$f = S\circ H = H\circ S.$$
Déterminer les éléments caractéristiques de $S$ et $H$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit les points $B_0,\ B_1,\ B_2,\dots,\ B_n$ tels que
$$\overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{i},\ B_1 = f(B_0),\ B_2 = f(B_1),\ \dots,\ B_n = f(B_{n-1}).$$
Montrer que ces points appartiennent à l'une ou l'autre des droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ que l'on déterminera. Préciser, selon la parité de $n$, l'appartenance de $B_n$ à $\Delta_1$ ou $\Delta_2$.

## XIV. Clermont Remplacement, série C

**Ex. 1540.** ./1980/clermontCrem/exo-1/texte.tex

Le plan affin euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. $M(x\ ;\ y)$ et $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ étant deux points quelconques de P, on définit sur P la relation binaire $\mathscr{R}$ de la manière suivante :
$$M\mathscr{R}M' \iff 9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y = 9x'^2 - 4y'^2 - 36x' - 24y'.$$
1. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans P.
   Soit $A$ le point de coordonnées $(0\ ;\ -3)$. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $\gamma_A$, classe d'équivalence de $A$.
   Construire $\gamma_A$ et donner son centre, ses sommets, ses asymptotes.
2. Soit $B$ le point de coordonnées $(u\ ;\ v)$. Discuter, selon les valeurs de réels $u$ et $v$, la nature de $\gamma_B$.

**Ex. 1541.** ./1980/clermontCrem/exo-2/texte.tex

Soit $E_3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ une base de cet espace vectoriel.
$f$ étant une application linéaire de $E_3$ dans $E_3$ (endomorphisme de $E_3$), on note $\ker f$ le noyau de $f$ et $\mathbf{Im} f$ son image.
1. Dans cette question, $f$ est l'endomorphisme de $E_3$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ de $E_3$ fait correspondre le vecteur $f(\overrightarrow{u}) = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ avec
$$\begin{cases} x' = 2x + 5y + 5y \\ y' = x + 2y + 2z \\ z' = x + 3y + 3z. \end{cases}$$
Déterminer $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$ et démontrer que $\ker f \subset \mathbf{Im} f$.
Déterminer $\ker(f\circ f)$ et $\mathbf{Im}(f\circ f)$, démontrer que $\ker(f\circ f)$ et $\mathbf{Im}(f\circ f)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $E_3$.



Retour page 1

2. Dans cette question, on suppose que $\ker f$ est une droite vectorielle de base $\vec{e}_1$ telle que $\ker f \subset \mathbf{Im} f$. Démontrer que :
   - $\mathbf{Im} f$ est un plan vectoriel qui contient $\vec{e}_1$ ; on notera $\vec{e}_2$ un vecteur de $\mathbf{Im} f$ indépendant de $\vec{e}_1$ ;
   - $\mathbf{Im}(f \circ f)$ est une droite vectorielle telle que $\mathbf{Im}(f \circ f) \subset \mathbf{Im} f$ ;
   - $\ker(f \circ f)$ est un plan vectoriel tel que $\ker f \subset \ker(f \circ f)$.

On rappelle que les dimensions de $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$ ont pour somme la dimension de $E_3$.

## Problème 554

./1980/clermontCrem/pb/texte

On se propose d'étudier la famille de fonctions réelles de variable réelle définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On pourra remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

A) 1. a) $n$ est fixé dans $\mathbb{N}$. Étudier les variations de $f_n$ ainsi que les branches infinies de sa courbe représentative $C_n$ (on ne construira pas cette courbe). On fera un tableau de variations pour chacun des cas $n=0$ ; $n=1$ ; $n \geqslant 2$.

b) Démontrer que lorsque $n$ décrit $\mathbb{N}$ les courbes $C_n$ passent par un point fixe $\Omega$ que l'on déterminera.

2. Étude des fonctions $f_0$ et $f_1$.

a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_0(-x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes $C_0$ et $C_1$ ?

b) Calculer $f_0''$, dérivée seconde de $f_0$. Pour quelle valeur $x_0$ a-t-on $f_0''(x_0)=0$ ?
Trouver une équation de la tangente à $C_0$ au point d'abscisse $x_0$.

c) Démontrer que le point $\Omega$ déterminé en A(1)b est centre de symétrie de chacune des courbes $C_0$ et $C_1$.

d) Construire les courbes $C_0$ et $C_1$ (repère orthonormé, unité 4 cm).

3. Étude de la fonction $f_2$.

a) Démontrer que l'application $f_2$ admet une application réciproque notée $\varphi$ dont on précisera seulement l'ensemble de définition et quelques propriétés (continuité, sens de variation, dérivabilité). On notera $\Gamma$ la courbe représentative de $\varphi$.

b) Trouver une équation de la tangente à $C_2$ au point d'abscisse nulle, et une équation de la tangente à $\Gamma$ au point $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

c) Construire les courbes $C_2$ et $\Gamma$ (repère orthonormé, unité 4 cm).

B) Soit la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a) Remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad \text{avec} \qquad g(x) = 1+\mathrm{e}^x\ ;$$

en déduire une valeur de $u_0$.

b) Étudier $u_0+u_1$ ; en déduire la valeur de $u_1$.

2. a) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad v_n = u_n + u_{n+1},$$

démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

b) En déduire que $v_n$ tend vers une limite quand $n$ tend vers l'infini, et calculer cette limite.

3. Après avoir étudié le signe de $u_n$, déduire du B(2)b que $u_n$ tend vers une limite quand $n$ tend vers l'infini et calculer cette limite.

Retour page 1

# XV. Dijon, série C

Ex. 1542. 3 points. ./1980/dijonC/exo-1/texte.tex

E désigne un espace affine associé à un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension 3, rapporté au repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit $f$ l'application affine de E dans E, qui à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe la point $M'$ dont les coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ sont :

$$\begin{cases} x' = -x+z \\ y' = -2x+y+z+2 \\ z' = z+4. \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$ est involutif ; le déterminer.
2. Quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ?
3. Soit $g$ la symétrie affine d'endomorphisme associé à $\varphi$ qui laisse invariant le point $A$ ed coordonnées $(0~;~1~;~2)$. Soit $t$ la translation de vecteur $2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+4\vec{k}$. Démontrer que $f = t \circ g = g \circ t$.

Ex. 1543. 4 points. ./1980/dijonC/exo-2/texte.tex

E désigne un espace affine associé à un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension 3, rapporté au repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit $f$ l'application affine de E dans E qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le point $M'$ dont les coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ sont :

$$\begin{cases} x' = -x+z \\ y' = -2x+y+z+2 \\ z' = z+4. \end{cases}$$

**1.** Démontrer que l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$ est involutif ; le déterminer.

**2.** Quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ?

**3.** Soit $g$ la symétrie affine d'endomorphisme associe $\varphi$ qui laisse invariant le point $A$ de coordonnées $(0~;~1~;~2)$. Soit $t$ la translation de vecteur $2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+4\vec{k}$.
Vérifier que $f = t \circ g = g \circ t$.

## Problème 555 *13 points.* ./1980/dijonC/pb/texte

Dans tout le problème, $(a,~b)$ est un couple donné, élément de $\mathbb{R}^2 - \{(0,~0)\}$. On désigne par :

— $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O,~vecteur I,~\vec{J})$.

— $\mathscr{P}^\star$ l'ensemble $\mathscr{P}$ privé de l'origine $O$.

— $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes privé de zéro (on pourra utiliser les notations $\rho$ et $\theta$ pour désigner respectivement le module et un argument d'un élément de $\mathbb{C}^\star$.

— $A$ le point de $\mathscr{P}^\star$ d'affixe 1.

Pour tout couple de points $M,~M'$ de $\mathscr{P}^\star$, d'affixe respective $z$ et $z'$, on associe le point d'affixe $zz'$, noté $M\Delta M'$.
On définit ainsi une loi de composition interne dans $\mathscr{P}^\star$.

**Partie A**

**1.** Soient $Q$ et $Q'$ les points de $\mathscr{P}^\star$ d'affixe respective $z = \cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ et $z' = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. Représenter les points $Q$, $Q'$ et $Q\Delta Q'$.

**2.** Démontrer que $(\mathscr{P}^\star,~\Delta)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{C}^\star,~\times)$. Quel est son élément neutre ?

**3.** On appelle $f_{a,~b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{P}^\star$ qui, à tout réel $t$, associe le point $M$ d'affixe $\mathrm{e}^{at}(\cos bt+\mathrm{i}\sin bt)$.

- Démontrer que $f_{a,~b}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},~+)$ dans $(\mathscr{P}^\star,~\Delta)$.
- Le point $Q'$ a-t-il des antécédents par $f_{0,~b}$ ? Lorsque $a$ est non nul, $Q$ a-t-il des antécédents par $f_{a,~b}$ ? En déduire que l'application $f_{a,~b}$ n'est pas surjective.
- Pour quelles valeurs de $a$ l'application $f_{a,~b}$ est-elle surjective ?

**4.** On appelle $C_{a,~b}$ l'image de $\mathbb{R}$ par $f_{a,~b}$.

Retour page 1

- Reconnaître les ensembles $C_{0,\ b}$ et $C_{a,\ 0}$.
- Démontrer que $(C_{a,\ b},\ \Delta)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{P}^\star,\ \Delta)$.

**Partie B**

Dans cette partie seulement, $a$ est un réel strictement positif, $b$ un réel quelconque.
Soit $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$, de raison $r$, réel strictement négatif.
Pour tout entier naturel $q$, on désigne par $M_q$ le point $f_{a,\ b}(u_q)$, dont l'affixe est notée $z_q$.

**1.** On donne, dans cette questions seulement, $a = 1$, $b = 1$, $r = -\dfrac{\pi}{4}$. Représenter les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ et construire les segments $[M_q,\ M_{q+1}]$, $q \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
On prendra 10 cm pour unité de longueur.

**2.** Vérifier que $z_q = z_1^q$ et que $|z_{q+1} - z_q| = \mathrm{e}^{aqr}\,|z_1 - 1|$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} \left\|\overrightarrow{M_qM_{q+1}}\right\|$ converge vers

$$L(r) = \sqrt{1 + 2\frac{(1-\cos br)}{(1-\mathrm{e}^{ar})^2}\mathrm{e}^{ar}}.$$

Quelle est la limite $L$ de $L(r)$ lorsque $r$ tend vers $0$ ?

**Partie C**

Dans cette partie, on cherche l'ensemble $\mathscr{G}_{a,\ b}$ des similitudes directes $S$ de centre $O$ qui laissent $C_{a,\ b}$ globalement invariant, c'est-à-dire telles que $S(C_{a,\ b}) = C_{a,\ b}$.
Étant donné un élément $S$ de $\mathscr{G}_{a,\ b}$, on note $k$ son rapport, $\varphi$ une détermination de la mesure de son angle, en radian.

**1.** Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$, démontrer que $S(M) = S(A)\Delta M$.

**2.** Soit $M$ un élément de $C_{a,\ b}$. On considère les trois propositions :
P1 : $S(M)$ appartient à $C_{a,\ b}$
P2 : $S(A)$ appartient à $C_{a,\ b}$
P3 : il existe une réel $T$ et un élément $\lambda$ de $\mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} \mathrm{e}^{aT} = k \\ bT = \varphi + 2\lambda\pi. \end{cases}$
Démontrer l'équivalence des propositions P1 et P2, puis des propositions P2 et P3.

**3.** En déduire que $\mathscr{G}_{a,\ b}$ est égal à l'ensemble $\mathscr{G}'_{a,\ b}$ des similitudes de centre $O$, de rapport $\mathrm{e}^{aT}$, dont une détermination de la mesure de l'angle est $bT$, lorsque $T$ décrit $\mathbb{R}$.

## XVI. Grenoble, série C

**Ex. 1544.** *3 points.* *./1980/grenobleC/exo-1/texte.tex*

Soit $n$ un entier positif, $\theta$ un réel appartenant à $]0\,;\pi[$. On considère :

$$\begin{aligned} S_n &= \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \cdots + \cos^p\theta\cos p\theta + \cdots + \cos^n\theta\cos n\theta \\ S'_n &= \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \cdots + \cos^p\theta\sin p\theta + \cdots + \cos^n\theta\sin n\theta \\ \Sigma_n &= S_n + \mathrm{i}S'_n. \end{aligned}$$

Montrer que $\Sigma_n$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on déterminera le premier terme et la raison.

En déduire la valeur de $\Sigma_n$ puis $S_n$ en fonction de $n$ et $\theta$. (On montrera que $S_n = \dfrac{\cos^{n+1}\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$).

**Ex. 1545.** *4 points.* *./1980/grenobleC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = 1 - \left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}\right|$.

**1.** Étudier continuité et la dérivabilité de $f$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**3.** Soit $\lambda$ un réel négatif. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $\lambda \leqslant x \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 1$. Montrer que $\lambda$ a une limite quand $\lambda$ tend vers $-\infty$.

Retour page 1

## Problème 556 *13 points.*

./1980/grenobleC/pb/texte

E désignant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$ désignent respectivement le noyau de $f$ et l'image de $f$.

On rappelle que $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ muni de l'addition et de la loi $\circ$ de composition des applications est un anneau ; on rappelle que :

$$\forall (f,\ g) \in (\mathscr{L}(\mathrm{E}))^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda.f) \circ g = \lambda.(f \circ g).$$

L'application nulle de E dans E est notée $\Theta$ ; l'identité de E est notée I.

A. Dans cette partie du problème, E est de dimension 3 muni d'une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Pour tout réel $m$ non nul, on définit l'endomorphisme $f_m$ par

$$\begin{aligned} f_m(\vec{i}) &= 2m\vec{i} - m\vec{j} - m\vec{k} \\ f_m(\vec{j}) &= -m\vec{i} + 2m\vec{j} - m\vec{k} \\ f_m(\vec{k}) &= -m\vec{i} - m\vec{j} + 2m\vec{k} \end{aligned}$$

$\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications $f_m$ quand $m$ décrit $\mathbb{R}^\star$.

1° Déterminer le noyau et l'image de $f_m$.

2° Soit $\pi$ le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.
Déterminer la restriction de $f_m$ à $\pi$.

3° Démontrer qu'il existe une projection vectorielle $p$ et une homothétie vectorielle $h$ telles que

$$f_m = p \circ h = h \circ p.$$

(On pourra par exemple décomposer un vecteur de E sur le noyau et l'image de $f_m$).

4° Montrer que $(\mathscr{F},\ \circ)$ est un groupe commutatif.
Préciser l'élément neutre de ce groupe et l'élément symétrique dans $\mathscr{F}$ d'un élément $f_m$ quelconque.

5° Déterminer l'endomorphisme $(f_m)^2 - 3m.f_m \qquad ((f_m)^2 = f_m \circ f_m)$.

B. Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension finie ; $a,\ b,\ c$ sont trois réels et $a$ est non nul.
On considère l'équation

$$a.f^2 + b.f + c.\mathrm{I} = \theta \tag{1}$$

dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ $(f^2 = f \circ f)$.

1° Montrer que si $b^2 - 4ac \geqslant 0$ il existe au moins un endomorphisme $f$ solution de (1).

2° Montrer que si $c \neq 0$, toute solution $f$ de (1) est un automorphisme de E (on rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E).

3° On suppose que $b = c = 0$.

a) Montrer qu'une endomorphisme $f$ de E est solution de (1) si et seulement si son image est incluse dans son noyau.

b) Que peut-on dire sur l'image et le noyau d'une solution de (1) dans le cas où E est de dimension 2 ou de dimension 3 ?

C. Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $a$ et $b$ sont deux réels non nuls.
On considère l'équation

$$a.f^2 + b.f = \theta. \tag{2}$$

1° Soit $f$ une solution de (C2)

a) Montrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\mathbf{Im} f = \mathbf{Im} f^2$.

b) Montrer que $\ker f$ et $\mathbf{Im} f$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
On pourra remarquer que

$$\forall \vec{u} \in \mathrm{E} \qquad \vec{u} = \left[\vec{u} + \frac{a}{b} f(\vec{u})\right] - \frac{a}{b} f(\vec{u}).$$

c) Déterminer la restriction de $f$ à $\mathbf{Im} f$.

d) Si $\ker f = \{\vec{0}\}$ quelle est l'application $f$ ?



Retour page 1

e) Montrer que $f$ est la composée commutable de deux endomorphismes simples que l'on précisera.

2° Soient $V'$ et $V''$ deux sous-espaces supplémentaires de E. Montrer qu'il existe une solution unique de telle que $\ker f = V'$ et $\mathbf{Im} f = V''$.

3° Conclure.

# XVII. Grenoble remplacement, série C

**Ex. 1546.** *3,5 points.* *./1980/grenobleCrem/exo-2/texte.tex*

Soit $n$ un entier relatif. On pose $A = n^3 + 3n^2 + 2n - 4$, $B = n^2 + 2n - 1$ et $C = n - 3$.

1. Montrer qu'il existe un entier relatif $q$ que l'on déterminera tel que :

$$A = Bq + C.$$

En déduire que le pgcd de $A$ et $B$ est égal au pgcd de $B$ et $C$.

2. Montrer que le pgcd de $A$ et $B$ est égal au pgcd de $C$ et de $14$. En déduire les valeurs possibles du pgcd de $A$ et $B$.

— Pour quelles valeurs de $n$, le pgcd de $A$ et $B$ est-il égal à 7 ?

— Pour quelles valeurs de $n$, $A$ et $B$ sont-ils premiers entre-eux ?

# XVIII. Lille, série C

**Ex. 1547.** *4 points.* *./1980/lilleC/exo-1/texte.tex*

P est un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ admet pour affixe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
On considère l'application $f$ du plan P dans lui-même qui, au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M' = f(M)$ dont l'affixe $z'$ est définie par :

$$z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\overline{z} - 1\right).$$

($\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ est le nombre complexe conjugué du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$).

**1.** Quelle est la nature de l'application $f$ ?

**2.** Déterminer l'application $f \circ f$ ; en déduire l'application réciproque $f^{-1}$ de $f$.

**3.** Quelle est la décomposition canonique de $f$ ?

**Ex. 1548.** *3 points.* *./1980/lilleC/exo-2/texte.tex*

On considère trois réels $a$, $b$, $c$. Un sac contient 3 jetons marqués respectivement $a$, $b$, $c$. On tire au hasard un jeton, on le remet dans le sac, et on tire à nouveau un jeton.
Les tirages sont supposés équiprobables.
On définit la variable aléatoire $X$ qui, à chaque couple de tirages ainsi décrits, associe le produit des nombres marqués sur les deux jetons tirés.

**1.** Montrer que l'espérance mathématique de $X$ (notée $\mathrm{E}(X)$) est égale à $\frac{1}{9}(a+b+c)^2$.

Calculer l'espérance mathématique de $X^2$ (notée $\mathrm{E}(X^2)$).

**2.** a) Démontrer que si $a$, $b$, $c$ (dans cet ordre) sont trois termes d'une suite géométrique alors $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$.

b) Déterminer les triplets $a$, $b$, $c$ pour lesquels $a$, $b$, $c$ sont dans cet ordre trois termes positifs d'une suite géométrique avec $\mathrm{E}(X)$=49 et $\mathrm{E}(X^2)$= 8281.

Retour page 1

**Problème 557** *13 points.* ./1980/lilleC/pb/texte

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $P$ le plan vectoriel euclidien associé.

A- À chaque réel $a$, on associe la fonction numérique de la variable réelle $x$

$$f_a : x \longmapsto f_a(x) = a(1-x) + \log x.$$

($\log x$ est le logarithme népérien de $x$.)

1. Établir le tableau de variation de la fonction $f_a$. (On distinguera les cas $a \geqslant 0$ et $a > 0$). A quelle condition $f_a$ est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ?
2. On appelle $(C_a)$ la courbe représentative de $f_a$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que les courbes $(C_a)$ ont un point commun, $A$, que l'on déterminera.
3. Étudier $f_1$ et tracer sa courbe représentative $(C_1)$dans le repère orthonormé ($(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. (Unité : 2 cm). On étudiera les branches infinies de $(C_1)$.
4. Calculer, en fonction de $a$ et $\lambda$, l'intégrale

$$I_a(\lambda) = \int_{\lambda}^{2} f_a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^{\star}.$$

Montrer que $I_a(\lambda)$ admet, lorsque $\lambda$ tend vers $0$, une limite indépendante de $a$.

B- Dans l'espace vectoriel euclidien $P$, on considère l'endomorphisme $\sigma_a$ dont la matrice dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $a$, $\sigma_a$ est bijectif. Déterminer la matrice, dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ , de l'endomorphisme réciproque $(\sigma_a)^{-1}$.
2. Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ , on considère l'application affine $s_a$, d'endomorphisme associé $\sigma_a$ , transformant l'origine du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en le point $O'$ de coordonnées $(-1\ ;\ +1)$.

   Étant donné un point quelconque $M$ de $\mathscr{P}$, soit $M$ son image par $s_a$. Donner les expressions des coordonnées $x'$, $y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x$, $y$ de $M$.
3. a) Si l'on note $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe de $M$ et $z = x + \mathrm{i}y$, celle de $M$, montrer que $z$ et $z'$ sont liées par une relation de la forme $z' = \alpha\overline{z} + \beta$, où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$, et $\alpha$ et $\beta$, des nombres complexes que l'on explicitera.

   b) Quelle est la nature de s$s_a$ ? En donner les éléments caractéristiques : axe, rapport, et centre éventuel. (On examinera séparément le cas $a = 0$).

   c) Quelle est la nature de la composée $s_a \circ s_a$ ? En donner les éléments caractéristiques.

C- On note ($\Gamma_a$ ) l'image de ($C_a$ ) par $s_a$.

1. Montrer que ($\Gamma_a$ ) est la courbe représentative, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $g_a$ :

$$g_a : x \longmapsto -ax - a + 1 + (1+a^2)\mathrm{e}^{x+1-a}.$$

2. Étudier la fonction

$$g_1 : x \longmapsto g_1(x) = -x + 2\mathrm{e}^{x}$$

   et construire la courbe ($\Gamma_1$) dans le même repère que ($C_1$).



Retour page 1

# XIX. Lille remplacement, série C

**Ex. 1549.** ./1980/lilleCrem/exo-1/texte.tex

On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}\ ;\ +\ \ \times)$ dont on notera les éléments :

$$\dot{0}\ ;\ \dot{1}\ ;\ \dots\ ;\ \dot{p}\ ;\ \dots\ ;\ \dot{19}\ ;\ p \in [\![1, 19]\!].$$

1. Démontrer que $p$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $p$ et 20 sont premiers entre eux. En déduire les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$.
2. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ le système

$$\begin{cases} \dot{4}x + \dot{3}y = \dot{10} \\ \dot{5}x + \dot{6}y = \dot{17}. \end{cases}$$

**Ex. 1550.** ./1980/lilleCrem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction numérique $f$ d'une variable réelle définie par

$$f(x) = (x-1)\log|x-1| - x\log x.$$

($\log$ représente la fonction logarithmique népérien).

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et les variations de $f$.

**2.** Soit la fonction $g$ définie par

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(1) = 0, \\ g(x) = f(x) \qquad \forall x \in \left]0\,;1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[. \end{cases}$$

Démontrer que $g$ est continue en $1$ et à droite en $0$.
g est-elle dérivable en $1$ ? à droite en $0$ ?

**3.** Démontrer que $f(x)$ admet pour limite $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
On pourra remarquer que

$$\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[, \qquad f(x) = x\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \log(x-1).$$

**4.** Terminer l'étude de la fonction $g$ et représenter graphiquement $g$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On choisira pour unité : 2 cm.)

**5.** Soit $\lambda \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.
Calculer en cm$^2$ l'aire de l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tels que

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \lambda, \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x).$$

## Problème 558

./1980/lilleCrem/pb/texte

A- $\mathscr{E}$ étant un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des automorphismes $\varphi$ de $\mathscr{E}$ qui « conservent l'orthogonalité » , c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}, \qquad \forall(\vec{V},\ \vec{W}) \in \mathscr{E}\times\mathscr{E}, \quad (\vec{V}.\vec{W} = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{V}).\varphi(\vec{W}) = 0).$$

1. Vérifier que les homothéties vectorielles et les isométries vectorielles de $\mathscr{E}$ appartiennent à $\mathscr{S}$.
2. a) Démontrer que l'image par $\varphi$ de la base $\mathscr{B}$ est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{E}$ orthogonale et dont les vecteurs ont même norme.
(On pourra utiliser des vecteurs tels que $(\vec{i} - \vec{j})$ et $(\vec{i} + \vec{j})$)).
On posera alors $\left\|\varphi(\vec{i})\right\| = \alpha$.



Retour page 1

b) Démontrer que

$$\forall \overrightarrow{V} \in \mathscr{E}, \qquad \left\|\varphi(\overrightarrow{V})\right\| = \alpha \left\|\overrightarrow{V}\right\|.$$

Le réel $\alpha$ sera appelé rapport de $\varphi$.

c) Démontrer que $\varphi$ est la composée commutative d'une isométrie vectorielle unique et de l'homothétie vectorielle de rapport $\alpha$.

3. Soit un endomorphisme $u$ non nul de $\mathscr{E}$ vérifiant

$$u(\overrightarrow{i}).u(\overrightarrow{j}) = u(\overrightarrow{j}).u(\overrightarrow{k}) = u(\overrightarrow{k}).u(\overrightarrow{i}) = 0$$

et

$$\left\|u(\overrightarrow{i})\right\| = \left\|u(\overrightarrow{j})\right\| = \left\|u(\overrightarrow{k})\right\|.$$

Montrer que $u$ est un élément de $\mathscr{S}$.

`Application.` : Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par

$$u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\ ;\ u(\overrightarrow{i}) = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\ ;\ u(\overrightarrow{i}) = -2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Montrer que $u$ est élément de $\mathscr{S}$. Déterminer son rapport.

Écrire $u$ comme composé d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle que l'on précisera.

4. Montrer que $\mathscr{S}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe non commutatif.

B- Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les fonctions numériques de la variable réelle $x$ définies par

$$f_1(x) = \cos 4x,\ \ f_2(x) = \sin 4x,\ \ f_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel engendré par $f_1,\ f_2,\ f_3$.

1. a) Démontrer que, pour tous $g$ et $h$ éléments de $\mathscr{F}$, $g \times h$ est intégrable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer, pour tout $p$ et $q$ éléments de $\{1,\ 2,\ 3\}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_p(x) f_q(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Soit $\theta$ l'application de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\theta(g,\ h) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose

$$g = af_1 + bf_2 + cf_3 \qquad \text{et} \qquad h = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3.$$

Calculer $\theta(g,\ h)$ en fonction des réels $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c'$. En déduire que $\theta$ est un produit scalaire sur $\mathscr{F}$ et que $f_1,\ f_2,\ f_3$ est une base orthonormée de $\mathscr{F}$.

2. a) Pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$ calculer les dérivées d'ordre $n$ des fonctions $f_1, f_2, f_3$ que l'on notera respectivement $f_1^{(n)},\ f_2^{(n)},\ f_3^{(n)}$.

En déduire que, pour tout $g$ élément de $\mathscr{F}$, $g^{(n)}$ existe.

b) Pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$, on considère l'application $\varphi_n$ de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ qui à $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ associe :

$$\varphi_n(g) = g^{(n)} + 4^n c f_3.$$

Quelle est l'image par $\varphi_1$ de la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ ?

Montrer que $\varphi_1$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle que l'on précisera.

Mêmes questions pour $\varphi_2$, pour $\varphi_n$. Quels sont les entiers naturels $n$ tels que $\varphi_n$ soit une homothétie vectorielle ?



Retour page 1

# XX. Limoges & Toulouse, série C

**Ex. 1551.** *3 points.* ./1980/limogesC/exo-1/texte.tex

Pour tout $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$ on pose :

$$f(x,\ y) = (4x+2y+12)^2 - 4(x+y+4)^2.$$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

**1.** $f(x,\ x) = 0$

**2.** $f(x,\ y) = 4$.

**Ex. 1552.** *4 points.* ./1980/limogesC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ telle que :

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}.$$

Le plan $P$ est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Étudier $f$ et dresser le tableau complet des variations de $f$ (la courbe représentative de $f$ n'est pas demandée).

**2.** Pour tout $X$ positif calculer $\displaystyle\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on notera $F(X)$.

(On pourra utiliser une intégration par parties).
Étudier $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} F(X)$.

**3.** Soit $g : \left]-1\,;\mathrm{e}^2-1\right] \longrightarrow \left]-\infty\,;\frac{2}{\mathrm{e}}\right[$ .
$x \longmapsto f(x)$

a) Tracer la courbe d'équation $y = g(x)$.

b) Montrer que $g$ est une bijection. Notant $h$ son application réciproque, tracer la courbe d'équation $y = h(x)$.

c) E est l'ensemble des points $M$ de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant h(x).$$

Calculer l'aire de E.

## Problème 559 *13 points.* ./1980/limogesC/pb/texte

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé. Á tout point $M$ de P de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ appelé affixe de $M$.

A. 1° Étant donné un complexe non nul $w = u + \mathrm{i}v$, avec $u$ et $v$ réels, et un réel $\ell$, déterminer l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie

$$\overline{w}z + w\overline{z} = \ell.$$

2° Soit $D$ une droite affine dont une équation est :

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec } (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0).$$

Trouver un complexe non nul $w$ et un réel $\ell$ tels que $D$ soit l'ensemble des points de P dont l'affixe $z$ vérifie

$$\overline{w}z + w\overline{z} = \ell.$$

B. 1° Étant donné un nombre complexe $w$ et un réel $k$, déterminer l'ensemble des points $M$ de P dont l'affixe $z$ vérifie :

$$z\overline{z} - \overline{w}z - w\overline{z} + k = 0$$

(on pourra discuter en fonction du signe de $|w|^2 - k$).

Retour page 1

2° Soit $C$ le cercle de centre le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$, de rayon $R$. Trouver un complexe $w$ et un réel $k$ tels que $C$ soit l'ensemble des points de P dont l'affixe $z$ vérifie :

$$z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0.$$

C. On considère l'application $f$ de P$-\{O\}$ dans P$-\{O\}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1° Montrer que pour tout point $M$ de P$-\{O\}$, les points $M$ et $M'=f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine $O$.

2° Montrer que $f$ est involutive. Préciser l'ensemble des points $M$ de P tels que $f(M)=M$ et donner éléments remarquables.

3° a) Soit $D$ une droite ne contenant pas le point $O$. En utilisant les parties A et B, déterminer l'image de $D$ par l'application $f$. Préciser la nature géométrique de cette image et donner ses éléments caractéristiques.

b) Soit $U$ un droite contenant $O$. Déterminer l'image de $U-\{O\}$ par $f$.

4° Soit $C$ un cercle passant par $O$. Déterminer l'image de $C-\{O\}$ par $f$. Préciser la nature géométrique de cette image.

D. Si $M$ et $N$ sont deux points quelconques de P, on rappelle que la distance $MN$ de $M$ à $N$ est égale au module de la différence des affixes de $M$ et de $N$.

1° Soient $A$ et $B$ deux points distincts de P$-\{O\}$ d'images respectives $A'$ et $B'$ par $f$. Exprimer $A'B'$ en fonction de $AB$, $OA$ et $OB$.

2° Soient un cercle $C$ passant par $O$ et trois points $R$, $S$, $T$ sur ce cercle tels que $O$, $R$, $S$, $T$ soient deux à deux distincts et le point d'intersection des droites $(OS)$ et $(RT)$ appartienne au segment $[R,T]$.
Montrer que

$$OS.RT=OR.TS+OT.RS.$$

(On pourra considérer l'image par $f$ de $C-\{O\}$ et utiliser le fait qu'un point $B$ appartient au segment $[A,C]$ si et seulement si $AB+BC=AC$).

3° Soient trois points $R$, $S$, $T$ du plan P tels que $O$, $R$, $S$, $T$ soient deux à deux distincts et tels que :

$$OS.RT=OR.TS+OT.RS.$$

Montrer que $O$, $R$, $S$, $T$ sont sur un même cercle ou sur une même droite.

## XXI. Lyon, série C

Ex. 1553. 4 points. ./1980/lyonC/exo-1/texte.tex

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

**1.** Déterminer $x$ pour que :

a) A soit divisible par six

b) A soit divisible par cinq

En déduire qu'il existe $x$ tel que A soit divisible par trente.

**2.** On donne à $x$ la valeur zéro.
Déterminer l'écriture décimale de A.
Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ?
Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

**3.**

**Ex. 1554.** ______ *4 points.* *./1980/lyonC/exo-2/texte.tex*

Soit $\alpha$ un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < \pi$. On considère l'équation :

$$z^2 s \sin^{\alpha} - 4z \sin\alpha + \cos^2\alpha = 0. \tag{E}$$

**1.** Résoudre (E) dans le corps des nombres complexes.

**2.** On désigne par $M'$ et $M''$ les images des racines $z$ et $z'$ de (E) dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe.
Montrer que, lorsque $\alpha$ varie dans $]0 ; \pi[$, l'ensemble des points $M'$ et $M''$ est une branche d'hyperbole $(H)$. Préciser les sommets et les asymptotes de $(H)$ et dessiner la branche d'hyperbole en question.

## Problème 560 *12 points.* *./1980/lyonC/pb/texte*

A) On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et on note $\mathscr{B}$ une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de E .
Étant donné un nombre réel a, on considère l'endomorphisme $\varphi_a$ de E défini par

$$\varphi_a(\vec{i}) = a\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \varphi_a(\vec{j}) = 2\vec{i} + a\vec{j}, \quad \varphi_a(\vec{k}) = a\vec{k}.$$

On désigne par P le plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. a) Vérifier que, pour tout $\vec{u} \in$ P, $\varphi_a(\vec{u}) \in$ P.
   b) Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   Quelles sont les coordonnées de $\varphi_a(\vec{u})$ dans cette base ?
   Déterminer le noyau de $\varphi_a$ suivant les valeurs de $a$. À quelle condition $\varphi_a$ est-il bijectif ? Dans le cas contraire, déterminer l'image de $\varphi_a$ et, pour tout vecteur $\vec{v}$ de P, l'ensemble des antécédents de $\vec{v}$ par $\varphi_a$.
2. On suppose que E est euclidien et que $\mathscr{B}$ est orthonormée.
   Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de direction P rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par $s$ la restriction de$\varphi_a$au plan vectoriel P et par $S$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ associée à $s$ telle que $S(O)$ soit le point $O'$ de coordonnées $\left(1 - 2\sqrt{3}\ ;\ 2\right)$.
   Montrer que $S$ est une similitude directe de $\mathscr{P}$. Déterminer pour $a = 2\sqrt{3}$ le rapport et le centre de $S$ et une mesure en radians de son angle dans $\mathscr{P}$ orienté par $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

B) Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles définies sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ de $\mathbb{R}$.
On considère le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ engendré par les fonctions $f_1,\ f_2,\ f_3$ définies que $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad f_2(t)\mathrm{e}^{-t}\sin t, \qquad f_3(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

1. a. Montrer que $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est une base de $\mathscr{E}$.
   b. Soit $f$ un élément de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.
   Montrer que la fonction dérivée $f'$ de $f$ est un élément de $\mathscr{E}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.
   c. En déduire que tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ a une primitive $F$ et une seule dans $\mathscr{E}$ et déterminer $F$.
2. Soit $a$ un nombre réel. Á tout élément $f$ de $\mathscr{E}$ on associe la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par

   $$\tilde{f}(t) = (a+2)f(t) + 2f'(t)$$

   où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$. Montrer que l'on définit ainsi une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ notée $\psi_a$ et que $\psi_a$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
   Calculer les coordonnées de $\psi_a(f) = \tilde{f}$ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ en fonction des coordonnées de $f$ dans cette base.

C) On applique les résultats des parties A et B du problème au cas particulier où E= $\mathscr{E}$, $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ et $a = 0$. On a alors $\varphi_0 = \psi_0$.
Soit $g$ l'élément de $\mathscr{E}$ défini par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t)$$

pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Retour page 1

1. Étudier les variations de $g$ et montrer que $g$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle $J$ qu'on déterminera. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction réciproque $g^{-1}$ ? Calculer le nombre dérivé en 1 de cette fonction $g^{-1}$.
2. Tracer la courbe représentative (C) de $g$ dans un repère $\mathscr{R}$ orthonormé (unité : 1 cm). Placer les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$. Tracer aussi la courbe représenta-

   tive $\mathrm{C}^{-1}$ de la fonction réciproque$g^{-1}$. Calculer l'aire en centimètres carrés du domaine D défini par la courbe (C), l'axe $Ox$ et les droites $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}_g$ des fonctions antécédentes de $g$ par $\varphi_0$ est constitué par les fonctions $g_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ définies sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g_\alpha(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\alpha+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right).$$

   Étudier les variations de $g_\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha$.
   Tracer les courbes représentatives de $g_{-\frac{1}{2}}$ et $g_{\frac{3}{2}}$ dans un repère orthogonal $\mathscr{R}'=(O,\ \overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'})$ (On prendra $\left\|\overrightarrow{i'}\right\|=3$ cm, $\left\|\overrightarrow{j'}\right\|=1$ cm).
   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\approx 4{,}8,\qquad \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}}\approx 0{,}6.$$

## XXII. Maroc, série Sciences Mathématiques

**Ex. 1555.** ./1980/marocE/exo-1/texte.tex

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction numérique $f_n$, de la variable numérique $t$, définie par :

$$f_n : t\longmapsto \frac{-n\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^{-nt}}+\log 2$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien et $\mathrm{e}$ la base de ce logarithme.

**1.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $f_n$ est intégrable sur $[0\,;1]$.

Calculer $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**2.** On pose $v_n=\mathrm{e}^{u_n}-1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

**3.** Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} v_k$ et montrer que la suite $(S_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ est convergente. calculer sa limite.

**Ex. 1556.** ./1980/marocE/exo-2/texte.tex

Soit $p$ et $q$ deux entiers relatifs non nuls et $\Delta_{(p,\ q)}$ leur PGCD.

1. Démontrer que, pour tout entier relatif $q$,

$$1+q+q^2\equiv 1 \pmod 2.$$

   En déduire que $(1,\ q)$ n'est pas solution de l'équation (1) :

$$(X,\ Y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\qquad X^3+XY^2+Y^3=0 \tag{1}$$

   Démontrer que $(-1,\ q)$ n'est pas non plus une solution de l'équation (1).
2. Démontrer l'équivalence :

$$\Delta_{(p,\ q)}=1 \Longleftrightarrow \Delta_{(p,\ q^3)}=1.$$

   En déduire que les couples $(p,\ q)$ de $\mathbb{Z}^\star\times\mathbb{Z}^\star$ tels que $|p|\neq 1$ et $\Delta_{(p,\ q)}=1$ ne sont pas solutions de l'équation (1).

Retour page 1

3. En déduire que l'équation
$$x^3+x+1=0$$
n'a pas de solution dans l'ensemble des rationnels.

## Problème 561

./1980/marocE/pb/texte

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels ; $\mathbb{R}^\star=\mathbb{R}-\{0\}$ , $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes ; $\mathbb{C}^\star=\mathbb{C}-\{0\}$.
On rappelle que $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$ est un corps commutatif.
On définit sur $E=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ une loi notée $\star$ de la manière suivante :
$$\forall(a,\ b)\in E,\qquad \forall(a',\ b')\in E,$$
$$(a,\ b)\star(a',\ b')=(aa'+b\overline{b'},\ ab'+b\overline{a'})$$
où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.

1. a) Montrer que $\star$ est une loi interne dans $E$ et que $(E,\ \star)$ est un monoïde unitaire non commutatif.
   b) Calculer $(a,\ b)\star(0,\ 0)$, $(a,\ b)$ étant un élément quelconque de $E$. $(E,\ \star)$ est-il un groupe ?
2. On désigne par $F$ l'ensemble des éléments $(a,\ b)$ de $E$ tels que $|a|\neq|b|$ où $|z|$ désigne le module de $z$.
   a) Montrer que
   $$((a,\ b)\notin F \quad \text{ou} \quad (c,\ d)\notin F)\Longleftrightarrow((a,\ b)\star(c,\ d)\notin F).$$
   Montrer que $F$ est une partie stable de $E$ pour la loi $\star$.
   b) Établir que $F$ est l'ensemble des éléments inversibles de $E$ pour la loi $\star$. Que peut-on en conclure pour $(F,\ \star)$ ?
   c) Soit $H=\mathbb{C}^\star\times\{0\}$ ; $I=\mathbb{R}^\star\times\{0\}$ ; $K=\{0\}\times\mathbb{C}^\star$.
   Montrer que $H$ et $I$ sont des sous-groupes de $(F,\ \star)$. $K$ est-il un sous-groupe de $(F,\ \star)$ ?
3. On désigne par $P$ le plan complexe d'origine $O$ et par $P^P$ l'ensemble des applications de $P$ dans lui-même.
   Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points de $P$, d'affixes $z$ et $z'$ respectivement.
   On désigne par $f_{a,\ b}$ l'application de $P$ vers $P$ telle que
   $$\begin{array}{rl} f_{a,\ b}: P & \longrightarrow P \\ M(z) & \longmapsto M'(z') \quad \text{où } z'=az+b\overline{z} \end{array}$$
   et par $\varphi$ l'application de $E$ vers $P^P$ définie par
   $$\begin{array}{rl} \varphi: E & \longrightarrow P^P \\ (a,\ b) & \longmapsto f_{a,\ b} \end{array}.$$
   a) Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme injectif de $(E,\ \star)$ vers $(P^P,\ \circ)$. $\varphi$ est-il surjectif ?
   b) Que peut-on dire de $(\varphi(F),\ \circ)$ ; de $(\varphi(H),\ \circ)$ ; de $(\varphi(I),\ \circ)$ ?
   Que représentent $\varphi(H)$, $\varphi(I)$, $\varphi(K)$ ? Montrer que $\varphi(K)$ n'est pas une partie stable de $(P^P,\ \circ)$.
   c) Déterminer la forme réduite de $f_{1+\mathrm{i}\sqrt{3},\ 0}$ et $f_{0,\ \mathrm{i}}$.

# XXIII. Montpellier, série C

**Ex. 1557.** ———— *5 points.*

./1980/montpellierC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$x\longmapsto 3x-3\log|2\mathrm{e}^x-1|$$
et soit $G$ le représentation graphique de cette fonction dans un plan affine P muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Démontrer que $G$ admet trois asymptotes passant par un même point.
On ne demande pas de construire $G$.

**Ex. 1558.** ——— *3 points.* *./1980/montpellierC/exo-2/texte.tex*

Soit $n$ un entier naturel, on pose $a = 2n+8$ et $b = 3n+15$. On désigne par $\delta$ le PGCD de $a$ et $b$.

**1.** Démontrer que pour tout $n, \in \mathbb{N}$ $\delta$ divise 6.

**2.** Déterminer l'ensemble S des entiers naturels $n$ pour lesquels $\delta = 6$, c'est à dire l'ensemble S=$\{n \in \mathbb{N} \ / \quad \text{PGCD}(2n+8,\ 3n+15) = 16\}$.

## XXIV. Nantes, série C

**Ex. 1559.** ——— *3 points.* *./1980/nantesC/exo-1/texte.tex*

Si $p$ et $q$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^\star$ le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera noté $p \wedge q$.

**1.** a) Déterminer l'ensemble des éléments $x$ de $\mathbb{Z}$ qui vérifient :

$$3x \equiv 23\,[7].$$

b) En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient :

$$3x - 7y = 23 \tag{1}$$

**2.** a) Soit $k$ un élément de $\mathbb{Z}$, $k \neq -7$. Démontrer l'égalité

$$(3+7k)\ \wedge\ (-2+3k) = (k+7)\ \wedge\ 23.$$

b) En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de $(\mathbb{Z}^\star)^2$ vérifiant (1) et tels que

$$x\ \wedge\ y \neq 1.$$

**Ex. 1560.** ——— *5 points.* *./1980/nantesC/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2 - x + \ln|x|$.

a) Etudier les variations de $g$ et ses limites aux bornes de $\mathbb{R}^\star$.

b) Démontrer qu'il existe 3 nombres réels $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, qu'on ne cherchera pas à calculer, tels que :

$$\begin{gathered}\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3\\ g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = 0\end{gathered}$$

**2.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R} - \{0,\ 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(1+\ln|x|)}{1-x}.$$

Calculer la fonction dérivée $f'$. Déduire de la première question l'étude du signe de $f'(x)$.

**3.** Soit $F$ l'application de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0\\ F(0) = 0\end{cases}.$$

a) $F$ est-elle continue en $x = 0$ ? Est-elle dérivable en ce point ?

b) Etudier les variations de $F$

c) On considère un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ ($\vec{\imath}$ dirigeant l'axe des abscisses, unité 3 centimètres). Donner l'allure de la courbe représentative $C$ de $F$ dans ce plan. Déterminer les points d'intersection, autres que $O$, de $C$ avec la droite d'équation $y = -x$.

## PROBLÈME 562 *12 points.*

./1980/nantesC/pb/texte

Soient P un plan vectoriel euclidien, rapporté à une base orthonormée B= $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P, $O$ un point de $\mathscr{P}$ ; on note $\mathscr{R}$ le repère $(0\ ;\ \text{B})$ de $\mathscr{P}$.

Pour les représentations graphiques dans $\mathscr{P}$ on prendra deux centimètres pour unité de longueur.

On désigne par $\mathscr{L}$(P) l'ensemble des endomorphismes de P. On rappelle que $\mathscr{L}$(P) a une structure d'espace vectoriel et que, muni de l'addition et de la composition des applications, notées respectivement $+$ et $\circ$, cet ensemble a aussi une structure d'anneau unitaire.

On désigne respectivement par e et $\omega$ l'application identique et l'application nulle de $\mathscr{L}$(P).

Si $f$ est un élément de $\mathscr{L}$(P) et si $n$ est un entier naturel, on note $f^n$ l'élément de $\mathscr{L}$(P) défini par les relations

$$f^0 = \text{e},\ f^1 = f,\ f^n = f\circ f^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1.$$

I. On se propose d'étudier les endomorphismes $f$ de $\mathscr{L}$(P) vérifiant la relation

$$f^2+\frac{1}{2}f-\frac{5}{18}\text{e}=\omega. \tag{1}$$

1. Soit $g$ l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base B est :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{7}{12}\\ -\dfrac{7}{12} & -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$$

   Vérifier que $g$ est solution de (1).

2. a) Déterminer les deux homothéties vectorielles solutions de (1). On appelle $k_1$ et $k_2$ leurs deux rapports avec $k_1 < k_2$.

   b) Démontrer que la relation (1) est équivalente à la relation

$$(f-k_1\text{e})\circ(f-k_2\text{e})=\omega. \tag{XXII. 1}$$

3. Soit $f$ l'endomorphisme de P, autre qu'une homothétie vectorielle, vérifiant (1). On note de la manière suivante deux noyaux et deux images :

$$N_1=\ker(f-k_1\text{e}),\ N_2=\ker(f-k_2\text{e}),\ I_1=\mathbf{Im}(f-k_1\text{e}),\ I_2=\mathbf{Im}(f-k_2\text{e}).$$

   a) Démontrer que $I_2 = N_1$ et $I_1 = N_2$. En déduire que $N_1$ et $N_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de P.

   b) Soient $p_1$ la projection vectorielle de P sur $N_1$ de direction $N_2$ et $p_2 = \text{e}-p_1$.
   Démontrer le relation :

$$f = k_1p_1+k_2p_2.$$

   en déduire, pour $n$ entier naturel, une expression de $f^n$ combinaison linéaire de $p_1$ et $p_2$.

4. On désigne par $\pi$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$(P) engendré par $p_1$ et $p_2$ de la question précédente.

   a) Quelle est la dimension de $\pi$ ?

   b) Démontrer que $(\pi,\ +,\ \circ)$ est un anneau unitaire. Préciser l'élément neutre de cet anneau.

   c) Déterminer les solutions de (1) dans $\pi$, autres que $f$.

5. On suppose désormais que $f$ est l'endomorphisme $g$ définie à la première question.

   a) Déterminer $N_1$ et $N_2$. Donner une base de chacun de ces espaces vectoriels.

   b) Vérifier que $p_1$ et $p_2$ sont des projections orthogonales. En déduire que :

$$\forall x,\ x\in\text{P},\quad \|x\|^2=\|p_1(x)\|^2+\|p_2(x)\|^2.$$

   c) Démontrer qu'un élément $\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ de $\pi$ est une isométrie si et seulement si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. En déduire que l'ensemble des applications de $\pi$ qui sont des isométries est un groupe dont on précisera les éléments.



Retour page 1

II. Soit $\gamma$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ dont l'endomorphisme associé est l'application $g$ du I1 et telle que $\gamma(O) = O_1$, $O_1$ étant le point d'abscisse $\dfrac{7}{3}$ et d'ordonnée 5 dans $\mathscr{R}$.

1. Démontrer que $\gamma$ admet un point invariant unique A dont on donnera les coordonnées dans $\mathscr{R}$.
2. *i.* Démontrer qu'il y a exactement deux droites de $\mathscr{P}$ passant par A, globalement invariantes par $\gamma$. Représenter graphiquement ces droites dans $\mathscr{P}$ muni de $\mathscr{R}$.

   *ii.* Démontrer que ce sont les seules droites de $\mathscr{P}$ globalement invariantes par $\gamma$.
3. Soit $\mathscr{R}'$ le repère (A ; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$) où $\vec{u}_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ dirige l'axe des abscisses et $\vec{u}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ celui des ordonnées. Soit $M_0$ un point de $\mathscr{P}$. Si $n$ est un entier naturel non nul, on pose $M_1 = \gamma(M_0)$, $\dots$, $M_n = \gamma(M_{n-1})$.

   a) Montrer que l'on peut écrire
   $$\overrightarrow{AM_n} = k_1^n p_1(\overrightarrow{AM_0}) + k_2^n p_2(\overrightarrow{AM_0}).$$
   En déduire que
   $$\left\|\overrightarrow{AM_n}\right\| \leqslant \left(|k_1|^n + |k_2|^n\right)\left\|\overrightarrow{AM_0}\right\|.$$
   Que peut-on en déduire pour la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

   b) Déterminer le réel strictement positif $\alpha$ tel que la courbe C du plan $\mathscr{P}$, représentant dans $\mathscr{R}'$ la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{cases}$ soit globalement invariante par $\gamma$.

   c) Démontrer que si $M_0 \in$ C, on a :
   $$\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ M_n \in \text{C}.$$
4. Soit $\Gamma$ le cercle de $\mathscr{P}$ de centre A et de rayon 4. Déterminer une équation de $\gamma(\Gamma)$ dans $\mathscr{R}'$. Quelle est la nature de cette courbe ? Préciser ses sommets. Représenter graphiquement $\Gamma$ et $\gamma(\Gamma)$ sur le dessin de la question II(2)i.

## XXV. Nantes remplacement, série C

**Ex. 1561.** ./1980/nantesCrem/exo-2/texte.tex

On associe à tout nombre complexe son image dans un plan affine euclidien $P$ rapporté à un repère orthonormé.

**1.** Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2, z^3, z^4$ aient des images deux à deux distinctes.

**2.** Démontrer que si $z, z^2, z^3, z^4$ ont des images distinctes situées sur un cercle $\mathscr{C}$, $z^2, z^3, z^4, z^5$ ont des images situées sur un cercle $\mathscr{C}'$. Comparer les rayons de ces cercles.

**3.** En déduire l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $z, z^2, z^3, z^4$ aient des images situées sur un cercle.

## XXVI. New York, série C

**Ex. 1562.** *4 points.* ./1980/newyorkC/exo-1/texte.tex

Soit A l'ensemble des réels $x$ tels que $\cos x = 0$.
On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \text{A},\ f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\cos x}} \\ \forall x \in \text{A},\ f(x) = 0. \end{cases}$$

Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On montrera en particulier que la courbe admet au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ une demi-tangente que l'on précisera (on pourra poser $x = \dfrac{\pi}{2} + h$).

**Ex. 1563.** ——— *4 points.* ./1980/newyorkC/exo-2/texte.tex

On considère l'application $P$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (9+5\text{i})z - 2 - 10\text{i}, \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

**1.** Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ a une solution imaginaire pure.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

## Problème 563 *12 points.* ./1980/newyorkC/pb/texte

Dans tout le problème, on note $I$ l'intervalle $]-1\,;1[$ de $\mathbb{R}$.

A. 1° $u$ étant un élément de $I$, on appelle $\varphi$ l'application de $I$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $\varphi(x) = \dfrac{x+u}{1+xu}$.

Donner le tableau de variations de $\varphi$.

2° Pour $u$ et $v$ éléments de $I$, on note $u \oplus v = \dfrac{u+v}{1+uv}$.

Démontrer que $\oplus$ est une loi interne dans $I$, et qu'elle confère à $I$ une structure de groupe commutatif.

3° Pour $u$ élément de $I$, on note $P_u$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} & \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} \\ \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}$$

Démontrer que $P_u P_v = P_{u\oplus v}$, pour $(u,\ v)$ élément de $I^2$.

En déduire la structure de l'ensemble des matrices $P_u$ où $u$ est élément de $I$, muni de la multiplication des matrices.

B. $\mathscr{P}$ est un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $M_0\left(\sqrt{2}\ ;\ 0\right)$. Pour tout $u$ de $I$, on note $M_u$ le point de coordonnées

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

1° Démontrer que l'ensemble $\Gamma$ des points $M_u$ avec $u$ élément de $I$ est une partie d'une conique $C$. représenter $C$. Préciser $\Gamma$.

2° a) On appelle $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ les images respectives de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ par la rotation vectorielle d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

Démontrer que, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\Gamma$ est la représentation graphique de la fonction numérique $F$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) Pour tout élément $u$ de $I$, on note $\mathscr{A}(u)$ l'aire de la partie du plan limitée par le segment de droite $[O,\ M_0]$ l'arc $\Gamma$ d'extrémités $M_0$ et $M_u$, et le segment de droite $[M_u,\ O]$.

On se propose d'établir que, pour tout $u$ de $I$,

$$\mathscr{A}(u) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|u|}{1-|u|}\right).$$

Démontrer ce résultat pour $u \in [0\,;1[$, puis sans autre calcul, pour $u \in\, ]-1\,;0]$.

c) Démontrer que, pour $u$ et $v$ éléments de $[0\,;1[$,

$$\mathscr{A}(u\oplus v) = \mathscr{A}(u) + \mathscr{A}(v).$$

3° a) Étudier les variations et tracer la représentation graphique de la fonction numérique $\mathscr{A}$ définie sur $I$ par $u \longmapsto \mathscr{A}(u)$.



Retour page 1

b) Démontrer que $\mathscr{A}$ définit une bijection de $[0\,;1[$ sur $\mathbb{R}_+$.
On appelle $f$ cette bijection. Tracer la représentation graphique de sa bijection réciproque notée $f^{-1}$. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}_+$.

c) On considère la suite $(\alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, définie par $\alpha_1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n \oplus \alpha_1$.
Calculer, en fonction de $n$, $\mathscr{A}(\alpha_n)$, puis $\alpha_n$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$.
Étudier la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

## XXVII. Nice, série C

**Ex. 1564.** ./1980/niceC/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $\Sigma$, on considère trois points $A$, $B$, $C$ formant un triangle rectangle en $B$, isocèle, tel que $\mathrm{d}(A,\ B) = a$.

**1.** Déterminer et représenter l'ensemble $E_1$ des points $M$ de $\Sigma$ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

**2.** Déterminer et représenter l'ensemble $E_2$ des points $M$ de $\Sigma$ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

**Ex. 1565.** ./1980/niceC/exo-2/texte.tex

## XXVIII. Nice remplacement, série C

**Ex. 1566.** ./1980/niceCrem/exo-1/texte.tex

a) $\alpha$ étant un élement de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, discuter, suivant $\alpha$ le nombre de solutions de l'équation $X^2 = \alpha$, $X$ étant élément de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation $x^4 + \dot{3}\,x^2 - \dot{5} = \dot{0}$.

**Ex. 1567.** ./1980/niceCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $\Sigma$, on considère trois points A B C formant un triangle rectangle et isocèle en B, tel que $\mathrm{d}(A,\ B) = a$.

1. Déterminer et représenter l'ensemble $E_1$ des points $M$ de $\Sigma$ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

2. Déterminer et représenter l'ensemble $E_2$ des points $M$ de $\Sigma$ tels que

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 3a^2.$$

**Problème 564** *12 points.* ./1980/niceCrem/pb/texte

Les parties A, B, C peuvent être traitées indépendamment.
On désigne par $F$ la fonction polynôme définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x^2 - 3x + 2.$$

A- On se propose de montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe des réels $a_n$ et $b_n$ et une fonction polynôme $g_n$ à coefficients réels, tels que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = g_n(x).F(x) + a_n x + b_n.$$

1. Déterminer $g_0, a_0, b_0, g_1, a_1, b_1$ et $g_2, a_2, b_2$.

2. Démontrer par récurrence l'existence de $g_n, a_n, b_n$ pour tout $n$. On établira notamment les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{array}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.$$

4. Montrer que la suite de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique. En déduire les expressions de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

B- Soit E un espace vectoriel de dimension 2, et soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de E.
On considère l'endomorphisme T de E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère d'autres part les vecteurs

$$\vec{I} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$
$$\vec{J} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

1. Montrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice $B$ de T dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$.
3. On pose $\mathrm{T}^1$=T, et on définit par récurrence $\mathrm{T}^n = \mathrm{T}^{n-1} \circ \mathrm{T}$ pour $n \geqslant 2$.
Calculer la matrice de $\mathrm{T}^n$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$, en déduire l'expression de la matrice $\mathrm{T}^n$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

C- On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(\mathrm{e}^x).$$

1. Faire une étude complète de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $C$ dans un repère orthonormé. On calculera notamment l'abscisse du point d'intersection de $C$ avec son asymptote.
(On utilisera les valeurs approchées $\ln 2 \approx 0{,}69,\ \ln 3 \approx 1{,}10$).
2. On considère la restriction $g$ de $f$ à l'intervalle $\left[\ln \dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.
Démontrer que $g$ est une bijection de cet intervalle sur un intervalle U que l'on déterminera. Calculer le réel $g^{-1}(x)$ en fonction du réel $x$ appartenant à U.
3. Soit $D$ l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :

$$f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

Calculer l'aire de $D$.
4. Á l'aide de la fonction $f$, déterminer la limite de la suite $(S_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{n}\left(2^{\frac{2k}{n}} - 3.2^{\frac{k}{n}} + 2\right).$$

## XXIX. Orléans Tours, série C

Retour page 1

**Ex. 1568.** ——— *4 points.* *./1980/orleansC/exo-1/texte.tex*

Soit l'équation

$$4x^3+x^2+x-3=0 \qquad (1)$$

**1.** Montrer, en étudiant la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=4x^3+x^2+x-3$$

que l'équation (1) n'a qu'une solution réelle, qui de plus, appartient à l'intervalle $]0\,;1[$.

**2.** Montrer que si l'équation (1) a une solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$, où $p$ et $q$ sont premiers entre eux, alors $p$ divise 3 et $q$ divise 4. Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?

**3.** Déterminer la solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$ de l'équation (1) et, après avoir mis en facteur $(qx-p)$ dans l'expression de $f(x)$, achever la résolution de l'équation (1) dans le corps des complexes.

**Ex. 1569.** ——— *4 points.* *./1980/orleansC/exo-2/texte.tex*

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points alignés deux à deux distincts dans un plan affine $E$ associé à un plan vectoriel $\vec{E}$.

On pose $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

**1.** a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le triplet $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ pour que le propriété suivante soit vérifiée

$A$ est le barycentre du système $(B,\ \beta)$, $(C,\ \gamma)$,
et $B$ est le barycentre du système $(A,\ \alpha)$, $(C,\ \gamma)$,
et $C$ est le barycentre du système $(A,\ \alpha)$, $(B,\ \beta)$.

b) On vérifiera que l'ensemble $X$ des triplets $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ satisfaisant à cette condition est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $\vec{u}=(\lambda-1,-\lambda,\ 1$, privée du vecteur nul.

**2.** Soit $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ un élément de $X$.

a) Soit $f$ la fonction de $E$ dans $\vec{E}$ définie par

$$\forall M\in E,\qquad f(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}.$$

Déterminer l'image de $E$ par $f$.

b) Dans le cas où $E$ est euclidien, on considère la fonction $\Phi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M\in E,\qquad \Phi(M)=\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2.$$

Montrer que $\Phi$ est constante.

## Problème 565 *12 points.* *./1980/orleansC/pb/texte*

A) Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x.$$

1° a) Justifier l'existence de de $I_n$.

b) Sans calculer $I_n$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante dont tous les termes sont positifs.

2° a) Pour tout entier naturel $n$, calculer la dérivée de la fonction $x\longmapsto\tan^{n+1}x$. En déduire

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}.$$

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad \dfrac{1}{2(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}.$



Retour page 1

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

d) Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de $n$, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

3° a) Calculer $I_2$.

b) Calculer $f(2)+f(6)+f(10)+\cdots+f(4k-2)$ en fonction de $I_2$ et de $I_{4k+2}$, où $k\in\mathbb{N}^\star$.

c) En déduire la limite de la somme

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k+1}$$

lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

4° a) Vérifier que la fonction $x\longmapsto \log(\cos x)$ est définie et dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée. Calculer $I_1$.

b) Calculer $f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(4k-3)$ en fonction de $I_1$ et de $I_{4k+1}$, où $k\in\mathbb{N}^\star$.

c) En déduire la limite de la somme

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$

lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

B) Soit $\alpha$ un réel donné élément de $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\qquad K_n(\alpha)=\int_0^\alpha \tan^n x\,\mathrm{d}x$$

$$\text{et}\qquad S_n(\alpha)=K_1(\alpha)+K_2(\alpha)+\cdots+K_n(\alpha).$$

1° Soit $x$ un élément de $[0\,;\alpha]$. Calculer pour $n$ entier naturel non nul, $\tan x+\tan^2 x+\cdots+\tan^n x$ en fonction de $x$ et de $n$. Montrer que

$$\left|\tan x+\tan^2 x+\cdots+\tan^n x-\frac{\tan x}{1-\tan x}\right|=\frac{\tan^{n+1} x}{1-\tan x}.$$

2° Étudier le sens de variation de la fonction $g_p$, où $p\in\mathbb{N}^\star$, définie sur $[0\,;\alpha]$ par $g_p(x)=\dfrac{\tan^p x}{1-\tan x}$. En déduire que

$$\forall p\in\mathbb{N}^\star,\qquad \forall x\in[0\,;\alpha],\qquad 0\leqslant\frac{\tan^p x}{1-\tan x}\leqslant\frac{\tan^p\alpha}{1-\tan\alpha}.$$

3° Montrer que

$$\forall p\in\mathbb{N}^\star,\qquad \left|S_n(\alpha)-\int_0^\alpha\frac{\tan x}{1-\tan x}\right|\leqslant\frac{\alpha\tan\alpha}{1-\tan\alpha}.$$

En déduire l'existence de la limite de la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

4° On se propose de préciser cette limite.

a) Montrer que la fonction $x\longmapsto\log(\cos x-\sin x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$. Calculer sa dérivée.

b) On pose

$$A(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

et

$$B(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer $B(\alpha)-A(\alpha)$ et $B(\alpha)+A(\alpha)$ puis $A(\alpha)$ et$B(\alpha)$. En déduire la valeur de la limite de la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

C) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $S'_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$. On se propose de démontrer que la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$, c'est à dire que

$$\forall C \in \mathbb{R}^+, \qquad \exists x_0 \in \mathbb{N}^\star, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad n \geqslant n_0 \Longrightarrow S'_n > C.$$

Dans cette partie, $\alpha$ varie dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$.

1° a) Étudier la limite de $A(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $\frac{\pi}{4}$. En déduire qu'il existe un élément $\alpha_0$ de $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $A(\alpha_0) > C+1$.

b) En utilisant les résultats de la partie B, montrer que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |A(\alpha_0) - S_n(\alpha_0)| < 1.$$

2° Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \forall \alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[, \qquad S'_n \geqslant S_n(\alpha).$$

3° Utiliser ce qui précède pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.

# XXX. Paris, série C

Ex. 1570. ———— *4 points.* *./1980/parisC/exo-1/texte.tex*

Soient trois points non alignés $A$, $B$, $C$ d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$.
On pose $d(B,\ C) = a$, $d(C,\ A) = b$, $d(A,\ B) = c$. On désigne par $I$ le milieu du segment $[BC]$. Quels que soient les points $P$ et $Q$ du plan, on notera $PQ$ la distance de ces points.

**1.** Établir l'égalité : $b^2 + c^2 = 2AI^2 + \dfrac{a^2}{2}$.

**2.** A tout point $M$ du plan $\mathscr{P}$ on associe le réel :

$$\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2.$$

a) Soit $G$ le barycentre des points $B$, $C$ et $A$ affectés respectivement des coefficients $1$, $1$ et $-1$. Donner une détermination simple de $G$ et placer ce point sur la figure.

b) Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de $MG$, $a$, $b$, $c$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$, $b$, $c$ pour qu'il existe un point $M$ au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$.

Ex. 1571. ———— *4 points.* *./1980/parisC/exo-2/texte.tex*

Soit la famille d'équations :

$$z^2 - (1 + \mathrm{i}\sin 2\theta)z + \frac{\mathrm{i}}{2}\sin 2\theta = 0 \qquad (E_\theta)$$

dans laquelle $\theta$ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; à tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$, $(x,\ y)$ étant élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on associe le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans $\mathscr{P}$.

**1.** Résoudre l'équation **(??)** dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser la cas des racines doubles.

**2.** Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de $\mathscr{P}$ associées aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation **(??)** et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta),\ M''(\theta)]$.

a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand $\theta$ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle $C$ que l'on précisera.

c) Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de $\theta$.

d) $\theta$ étant donné (on fera la figure avec $\theta = \frac{\pi}{6}$), déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$.
Une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice.

Retour page 1

## Problème 566 *12 points.*

./1980/parisC/pb/texte

Soit $f$ l'application de l'intervalle $I = ]-1\,;1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

A. a) Démontrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $t$ appartenant à $I$ :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

b) Calculer $f(x)$.

Etudier les variations de l'application $f$ (en particulier la parité) et construire la courbe représentative de $f$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2° Montrer que $f$ est une bijection de $I$ sur $\mathbb{R}$. En désignant par $u$ un réel strictement positif, résoudre dans $I$ l'équation $f(x) = \log u$. (On désigne par $\log u$ le logarithme népérien de $u$.)

B. Soit $r$ un rationnel strictement supérieur à 1. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, $p$ et $q$ étant deux entiers naturels premiers entre eux.

On désigne par $N'$ l'ensemble des entiers naturels strictement supérieur à 1.

1° Démontrer que si $a$ et $b$ sont deux entiers naturels premiers entre eux vérifiant $a > b$, les entiers naturels $a+b$ et $a-b$ ont pour plus grand diviseur commun soit 1, soit 2. Préciser, en considérant les parités de $a$ et de $b$, dans quelles conditions on obtient chacun de ces deux cas.

2° Montrer que, quel que soit $r$, l'équation

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \qquad m \in N'$$

n'a pas de solution.

3° a) Résoudre les équations

$$2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log 2, \qquad m \in N'$$
$$2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log 4, \qquad m \in N'.$$

b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :

$$2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \qquad m \in N'$$

ait une solution est qu'il existe un entier naturel non nul $k$ tel que $r = 1 + \dfrac{2}{k}$.

Résoudre alors cette équation.

4° Soit l'équation à deux inconnues :

$$f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log r, \qquad (m,\ n) \in N' \times N'. \qquad (E_r)$$

a) Montrer que l'équation $(E_r)$ a les mêmes solutions que l'équation :

$$(m-s)(n-s) = t, \qquad (m,\ n) \in N' \times N'$$

où $s$ et $t$ désignent deux rationnels que l'on calculera en fonction de $r$.



Retour page 1

b) Résoudre les équations

$$f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)=\log 2, \qquad (m,\ n)\in N'\times N'$$
$$f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)=\log 4, \qquad (m,\ n)\in N'\times N'.$$

N.B. les questions (**??**), (**??**), (**??**), peuvent être traitées de façon indépendantes.

# XXXI. Paris remplacement, série C

**Ex. 1572.** ./1980/parisCrem/exo-1/texte.tex

1. a) Soit $f$ l'application de $]1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$
Trouver une primitive $F$ de $f$.
b) Soit $g$ l'application de $]1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}.$$
Trouver trois constantes réelles $a,\ b,\ c$, telles que pour tout $x$ de l'intervalle $]1\,;+\infty[$, on ait
$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}.$$
Trouver une primitive $G$ de $g$.
2. a) Soit $\alpha$ un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer
$$I(\alpha)=\int_2^{\alpha}\frac{x\log x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$
b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$. Calculer une valeur approchée de cette limite.

**Ex. 1573.** ./1980/parisCrem/exo-2/texte.tex

P est un plan affine orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. A tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe $z=x+\mathrm{i}y$ élément de $\mathbb{C}$.
On pose $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.
Soit $s$ l'application de P dans P qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe la point $M'$ d'affixe $z'=2\mathrm{i}\overline{z}-3$.

1. $s$ est la composée d'une homothétie de centre $I$ et de rapport positif $k$ et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D$ qui passe par $I$ ; déterminer $I,\ k,\ D$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan P tels que $O,\ M$ et $M'$ soient alignés. Donner sa nature et ses éléments ; le tracer.

**PROBLÈME 567** ./1980/parisCrem/pb/texte

Soit P un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien admettant P pour plan vectoriel associé ; soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$.

A) Soit $D_0$ la droite vectorielle de P admettant $\vec{\imath'}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ pour base et soit $\Delta$ la droite vectorielle de P admettant $\vec{\jmath'}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ pour base.
Soit $\varphi_0$ la projection vectorielle orthogonale sur $D_0$ et $\psi$ la projection vectorielle orthogonale sur $\Delta$.
On considère l'ensemble $\Phi$ des endomorphismes $\varphi_a$ de P définis par
$$\varphi_a=a\psi+\varphi_0,$$
$a$ désignant un réel non nul.



Retour page 1

1. On désigne par $A_0$, $B$ et $A_a$ les matrices des endomorphismes $\varphi_0$, $B$ et $A_a$ relativement à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Déterminer ces 3 matrices.
   On note $\vec{V}$ un vecteur de P de coordonnées $(X ; Y)$, $\vec{V'}$ sa projection orthogonale sur $D_0$ et $\vec{V''}$ sa projection orthogonale sur $\Delta$.
   On pose $\vec{W} = \varphi_a(\vec{V})$.
   Illustrer les données par une figure en prenant 2 cm pour unité graphique et en choisissant pour vecteur $\vec{V}$ le vecteur de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ ; on représentera les vecteurs $\vec{V'}$, $\vec{V''}$ et $\vec{W}$ correspondants, $a$ étant choisi égal à -4.
2. Montrer que $\Phi$ muni de la loi de composition des endomorphismes notée $\circ$ est un groupe isomorphe au groupe des réels non nuls muni de la multiplication.
3. Déterminer les endomorphismes orthogonaux (ou isométries vectorielles) de $\Phi$ et en donner une détermination géométrique.

B) Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x' ; y')$ de façon que

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2 \\ y' = 2x - 1. \end{cases}$$

1. a) Vérifier que $\varphi_{-4} = -4\psi + \varphi_0$ est l'endomorphisme associé à $f$.
   b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points invariants par $f$.
   c) On note $m$ la projection orthogonale de $M$ sur $\mathscr{D}$ ; comparer $\overrightarrow{mM}$ et $\overrightarrow{mM'}$ ; en déduire une construction simple de $M'$.
2. Soit $\mathscr{H}$ la courbe de $\mathscr{P}$ d'équation

$$16y^2 - 48xy - 12x + 32y - 9 = 0.$$

   a) Mettre cette équation sous la forme $x = g(y)$ ; étudier les variations de $g$ et construire $\mathscr{H}$.
   b) Former une équation cartésienne de $\mathscr{H}' = f(\mathscr{H})$ et tracer $\mathscr{H}'$. ($f(\mathscr{H})$ est l'image de $\mathscr{H}$ par l'application $f$). On vérifiera que $\mathscr{H}'$ admet $O$ pour centre.
   c) Vérifier par la figure (on indiquera comment) et par les calculs que les centres et les asymptotes de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ se correspondent par $f$.

# XXXII. Paris, série E

**Ex. 1574.** ———— *4 points.* *./1980/parisE/exo-1/texte.tex*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0$ et la récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n + 1\,800.$$

1. Déterminer $u_0$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.
2. On choisit le réel $u_0 = 1$.
   a) Déterminer le réel $b$ pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n + b$ soit une suite géométrique.
   b) Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ex. 1575.** ———— *4 points.* *./1980/parisE/exo-2/texte.tex*

On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty ; 0[, & f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \forall x \in [0 ; 1[, & f(x) = \sin^3(\pi x) \\ \forall x \in [1 ; +\infty[, & f(x) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$, en particulier aux points $0$ et $1$.
2. Étudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$, en particulier aux points $0$ et $1$, et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de $f$. Construire la courbe représentative dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. (On prendra 4 cm pour unité graphique.)
4. Calculer en cm$^2$ l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équations $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$.

## Problème 568 *12 points.*

*./1980/parisE/pb/texte*

Soit $\Pi$ un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Pour tout réel $\alpha$, on considère l'endomorphisme $\varphi_\alpha$ de $\Pi$ qui, à tout vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le vecteur de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha+2}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\[2ex] Y = \dfrac{-3\alpha+4}{4}x + \dfrac{3\alpha-2}{4}y. \end{cases}$$

A) 1. Déterminer, suivants les valeurs attribuées au réel $\alpha$, le noyau et l'image de $\varphi_\alpha$. (On trouve deux valeurs `rationnelles` de $\alpha$ pour lesquelles le noyau et l'image sont des droites vectorielles dont on donnera une base.)

2. On suppose $\alpha = 0$ ; l'endomorphisme $\varphi_0$ correspondant sera désigné plus simplement par $\varphi$.
Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des endomorphismes $\psi$ de $\Pi$ tels que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$. ($\circ$ désigne la composition des applications.)

   a) Montrer que $\varphi$ est involutif et déterminer les éléments géométriques de cette involution.

   b) Montrer que $\mathscr{L}$ est l'ensemble des endomorphismes $\lambda e + \mu\varphi$ où $\lambda$e t $\mu$ décrivent $\mathbb{R}$, $e$ désignant l'application identique de $\Pi$. (On pourra utilise les matrices des endomorphismes.)

   c) Montrer que $\mathscr{L}$ muni de l'addition des endomorphismes et de la multiplication des endomorphismes par un réel est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?

   d) Montrer que $\mathscr{L}$ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes est un anneau commutatif unitaire.

B) Le plan vectoriel $\Pi$ est supposé euclidien et la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est supposée orthonormée. Soit $P$ un plan affine euclidien associé à $\Pi$ et soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé de $P$.
Soit $D$ la droite affine affine de $P$ passant par le point $I(-1\ ;\ 1)$ et admettant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
Soit $\Delta$ la droite vectorielle de $\Pi$ admettant pour base le vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
On désigne par $f$ la projection affine de $P$ sur $D$ de direction $\Delta$.

1. Si $M$ est un point quelconque de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, calculer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M' = f(M)$.
Montrer qu'il existe une valeur $\alpha_0$ de $\alpha$ telle que $\varphi_{\alpha_0}$ soit l'endomorphisme de $\Pi$ associé à $f$.

2. Soit $g$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ x > 0, \qquad g(x) = -2x\log x \end{cases}$$

($\log x$ désigne le logarithme népérien de $x$). On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = g(x)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Étudier les variations de $g$ ; on étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité. Construire $\mathscr{C}$.
Déterminer la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ admettant $-1$ pour coefficient directeur ; donner les coordonnées de son point de contact $A$ ; placer $A$ et $T$ sur la figure.



Retour page 1

3. Soit, dans le plan $P$, relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le point $M$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(u) = \mathrm{e}^{-u} \\ y(u) = 2u\mathrm{e}^{-u} \qquad u \in [0\,;+\infty[. \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble des points $M$, quand $u$ décrit l'intervalle $[0\,;+\infty[$, est une partie de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

b) Ayant pose $M' = f(M)$, trouver $h(u)$ tel que $\overrightarrow{IM'} = h(u)\vec{v}$.
Étudier les variations de la fonction $h$ quand $u$ décrit $[0\,;+\infty[$ et en déduire l'ensemble des points $M'$.

## XXXIII. Paris remplacement, série E

**Ex. 1576.** ——— *4 points.* *./1980/parisErem/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. L'unité de longueur est le centimètre.
Le point $O$ est placé au centre de la feuille. la ligne de terre $y'Oy$ est parallèle au petit côté de la feuille.
Les plans $xOy$ et $yOz$ sont respectivement le plan horizontal de projection et le frontal de projection.
L'axe $Ox$ est dirigé vers le bas, l'axe $Oy$ vers la droite et l'axe $Oz$ vers le haut de la feuille ;

**1.** Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points $A(0~;~-5~;~0)$, $B(5~;~0~;~0)$ et $C(1~;~0~;~2)$.

**2.** Construire les traces du plan P.

**3.** On considère la verticale $\Delta$ passant par le point $D(2~;~2~;~0)$ ; soit $r$ la rotation d'axe $\Delta$ orienté par $\vec{k}$ et dont une mesure est $\dfrac{3\pi}{4}$ ; soit $\mathrm{P}_1 = r(\mathrm{P})$. Construire les traces de $\mathrm{P}_1$ , que constate-t-on ? En déduire la distance du point $D$ au plan P.

**Ex. 1577.** ——— *4 points.* *./1980/parisErem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application affine $f$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ définies par :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y. \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
2. Trouver un nombre réel positif $k$ tel que la composée de $f$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ soit une isométrie affine.
   Donner la nature et une détermination géométrique de cette isométrie. En déduire la nature de $f$ et en préciser ses éléments remarquables.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$. Montrer, en partant des égalités (**??**), qu'il existe un complexe $a$ tel que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$, $z' = a\overline{z}$. Retrouver la nature et les éléments remarquables de $f$.

**PROBLÈME 569** *12 points.* *./1980/parisErem/pb/texte*

On désigne par $m$ un réel strictement positif et on considère la famille des applications $f_m$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{cases} f_m(0) = 0 \\ x > 0, \qquad f_m(x) = x^m \log x \end{cases}$$

($\log$ désigne la logarithme népérien.)

A) 1. a) En utilisant le changement de variable $u = x^m$, calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^m \log x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^m}.$$



Retour page 1

b) Étudier les variations de $f_m$. On étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité de $f_m$ pour la valeur $x = 0$.

2. Soit $\mathscr{C}_m$ la courbe d'équation $y = f_m(x)$ dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Étudier les branches infinies des courbes $\mathscr{C}_m$.

b) Étudier l'existence et la position d'une demi-tangente à $\mathscr{C}_m$ au point $O$.

c) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_m$. Vérifier que ces courbes admettent la même tangente T au point d'abscisse 1.

d) Chaque courbe présente un point $I_m$ d'abscisse strictement positive à tangente parallèle à la droite $(O; \vec{\imath})$.
Soit L l'ensemble des ces points $I_m$ quand $m$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$ ; former une équation cartésienne de L de la forme $y = g(x)$ en précisant l'intervalle décrit par l'abscisse de $I_m$.

B) 1. On choisit $m = \dfrac{1}{2}$. ON désigne par $\varphi(x)$ la différence des ordonnées du point de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ et du point de la tangente $T$ définie au **??** de même abscisse $x$, x$\in \mathbb{R}_+^\star$.
Étudier ce qu'il est intéressant de connaître de la fonction $\varphi$ pour donner la position relative de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ et $T$.
(Il pourra être utile d'étudier le sens de variation de la fonction dérivée $\varphi'$.)

2. On choisit $m = \dfrac{1}{3}$. Préciser dans quel demi-plan limite par la droite $T$ se situe le point $I_{\frac{1}{3}}$.
($I_{\frac{1}{3}}$ est le point de la courbe $\mathscr{C}_{\frac{1}{3}}$ où la tangente est parallèle à $(O; \vec{\imath})$.)

3. Construire les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{3}}$.

a) Dans une première figure on prendra 2 cm pour unité graphique et on donnera l'allure générale des courbes.

b) Dans une seconde figure on prendra 10 cm pour unité graphique et on construira les arcs des 4 courbes correspondant à l'intervalle $[0\,;1]$ de l'abscisse, ainsi que la courbe L définie précédemment.
(Le soin avec lequel cette figure sera faite sera particulièrement apprécié.)

C) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie de P limitée par les arcs des courbes L et $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ dont les extrémités sont le point $I_{\frac{1}{2}}$ et le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$.

## XXXIV. Poitiers, série C

**Ex. 1578.** *3,5 points.* *./1980/poitiersC/exo-1/texte.tex*

Soit $N$ l'entier naturel dont l'écriture dans le système décimal de numération de base 13 est :

$$N = \overline{25x3}.$$

Pour quelles valeurs de $x$ :

**1.** $N$ est-il divisible par 6 ?

**2.** $N$ est-il divisible par 4 ?

**3.** $N$ est-il divisible par 24 ? (on précise ici que 24 est écrit dans le système de numération décimale).

**Ex. 1579.** *4,5 points.* *./1980/poitiersC/exo-2/texte.tex*

**1.** Soit $P$ le polynôme tel que :

$$P(z) = z^3 - (7+9\mathrm{i})z^2 + (39\mathrm{i} - 14)z + 50$$

pour tout nombre complexe $z$.

a) Démontrer que le polynôme $P$ admet une racine unique $z_0$ de la forme $z_0 = \mathrm{i}b$, avec $b$ réel.



Retour page 1

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$, sachant que $P(z)$ s'écrit :

$$P(z)=(z-\mathrm{i}b)(z^2+\alpha z+\beta)$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes à déterminer. On notera $z_1$ la racine non « imaginaire pure », ayant la plus petite partie réelle, et $z_2$ la troisième racine.

**2.** Soient, dans le plan affine euclidien $\mathrm{E}_2$ rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_0$, $z_1$ et $z_2$. Déterminer (et dessiner) l'ensemble des points $M$ du plan $\mathrm{E}_2$ tels que :

$$MA^2-MB^2+MC^2=4.$$

## Problème 570 *12 points.*

*./1980/poitiersC/pb/texte*

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle $x$ telle que

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+3)x-3}{3(x-1)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $D$, de la fonction $f$. Montrer qu'il existe trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$
pour tout $x$ de $D$.
2. Étudier la fonction $f$, établir en particulier le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Démontrer que la courbe $(C)$ admet un centre de symétrie noté $\Omega$, qu'on déterminera.
4. Soit $u$ un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire $S_u$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(C)$ l'asymptote oblique de $(C)$ et les droites d'équations respectives
$$x=2-\frac{1}{u}\qquad\text{et}\qquad x=2+\frac{1}{u}.$$

B- 1. , Soit $g:]1\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(u)=2\log\frac{u+1}{u-1}$$
pour tout $u>1$.
Étudier cette fonction, établir le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$ dans un repère orthonormé.

2. a) Soit $m$ un nombre réel tel que $1<m<2$. Calculer l'aire $\Sigma_m$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(\Gamma)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $u=m$ et $u=2$. (*Indication* :on pourra utiliser, pour le calcul de $\Sigma_m$, une intégration par parties.)
   b) Déterminer, si elle existe, la limite de $\Sigma_m$ lorsque $m$ tend vers 1 par valeurs strictement supérieures à 1.(*Indication* :on mettre en évidence dans l'expression de $\Sigma_m$, le nombre $(m-1)\log(m-1)$.)
3. Démontrer que la fonction $g$ admet une fonction réciproque $h$ dont on précisera les propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité, dérivabilité).
Expliciter la fonction $h$ et tracer sa courbe représentative dans le même repère que $(\Gamma)$.

C- On orientera le plan $\mathscr{P}$ de façon que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ soit direct. On rappelle que $\Omega$ est le centre de symétrie de la courbe $(C)$ (qui a été déterminé dans la question A3).

1. Déterminer une équation de la courbe $(C)$ dans le repère $(\Omega,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
2. Soit $\varphi$ la rotation affine dont le centre est $\Omega$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{6}$. Déterminer une équation, dans le repère $(\Omega,\ \vec{i},\ \vec{j})$, de la courbe $(H)$ transformée de $(C)$ par $\varphi$.
3. Préciser la nature de la courbe $(H)$ et donner ses éléments caractéristiques (asymptotes et foyers). Tracer $(H)$ sur la même figure que $(C)$.



Retour page 1

# XXXV. Reims, série C

**Ex. 1580.** ./1980/reimsC/exo-1/texte.tex

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère l'endomorphisme $\varphi$ de $E$ défini par

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{i}\,) &= \frac{1}{3}(-10\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}\\ \varphi(\vec{j}\,) &= \frac{1}{3}(8\vec{i} + 2\vec{j} - 16\vec{k}\\ \varphi(\vec{k}\,) &= \frac{1}{3}(-4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

**1.** Soit $F = \{\vec{u} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$. Montrer que $F$ est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur directeur.

**2.** Soit $G = \{\vec{u} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = -2\vec{u}\}$. Montrer que $G$ est un plan vectoriel que l'on déterminera.

**3.** En déduire que $\varphi$ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle à déterminer.

**4.** Soit $P$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs

$$\vec{v_1} = \vec{i} + 2\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{v_2} = \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Montrer que $P$ est globalement invariant par $\varphi$.

**Ex. 1581.** ./1980/reimsC/exo-2/texte.tex

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $M$ un point du plan complexe d'affixe $m = a + \mathrm{i}b$ ($a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$). On considère l'équation

$$z^3 + (2-\mathrm{i})z^2 + (m^2 + 1 - 2\mathrm{i})z - \mathrm{i}(1+m^2) = 0. \qquad (\mathrm{E}_m)$$

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ($\mathrm{E}_m$) après avoir vérifié qu'elle admet pour racine $z_1 = \mathrm{i}$.

**2.** Trouver l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ d'affixe $m = a + \mathrm{i}b$ tels que l'équation (**??**) admette au moins deux racines de même module. Représenter l'ensemble $(\Gamma)$.

## Problème 571

./1980/reimsC/pb/texte

A) Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$ où $n$ est un paramètre, $n \in \mathbb{N}^\star$.

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 5 cm.

On prendra pour $\mathrm{e}$ la valeur approchée $2{,}7$ et pour $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ la valeur $0{,}6$.

1° Donner la tableau de variation de $f_n$.

2° a)

b)

c)

3°

B) Soit $\alpha$ un réel strictement positif. On pose

$$u_n = \int_0^\alpha \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$$

pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$. On ne cherchera pas à calculer $u_n$.

1° Justifier l'existence de la suite $(u_n)$. Donner son sens de variation.



Retour page 1

2° a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\star},\ n \geqslant 2$. Démontrer élémentairement l'inégalité

$$\int_0^{\frac{1}{\log n}} \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\log n}.$$

b) Montrer qu'il existe un entier $n_0$, tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $\dfrac{1}{\log n} < \alpha$.

Montrer que l'on a alors

$$0 < \int_{\frac{1}{\log n}}^{\alpha} \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\alpha - \frac{1}{\log n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n}{(\log n)^2}}.$$

3° a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\log x)^2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$).

b) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

c)

C) Soit la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer explicitement la fonction $F$.

1° Étudier le sens de variation de $F$.

2° Démontrer que $(\forall t \geqslant 1)$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. En déduire que $F$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle admet une limite $\ell$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

On admettra que $\ell = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3° Donner l'allure du graphique de $F$ sur une figure séparée.

4°

## XXXVI. Rennes, série C

**Ex. 1582.** *3 points.* *./1980/rennesC/exo-1/texte.tex*

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 1583.** *4 points.* *./1980/rennesC/exo-2/texte.tex*

**1.** On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - 2(1+3\mathrm{i})z^2 - 4(1-5\mathrm{i})z + 16(1-\mathrm{i}) = 0. \tag{1}$$

a) Démontrer que cette équation admet une solution réelle $z_1 = \alpha$, puis la résoudre.

b) Représenter dans le plan complexe les images des solutions de l'équation (1).

**2.** Démontrer que les solutions de l'équation (1) constituent les trois premiers termes d'une suite géométrique dont le premier terme $u_0$ est $\alpha$ et dont on donnera la raison.

Calculer le 17ᵉ terme $u_{16}$ et écrire le terme général de cette suite.

Déterminer $n$ pour que $u_n$ appartienne à $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

## 🏛Problème 572 *13 points.*

*./1980/rennesC/pb/texte*

N.B.– La partie III peut être traitée indépendamment de I et II en utilisant le résultat donné en II4.
Dans le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e_2})$, on désigne par $A$ le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$, par $B$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$, par $\omega$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

I. Soit $M$ le point mobile dont les coordonnées sont définies en fonction du temps $t$ par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}). \end{cases}$$

1° Montrer que la trajectoire de $M$, lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$, est une partie $(H_1)$ d'une conique $(H)$ de centre $\omega$.
Donner les éléments caractéristiques de $(H)$ et construire $(H)$ dans $(P)$. Préciser $(H_1)$. (On prendra 6 cm comme unité.)

2° Déterminer à tout instant $t$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$.
Quelle est l'allure du mouvement de $M$ sur sa trajectoire $(H_1)$ ?
Représenter avec précision le point $M$ associé à $t = \log 3$ (où $\log$ désigne le logarithme népérien) et les points $U,\ W,\ m$ définis par :

$$\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{V(t)} \quad , \quad \overrightarrow{MW} = \overrightarrow{\Gamma(t)} \quad , \quad \overrightarrow{\omega m} = \overrightarrow{V(t)}.$$

Montrer que $\omega,\ M$ et $W$ sont alignés.
Quelle est la nature du quadruplet $(\omega,\ M,\ U,\ m)$ ?

II. On désigne par (P$^\star$) le plan (P) privé du point $O$ et pour toute partie (E) de (P) on pose (E$^\star$)=(E)$\cap$ (P$\star$).
Soit $\varphi$ l'application de (P$^\star$) dans lui-même, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ $(z \neq 0)$ associe le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est définie par

$$z'.\overline{z} = 1,$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

1° Montrer que $\varphi$ est involutive et que pour tout point $M$ de (P$^\star$), les points $O,\ M$ et $M'$ sont alignés.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.

2° Quel est l'ensemble des points invariants par $\varphi$ ?

3° Donner l'expression analytique de $\varphi$.

4° $(\Sigma^\star)$ étant l'image de $(H^\star)$ par $\varphi$, on appelle $(\Sigma)$ l'ensemble défini par $(\Sigma) = (\Sigma^\star) \cup \{0\}$.
Montrer que dans le repère $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e_2})$ du plan (P), une équation de $(\Sigma)$ est

$$x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 = 0.$$

III. L'objet de cette partie est de construire $(\Sigma)$ et d'en chercher une définition géométrique.

a) Montrer que $(\Sigma)$ est la réunion de deux courbes $(\Sigma_1)$ et $(\Sigma_2)$ représentatives des fonctions $f$ et $-f$ de la variable $x$ définies par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

b) Étudier la dérivabilité de $f$ pour $x = 0$ et la dérivabilité à droite pour $x = -1$.
Préciser les tangentes éventuelles à $(\Sigma_1)$ aux points $O$ et $A(-1\ ;\ 0)$.

c) Étudier les variations de $f$, tracer $(\Sigma_1)$. En déduire $(\Sigma)$. (On prendra $\sqrt{5} \simeq 2{,}25$).

d) Soit $(D)$ la droite d'équation $x = 1$, (C) le cercle centré en $B(1\ ;\ 0)$ et passant par $O$.
Une droite $(\Delta)$ d'équation $y = \lambda x$ coupe $(D)$ en $R$, (C) en $O$ et $Q$, $(\Sigma)$ en $O$ et $N$.
Établir que, quelque soit le réel $\lambda$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{QR}$.
En déduire une construction géométrique simple de $(\Sigma)$.
Placer en particulier les points d'intersection de (C) et $(\Sigma)$.

Retour page 1

# XXXVII. Rennes, série D

Ex. 1584. 4 points. ./1980/rennesD/exo-1/texte.tex

Un gène récessif, noté $g$, détermine la marque de l'albinisme.
On note $G$ le gène dominant opposé. Tout individu est muni de chromosome porteurs :

— ou bien de 2 gènes $g$ et $g$ (on note dans ce cas $gg$ : l'individu est albinos);

— ou bien de 2 gènes $G$ et $G$ (on note dans ce cas $GG$ : l'individu n'est pas albinos);

— ou bien d'un gène $G$ et d'un gène $g$ (on note dans ce cas $Gg$, ou $gG$ qui lui est identique; l'individu non albinos est hybride, donc peut transmettre la marque d'albinisme).

Les gènes $g$ et $G$ ont, dans une population donnée, les distributions de probabilité respectives $p$ et $q = 1-p$. Les deux parents transmettent, au hasard et de façon indépendante, l'un de leurs deux gènes à leur descendance. On admettra ainsi que la nature du chromosome d'un enfant, relativement à l'albinisme, est équivalente à celle que donnerait un tirage, avec remise, de 2 gènes parmi les 2 gènes $g$ et $G$.

**1.** Quelle est, en fonction de $p$, la probabilité du caractère albinos $gg$ ?

**2.** De la même façon, déterminer les probabilités respectives des caractères $GG$ et $Gg$.

**3.** Si l'on observe dans la population un albinos pour 20 000 individus, quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard dans la population soit susceptible de transmettre l'albinisme ? (on arrondira à la 3ème décimale).

Ex. 1585. 4 points. ./1980/rennesD/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on donne un trapèze convexe isocèle (A, B, C, D), tel que (AB) soit parallèle à (DC). Soit [AH] sa hauteur relativement aux bases [AB] et [CD]. On pose $AB = a$ ; $CD = 3a$ ; $AH = 2a$, $a$ étant une longueur donnée non nulle.

**1.** Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ pour que H soit le barycentre des points A, B, C, D affectés respectivement des coefficients $\alpha$, $1$, $1$, $\beta$ . Pour cette question, on pourra utiliser un repère orthonormé d'origine H.

**2.** Soit $G_1$ l'isobarycentre (ou centre de gravité) des points B et C.
Soit $G_2$ le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients $-1$ et $3$. Construire $G_1$ et $G_2$.
Montrer que H est le milieu de [G1 G2].

**3.** Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\|$$

**4.** Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+3\overrightarrow{MD}^2 \leqslant 24a^2$$

## Problème 573 12 points. ./1980/rennesD/pb/texte

*Les B1 et B2 du B - sont indépendants de A - .*

Soit la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$\begin{aligned}
\forall x \in ]-\infty\ ;\ ,-3] &\qquad f(x) = -\sqrt{-x-3}\\
\forall x \in ]-3\ ;\ 0[ &\qquad f(x) = (x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2})\mathrm{e}^{-x}\\
\forall x \in [0\ ;\ +\infty[ &\qquad f(x) = -\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

A– 1. $f$ est-elle continue en zéro et en $-3$ ?

2. f est-elle dérivable en ces points ? La méthode de recherche n'est pas imposée; si besoin est, on utilisera :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1$$

3. Étudier $f$ et tracer sa représentation graphique (C) dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 1 cm).
Déterminer une équation de chaque demi-tangente au point A d'abscisse $-3$ de (C) et construire ces demi-tangentes.



Retour page 1

4. Calculer l'aire arithmétique du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.

B– Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{13}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Soit $S$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à $g$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de $S$.
2. Soit M' $(x' \ ; \ y')$ l'image de M $(x \ ; \ y)$ par $S$. Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$, puis $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$.
3. Soit (Γ) la représentation graphique de la restriction de $f$ à $]-\infty \ ; \ -3]$. Déterminer l'image (Γ′) de (Γ) par $S$.
4. Soit N $(x_N, y_N)$ un point de la partie (Γ) de (C).
   Soit Q $(x_Q, y_Q)$ le point de (C) tel que $x_Q = -\frac{2}{3}y_N$.
   Déduire de la question précédente une relation entre les directions des tangentes en N et Q à (C).
   On donne : $\mathrm{e}^3 \simeq 20,08 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\frac{5}{2}} \simeq 12,18 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \simeq 4,48$

# XXXVIII. La Réunion, série C

**Ex. 1586.** ./1980/reunionC/exo-1/texte.tex

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $7x - 4y = 9$.
Quelles sont les valeurs possibles du P.G.C.D des couples $(x, \ y)$ solutions de l'équation ?
Donner la forme générale des couples $(x, \ y)$ solutions de l'équation, dont le P.G.C.D est maximum.

**Ex. 1587.** ./1980/reunionC/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{aligned}$ et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un plan muni d'un repère orthonormé.

**1.** Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie.

**2.** Étudier les variations de $f$ dans $\mathbb{R}^+$ et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses sont positives. On précisera la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à son asymptote.

**3.** Calculer l'aire de l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ f(x) \leqslant y \leqslant x+1 \end{cases}$

où $\alpha$ est un réel positif donné, et la limite quand $\alpha$ tend vers l'infini.

## Problème 574

./1980/reunionC/pb/texte

Soit $d$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad d(z) = \inf\left[y - \mathrm{E}(y), \ \mathrm{E}(y+1) - y\right],$$

$x$ et $y$ réels.

**1.** Calculer $d(1)$, $d\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)$, $d\left(1 + \frac{5\mathrm{i}}{4}\right)$.

Donner une interprétation géométrique de l'application $d$ en utilisant le point $M_0$ d'affixe $z_0$ et les droites $D_0$ et $D'_0$ d'équations respectives $y = \mathrm{E}(y_0)$ et $y = \mathrm{E}(y_0 + 1)$.

**2.** *Les candidats pourront résoudre cette question, soit par le calcul, soi par une méthode géométrique, utilisant l'interprétation précédente et suivant les cas, une symétrie orthogonale ou une translation convenablement choisie.*

comparer, pour tout nombre complexe $z$, $d(-z)$ et $d(z)$ ;
pour tout nombre complexe $z$ et pour nombre entier $q$, $d(z + \mathrm{i}q)$ et $d(z)$ ;
pour tout couple de réels $x$ et $y$, $d(x + \mathrm{i}y')$ et $d(x + \mathrm{i}y)$ lorsque $y' = 2\mathrm{E}(y) + y + 1$.
Déterminer l'ensemble des valeurs $d(z)$ lorsque $z$ décrit $\mathbb{C}$.

Retour page 1

**3.** Soit $\delta$ l'application de $P$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\delta(M) = d(z)$.
Définir et représenter graphiquement dans $P$ l'ensemble des points $M$ tels que $\delta(M) = 0$.
On définit de même une application $c$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z = x + \mathrm{i}y \qquad c(z) = \inf\left[x - \mathrm{E}(x),\ \mathrm{E}(x+1) - x\right]$$

pour $x$ et $y$ réels, et l'application correspondante $\gamma$, de $P$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre réel $\gamma(M) = c(z)$.
Définir et représenter graphiquement dans $P$ l'ensemble des points $M$ tels que :

$$\delta(M) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \gamma(z) = \frac{1}{2}.$$

**4.** Soit $T$ l'application qui, à tout point $M$ de $P$ d'affixe $z$ associe la point $M'$ de $P$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = x + \mathrm{i}d(z) \quad \text{avec } x \text{ partie réelle de } z.$$

Soit $M_1$ d'affixe $1$, $M_2$ d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et $M_3$ le milieu du segment $M_1M_2$ ; déterminer leurs images par $T$.
$T$ est-elle une application affine de $P$ ?

**5.** On note $I_{a,\ b}$ l'ensemble des points $M$ de $P$ dont les affixes $z = x + \mathrm{i}y$ vérifient : $a \leqslant y < b$, $a$ et $b$ étant deux réels donnés.

a) Démontrer que la restriction de $T$ à $I_{n,\ n+\frac{1}{2}}$ où $n \in \mathbb{Z}$ est une translation.

b) Démontrer que la restriction de $T$ à $I_{n+\frac{1}{2},\ n+1}$ où $n \in \mathbb{Z}$ est une symétrie orthogonale.

**6.** On considère la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{3}{2}$.

**7.** Étudier les variations de $f$ est construire sa représentation graphique C dans le plan $P$. Montrer que C possède un centre de symétrie.

**8.** Construire la courbe C', image de la courbe C par $T$.

**9.** Construire la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $g$ :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - d(x + \mathrm{i}y) \end{aligned}$$

où $x$ et $y$ sont les coordonnées d'un point $M$ de C.

## XXXIX. Sénégal, série C

**Ex. 1588.** ./1980/senegalC/exo-1/texte.tex

**1.** Linéariser $\sin^3 x$.

**2.** En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^3 x)\,\mathrm{d}x.$$

Ex. 1589. ./1980/senegalC/exo-2/texte.tex

Mamadou et Diallo font cinq parties de pile ou face avec une pièce parfaitement équilibrée ne pouvant retomber sur la tranche ; l'enjeu est de 100 F par parties. (Celui qui perd donne 100 F à celui qui gagne.) Chacun d'eux dispose d'une somme de 400 F. le règlement s'effectue à la fin de la cinquième partie. Soit $X$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre $k$ de parties gagnées par Mamadou.

**1.** A quelle double inégalité doit satisfaire $k$ pour que le règlement puisse s'effectuer sans dette de l'un ou l'autre joueur (c'est à dire que chaque joueur peut donner immédiatement à l'autre joueur la somme qu'il lui doit) ?

**2.** a) Donner le loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

b) Quelle est la probabilité d'un règlement sans dette ?

# XL. Strasbourg, série C

Ex. 1590. ./1980/strasbourgC/exo-1/texte.tex

On donne dans un espace affine $E$ deux points distincts $A$ et $B$.

**1.** Déterminer la condition sur le couple de réels $(\alpha,\ \beta)$ pour que pour tout point $M$ de $E$, il existe un unique point $M'$ de $E$ tel que

$$\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}.$$

**2.** On suppose dans toute la suite de l'exercice, réalisée la condition trouvée à la question 1 et on désigne par $f$ l'application de $E$ dans $E$ qui à $M$ associe $M'$.

a) Déterminer, suivant les valeurs du couple $(\alpha,\ \beta)$, l'ensemble des points invariants par $f$.

b) On suppose $\alpha+\beta=0$. Exprimer, pour tout $M$ de $E$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel $\alpha$ ; en déduire la nature de $f$.

c) On suppose $\alpha+\beta\neq 0$. Montrer que $f$ est une homothétie ponctuelle dont on déterminera le centre et le rapport.

Ex. 1591. ./1980/strasbourgC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $V$ un plan vectoriel muni d'une base $(\vec\imath,\ \vec\jmath)$ et soit $f$ l'endomorphisme de $V$ de matrice $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$ dans $(\vec\imath,\ \vec\jmath)$.

a) Déterminer un couple $(\vec I,\ \vec J)$ de vecteurs non nuls de $V$ tels que

$$f(\vec I)=\frac{1}{2}\vec I \qquad \text{et} \qquad f(\vec J)=\vec J.$$

Montrer que $(\vec I,\ \vec J)$ est une base de $V$ et écrire la matrice $M$ de $f$ dans $(\vec I,\ \vec J)$.

b) Calculer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, la matrice $M^n$.

c) Soit $x,\ y,\ X,\ Y$ des réels tels que

$$x\vec\imath+y\vec\jmath=X\vec I+Y\vec J.$$

Calculer chacun des nombres $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$, puis chacun des nombres $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

**2.** On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construites par récurrence sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases}x_0=1\\ y_0=1\end{cases}$$

et

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \begin{cases}x_{k+1}=-\frac{1}{2}x_k+3y_k\\ y_{k+1}=-\frac{1}{2}x_k+2y_k.\end{cases}$$

Retour page 1

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\overrightarrow{u_n}$ le vecteur $x_n \vec{i} + y_n \vec{j}$. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{u_{k+1}}$ en fonction de $\overrightarrow{u_k}$ à l'aide de $f$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\overrightarrow{u_n}$ en fonction de $\overrightarrow{u_0}$ à l'aide de $f^n$ où $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ ($n$ fois).

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

## Problème 575

./1980/strasbourgC/pb/texte

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^3}{x^2+3x+3} \end{aligned}$$

**1.** a) Étudier $f$ et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un plan $(P)$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On montrera que $(C)$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

b) Montrer que $(C)$ possède un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

**2.** a) Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Construire dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(C')$ de la fonction réciproque $f^{-1}$.

b) Étudier la dérivabilité de $f^{-1}$. Préciser en particulier le nombre dérivé de $f^{-1}$ en -1.

**3.** a) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $x$ tels que

$$0 < |f(x) - x + 3| < 1.$$

b) Trouver les points de $(C)$ dont les coordonnées sont toutes deux des entiers relatifs.

c) Soit $M$ un point de $(C)$ dont l'ordonnée est un entier $k$ strictement positif.
Montrer que l'abscisse $x_0$ de $M$ est un nombre irrationnel.
(On pourra montrer qu'il est impossible de trouver deux entiers $p$ et $q$ premiers entre eux tels que $x_0 = \dfrac{p}{q}$).

**4.** a) Soit $\lambda$ un nombre réel supérieur ou égal à -1.
Calculer l'aire $S(\lambda)$ de la partie du plan $(P)$ limitée par $(C)$ et les droites d'équations respectives $y = x - 3$, $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Déterminer $\lambda$ positif tel que $S(\lambda) = S(-1)$.

c) Calculer l'aire de la partie $E$ du plan $(P)$ définie par

$$E = \left\{ M\,(x\ ;\ y) \,\middle|\, -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x) \right\}.$$

# XLI. Togo, série C

### Ex. 1592.

./1980/togoC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \text{ pour } x \in ]-\infty\,; -1] \\ &f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ pour } x \in ]-1\,; 1[ \\ &f(x) = x^2 + bx + c \text{ pour } x \in [1\,; +\infty[,\ b \text{ et } c \text{ étant deux réels.} \end{aligned}$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ au point $-1$.

**2.** Déterminer les réels $b$ et $c$ de manière que $f$ soit continue au point 1.

**3.** Étudier les variations de $f$ pour les valeurs de $b$ et $c$ obtenues ci-dessus, et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

### Ex. 1593.

./1980/togoC/exo-2/texte.tex

Tous les entiers considérés sont écrits dans le système de numération décimale.

**1.** Quel est le chiffre des unités de l'entier $17^{1980}$ ?

**2.** Soit $a_n$ le chiffre des unités de l'entier $17^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ; quelles valeurs peut prendre l'entier $a_n$ ?

**3.** Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $a_n = 3$ ?

Retour page 1

# XLII. Toulouse, série C

**Ex. 1594.** ./1980/toulouseC/exo-1/texte.tex

Pour tout $(x,\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$, on pose

$$f(x,\ y) = (4x+2y+12)^2 - 4(x+y+4)^2.$$

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

**1.** $f(x,\ y) = 0$,

**2.** $f(x,\ y) = 4$.

**Ex. 1595.** ./1980/toulouseC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ telle que

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{1+x}}.$$

Le plan $P$ est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Étudier $f$ et dresser la tableau complet des variations de $f$ (la courbe représentative de $f$ n'est pas demandée).

**2.** Pour tout $x$ positif, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on notera $F(x)$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)
Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

**3.** Soit

$$\begin{aligned} g : \left]-1\,;\mathrm{e}^2-1\right] &\longrightarrow \left]-\infty\,;\frac{2}{\mathrm{e}}\right] \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

a) Tracer la courbe d'équation $y = g(x)$.

b) Montrer que $g$ est une bijection. En notant $h$ son application réciproque, tracer la courbe d'équation $y = h(x)$.

c) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M$ de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant h(x).$$

Calculer l'aire de $\mathscr{E}$.

## Problème 576

./1980/toulouseC/pb/texte

$P$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.
Á tout point $M$ de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ appelé affixe de $M$.

A) 1° Étant donné un complexe non nul $w = u + \mathrm{i}v$, avec $u$ et $v$ réels, et un réel $l$, déterminer l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie $\overline{w}z + w\overline{z} = l$.

2° Soit $D$ une droite affine dont une équation est

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$ ; $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
Trouver un complexe non nul $w$ et un réel $l$ tels que $D$ soit l'ensemble des points de $P$ dont l'affixe vérifie $\overline{w}z + w\overline{z} = l$.

B) 1° Étant donné un complexe $w$ et un réel $k$, déterminer l'ensemble des points $M$ de $P$ dont l'affixe $z$ vérifie

$$z\overline{z} - \overline{w}z - w\overline{z} + k = 0$$

(on aura à discuter en fonction du signe de $|w|^2 - k$).

Retour page 1

2° Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$ et de rayon $R$.
Trouver un nombre complexe $w$ et un réel $k$ tel que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points de $P$ dont l'affixe $z$ vérifie

$$z\overline{z} - \overline{w}z - w\overline{z} + k = 0$$

C) On considère l'application $f$ de $P - \{O\}$ dans $P - \{O\}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}.$$

a) Montrer que pour tout point $M$ de $P - \{O\}$, les points $M$ et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine $O$.

b) Montrer que $f$ est involutive. Préciser l'ensemble des points $M$ de $P$ tels que $f(M) = M$ et donner ses éléments remarquables.

c) a) Soit $D$ une droite ne contenant pas le point $O$. En utilisant les parties A et C, déterminer l'image de $D$ par l'application $f$. Préciser la nature de cette image et donner ses éléments remarquables.

b) Soit $U$ une droite contenant $O$. Déterminer l'image de $U - \{O\}$ par $f$.

d) Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par $O$. Déterminer l'image de $\mathscr{C} - \{O\}$ par $f$. Préciser la nature de cette image.

D) Si $M$ et $N$ sont deux points quelconques de $P$, on rappelle que la distance $MN$ de $M$ et $N$ est égale au module de la différence des affixes de $M$ et de $N$.

1° Soit $A$ et $B$ deux points distincts de $P - \{O\}$ d'images respectives $A'$ et $B'$ par $f$. Exprimer $A'B'$ en fonction de $AB$, $OA$ et $OB$.

2° Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par $O$ et trois points $R$, $S$, $T$ sur ce cercle tels que $O$, $R$, $S$ et $T$ soient deux à deux distincts et que le point d'intersection des droites $(OS)$ et $(RT)$ appartienne au segment $[RT]$.
Montrer que

$$OS.TR = OR.TS + OT.RS.$$

(On pourra considérer l'image par $f$ de $\mathscr{C} - \{O\}$ et utiliser la fait qu'un point $B$ appartient au segment $[A,\ C]$ si, et seulement si, $AB + BC = AC$.)

3° Soit trois points $R$, $S$, $T$ du plan $P$ tels que $O$, $R$, $S$, $T$ soient distincts deux à deux et tels que

$$OS.TR = OR.TS + OT.RS.$$

Montrer que $O$, $R$, $S$, $T$ sont sur un même cercle ou sur une même droite.

# XLIII. Toulouse remplacement, série C

Ex. 1596. *4 points.* *./1980/touslouseCrem/exo-1/texte.tex*

Dans le système de numération à base cinq, l'entier naturel $n$ s'écrit :

$$n = \overline{3x4y0}.$$

**1.** Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que $n$ soit divisible par quatre ?

**2.** Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que $n$ soit divisible par six ?

**3.** Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que $n$ soit divisible par douze ?
En déduire qu'il existe une seul $n$ divisible par douze tel que $x$ soit strictement inférieur à $y$ ; donner son écriture dans le système décimal.



Retour page 1

**Ex. 1597.** ——— *3 points.* *./1980/toulouseCrem/exo-2/texte.tex*

1. Dans le plan vectoriel $P$ rapporté à l abse $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la projection $p$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ ($a \in \mathbb{R}^\star$, $b \in \mathbb{R}$), et dont la direction est déterminée par le vecteur $\vec{j}$ ; et $q$ la projection vectorielle engendrée par le vecteur $c\vec{i} + d\vec{j}$ ($c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^\star$), et dont la direction est déterminée par le vecteur $\vec{i}$.
   Soit alors $f$ l'application linéaire $f = ap + dq$.
   (Rappel : $\mathbb{R}^\star$ désigne l'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ des réels non nuls.)
   Former la matrice $M$ de $f$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Utiliser la question précédente pour décomposer sous la forme $ap+dq$ l'application linéaire $g$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $p$ et $q$ étant des projections vectorielles que l'on précisera, $a$ et $d$ deux réels que l'on calculera.

## Problème 577 *13 points.*

*./1980/toulouseCrem/pb/texte*

On notera dans ce problème $V$ l'espace vectoriel des fonctions $f$ à valeurs réelles définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ ; et l'on désignera par $f'$ la dérivée première de la fonction $f$.
Le nombre réel $\theta$ étant un élément de l'intervalle $]0\,;1[$, le but du problème est d'étudier pour certaines fonctions $f$ de $V$ l'ensemble $E(f,\ \theta)$ des réels $x$ tels que l'on ait :

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta). \tag{1}$$

I. On va étudier $E(f,\ \theta)$ pour les fonctions polynômes.

1° Caractériser $E(f,\ \theta)$ pour les fonctions affines $f : x \longmapsto ax + b$.

2° Si $f$ est une fonction polynôme de degré deux $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, montrer que $E(f,\ \theta)$ est non vide pour une valeur unique $t_0$ de $\theta$ que l'on calculera ; caractériser $E(f,\ t_0)$.

3° On considère dans cette question le fonction polynôme de degré trois $f : x \longmapsto x^3$.

a) Montrer que $E(f,\ \theta)$ est vide pour une valeur unique $t_1$ de $\theta$ que l'on calculera ; caractériser $E(f,\ \theta)$ pour $\theta \neq t_1$.

b) On considère la fonction $\varphi$ de la variable réelle $\theta$ :

$$\varphi : \theta \longmapsto \frac{3\theta^2 - 1}{3(1-2\theta)}.$$

Étudier cette fonction $\varphi$ sur l'intervalle $]0\,;1[$, et en tracer la représentation graphique par rapport à un repère orthonormé (unité d'axes : 6 cm).

c) Déduire du I(3)a) et I(3)b) que, $x$ étant fixé dans $\mathbb{R}$, il existe ua moins une valeur de $\theta$ dans $]0\,;1[$ telle qu $x$ soit élément de $E(f,\ \theta)$ ; on précisera les valeurs de $x$ pour lesquelles il existe deux telles valeurs de $\theta$.

II. On considère les fonctions exponentielles $f_m$ du type

$$f_m : x \longmapsto \mathrm{e}^{mx}, \quad \text{où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

1° Montrer que, à chaque valeur strictement positive de $m$, on peut associer un nombre réel et un seul, noté $\theta_m$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_m(x+1) - f_m(x) = f'_m(x+\theta_m),$$

et exprimer $\theta_m$ en fonction de $m$.

2° Étudier la variation de chacune des fonctions

$$g_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^t - t - 1 \qquad \text{et} \qquad g_2 : t \longmapsto t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1.$$

En déduire que pour $m$ strictement positif, $g_1(m)$ et $g_2(m)$ sont strictement positifs.

3° A l'aide du résultat précédent, montrer que les réels déterminés au II1), sont tous compris entre 0 et 1.

4° Le nombre strictement positif $m$ étant fixé, caractériser $E(f_m,\ \theta)$ suivant les différentes valeurs du réel $\theta$ de $]0\,;1[$.

III. Le réel $\theta$ étant fixé dans $]0\,;1[$, on considère les fonctions $f$ satisfaisant à la relation (1) pour toute valeur réelle de la variable $x$, on note $V_\theta$ leur ensemble.

1° Montrer que $V_\theta$ constitue un sous-espace vectoriel de $V$.

2° Montrer par récurrence que, si une fonction indéfiniment dérivable est élément de $V_\theta$, il en est ainsi que toutes ses dérivées successives.

3° a) Déduire des résultats précédents que les seules fonctions polynômes de $V_\theta$ sont les fonctions affines, sauf pour $\theta = \dfrac{1}{2}$.

b) Quelles sont les fonctions polynômes de $V_{\frac{1}{2}}$ ?

## XLIV. Tunisie, série C

### Problème 578

./1980/tunisieC/pb/texte

I. Soit $f$ une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application $\varphi$ qui, à tout réel $t$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

1° Soit $g$ l'application de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u) = f\left(\dfrac{1+\tan u}{2}\right)$. Prouver que $g$ est différentiable sur $S$, puis que $g$ est une fonction affine.

2° Montrer que $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t$.

II. On considère l'application $I$ de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(p,\ q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

1° En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0\,;1]$, trouver la limite de la suite $u$ telle que $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$, $u_n = I(n,\ n)$.

2° Montrer que :

$$\forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star, \qquad I(p+1,\ q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties),

puis que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$, $\quad I(n,\ n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

III. 1° Après avoir remarqué que $2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1-t)$, simplifier $\dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$.

2° On considère la suite $v$ telle que $v_0 = 1$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star), \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite $w$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \ ?$$

Retour page 1

# Chapitre XXIII

# 1981.

## Sommaire

# I. Aix Marseille, série C

**Ex. 1598.** ./1981/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, où $n$ est un élément de $\mathbb{N}^\star$ (ensemble des entiers naturels non nuls.

**1.** Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$, où $n$ est élément de $\mathbb{N}^\star$.
Montrer que E a au moins deux éléments.

**2.** On *suppose* E *fini.* Soit $P$ le produit de tous les éléments de E et $X=4P-1$.

a) Trouver un minorant de $X$.

b) Montrer que $X$ n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de $X$ est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où $n$ est un élément de $\mathbb{N}^\star$.

c) Montrer que $X$ possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où $n$ est un élément de $\mathbb{N}^\star$.

**3.** En considérant un facteur premier $p$ de $X$ de la forme $4n-1$, la définition de $P$ et la relation $X=4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

**Ex. 1599.** ./1981/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine P rapporté au repère cartésien $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit A et B les points de coordonnées respectives $(-1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1)$, et soit $t$ un nombre réel non nul.
On désigne par $f$, $g$, $h$ les homothéties de rapport $t$ et de centres respectifs $O$, A, B.
A tout point $M$ du plan P, on fait correspondre successivement les points : $M_1=f(M)$, $M_2=g(M_1)$, $M_3=h(M_2)$ et $M_4=f(M_3)$.

**1.** Représenter sur un même figure les points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ dans le cas où $t=2$ et $\overrightarrow{OM}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. (On pourra donner aux représentations de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ la longueur 0,5 cm).

**2.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM_4}$ en fonction de $t$ et des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$.

**3.** Soit $\varphi$ l'application du plan P dans lui-même définie par

$$\text{pour tout point } M \text{ de P, } \varphi_t(M)=f\circ h\circ g\circ f(M).$$

Déterminer suivant les valeurs de $t$ l'ensemble des points de P invariants par $\varphi_t$ et préciser dans chaque cas la nature de $\varphi_t$.

## Problème 579

./1981/aixmarseilleC/pb/texte

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privés des nombres 0 et 1.

A) On considère les suites $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_1=1$ et $v_1=1$ et, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ :

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

et

$$v_n=1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}.$$

a) Trouver deux réels $A$ et $B$ tels que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$,

$$v_n=2-\frac{1}{n}.$$

b) Montrer que la suite $u$ est croissante, que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}'$ : $u_n\leqslant v_n$, que la suite $u$ est majorée.



Retour page 1

B) On rappelle que si $q$ est un nombre complexe différent de $1$ et $n$ un élément de $\mathbb{N}$

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

1° Soit $t$ un élément de $[0\,;\pi]$ ; on pose pour $n$, élément de $\mathbb{N}'$

$$C_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos kt \qquad \text{et} \qquad S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\sin kt.$$

a) Calculer le nombre complexe $C_n(t)+\mathrm{i}S_n(t)$.
En déduire que si $t$ est un élément de $]0\,;\pi]$

$$C_n(t)=\frac{\sin\frac{nt}{2}.\cos\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

et si $t=0$, $C_n(0)=n$.

b) L'application $C_n$ de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0\,;\pi]$.

2° Vérifier que pour tout $t$, élément de $]0\,;\pi]$ :

$$1+2C_n(t)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0\,;\pi]$ qui à $t$ associe $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction $g_n$ continue sur $[0\,;\pi]$.

3° Montrer que pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^\star$,

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

en déduire que

$$u_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\ C_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

4° Vérifier que

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\ \mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}$$

et que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}^\star$ :

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\ g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

C) On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(0)=2$ et pour tout $t$, élément de $]0\,;\pi]$

$$f(t)=\frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

1° Montrer que $f$ est continue sur $[0\,;\pi]$ ; en déduire l'existence d'un réel $M$ tel que, pour tout $t$, élément de $[0\,;\pi]$ :

$$0\leqslant f(t)\leqslant M.$$

2° Soit $\alpha$ un réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

Retour page 1

a) Montrer que, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^\alpha f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \alpha M.$$

b) Montrer que $f$ est dérivable sur $[\alpha\,;\pi]$ et que la fonction dérivée $f'$ est continue sur ce segment. En déduire l'existence d'un réel $M'$ tel que, pour tout $t$, élément de $[\alpha\,;\pi]$

$$\left|f'(t)\right| \leqslant M'.$$

c) On pose, pour tout $n$, élément de $\mathbb{N}$,

$$I_n = \int_\alpha^\pi f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t.$$

Montrer en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

3° Déduire de la question C2 que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

## II. Aix Marseille & Nice, série E

**Ex. 1600.** ./1981/aixmarseillee/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$ par $f(x)=\log\left|x^2-x-2\right|$ pour $x$ élément de $\mathbb{R}^-$, $f(x)=-1+\log(x+2)+\mathrm{e}^x$ pour $x$ élément de $\mathbb{R}^{+\star}$.

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

**2.** Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**3.** Soit $g$ la restriction de $f$ à $]-\infty\,;-1[$.
Montrer que $g$ est bijective de $]-\infty\,;-1[$ vers un intervalle que l'on déterminera.
Calculer $g^{-1}(2)$.

**Ex. 1601.** ./1981/aixmarseillee/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$$z^3-(2-\mathrm{i})z^2+(5-3\mathrm{i})z-2+6\mathrm{i}=0 \tag{E}$$

sachant que l'une des solutions est imaginaire pure. Soit $z_1$ cette solution, on trouvera deux autres solutions, on appellera $z_2$ celle de partie imaginaire négative et $z_3$ celle de partie imaginaire positive.

**2.** Soit $A$ le point d'affixe $z_1$, $B$ le point d'affixe $z_2$, $C$ le point d'affixe $z_3$ et $\Omega$ le point d'affixe 1.
On définit la similitude directe $s$ telle que

$$s(A)=\Omega$$
$$\text{et}\quad s(B)=C.$$

Déterminer son centre, son rapport et une mesure de son angle.

Retour page 1

## PROBLÈME 580

./1981/aixmarseillee/pb/texte

A) Soit $E_3$ un espace vectoriel rapporté à la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.
Pour $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $\varphi_{a,b}$, endomorphisme de $E_3$, par

$$\begin{cases} \varphi_{(a,b)}(\vec{i}) = (3a+b)\vec{\imath} - 4a\vec{\jmath} \\ \varphi_{(a,b)}(\vec{j}) = -4a\vec{\imath} + (3a-b)\vec{\imath} + b\vec{k} \\ \varphi_{(a,b)}(\vec{k}) = \vec{k}. \end{cases}$$

a) Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{(a,b)}$. Discuter suivant les valeurs de $a$ et $b$.
Pour quelles valeurs de $(a,\ b)$, $\varphi_{a,b}$ est-elle bijective ?

b) Déterminer les couples $(a,\ b)$ pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est une isométrie vectorielle.

c) Montrer que $\varphi_{\frac{1}{5},0}$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.

B) Soit $\mathscr{E}_3$ un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé $E_3$.
Soit $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathscr{E}_3$.
Soit $f$, application de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{E}_3$, qui au point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathbb{R}^3$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ définies par

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 4 \\ y' = -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - 3 \\ z' = z. \end{cases}$$

a) Montrer que $f$ est une isométrie ponctuelle.

b) Soit $P$ le plan affine passant par $O$, dont un système de vecteurs directeurs est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Montrer que $P$ est globalement invariant par $f$.

c) Soit $g$ la restriction de $f$ à $P$.
Montrer que l'on peut définir $g_1$, symétrie ponctuelle orthogonale par rapport à une droite affine $D$ et $t_1$ une translation dont le vecteur est directeur de $D$, telle que

$$g = g_1 \circ t_1 = t_1 \circ g_1.$$

d) Soit $P_1$ le plan affine contenant $D$, et parallèle à l'axe $z'Oz$. Soit $f_1$ la symétrie ponctuelle orthogonale par rapport à $P_1$.
Montrer qu'il existe une translation $t'_1$ telle que

$$f = f_1 \circ t'_1 = t'_1 \circ f_1,$$

le vecteur de $t'_1$ étant un vecteur de la direction de $P_1$.

C) Soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{1}{3}\left[4(x+1) + 5\sqrt{x^2+2x-2}\right] \end{aligned}$$

a) Étudier ses variations. Soit $(\Gamma)$ sa courbe représentative. Montrer que les droites d'équations $y = -3(x+1)$ et $y = \dfrac{1}{3}(x+1)$ sont asymptotes de $(\Gamma)$, la première si $x$ tend vers $+\infty$ et la deuxième si $x$ tend vers $-\infty$.
Tracer $(\Gamma)$ dans le plan affine $P$ défini au Bb, ce plan étant rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Soit $(\Gamma')$ la courbe d'équation

$$y = -\frac{1}{3}\left[4(x+1) - 5\sqrt{x^2+2x-2}\right].$$

On ne demande pas de tracer $(\Gamma')$.
Montrer que $(\Gamma \cup \Gamma')$ a pour équation

$$(2x - y + 2)^2 - (x + 2y + 1)^2 = 25.$$

c) Montrer que $(\Gamma \cup \Gamma')$ est globalement invariante par l'application $g_1$ définie au Bc



Retour page 1

## III. Amérique Centrale, série C

**Ex. 1602.** ./1981/ameriquecentraleC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \log \frac{x}{x+1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra 2 cm comme unité.

**1.** Préciser l'ensemble de définition de $f$. Démontrer que le point $I\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire $\mathscr{C}$.

**3.** Calculer en cm$^2$ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ où $\lambda$ est un réel supérieur ou égal à 1.

**Ex. 1603.** ./1981/ameriquecentraleC/exo-2/texte.tex

$\mathbb{C}$ étant l'ensemble des nombres complexes, on considère la fonction polynôme $P$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2.$$

**1.** Factoriser $P(z)$ en deux polynômes du second degré à coefficients complexes.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 + 3(1 + \mathrm{i})z + 5\mathrm{i} = 0.$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z) = 0$, puis que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

**3.** *Application.* Montrer que quelque soit l'entier $b$ supérieur ou égal à 6, si, dans la base $b$, l'entier $A$ s'écrit $\overline{130}$, l'entier $B$ s'écrit $\overline{35}$ alors l'entier $A^2 + B^2$ est le produit de deux nombres entier, dont l'écriture dans la base $b$, est indépendante de $b$.

### Problème 581 ./1981/ameriquecentraleC/pb/texte

On considère un plan vectoriel euclidien E rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On note $\mathscr{L}$(E) l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même, GL(E) le groupe linéaire de E et $H_{f,\alpha}$ l'ensemble des éléments $\vec{v}$ de E vérifiant $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ avec $f$ un élément de $\mathscr{L}$(E) et $\alpha$ un réel.
Le noyau de $f$ est donc $H_{f,0}$ et $H_{f,1}$ est donc l'ensemble des vecteurs invariants par $f$.

A- Soit $g_0$ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $g_0$ est un élément de GL(E).
   Déterminer la matrice dans $\mathscr{B}$ de $g_0^{-1}$, application réciproque de $g_0$.
2. Soit $s_0$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $\vec{i} + 2\vec{j}$.
   Déterminer la matrice de $s_0$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. On considère l'application linéaire $s_0' = g_0 \circ s_0 \circ g_0^{-1}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_0'$.

B- Dans cette partie du problème, $g$ désigne un élément de GL(E), $g^{-1}$ son application réciproque et D et $\Delta$ deux droites distinctes de E.

1. Soit $s$ la symétrie par rapport à D parallèlement à $\Delta$. On considère l'application linéaire

$$s' = g \circ s \circ g^{-1}.$$

   Démontrer que $s'$ est la symétrie par rapport à $g$(D) parallèlement à $g(\Delta)$.
   Retrouver à l'aide de ce résultat ceux de la question A3.

2. Soit $f$ un élément de $\mathscr{L}$(E). On considère l'application $\varphi_g$ de $\mathscr{L}$(E) dans lui-même qui associe à $f$ l'application linéaire
$$\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}.$$
   a) Préciser $\varphi_g(f)$ lorsque $f$ est une homothétie.
   b) Démontrer que $\varphi_g$ est une bijection de $\mathscr{L}$(E) sur lui-même et que
$$\varphi_g(f_1 \circ f_2) = \varphi_g(f_1) \circ \varphi_g(f_2).$$
   c) Démontrer que, quel que soit le réel $\alpha$, et quel que soit $f$ élément de $\mathscr{L}$(E) :
$$H_{\varphi_g(f),\alpha} = g(H_{f,\alpha}).$$
   d) Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\varphi_g(f)$ lorsque $f$ est la projection sur D faite parallèlement à $\Delta$.
3. On suppose que $g$ et $f$ sont des isométries vectorielles.
   a) Montrer que $\varphi_g(f)$ est une isométrie vectorielle.
   b) $f$ étant une rotation vectorielle, déterminer $\varepsilon_g(f)$ en fonction de $f$ suivant la nature de $g$.

C- On suppose maintenant que E est orienté et que la base $\mathscr{B}$ est directe. Soit P un plan affine euclidien associé à E et soit $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère de P.
Si $F$ est une application affine de P dans P, on note Inv$_F$ l'ensemble des points de P invariants par $F$.
   a) Démontrer que, quel que soit l'application affine bijective $G$ de P dans P admettant $G^{-1}$ comme application réciproque
$$\text{Inv}_{G\circ F\circ G^{-1}} = G(\text{Inv}_F).$$
   b) On considère la rotation $r$ de centre $A(0~;~1)$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.
   Soit D et $\Delta$ les droites de P d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$.
   On appelle $s_1$ la symétrie par rapport à D parallèlement à $\Delta$ et $s_2$ la symétrie orthogonale par rapport à D.
   Déterminer la nature et les éléments remarquables de $r \circ s_1 \circ r^{-1}$ et $s_2 \circ r \circ s_2$.

# IV. Amiens, série C

**Ex. 1604.** ———— *4 points.* *./1981/amiensC/exo-1/texte.tex*

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   a) Montrer que 1981 et 1815 sont premiers entre eux.
   b) Déterminer deux entiers relatifs $a$ et $b$ tels que $1981a + 1815b = 1$.
2. En déduire que dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$, $\overline{1815}$ admet un inverse que l'on déterminera.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{1815}x + \overline{1515} = \overline{732}$.

N.B. – $\overline{n}$ désigne la classe de l'entier $n$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$.

**Ex. 1605.** ———— *4 points.* *./1981/amiensC/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé direct. Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'~;~y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

1.- a) Montrer que $f$ est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
   b) Déterminer l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que $O$, $M$, $M'$ soient alignés.

2.- On désigne par $M_1$ et $M_2$ les projections orthogonales du point $M$ respectivement sur les droites $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$. Montrer que $M'$ est le transformé de $M_1$ dans une rotation de centre $M_2$ dont on déterminera une mesure de l'angle.



Retour page 1

## 🏛 PROBLÈME 582 *12 points.* *./1981/amiensC/pb/texte*

-A) Pour tout entier naturel $n$, non nul, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

-B) Soit $g$ la fonction, définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $g$ est intégrable sur $[0\,;1]$.
2. Soit $x$ un réel quelconque.

   a) Calculer pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ la somme

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1}.$$

   b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}.$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = U_1 - U_3 + \cdots + (-1)^n U_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$,

$$S_n = U_1 - U_3 + \cdots + (-1)^n U_{2n+1}.$$

   a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant -U_{2n+3}.$

   b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$

   c) Déterminer un entier $n_0$ tel que

$$\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - S_{n_0}\right| \leqslant 10^{-2}.$$

   En déduire une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$

-C) Soit $G$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(x)\,\mathrm{d}x.$

1° Étudier la dérivabilité de $G$ et son sens de variation.

2° a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}.$

   b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 1, \quad \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Retour page 1

c) Calculer pour tout $x \geqslant 1$ $\displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t$.

d) Déduire de ce qui précède $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x}$. (On pourra poser $X=\sqrt{x}$.)

3° Donner l'allure de la courbe représentative de $G$. Préciser la tangente au point d'abscisse 1 et la nature de la branche infinie.
La courbe a-t-elle une tangente au point d'abscisse $0$ ?

N.B. – Pour obtenir une valeur approchée de $G(0)$ on utilisera B(4)c.
Pour obtenir une valeur approchée de $G(2)$ on utilisera l'encadrement obtenu au C2.

## V. Amiens remplacement, série C

Ex. 1606. ./1981/amiensCrem/exo-1/texte.tex

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} x \longmapsto x^2 \ln x \text{ pour } x>0 \\ 0 \longmapsto 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. $f$ est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudier $f$ et tracer sa représentation graphique $(C)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 6 cm).
3. On désigne par $\alpha$ un nombre réel strictement positif ; calculer l'intégrale définie par :

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire en cm$^2$, du domaine $(D)$ du plan défini par :

$$(D) = \{M(x\ ;\ y),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

## VI. Amiens, série E

Ex. 1607. ./1981/amiensE/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le plan horizontal de projection et le plan $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection.
Le point $O$ est au centre de la feuille ; la ligne de terre, définie par $(O,\ \vec{\jmath})$, est le petit axe de la feuille.
L'unité est le centimètre. On considère les points $A(3\ ;\ -7\ ;\ 4)$ et $B(5\ ;\ -1\ ;\ 8)$ ainsi que la droite

$$\mathscr{D}\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 4+\lambda. \end{cases}$$

**1.** Faire l'épure de $A$, de $B$, de $\mathscr{D}$.

**2.** Construire la projection orthogonale $H$ de $B$ sur la droite $\mathscr{D}$.

**3.** A l'aide d'un rabattement, faire apparaître le triangle $ABH$ en varie grandeur.
En déduire l'épure d'un point $S$ de la droite $BH$, situé à égale distance de $A$ et de la droite $\mathscr{D}$.
On expliquera les constructions effectuées.

**Ex. 1608.** ./1981/amiensE/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct. Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que $O,\ M$ et $M'$ soient alignés.

**3.** On désigne par $M_1$ et $M_2$ les projections orthogonales du point $M$ respectivement sur les droites $(O,\ \vec{\imath})$ et $(O,\ \vec{\jmath})$.
Montrer que $M'$ est le transformé de $M_1$ dans une rotation de centre $M_2$ dont on déterminera une mesure de l'angle.

## Problème 583

./1981/amiensE/pb/texte

Le problème est identique à celui-ci :Problème C 1981

# VII. Antilles & Guyane, série C

**Ex. 1609.** ./1981/antillesC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable $x$ définie par

$$f(x) = \log(\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2).$$

**1.** Étudier la fonction $f$ et construire sa courbe représentative $C$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
On montrera notamment que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $C$ .

**2.** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle$]\log 2\,;+\infty[$. Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$. Calculer $g^{-1}$.

**Ex. 1610.** ./1981/antillesC/exo-2/texte.tex

$n$ étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs définis par

$$a = n^3 - 2n + 5\ ; \qquad b = n + 1.$$

**1.** Montrer que P.G.C.D. $(a,\ b) =$ P.G.C.D $(b,\ 6)$.

**2.** Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on P.G.C.D. $(a,\ b) = 3$ ?

**3.** Déterminer $n$ pour que le nombre $\dfrac{a}{b}$ soit un entier relatif.

# VIII. Antilles & Guyane remplacement, série C

**Ex. 1611.** ./1981/antillesCrem/exo-2/texte.tex

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on considère le système de deux équations à deux inconnues $x$ et $y$

$$\begin{cases} x + \overline{3}y = \overline{1} \\ \overline{3}x - y = m \end{cases}$$

où $m$ est un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**1.** Résoudre le système dans le cas où $m = \overline{1}$.

**2.** Discuter suivant les valuers de $m$ le nombre des solutions du système.

# IX. Besançon, Lyon, Série C

**Ex. 1612.** ./1981/besanconC/exo-1/texte.tex

On désigne par S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$138x - 55y = 5. \qquad \text{(XXIII. 1)}$$

**1.** Montrer que si $(x_0,\ y_0)$ est élément de S, alors $x_0 \equiv 0\,[5]$.

**2.** Résoudre l'équation (XXIII. 1).

**3.** $(x_0,\ y_0)$ étant un élément de S, quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun des deux termes du couple ?

Déterminer l'ensemble des éléments de S dont les termes sont premiers entre eux.

**Ex. 1613.** ./1981/besanconC/exo-2/texte.tex

Le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien. (Les candidats peuvent toutefois, s'ils le désirent le remplacer par $\log$).

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \ln\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}$$

sur l'ensemble $E$ des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels cette expression a un sens.

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction $f$, construite relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** a) Quel est l'ensemble $E$ de définition de la fonction $f$ ?

b) Étudier le sens des variations de $f$, ainsi que ses limites éventuelles aux bornes de l'ensemble $E$.

c) On pose pour tout $x$ appartenant à $E$ :

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Étudier la limite éventuelle de $\varphi(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, ainsi que le signe de $\varphi(x)$.

Que peut-on en conclure pour $(\mathscr{C})$ ?

d) Tracer $(\mathscr{C})$.

**2.** Soit $A$ l'image de $]\ln 2\,;\ln 5[$ par $f$, et $F$ l'application de $]\ln 2\,;\ln 5[$ sur $A$, définie pour tout $x$ appartenant à $]\ln 2\,;\ln 5[$ par $F(x) = f(x)$.

Montrer que $F$ admet une application réciproque $G$ dont on précisera les propriétés : sens des variations, continuité, dérivabilité.

Tracer sur la même figure que $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $G$.

## Problème 584

./1981/besanconC/pb/texte

A) On désigne par $I$ l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

1° a) Vérifier que pour $s \in I$ et $t \in I$

$$1 + st \neq 0.$$

Pour tout la suite on pose $s \star t = \dfrac{s+t}{1+st}$ pour $s \in I$ et $t \in I$.

b) Pour $s \in I$ fixé, étudier les variations de la fonction $T_s : t \longmapsto s \star t$ sur $I$. En déduire que la loi est interne dans $I$.

c) Montrer que $I$ muni de la loi $\star$ est un groupe commutatif.

2° a) Dresser le tableau de variation de la fonction $G$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $G(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

b) On pose $g(x) = x - G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, calculer $g(0)$ et déterminer le sens de variation de $g$ ; en déduire que $G(x) \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

c) Démontrer que $G$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(I,\ \star)$.



Retour page 1

3° On note $H : I \to \mathbb{R}$ l'application réciproque de $G$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $F_a$ par $F_a(x) = ax$ et on considère la fonction $f_a = G \circ F_a \circ H$ de $I$ dans $I$.

*On ne cherchera pas à calculer $H$ et $f_a$ dans cette question.*

a) Montrer que pour $a \geqslant 0$, $f_a$ est croissante sur $I$.

Soit $a$ et $b$ deux réels fixés.

b) Démontrer que pour tout $t \in I$, on a

$$f_{a+b}(t) = f_a(t) \star f_b(t).$$

c) On suppose $a \leqslant b$ et $t \in [0\,;1[$. En utilisant A(2)a), montrer que $H(t) \geqslant 0$ et en déduire que $f_a(t) \leqslant f_b(t)$.

B) A tout réel $a \geqslant 0$ on associe l'application $\varphi_a : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_a(t) = \dfrac{(1+t)^a - (1-t)^a}{(1+t)^a + (1-t)^a} & \text{si } a > 0 \\ \varphi_0(t) = 0. \end{cases}$$

1° a) Montrer que chaque fonction $\varphi_a$ est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$. Quelle est la valeur de $\varphi_a(1)$ ?

b) Démontrer que $H(t) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+t}{1-t}$ pour tout $t \in I$.

En déduire que pour tout $a \geqslant 0$ et tout $t \in [0\,;1[$ on a $f_a(t) = \varphi_a(t)$.

2° Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$J(a) = \int_0^1 \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer $J(0)$ ; $J(1)$ ; $J(2)$.

b) Montrer en utilisant la question B(1)b) que la fonction $J : a \longmapsto J(a)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Quel est le signe de $J(a)$ pour $a \geqslant 0$ ?

3° On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.

a) Montrer que

si $t \in [0\,;1-a]$ alors $\varphi_a(t) \leqslant f_a(1-a)$,

si $t \in [1-a\,;1]$ alors $\varphi_a(t) \leqslant 1$.

b) En déduire, ainsi que de A(3)b), l'inégalité

$$J(a) \leqslant \frac{a}{2}\log\frac{2-a}{a} + a.$$

c) En déduire que $J$ est continue à droite en $0$.

4° a) Démontrer, à l'aide A(3)b), que pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ on a

$$\varphi_{a+b}(t) \leqslant \varphi_a(t) + \varphi_b(t) \qquad \text{pour tout } t \in [0\,;1].$$

En déduire que $J(a+b) \leqslant J(a) + J(b)$.

b) Montrer que $J$ est continue à droite en tout point $a \geqslant 0$.

## X. Besançon, Dijon, Lyon, Reims, Grenoble, Strasbourg, Nancy-Metz, série E

**A**Ex. 1614. ———— *4 points.* *./1981/besanconE/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - \mathrm{i}z + 3 - \mathrm{i} = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

**2.** On construira les images des trois solutions dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Prouver que le triangle ainsi obtenu est rectangle et isocèle et trouver les coordonnées de son barycentre.



Retour page 1

**Ex. 1615.** ———— *4 points.* *./1981/besanconE/exo-2/texte.tex*

$\mathscr{E}_3$ désigne un espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien $E_3$, de dimension 3. $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}_3$. Soit $f_\alpha$ l'application affine de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{E}_3$ qui, à tout point $M$ de $\mathscr{E}_3$, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = z+1 \\ y' = x-3 \\ z' = y+\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

**1.** a) Montrer que $f_\alpha$ est une isométrie de $\mathscr{E}_3$.

b) Montrer que l'application linéaire associée à $f_\alpha$ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe.

**2.** a) Montrer que $f_2$ est une rotation dont on déterminera l'axe.

b) Montrer que $f_\alpha$, pour $\alpha \neq 2$, est un vissage dont on précisera l'axe (l'angle de $f_\alpha$ n'est pas demandé).

## Problème 585 *12 points.* *./1981/besanconE/pb/texte*

-I-

A- Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $f$ définie par :

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R}^\star\ :\quad f(x) = x\ln(x^2) - 2x \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1.- Montrer que $f$ est continue au point d'abscisse 0.

2.- Étudier la variation de $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé du plan affine : $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Préciser en particulier : la tangente à $(C)$ au point $O$ ainsi que les abscisses des points d'intersection de $(C)$ avec l'axe $(0,\ \vec{i})$.

3.- Démontrer que la restriction de $f$ à $[-1\,;1]$ admet une réciproque notée $g$. (Ne pas chercher à expliciter $g$).
Préciser l'ensemble de définition de $g$ et tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$ sur le repère précédent.

B- Soit $\alpha$ un nombre réel tel que : $0 < \alpha \leqslant \mathrm{e}$.

1.- Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine du plan délimité par la courbe $(C)$, l'axe $(0,\ \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \mathrm{e}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.- $\mathscr{A}(\alpha)$ a-t-elle une limite lorsque $\alpha$ tend vers zéro par valeurs positives ?

C- Un point mobile du plan $M$ a des coordonnées, dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, dont l'expression en fonction du temps $t$ $(t \in \mathbb{R})$ est

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t} \\ y = -2\mathrm{e}^{-t}(t+1) \end{cases}$$

1.- Démontrer que la trajectoire de $M$ est une partie de la courbe $(C)$. Caractériser cette partie.

2.- Déterminer, suivant les valeurs de $t$, l'allure du mouvement.

-II-

Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel de base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $\phi_a$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice est, relativement à cette base :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+a) & \frac{1}{2}(1-a) \\ \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{2}(1+a) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Soit $P$ le plan affine associé, de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $F_a$ l'application affine de $P$, d'endomorphisme associé $\phi_a$ et telle que $F_a(O) = O$.

1.- Déterminer, suivant les valeurs de $a$, l'ensemble des points invariants par $F_a$.

2.- a) Déterminer l'ensemble $E$ des valeurs de $a$ pour lesquelles $F_a$ est non bijective.

b) Dans le cas où $a$ appartient à $E$, prouver que $F_a$ est une projection ponctuelle ; en donner ses éléments caractéristiques.

3.- a) Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles $F_a$ est involutive ?

b) Dans le cas $a$ remplit la condition précédente avec $a < 0$, prouver que la courbe $(\Gamma)$ de I A3 est une partie de la courbe $F_a((C))$, où $C$ est la courbe tracée au I A2

## XI. Besançon remplacement, série E

**Ex. 1616.** ./1981/besanconErem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(t) = \ln\left|\frac{t}{1-t}\right|$$

1. Trouver l'ensemble de définition D de $f$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t$ de D.
2. Pour tout $x > 1$, soit $\varphi = \displaystyle\int_2^x \frac{\ln t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $\varphi(x)$ en intégrant par parties.
3. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 avec $x > 1$.

## XII. Bordeaux , série C

**Ex. 1617.** ./1981/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soit $P$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $D$ la droite de P d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Déterminer l'ensemble $E$ des points de $D$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. Déterminer le sous-ensemble $F$ des points de $E$ dont le carré de la distance au point O est multiple de 5. Préciser les points de F dont les coordonnées sont strictement comprises entre -20 et +20.

**Ex. 1618.** ./1981/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Calculer $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$.
2. Déterminer les nombres réels $a$, $b$ tels que

$$(a + \mathrm{i}b)^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}.\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

### Problème 586

./1981/bordeauxC/pb/texte

A) Soit $a$ un nombre réel strictement positif et $n$ un entier naturel $n \geqslant 1$ ; on appelle $f_n$ la fonction numérique définie sur l'intervalle réel $\left[-\frac{1}{a} ; \frac{1}{a}\right]$ par

$$f_n(x) = (1 - a^2x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

Soit $\Gamma_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coniques $C_1$ et $C_2$ contenant respectivement $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Préciser la nature de ces coniques. Indiquer leurs foyers et les directrices associées (discuter selon les valeurs de $a$).
2. Étudier les variations de $f_3$.
   Tracer $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ dans un même repère en prenant $a = 2$. (On ordonnera les réels $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ pour le tracé de $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$.)

B) 1. Soit $\alpha$ un nombre réel appartenant à $[0\,;\pi]$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\Gamma_1$ avec la droite d'équation

$$(\cos\alpha)y - a(\sin\alpha)x = 0 \qquad \text{pour } \alpha \neq 0 \quad \text{et } \alpha \neq \pi.$$

2. a) On désigne par $D_\pi$ l'ensemble des points $M$ de P dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ véri ?ent

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{a} \\ \text{et} \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-a^2x^2}. \end{cases}$$

On désigne par p$\alpha$ le demi-plan formé des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient

$$(\cos\alpha)y - a(\sin\alpha)x \leqslant 0$$

(étudier la position du point $(1\ ;\ 0)$ par rapport au demi-plan $\mathrm{P}_\alpha$).
Soit $D_\alpha = D\pi \cap \mathrm{P}_\alpha$.
L'aire de $d_\alpha$ est notée $\mathscr{A}(\alpha)$.
Démontrer que pour tout $\alpha \in [0\,;\pi]$ on a

$$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2a} - \int_0^{\frac{\cos\alpha}{a}} \left(\sqrt{1-a^2x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

(On distinguera pour cela trois cas : $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.)

b) Démontrer que la fonction $\mathscr{A} : \alpha \longmapsto \mathscr{A}(\alpha)$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, et définir la fonction dérivée $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ sur cet intervalle.
En déduire que pour tout $\alpha \in [0\,;\pi]$ on a $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2a}$.

C) Soit $T_a$ l'application affine de P dans P qui à tout point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ telles que

$$X = ax, \qquad Y = y.$$

Quelles sont les images de$\Gamma_1$ et $D_\alpha$ par $T_a$ ? Calculer l'aire de l'image de $D_\alpha$ par $T_a$.

D) On suppose dans la suite que $\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit un point mobile dans le plan P dont les coordonnées à la date $t$ ($t \in \mathbb{R}$) sont

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{a}\cos\left(\alpha\cos^2 t\right) \\ y(t) = \sin\left(\alpha\cos^2 t\right). \end{cases}$$

Étudier les fonctions : $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$. En déduire la trajectoire de $M$ et décrire le mouvement de $M$ (on ne cherchera pas à vérifier si le mouvement est accéléré ou retardé).

## XIII. Bordeaux remplacement, série C

Ex. 1619. ./1981/bordeauxCrem/exo-1/texte.tex

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Étudier les variations de la fonction $f$.

b) Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ :

$$(f \circ f)(x) = x.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?

c) Construire $(\mathscr{C})$.

**2.** Soit $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

On considère les points $A_\lambda$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}+\lambda\ ;\ 0\right)$ et $B_\lambda$ de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}-\lambda\right)$.

On note $D_\lambda$ la droite déterminée par les points $A_\lambda$ et $B_\lambda$.

a) Déterminer une équation de $D_\lambda$ sous la forme $a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois fonctions dérivables de la variable $\lambda$ que l'on déterminera.

b) Soit $D'_\lambda$ la droite d'équation $a'(\lambda)x + b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$, où $a'$, $b'$ et $c'$ désignent les fonctions dérivées respectives de $a$, $b$ et $c$.

Vérifier que pour toute valeur de $\lambda$ dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, les droites $D_\lambda$ et $D'_\lambda$ sont sécantes en un point $M_\lambda$.

Démontrer que les coordonnées $(x_\lambda\ ;\ y_\lambda)$ de $M_\lambda$ sont :

$$x_\lambda = \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2 \quad \text{et} \quad y_\lambda = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2.$$

c) Démontrer que, lorsque $\lambda$ décrit $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, le point $M_\lambda$ décrit la courbe $(\mathscr{C})$.

d) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, la droite $D_\lambda$ est tangente à $M_\lambda$ à $(\mathscr{C})$.

**Ex. 1620.** ./1981/bordeauxCrem/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'application affine $f$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que

$$\begin{cases} 2x' = x + y - z\sqrt{2} + 2 \\ 2y' = x + y + z\sqrt{2} + 2 \\ 2z' = (x-y)\sqrt{2}. \end{cases}$$

**1.** Démontrer que $f$ est un vissage.

**2.** Déterminer les éléments caractéristiques de $f$.

## Problème 587

./1981/bordeauxCrem/pb/texte

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

A) Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

1° Étudier les variations de la fonction $f$.

2° Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ :

$$(f \circ f)(x) = x.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?

3° Construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. (On prendra pour unité de longueur : 10 cm, et on déterminera les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses 0 et 1).



Retour page 1

4° Calculer l'aire du domaine plan limité par les axes de coordonnées et la courbes $(\mathscr{C})$.

B) Soit dans le plan $\mathscr{P}$, les points $A_\lambda$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}+\lambda\ ;\ 0\right)$ et $B_\lambda$ de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}-\lambda\right)$ où $\lambda$ est un paramètre réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

On note $D_\lambda$ la droite déterminée par les points $A_\lambda$ et $B_\lambda$.

1° Déterminer une équation de $D_\lambda$ sous la forme $a(\lambda)x+b(\lambda)y+c(\lambda)=0$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois fonctions dérivables de la variable $\lambda$ que l'on déterminera.

2° Soit $D'_\lambda$ la droite d'équation $a'(\lambda)x+b'(\lambda)y+c'(\lambda)=0$, où $a'$, $b'$ et $c'$ désignent les fonctions dérivées respectives de $a$, $b$ et $c$.

Vérifier que pour toute valeur de $\lambda$ dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, les droites $D_\lambda$ et $D'_\lambda$ sont sécantes en un point $M_\lambda$.

Démontrer que les coordonnées $(x_\lambda\ ;\ y_\lambda)$ de $M_\lambda$ sont :

$$x_\lambda=\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2 \quad \text{et} \quad y_\lambda=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2.$$

3° Démontrer que, lorsque $\lambda$ décrit $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, le point $M_\lambda$ décrit la courbe $(\mathscr{C})$.

4° Démontrer que, pour tout $\lambda\in\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la droite $D_\lambda$ est tangente à $M_\lambda$ à $(\mathscr{C})$.

C) A tout point $M$ du plan $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe $z=x+\mathrm{i}y$.

On appelle $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan $\mathscr{P}$ dont l'affixe satisfait la relation (1

$$\left|\frac{z+\mathrm{i}\overline{z}}{2}\right|=\left|z-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\right|. \tag{1}$$

1° Démontrer que $(\Gamma)$ admet pour équation dans le repère $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

$$x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0.$$

2° Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$, définie dans la partie A, est incluse dans la courbe $(\Gamma)$.

3° Dans cette question le plan $\mathscr{P}$ est supposé orienté $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé direct.

Soit $r$ la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

Soit $\vec{e}\,'_1=r(\vec{e}_1)$, $\vec{e}\,'_2=r(\vec{e}_2)$.

a) Déterminer une équation de $(\Gamma)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2)$.

b) Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

c) Que signifie la relation (1) ?

# XIV. Bordeaux , série E

**Ex. 1621.** ./1981/bordeauxE/exo-1/texte.tex

Une variable aléatoire $X$ prend les valeurs $1$, $-2$ et $3$ avec des probabilités respectives $\log\alpha$, $log\beta$, $\log\gamma$ où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique.

On suppose que si $E(X)$ désigne l'espérance mathématique de $X$, on a

$$E(X)=1.$$

1. Calculer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ainsi que la variance $v(X)$ et l'écart type $\sigma$ de $X$.
2. Dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, on considère la droite affine $(D)$ munie du repère normé $(O;\vec{u})$ et les points $A$, $B$, $C$ de $(D)$ d'abscisses respectives $1$, $-2$, $3$.

a) Calculer l'abscisse du barycentre $G$ des points $A$, $B$, $C$ affectés des coefficients respectifs $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

b) Soit $\varphi$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{P}, \qquad \varphi(M) = \frac{1}{6}MA^2 + \frac{1}{3}MB^2 + \frac{1}{2}MC^2.$$

Calculer $\varphi(G)$ et montrer que $\varphi(G) = v(X)$.
Contruire l'ensemble $(C)$ des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que $\varphi(M) = 9$.

**Ex. 1622.** ./1981/bordeauxE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté au repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.
L'unité de longueur est le centimètre, $O$ est au centre de la feuille. Le plan $(Oy,\ Oz)$ est le plan frontal et le plan $(Ox,\ Oy)$ le plan horizontal de projection.
La ligne de terre est orientée positivement de gauche à droite, $Ox$ dirigé vers le bas de la feuille, $Oz$ vers ler haut.
Soit $(P)$ le plan d'équation cartésienne

$$2x - y + 3z - 6 = 0$$

$(Q)$ le plan d'équation

$$x + y + z - 3 = 0.$$

**1.** Construire les traces des plans $(P)$ et $(Q)$.

**2.** Faire l'épure $(d,\ d')$ de la droite $(D)$ intersection des plans $(P)$ et $(Q)$.

**3.** Soient $A$ et $B$ les traces de $(D)$. En faisant une rotation, faire apparaître le segment $[AB]$ en vraie grandeur.

## Problème 588

./1981/bordeauxe/pb/texte

Soit $(E,\ +,\ .)$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $f_1$, $f_2$, $f_3$ les trois éléments de $E$ définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \mathrm{e}^x\ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = x\mathrm{e}^x\ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

On note $L$ le sous-ensemble de $E$ défini par

$$L = \{f \in E / \exists (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3, \quad f = af_1 + bf_2 + cf_3\}.$$

1. Montrer que $L$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que $\mathscr{B} = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ est une base de $L$.
2. Montrer que $\pi = \{f \in L / f(1) = 0\}$ est un plan vectoriel dont on donnera une équation cartésienne.
3. Soit $f \in L$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans $\mathscr{B}$.
   a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $f'$ appartient à $L$.
   Calculer les coordonnées de $f'$ dans $\mathscr{B}$ en fonction de $(a,\ b,\ c)$.
   b) Montrer que $f$ admet une seule primitive notée $P(f)$ appartenant à $L$. Calculer les composants de $P(f)$ dans $\mathscr{B}$ en fonction de $(a,\ b,\ c)$.
   c) Montrer que $f \longmapsto f'$ et $f \longmapsto P(f)$ sont des endomorphismes de $L$. Sont-ils inversibles ?
   d) Caractériser les éléments invariants de $P$ et $f \longmapsto f'$ et déterminer $\pi_1 = P^{-1}(\pi)$.
4. Soit $g$ la fonction définie pour $x$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x.$$

   a) Montrer que $g \in \pi_1$.
   b) Étudier la fonction $g$ ; tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de $g$ dans le plan euclidien $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé.
5. a) Calculer $P(g)$ et montrer que $P(g) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$.



Retour page 1

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < -1$. Soit $D$ la portion du plan $\mathscr{E}$ limité par $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = -1$. Calculer l'aire $\mathscr{A}(D)$ du domaine $D$ en fonction de $\alpha$ et déterminer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(D)$.

6. Dans le plan $\mathscr{E}$, on considère le mobile $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont données en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$ par

$$x = f_1(t) \qquad \text{et} \qquad y = f_2(t).$$

a) Déterminer l'équation de la trajectoire du mouvement du point $M$.

b) Étudier le mouvement du point $M$.

## XV. Bordeaux remplacement , série E

**Ex. 1623.** ./1981/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs d'une pièce de monnaie dans les conditions suivantes :

— on arrête l'expérience ès que l'on a obtenu face,

— on effectue au maximum cinq lancers.

Soit $X$ l'entier aléatoire défini comme le nombre de lancers effectués.
On fait les hypothèses habituelles :

— à chaque lancer les événements pile te face sont équiprobables,

— les lancers successifs sont indépendants deux à deux.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $X$ et la loi de probabilité de $X$.
2. Déterminer le fonction de répartition de $X$ et tracer sa courbe représentative.
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de $X$.

**Ex. 1624.** ./1981/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

On considère la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = -x + \frac{\log x}{x}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité : 2 cm).

1. Préciser le domaine de définition de $f$ et montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes : l'axe $(O; \vec{\jmath})$ et une droite $(\Delta)$ que l'on précisera. Situer $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\Delta)$.
2. Étudier brièvement les variations de la fonction $\varphi$ définie par

$$\varphi(x) = -x^2 + 1 - \log x.$$

   Calculer $\varphi(1)$ et en déduire la signe de $\varphi(x)$ en fonction de $x$.
3. Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer $(\mathscr{C})$.

### Problème 589

./1981/bordeauxErem/pb/texte

$\mathscr{P}$ désigne le plan affine euclidien de repère $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ le pan vectoriel associé de base $\mathscr{B}_1 = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Pour $(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, on considère l'endomorphisme $\varphi_{(a,b)}$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dontr la matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+2b & -2b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

et l'application affine $f_{(a,b)}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ d'endomorphisme associé $\varphi_{(a,b)}$ et telle que $O$ ait pour image le point $O'$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta) \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathscr{R}$.

A- 1. Soit $\vec{v}_1 = \varphi_{(a,b)}(\vec{v})$ et $M_1 = f_{(a,b)}(M)$.
Exprimer les coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ de $\vec{v}_1$ dans $\mathscr{B}_1$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}_1$ ; exprimer les coordonnées $(X_1\ ;\ Y_1)$ de $M_1$ dans $\mathscr{R}$ en fonction des coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de $M$ dans $\mathscr{R}$.

2. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$ invariantes par $\varphi_{(a,b)}$ ; Donner une équation cartésienne de chacune de ces droites.

3. Soit $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2) \in \vec{\Delta}_1 \times \vec{\Delta}_2$ avec $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2) \neq (\vec{0},\ \vec{0})$.

a) Prouver que $\mathscr{B}_2 = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ est une base de $\vec{\mathscr{P}}$ et calculer la matrice $N_{(a,b)}$ de $\varphi_{(a,b)}$ dans $\mathscr{B}_2$.

b) Caractériser les couples $(a\ ;\ b)$ tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit bijective.

B- 1. a) Montrer que $\varphi_1 = \varphi_{(0,b)}$ et $\varphi_2 = \varphi_{(a,-a)}$ où $a \in \mathbb{R}^\star$ sont les composées d'une projection et d'une homothétie que l'on caractérisera.

b) Montrer que $f_{(0,1)}$ et $f_{(1,-1)}$ sont les composées d'une translation et d'une projection affine.
Déterminer dans chacun des deux cas les couples $(\alpha\ ;\ \beta)$ pour lesquels la translation coïncide avec l'application identique.

2. Existe-t-il des applications $\varphi_{(a,b)}$ qui sont involutives ? Si oui, préciser leurs éléments caractéristiques.

3. a) Quelle condition $(C_1)$ doit vérifier $(a\ ;\ b)$ pour que $\varphi_{(a,b)}$ admette des vecteurs invariants ?

b) On suppose que $(a\ ;\ b)$ vérifie $(C_1)$. Quelle condition $(C_2)$ doit vérifier $(\alpha\ ;\ \beta)$ pour que $f_{(a,b)}$ admette des points invariants ?

c) On suppose $(C_1)$ et $(C_2)$ vérifiées. Donner une construction géométrique du point $M_1 = f_{(a,b)}(M)$, où $M$ est un point donné.

# XVI. Caen, série C

**Ex. 1625.** ./1981/caenC/exo-1/texte.tex

P est un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $f$ l'application de P dans P qui, à tout point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, associe le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ telles que

$$x' = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad ; \quad y' = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}.$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points invariants par $f$.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à un direction fixe.
3. Montrer que l'on peut trouver un couple $(\alpha,\ \alpha')$ de réels vérifiant $\alpha + \alpha' = 1$, tels que, pour tout point $M$, le barycentre du système$\{(M,\ \alpha)(M',\ \alpha')\}$ soit invariant par $f$.
En déduire une construction simple de l'image par $f$ d'un point $M$ quelconque.

**Ex. 1626.** ./1981/caenC/exo-2/texte.tex

Deux entiers naturels $a$ et $b$ s'écrivent dans le système de numération de base $n$ ($n$ entier naturel supérieur ou égal à 6).

$$a = \overline{2310}, \qquad b = \overline{252}..$$

On désigne leur plus grand commun diviseur par $d$.

**1.** Démontrer que $(2n+1)$ divise $a$ et $b$ et que $d = 2(2n+1)$ ou $d = 2n+1$ suivant que $n$ est pair ou impair.

**2.** On prend $n = 6$ ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax + by = -26$.

## XVII. Clermont-Ferrand, série C

**Ex. 1627.** ./1981/clermontC/exo-1/texte.tex

$n$ désigne un entier naturel.

1. Étudier suivant les valeurs de $n$, le reste de la division euclidienne de $7^n$ par 9.
2. Démontrer que, quel que soit $n$,
$$7^n + 12n - 1$$
est divisible par 9.

## XVIII. Dijon, série C

**Ex. 1628.** ./1981/dijonC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction numérique $g$ de la variable réelle $x$ telle que

$$g(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

1. Étudier l'ensemble de définition et les variations de la fonctions $g$.
On désigne par $\Lambda$ la courbe représentative de $g$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. (On prendra 3 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)
2. Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\Lambda$.
Montrer que $\Lambda$ admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées dans le repère.
3. Construire $\Lambda$.

**Ex. 1629.** ./1981/dijonC/exo-2/texte.tex

1. Montrer que si deux nombres entiers naturels $x$ et $y$ sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.
2. Déterminer dans $\mathbb{N}^\star$ les entiers $a$ et $b$ vérifiant
$$\begin{cases} (a2 + b)(5a + 2b) = 1\ 620 \\ ab = 2M \end{cases}$$
$M$ étant le plus petit commun multiple de $a$ et de $b$.

### Problème 590 ./1981/dijonC/pb/texte

I. E désigne un plan vectoriel euclidien. le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}.\vec{v}$.
Dans tout le problème, $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\begin{cases} \vec{e_1}.\vec{e_1} = 1 \\ \vec{e_2}.\vec{e_2} = 1 \\ \vec{e_1}.\vec{e_2} = \cos\theta, \qquad \text{où } \theta \text{ est un réel appartenant à } \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

1° Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E. $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ étant des vecteurs de coordonnées respectives $(\alpha, \beta)$ et $(\alpha', \beta')$ dans cette base, exprimer $\vec{u}.\vec{u'}$ en fonction de ces coordonnées et de $\theta$.

2° On note :
$$\vec{\imath} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}(\vec{e_1} + \vec{e_2}), \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}(-\vec{e_1} + \vec{e_2}).$$
Démontrer que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormé de E. Déterminer les coordonnées de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Retour page 1

3° Soit $f$ l'application de E dans E définie par :

$$\forall \vec{u} \in E \ : \ f(\vec{u}) = \frac{1}{2}[(\vec{u}.\vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{u}.\vec{e_2})\vec{e_2}].$$

Démontrer que $f$ est un automorphisme de E et déterminer la matrice de $f$ dans la base $(\vec{i}, \ \vec{j})$.

II. $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien associé à E. Soit $O$ un point de $\mathscr{P}$. $D_1$ est la droite affine passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{e_1}$, $D_2$ est la droite affine passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{e_2}$.
Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, on appelle :

— $M_1$ la projection orthogonale de $M$ sur $D_1$ ;
— $M_2$ la projection orthogonale de $M$ sur $D_2$.

Dans toute la suite du problème, $M'$ désigne le milieu de $(M_1, \ M_2)$.

1° a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{OM_1} = (\overrightarrow{OM}.\vec{e_1})\vec{e_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = (\overrightarrow{OM}.\vec{e_2})\vec{e_2}.$$

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rl} g : \mathscr{P} & \longrightarrow \mathscr{P} \\ M & \longmapsto g(M) = M' \end{array}$$

est une bijection affine dont $f$ est l'automorphisme associé.
Exprimer les coordonnées $(x' \ ; \ y')$ de $M'$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction des coordonnées $(x \ ; \ y)$ de $M$ dans le même repère.

c) Préciser la nature des points invariants de $g$.

2° Soit (C) le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par l'application $g$.
Comment faut-il choisir $\theta$ pour que (C') soit un cercle ? Dans le cas contraire, préciser les coordonnées des foyers de (C') ainsi que son excentricité.

III. Soit $\lambda$ un réel strictement positif. Comment faut-il choisir $\lambda$ pour qu'il existe des points $M$ de $\mathscr{P} - \{O\}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = \lambda \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \ ?$$

(On pourra ramener ce problème à l'étude d'une équation de la forme $ax^2 + by^2 = 0$ où $a$ et $b$ sont des nombres dépendants de $\lambda$ et $\theta$.)
En déduire que :

$$\forall M \in \mathscr{P} - \{O\} \ : \qquad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant \frac{\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} \leqslant \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

IV. 1° Soit $\varphi$ l'application de E×E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\vec{u}, \ \vec{v}) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ : \qquad \varphi(\vec{u}, \ \vec{v}) = \vec{u}.f(\vec{v}).$$

Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur E.

2° Démontrer que :
quels que soient les points $A$ et $M$ de $\mathscr{P}$, d'images respectives $A'$ et $M'$ par $g$, on a :

a $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA'}$,
b $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OM}$.

3° Soit $\Delta$ une droite vectorielle de E. Quel est l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{P}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à $\Delta$ ? (On pourra utiliser IV(2)b).

# XIX. Grenoble, série C

**Ex. 1630.** ./1981/grenobleC/exo-1/texte.tex

1. Montrer qu'un entier naturel est divisible par 42 (42 est écrit dans le système décimal) si et seulement si, $n$ est divisible par 6 et par 7.
2. Soit $n$ un entier naturel écrit $\overline{3a4b}$ en base 8. Écrire en base huit tous les entiers, $n$, qui sont divisibles par 42.
   Montrer que ce sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison écrite en base 8.

# XX. Groupe I, série C

**Ex. 1631.** ./1981/groupeIC/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 1632.** ./1981/groupeIC/exo-2/texte.tex

On sait que tout rationnel $r$ peut être représenté, de façon unique, par une fraction *irréductible* $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$).
Soit $f$ l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}^\star$ définie par $f(r) = q$.

**1.** Montrer que 1 est une période de $f$.

**2.** $a$ et $b$ étant deux entiers naturels, montrer que si $a$ et $b$ sont premiers entre aux alors $a+b$ est premier avec $a$ et avec $ab$.

**3.** On désigne par $r_0 = \frac{p_0}{q_0}$ ($p_0$ et $q_0$ premiers entre eux) un nombre rationnel de l'intervalle $]0\,;1[$.
Montrer qu'il existe des rationnels de la forme $\frac{p_0}{q}$ ($p_0$ et $q$ premiers entre eux) tels que

$$f\left(\frac{p_0}{q} + \frac{p_0}{q_0}\right) = q.q_0.$$

En déduire que 1 est la plus petite période de $f$.

# XXI. Groupe I bis remplacement, série C

**Ex. 1633.** ./1981/groupeIbisCrem/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division de $3^n$ par 7.

**2.** Déterminer le reste de la division par 7 du nombre $A$ sachant que

$$A = (2\ 243)^{325} + (1\ 179)^{154}.$$

**3.** Le nombre $B$ s'écrit en base 3 : $\overline{121010201}$.
Déterminer le reste de la division de $B$ par 7.



Retour page 1

## 🏛Problème 591

./1981/groupeIbisCrem/pb/texte

On désigne par $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques à variable réelle continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

A) 1° Montrer que, $f$ étant un élément de $\mathscr{C}$ on peut associer à tout réel $a$ strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par

$$F(a)=\int_a^{3a}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2° $a$ décrivant $\mathbb{R}_+^\star$, on définit ainsi une fonction $F$ de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\star,\quad F(x)=\int_x^{3x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+\star$ et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\star,\quad F'(x)=\frac{f(3x)-f(x)}{x}.$$

La fonction $F$ est-elle un élément de $\mathscr{C}$ ?

3° Définir $F$ dans les deux cas particuliers suivants :

a) $f:t\longrightarrow\dfrac{1}{t}$ ;

b) $f:t\longrightarrow 1$.

B) On étudie le cas où $f$ est l'application $f:t\longrightarrow\cos t$ c'est à dire

$$F(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction $F$ définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1° Déterminer

a) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ;

b) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2° Montrer que

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^\star,\qquad\left|\frac{f(t)}{t}\right|\leqslant\frac{1}{t}$$

et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\star,\qquad|F(x)|\leqslant\log 3.$$

3° Démontrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\star,\qquad\log 3-F(x)=2\int_x^{3x}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et que

$$0\leqslant\log 3-F(x)\leqslant 2x^2.$$

En déduire que $F$ admet une limite à droite au point $0$.

4° Soit $m$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$m(x)=\frac{\log 3-F(x)}{x}.$$

Étudier la limite de $m$ à droite au point $0$.



Retour page 1

C) Soit $G$ la fonction réelle telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G(x) = F(x)$$
$$G(0) = \log 3.$$

1° Démontrer que $G$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \left|G(x) - \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right| \leqslant \frac{2}{3x}.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad |G(x)| \leqslant \frac{2}{x}$$

et étudier la limite de $G$ en $+\infty$.

3° Démontrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad G'(x) = \frac{-4\cos x.\sin^2 x}{x}.$$

4° Déterminer l'ensemble des nombres réels pour lesquels la fonction $G$ présente un extrémum. Déterminer les intervalles sur lesquels $G$ est

a) Croissante.

b) Décroissante.

5° On désigne par $G_1$ la restriction de $G$ à l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
Donner le tableau de variation de $G_1$ sans préciser les valeurs des extrémums et en déduire que, sur $\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $G_1$ admet un zéro.

# XXII. Limoges, série C

## Problème 592

./1981/limogesC/pb/texte

Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$. On considère les suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_{n+2} - 2Z_{n+1}\cos\theta + Z_n = 0. \tag{1}$$

On donne d'autre part un plan $\mathscr{P}$ de repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre $Z_n$ est représenté par le point $M_n$ de coordonnées $x_n$ et $y_n$ ; $x_n$ et $y_n$ désignant respectivement la partie réelle et imaginaire de $Z_n$.

A) Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra :

$$Z_0 = 3 + \mathrm{i}, \quad Z_1 = 1 + 2\mathrm{i}.$$

1) On suppose dans cette question que $\theta = 0$. Construire les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
Calculer $\overrightarrow{M_0M_n}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $n$.

2) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{3}$. Construire les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$. Démontrer que la suite $(Z_n)$ est périodique.

3) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Construire les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$. Démontrer que quel que soit $n$, le point $O$ est isobarycentre de $M_{n+1},\ M_{n+2}$. Montrer que la suite $(Z_n)$ est périodique.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$. On appelle $\alpha$ et $\beta$ ses racines.
Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ avec $\lambda$ et $\mu$ complexes quelconques, alors la suite $(Z_n)$ vérifie la relation(1).



Retour page 1

B) On prend dans cette partie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \lambda(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + m\lambda(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta),$$

où $\lambda$ est un complexe donné non nul, $\lambda = a + \mathrm{i}b$ avec $a$ et $b$ réels, $\overline{\lambda}$ son conjugué et $m$ un réel donné.

1) Remarquer que la suite $(Z_n)$ vérifie la relation (1).
2) Calculer $x_n$ et $y_n$ en fonction de $a,\ n,\ m,\ \theta$.
3) Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $x_n$ et $y_n$ pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
4) Montrer que si $m$ est différent de $1$ et de -1, les points $M_n$ appartiennent à une conique qu'on précisera. La construire pour $\lambda = 3 + 4\mathrm{i}$et $m = \dfrac{1}{2}$..
5) Montrer que si $m = 1$, alors $Z_n$ est réel. Exprimer dans ce cas $Z_n$ en fonction de $a,\ b,\ \theta$. Préciser $Z_n$ dans le cas où $\lambda = 1$ puis $\lambda = \mathrm{i}$.

C) On désigne par $(\mathscr{E},\ +,\ .)$ l'espace vectoriel des suites réelles et par $\mathscr{E}'$ l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1).

1) Montrer que $\mathscr{E}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) On considère l'application : $\begin{array}{rcl} \mathscr{E}' & \to & \mathbb{R}^2 \\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (U_0,\ U_1). \end{array}$ Montrer que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}'$ ?
3) Montrer que si $\theta \neq 0$et $\theta \neq \pi$, la question B5 fournit deux suites linéairement indépendantes de $\mathscr{E}'$. En déduire la forme générale des suites de $\mathscr{E}'$.
4) Retrouver, pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ les périodes obtenues dans la partie A.

## XXIII. Lille, série C

**Ex. 1634.** ——— *4 points.* ./1981/lilleC/exo-1/texte.tex

**1.** Décomposer $319$ en produit de facteurs premiers.

**2.** Démontrer que si $x$ et $y$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système

$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1\ 276 \\ ab = 2m \end{cases}$$

où $m$ désigne le plus petit multiple commun de $a$ et $b$.

**Ex. 1635.** ——— *4 points.* ./1981/lilleC/exo-1/texte.tex

**1.** Décomposer $319$ en produit de facteurs premiers.

**2.** Démontrer que si $x$ et $y$ sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système

$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1\ 276 \\ ab = 2m \end{cases}$$

où $m$ désigne le plus petit multiple commun de $a$ et $b$.

## 🏛 Problème 593 *12 points.* ./1981/lilleC/pb/texte

A) On appelle F l'ensemble des applications $f$ *continues* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, & f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \\ f(0) \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Vérifier que la fonction $x \longmapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.
2. Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x = y.$$

   Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$ ?
3. Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si, $f$ est l'application identiquement nulle notée $\tilde{0}$.
4. On suppose que $f$ s'annule pour une valeur $a \neq 0$.
   a) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \frac{a}{2^n}.$$

   Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   b) Montrer par récurrence sur l'entier $n$ que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$ (utiliser la question A2).
   c) On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$.
   Montrer que $f$ ne s'annule jamais et que, pour tout $x$ réel, $f(x) > 0$. Montrer que $f$ est une fonction paire.

B) Soit $G$ l'ensemble des fonctions $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\exists f \in \mathrm{F} - \{\tilde{0}\}, \qquad \forall x \in GR, \qquad g(x) = \log(f(x)).$$

1. Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par $f$, que tout élément $g$ de $G$ vérifie la relation

$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right]. \tag{2}$$

2. Déterminer $g(0)$ et montrer que $g$ est une fonction paire.
3. Montrer à l'aide de (**??**) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(nx) = n^2 g(x). \tag{3}$$

   Montrer que la relation (3) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(rx) = r^2 g(x).$$

   (On pourra poser $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.)
   On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

C) On admet dans toute la suite que les fonctions de F distinctes de $\tilde{0}$ sont des fonctions de la forme $f_\lambda$, où $\lambda$ est un paramètre réel quelconque, définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de $f_\lambda$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Étudier les variations de $f_\lambda$ suivant les valeurs de $\lambda$.
   Pour quelles valeurs de $\lambda$ la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ a-t-elle une asymptote ?
b) Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur $\mathscr{C}_\lambda$ deux points $A_\lambda$ et $B_\lambda$ en lesquels la tangente passe par l'origine.
   Exprimer les coordonnées de $A_\lambda$ et $B_\lambda$ en fonction de $\lambda > 0$.
   Quel est l'ensemble formé par les points $A_\lambda$ et $B_\lambda$ lorsque $\lambda$ varie ?



Retour page 1

# XXIV. Lyon remplacement, série C

Ex. 1636. ./1981/lyonCrem/exo-1/texte.tex

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \log(x+1)$.

**1.** Étudier $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

**2.** Calculer en $\text{cm}^2$ l'aire du domaine limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in ]-1\,;0]$. Cette aire a-t-elle une limite quand $\alpha$ tend vers $-1$ par valeurs supérieures ?

Ex. 1637. ./1981/lyonCrem/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs tels que $n-1$ divise $n+3$.

**2.** Démontrer que pour tout entier relatif $n$, les entiers $n-1$ et $n^2+2n-2$ sont premiers entre eux.

**3.** Déterminer l'ensemble F des entiers relatifs $n$ tels que $(n-1)(2n^3+1)$ divise $(n+3)(n^2+2n-2)$.

# XXV. Montpellier, série C

Ex. 1638. ./1981/montpellierC/exo-1/texte.tex

E est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base orthonormée de E, $F$ l'endomorphisme de E tel que

$$F(\vec{\imath}) = \frac{1}{3}(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k})\ ;$$
$$F(\vec{\jmath}) = \frac{1}{3}(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k})\ ;$$
$$F(\vec{k}) = \frac{1}{3}(5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}).$$

1° Démontrer que l'image de $F$ est un plan vectoriel $P$ orthogonal au noyau de $F$.

2° Démontrer que le couple $\mathscr{B} = (\vec{\imath} + \vec{k}\ ;\ \ \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})$ est une base orthogonale de $P$ ; $f$ désignant la restriction de $F$ à $P$, déterminer la matrice de $f$ relative à la base $\mathscr{B}$ et reconnaître $\frac{1}{2}f$.

3° Montrer que $F$ peut être considéré comme composée de trois applications simples que l'on déterminera.

Ex. 1639. ./1981/montpellierC/exo-2/texte.tex

Soit $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

1° Discuter suivant $a$ le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 = a, \qquad a \in A, \qquad x \in A.$$

2° Montrer que dans $A$, l'équation $x^2 - \dot{2}px + q = \dot{0}$ ($p \in A,\ q \in A$) a deux solutions (distinctes ou confondues) si, seulement si, $p^2 - q$ appartient à un sous-ensemble $B$ (à déterminer) de $A$.

3° Résoudre alors l'équation $x^4 + \dot{3}x^2 + \dot{4} = \dot{0}$ dans $A$.

4° Déterminer les entiers $x$ tels que le nombre qui s'écrit $\overline{10304}$ en base $x$ soit divisible par 11.

## Problème 594

./1981/montpellierC/pb/texte

On note E l'ensemble des applications numériques définies sur $]0\,;+\infty[$ et admettant pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ une dérivée $n$-ième sur $]0\,;+\infty[$.

On rappelle que E muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A) Pour tout élément $f$ de E, on désigne par $g$ l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = xf'(x)$, où $f'$ désigne la fonction dérivée première de $f$.

1° a) Calculer $g'(x)$, pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$.



Retour page 1

b) Vérifier, par récurrence, que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad g^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x),$$

où $f^{(n)}$ désigne, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ la dérivée $n$-ième de $f$.
En déduire que $g$ est élément de E.

2° Soit $\varphi$ l'application de E dans E définie par $\varphi(f) = g$.
Montrer que $\varphi$ est une application linéaire de E dans E.

3° On pose $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

a) Pour toute application $f$ de E, on pose $h = \varphi^2(f)$.
Montrer que

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad h(x) = x^2 f''(x) + xf'(x).$$

b) En utilisant le A(1)a, montrer que le noyau de $\varphi^2$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 2, dont une base est formée des deux applications $f_1$ et $f_2$ de E définies par

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad f_1(x) = \log x$$
$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad f_2(x) = 1$$

B) 1° Étudier les variations de la fonction $f$ définie de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$.

Construire, dans le plan affine $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2$ cm, la courbe représentative de $f$.

2° Vérifier, par récurrence que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, il existe un couple $(u_n,\ v_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \log x}{x^{n+1}}.$$

En déduire que $f$ est un élément de E.

3° Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n, \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_{n+1} = -(n+1)v_n. \end{cases}$$

a) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

b) Vérifier que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, on a

$$u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

C) Soit F l'ensemble des applications $f_{a,b}$ de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_{a,b}(x) = \frac{a \log x + b}{x}, \qquad \text{où} \qquad (a,\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

1° Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont $(f_{1,0},\ f_{0,1})$ est une base.

2° a) Établir : $\forall f \in$F, $\varphi(f) \in$F ($\varphi$ est l'application définie au A2).

b) On note $\overline{\varphi}$ la restriction de $\varphi$ à F.
Écrire la matrice $M$ de $\overline{\varphi}$ dans la base $(f_{1,0},\ f_{0,1})$. Montrer que $\overline{\varphi}$ est bijective.
Écrire, dans la même base $(f_{1,0},\ f_{0,1})$, les matrices de $\overline{\varphi}^2$ et de $\left(\overline{\varphi}^2\right)^{-1}$.

c) Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$

$$M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^{n+1} & (-1)^n \end{pmatrix}.$$



Retour page 1

D) On se propose de déterminer les éléments $f$ de E vérifiant

$$\varphi^2(f) = f_{1,4}, \tag{1}$$

c'est à dire

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[, \qquad x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{4+\log x}{x}.$$

1° Montrer qu'il existe un unique élément $f_0$ de F vérifiant (1).

2° Soit $f$ ∈E. Établir que $f$ vérifie (1) si, et seulement si, $f - f_0 \in \ker(\varphi^2)$.
En déduire l'ensemble des fonctions de E qui vérifient (1).

## XXVI. Montpellier remplacement, série C

**Ex. 1640.** ./1981/montpellierCrem/exo-1/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel.

1. Trouver suivant les valeurs de $n$, les restes de la division de $5^n$ par 13.
2. En déduire que $1\,981^{1\,981} - 5$ est divisible par 13.

**Ex. 1641.** ./1981/montpellierCrem/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle équilatéral $ABC$. On pose

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a, \qquad a > 0.$$

1. Déterminer le point $G$ barycentre du système
$$\{(A,\ 2)(B,\ 1)(C,\ 1)\}.$$
2. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points $M$ du plan qui vérifient
$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2.$$
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points $M$ du plan qui vérifient
$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}.$$

(On pourra utiliser le point $G$ et le point $I$ milieu du segment $[AG]$).

## XXVII. Nice remplacement, série C

**Ex. 1642.** ./1981/niceCrem/exo-2/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}\ ;\ \overline{1}\ ;\ \overline{2}\ ;\ \overline{3}\ ;\ \overline{4}\ ;\ \overline{5}\ ;\ \overline{6}\right\}$ l'équation
$$X^2 v + \overline{2}X + \overline{6} = 0.$$
2. Déterminer toutes les bases de numération $b$ dans lesquelles le nombre qui s'écrit $\overline{126}$ en base $b$ est divisible par 7 et par 6.

# XXVIII. Orléans Tours, série C

Ex. 1643. 3 points. ./1981/orleansC/exo-1/texte.tex

On note $\overline{x}$ la classe d'un entier naturel selon la relation de congruence modulo 10.

**1.** Expliciter l'ensemble $\mathbb{C}$ des classes des entiers $n^2$ quand $n$ décrit l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels.

**2.** Déterminer le plus entier naturel $n_0$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $n_0$ on ait

$$\overline{(n!)} = \overline{0}.$$

(On rappelle que pour tout entier naturel $n$ non nul

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad \text{et que} \quad 0! = 1).$$

**3.** Pour $n$ entier non nul on pose

$$u_n = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

Déterminer l'ensemble $D$ des entiers naturels $n$ tels que $u_n$ soit un carré parfait.

Ex. 1644. 5 points. ./1981/orleansC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $\varphi$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de $\varphi$.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de $\varphi$ sur son ensemble de définition.

Étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1}$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**2.** a) Montrer qu'il existe une fonction $f$ définie et continue sur $[-1\,;1]$ et telle que

$$\forall x \in [-1\,;0[\cup]0\,;1], \qquad f(x) = \varphi(x).$$

b) Cette fonction $f$ est-elle dérivable en $0$ ?

**3.** Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$. On précisera en particulier $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

## Problème 595 12 points. ./1981/orleansC/pb/texte

N.B- Dans ce problème, les II2., II3., II4. de la partie II peuvent être traités indépendamment de I.
Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée direct de $E$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, on notera $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base $(\vec{u})$, $P_{(\vec{u},\ \vec{v})}$ le plan vectoriel de base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

-I- 1° Quelle est l'image de la base $\mathscr{B}$ par la projection orthogonale sur $P_{(\vec{i},\ \vec{j})}$ ?
On notera $p$ cette projection.

2° On considère le plan vectoriel $P_{(\vec{i},\ \vec{k})}$ orienté par $\vec{j}$.

a) Montrer que la base $(\vec{k},\ \vec{i})$ est alors orientée dans $P_{(\vec{i},\ \vec{k})}$.

b) Déterminer la matrice, dans la base $(\vec{k},\ \vec{i})$, de la rotation vectorielle $P_\alpha$ de ce plan, de mesure $\alpha$ en radian ($\alpha$ étant un réel de $[0\,;\pi[$).
Exprimer, en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{k}$, les images des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ par cette rotation vectorielle.

c) En déduire l'image de la base $\mathscr{B}$ par la rotation vectorielle $r_\alpha$ de $E$, d'axe $D_{\vec{j}}$ orienté par $\vec{j}$ et de mesure $\alpha$ en radians.



Retour page 1

3° Soit $Q_\alpha$ l'image du plan vectoriel $P_{(\vec{i},\ \vec{j})}$ par la rotation vectorielle $r_\alpha$.

a) Déterminer la base de $Q_\alpha$, image de $(\vec{i},\ \vec{j})$ par la rotation vectorielle $r_\alpha$. $r_\alpha(\vec{i})$ sera noté $\vec{u}$.

b) Déterminer l'image de la base $\mathscr{B}$ par $q$, projection orthogonale de $E$ sur $Q_\alpha$.

c) Vérifier que $r_\alpha \circ p = q \circ r_\alpha$.

d) Montrer que dans la base $\mathscr{B}$, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour image par $p \circ q$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x\cos^2\alpha \\ y \\ -x\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$.

4° Soit $\vec{u}$ le vecteur défini en **??**.

a) Montrer que $(q \circ p)(\vec{u}) = (\cos^2\alpha).\vec{u}$.

b) Discuter selon les valeurs de $\alpha$ la nature de

$$\begin{aligned} h : D_{\vec{u}} &\longrightarrow D_{\vec{u}} \\ \vec{x} &\longmapsto (q \circ p)(\vec{x}) \end{aligned}.$$

c) Montrer que l'image, par $q \circ p$, du plan vectoriel $Q_\alpha$ est incluse dans $Q_\alpha$.

5° a) Déterminer, dans la base $(\vec{u},\ \vec{j})$, la matrice de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : Q_\alpha &\longrightarrow Q_\alpha \\ \vec{x} &\longmapsto (q \circ p)(\vec{x}) \end{aligned}.$$

b) Déterminer la valeur de $\alpha$ pour laquelle $f$ n'est pas bijective.
Que peut-on dire alors de $P_{(\vec{i},\ \vec{j})}$ et $Q\alpha$ ?

-II- Soit $(\mathscr{E})$ un espace affine associé à $E$ et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $\overline{Q}_\alpha$ la plan affine de direction $Q_\alpha$ et contenant le point $O$.
Soit $\varphi$ l'application affine de $\mathscr{E}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{R}$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ dans $\mathscr{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x' = x\cos^2\alpha \\ y' = y \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0\,;\pi[\ \ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} \\ z' = -x\cos\alpha\sin\alpha. \end{cases}$$

1° Montrer que l'image de $\overline{Q}_\alpha$ par l'application $\varphi$ est contenue dans $\overline{Q}_\alpha$.

2° Soit $\psi$ l'application $\begin{aligned} \psi : \overline{Q}_\alpha &\longrightarrow \overline{Q}_\alpha \\ M &\longmapsto \varphi(M) \end{aligned}$

Quelle est l'expression analytique de $\psi$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{j})$ où

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{k}\ ?$$

3° Soit $\mathscr{C}$ la courbe du plan $\overline{Q}_\alpha$ dont les points $M$ de coordonnées $(x,\ y)$ dans el repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{j})$ vérifient :

$$9x^2 - 18x + 16y^2 - 32y - 56 = 0.$$

Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ ?*
Donner le centre et la mesure des axes.

4° Déterminer dans $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{j})$ une équation cartésienne de $\psi(\mathscr{C})$.
Quelle est la nature de $\psi(\mathscr{C})$ ?
Donner le centre par ses coordonnées et préciser selon les valeurs de $\alpha$ la mesure du grand axe.
Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $\psi(\mathscr{C})$ est un cercle dont on précisera le rayon.

Retour page 1

# XXIX. Orléans Tours remplacement, série C

**Ex. 1645.** ./1981/orleansCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $5x-3y=7$.

**2.** Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution de l'équation, alors le plus grand diviseur commun de $x$ et de $y$ n'a que deux valeurs possibles.

**3.** Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation tels que le plus grand diviseur commun de $x$ et $y$ soit égal à la plus grande de ces deux valeurs.

**Ex. 1646.** ./1981/orleansCrem/exo-2/texte.tex

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

1. a) Étudier les variations de $f$.

   b) Tracer le courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

2. a) Montrer que la courbe admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

   b) Montrer que $f$ est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.

   c) Á l'aide de remarques géométriques donner un calcul simples de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ (on rappelle que deux domaines isométriques ont même aire).

3. a) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

   En déduire une primitive de $f$.

   b) Retrouver par le calcul le résultat de 2c.

## Problème 596

./1981/orleansCrem/pb/texte

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On rappelle que l'ensemble des applications linéaires de E dans E, noté $\mathscr{L}$(E), muni des lois d'addition et de multiplication par un nombre réel habituelles a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que $\mathscr{L}$(E) muni de l'addition et de la loi de composition des applications, notée $\circ$, est un anneau commutatif unitaire.
Pour tout triplet $(a,\ b,\ c)$ de réels, on définit l'application linéaire de E dans E notée $\varphi_{(a,b,c)}$ par

$$\begin{cases} \varphi_{(a,b,c)}(\vec{i}) = & a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \\ \varphi_{(a,b,c)}(\vec{j}) = & c\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{k} \\ \varphi_{(a,b,c)}(\vec{k}) = & b\vec{i}+c\vec{j}+a\vec{k}. \end{cases}$$

*Notations :*

$$\mathscr{F}=\left\{\varphi_{(a,b,c)}\in\mathscr{L}(\mathrm{E})\ ;\ (a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

$$\omega=\varphi_{(0,0,0)}\ ;\ \alpha=\varphi_{(0,0,0)}\ ;$$

$$\beta=\varphi_{(0,1,0)}\ ;\ \gamma=\varphi_{(0,0,1)}.$$

ℹ : les parties I, II et III du problème sont indépendantes.

I- Structures de $\mathscr{F}$.

1. Démontrer que quels que soient $a$, $b$ et $c$ réels, $\varphi_{(a,b,c)}$ est une combinaison linéaire de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.
   En déduire que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$(E). Quelle est la dimension de $\mathscr{F}$ ?

2. Reproduire en la complétant la table de composition ci-dessous ($\circ$ est le symbole de composition des applications). Justifier en présentant les calculs :

| $\circ$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | | | |
| $\beta$ | | | |
| $\gamma$ | | | |

Démontrer que $(\mathscr{F},\ +,\ \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire.

II- *Noyau et image de* $\varphi_{(a,b,c)}$.

*Notations :*

$\varphi_{(a,b,c)}$ est noté $\varphi$ dans cette partie.

$N(\varphi)$ : noyau de $\varphi$ ; $I(\varphi)$ : image de $\varphi$.

$D$ : Droite vectorielle de base $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

$P$ : Plan vectoriel d'équation cartésienne

$$x+y+z=0.$$

1. Calculer $\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$.
2. Démontrer que $N(\varphi)$ est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système

$$\begin{cases} ax+by+cz=0\\ bx+ay+cz=0\\ (a+b+c)(x+y+z)=0. \end{cases}$$

   Dans le cas où $(a+b+c)$ est non nul, démontrer que si $N(\varphi)$ n'est pas réduit au vecteur nul, alors $a=b=c$.
3. Déterminer $N(\varphi)$ et $I(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :

   1er cas : il existe parmi $a,\ b,\ c$ au moins deux réels distincts et la somme $(a+b+c)$ n'est pas nulle.

   2e cas : $a,\ b$ et $c$ sont tous les trois nuls.

   3e cas : $a,\ b$ et $c$ sont égaux et non nuls.
4. On suppose qu'il existe parmi a, $b,\ c$ au moins deux réels distincts et que la somme $(a+b+c)$ est nulle.

   Calculer $\varphi(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$. Montrer que $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ sont deux vecteurs du plan $P$ et sont linéairement indépendants.

   En déduire $N(\varphi)$ et $I(\varphi)$.

Dans cette partie on suppose que E espace vectoriel euclidien et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ base orthonormée directe, on note $\Psi=\varphi_{(2/3,2/3,-1/3)}$ et on considère un espace affine $\mathscr{E}$ associé à E de repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $O$ étant un point de $\mathscr{E}$.

Soit $O'$ le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(2/3\ ;\ -1/3\ ;\ 2/3)$ et $f$ l'application affine associée à l'application linéaire $\Psi$ et telle que $f(O)=O'$.

Démontrer que $f$ est un vissage. Quelle est la direction de l'axe de ce vissage ?

Énoncer une méthode de recherche des éléments caractéristiques du vissage. Déterminer ces éléments caractéristiques.

Retour page 1

# XXX. Paris, série C

Ex. 1647. ./1981/parisC/exo-1/texte.tex

Pour chaque $m$ réel strictement positif, on définit une application $f_m$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel $x$ associe $f_m(x) = \log(\mathrm{e}^x + m\mathrm{e}^{-x})$. ($\log$ désigne la fonction logarithme népérien.)
On appelle $C_m$ la courbe représentative de $f_m$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

III**1.** a) Étudier les variations de $f_m$.

b) Montrer que $C_m$ admet deux asymptotes dont l'une est indépendante de $m$.

c) Construire sur une même figure $C_1$ et $C_{\frac{1}{16}}$.

**2.** Dans quelle transformation simple $C_1$ a-t-elle pour image $C_m$ ?

**3.** Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_m(x) = 0$.

Ex. 1648. ./1981/parisC/exo-2/texte.tex

Déterminer les entiers naturels s'écrivant $\overline{abca}$ dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et congru à 1 modulo 99.

## Problème 597

./1981/parisC/pb/texte

Dans un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $A$ et par $B$ les points définis $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$. Soit $v$ un réel donné ; on construit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$A_0$ est le barycentre de $(O,\ 1+v)$ et $(A,\ -v)$ ;
$A_1$ est le barycentre de $(A_0,\ 1+v)$ et $(O,\ -v)$ ;
$A_{n+2}$ est le barycentre de $(A_{n+1},\ 1+v)$ et $(A_n,\ -v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A- On désigne par $x_n$ l'abscisse de $n$.

1. Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $x_{n+1} = vx_n - v$.
2. On suppose, dans cette question, $v = 1$. Exprimer $x_n$ en fonction de $n$ et étudier la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. .
3. On suppose $v \neq 1$.
   a) On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $X_n = x_n + \lambda$ ; déterminer $\lambda$ pour que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
   b) Exprimer $X_n$ puis $x_n$ en fonction de $n$ et $v$.
   c) Étudier la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) Étudier les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $v = 0$ et $v = -1$.

B- 1. Montrer qu'il existe une application affine unique $f_v$ du plan affine telle que

$$f_v(O) = A_0, \qquad f_v(A) = O \qquad \text{et} \qquad f_v(B) = B.$$

Si $\varphi_v$ désigne l'endomorphisme associé à $f_v$, donner la matrice de $\varphi_v$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Si un point $M$ du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour image par $f_v$ , le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, donner les expressions de $x'$ et $y'$ en fonction de $x$, $y$ et $v$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_v(A_n) = A_{n+1}$.
3. Montrer que $f_v$ admet une droite de points invariants notée $D_v$. Discuter, sui- vant les valeurs de $v$, la position de $D_v$.
4. Montrer que, quel que soit $v$, la droite $(OA)$ est stable par $f_v$ (i. e. $f_v(OA)$ est inclus dans $(OA)$) ; on désigne par $g_v$ l'application de $(OA)$ dans $(OA)$ définie par $g_v(M) = f_v(M)$ pour tout point $M$ de la droite $(OA)$.
   Discuter suivant les valeurs de $v$ la nature de l'application $g_v$.
5. On suppose $v = 1$. Donner une construction géométrique simple de l'image d'un point du plan par $f_v$.
   (On pourra utiliser l'application $g_v$ pour $v = 1$ définie précédemment.)
6. On suppose $v \neq 1$. Soit $m$ la projection sur $D_v$ suivant la direction de $(OA)$ d'un point $M$ quelconque du plan. Montrer qu'il existe un réel $k$ tel que pour tout point $M$, $\overrightarrow{mf_v(M)} = k\overrightarrow{mM}$.
   En déduire la nature de $f_v$ pour $v = 0$ et $v = -1$.



Retour page 1

# XXXI. Paris remplacement, série C

**Ex. 1649.** ./1981/parisCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer les suites géométriques non constantes d'entiers strictement positifs telle que la somme de leurs quatre premiers termes soit égale à 40.

**2.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_n = 3^n$ pour tout entier naturel $n$. Quelle est la plus petite valeur $n_0$ de $n$ telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i$ soit supérieure à $10^3$ ?

**3.** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\mu_n$ =P.G.C.D$(u_n+1,\ u_{2n}+1)$, où $u_n$ est le terme général de la suite définie au 2.

**Ex. 1650.** ./1981/parisCrem/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien. Si $M$ et $N$ dont deux points de ce plan, on note $MN$ leur distance.

**1.** Soit A, B, C trois points de P tels que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 5 \quad \text{et} \quad \mathrm{BC} = 6.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

**2.** On désigne par G le barycentre de (A, 2), (B, 3), (C, 3). Construire le point G et calculer la distance GA.

**3.** On considère l'application $f$ de P dans $\mathbb{R}$ qui à tout point $M$ de P associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{M\mathrm{B}}.\overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}.\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}}.\overrightarrow{M\mathrm{B}}.$$

Démontrer que l'on a pour tout point $M$ de P :

$$f(M) = f(\mathrm{G}) + 4M\mathrm{G}^2.$$

Calculer numériquement $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{G})$.

**4.** Déterminer et construire l'ensemble E des points $M$ tels que $f(M) = f(\mathrm{A})$.

## Problème 598

./1981/parisCrem/pb/texte

Soit P un plan affine orienté muni d'un repère orthonormé directe $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}z$, $x$ et $y$ désignant des réels, on associe son image $m$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, dans P.
Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul. On désigne par :

— $\omega_\lambda$ et $A_\lambda$ les images dans P des nombres $\lambda$ et $2\lambda$ ;

— $\mathrm{P}_\lambda$ le plan P privé du point $\omega_\lambda$

— $D_\lambda$ la droite $O\omega_\lambda$ privée du point $\omega_\lambda$ ;

— $\Delta_\lambda$ la perpendiculaire à $D_\lambda$ en $\omega_\lambda$ privée de $\omega_\lambda$ ;

— $\Omega_\lambda$ le cercle de centre $\omega_\lambda$ passant par $O$.

On se propose d'étudier la famille des applications $\varphi_\lambda$ de $\mathrm{P}_\lambda$ dans P qui au point $m$ image de $z$ associent le point $n$ image de $u$ tel que

$$u = \frac{z^2}{2(z-\lambda)}.$$

A) Soit $f$ et $g$ les fonctions de variable réelle qui à $x$ associent respectivement

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

Étudier les variations des fonctions $f$ et $g$ et représenter graphiquement ces fonctions sur une même figure, dans un plan muni d'un repère orthonormé. Étudier les asymptotes des courbes représentatives.

B) Dans toute cette partie, on choisit $\lambda = 1$.



Retour page 1

1° Déterminer les points invariants de $\varphi_1$.

2° Déterminer $\varphi_1(D_1)$ et $\varphi_1(\Delta_1)$.

3° Soit $m$ un point du cercle $\Omega_1$. Montrer que $\varphi_1(m)$ se déduit simplement de $m$. En déduire $\varphi_1(\Omega_1)$.(On pourra repérer la position de $m$ sur $\Omega_1$ par le réel $\theta$, détermination de la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\omega_1 m}}\right)$.)

4° Déterminer l'ensemble des points $m$ de $\mathrm{P}_1$ dont l'image par $\varphi_1$ est un point de la droite $(O,\ \vec{u})$.

5° Soit $n$ un point de P non invariant par $\varphi_1$ ; montrer que $n$ a deux antécédents $m$ et $m'$ par $\varphi_1$, et que ces points vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} n \text{ est le milieu du segment } [m,\ m'] \\ \|\overrightarrow{\omega_1 m}\| \times \left\|\overrightarrow{\omega_1 m'}\right\| = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\omega_1 m}}\right) + \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{\omega_1 m'}}\right) = \widehat{0} \quad (\widehat{0} \text{ désigne l'angle nul}). \end{cases}$$

Vérifier que ces propriétés restent valables lorsque $m$ et $m'$ sont confondus en un point invariant de $\varphi_1$.

Retrouver une partie des résultats des questions B2 et B3

C) On suppose que $\lambda$ est un complexe quelconque non nul. Soit $S_\lambda$ la similitude directe du plan P qui admet $O$ pour centre et qui transforme $\omega_1$ en $\omega_\lambda$.

1° Démontrer que $\varphi_\lambda = S_\lambda \circ \varphi_1 \circ S_\lambda^{-1}$.

2° Déterminer $\varphi_\lambda(\Omega_\lambda)$.

## XXXII. Paris remplacement, série E

**Ex. 1651.** ./1981/parisErem/exo-1/texte.tex

A tout entier naturel non nul $n$ on associe le réel

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

**1.** Calculer $u_1$.

**2.** Trouver, pour tout entier non nul $n$, une relation de récurrence entre $u_n$ et $u_{n+1}$ et en déduire que

$$u_n = \mathrm{e} - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}.$$

**3.** Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\right) = \mathrm{e}$.

**Ex. 1652.** ./1981/parisErem/exo-2/texte.tex

On définit les deux applications :

$$\begin{aligned} \varphi : ]0\,;\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \coth x - 2x \end{aligned} \quad ;$$

$$\begin{aligned} f : [0\,;\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\cos^2 x \end{aligned} \quad .$$

**1.** Étudier les variations de $\varphi$ et en déduire que l'équation :

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in ]0\,;\pi[$$

admet une solution unique $\alpha$ appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

**2.** Étudier les variations de $f$. (On utilisera $\varphi(x)$ pour étudier le signe de $f'(x)$).

**3.** Soit C la courbe représentative de $f$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Construire C et les tangentes à C aux points d'abscisses 0 et $\pi$.

### Problème 599

./1981/parisErem/pb/texte

Le problème est le même que pour la série C. 598

## XXXIII. Paris, série D

**Ex. 1653.** ./1981/parisD/exo-1/texte.tex

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10.

1. On effectue trois tirages successifs d'une boule dans l'urne, sans remise de la boule tirée. On suppose qu'à chaque tirage les boules restant dans l'urne on la même probabilité d'être tirées.

   Déterminer les probabilités $p_a$ et $p_b$ pour que les nombres figurant sur les trois boules tirées soient dans l'ordre de leur tirage, les termes :

   a) d'une suite géométrique croissante;

   b) d'une suite arithmétique décroissante.

2. On effectue maintenant cinq tirages successifs avec remise de la boule tirée.

   On suppose toujours que les boules ont, à chaque tirage, la même probabilité d'être tirées.

   a) Quelle est la probabilité $q$ pour qu'aucun des numéros obtenus ne soit multiple de 3?

   b) Quelle est la probabilité $p_n$ ($n$ entier, $1 < n < 5$) pour que le premier tirage ayant donné un numéro multiple de 3 soit celui de rang $n$?

**Ex. 1654.** ./1981/parisD/exo-2/texte.tex

On considère dans un plan euclidien un triangle isocèle $ABC$ ($AB = AC$) dont la base $[BC]$ a pour milieu $I$.

1. Construire le barycentre $G$ des points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients 2, 1 et -1.
2. Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $GAIB$?
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que

$$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2IA^2.$$

   (On commencera par déterminer un point particulier de cet ensemble.)

### Problème 600

./1981/parisD/pb/texte

N.B. la notation log désigne le logarithme népérien.

On considère la fonction réelle $f_m$ d'une variable réelle définie par :

$$f_m(x) = \frac{\mathrm{e}^x + m}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

où $m$ est un paramètre réel.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de $f_m$. Préciser si la fonction $f_m$ est continue et dérivable sur $\mathscr{D}$.

   b) Montrer que pour $m \geqslant \frac{1}{2}$, la fonction $f_m$ est strictement croissante.

   Montrer que pour $m < \frac{1}{2}$, la fonction $f_m$ présente un maximum dont on donnera la valeur.

   c) Étudier les limites aux bornes de $\mathscr{D}$ et dresser dans les deux cas $\left(m \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } m < \frac{1}{2}\right)$ le tableau de variation de $f_m$.

2. a) Montrer que si $m_1$ est strictement inférieur à $m_2$, on a pour tout réel $x$ :

$$f_{m_1}(x) < f_{m_2}(x).$$

b) On désigne par $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ les courbes représentatives de $f_{-1}$, $f_0$ et $f_1$ dans un plan $P$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 4 cm).
Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour $C_0$.
Tracer les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ dans le plan $P$. On précisera les points d'intersection avec les axes et les tangentes en ces points.

3. On considère un point mobile $M$ dont les coordonnées dans le plan sont données en fonction du temps $t$ par :

$$x = \log(\cos 2t)$$
$$y = \frac{\cos 2t}{4\cos^4 t} \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}\right).$$

Montrer que la trajectoire de $M$ est une partie de la courbe $\mathscr{C}_0$ que l'on précisera.
Décrire le mouvement du point sur sa trajectoire lorsque $t$ varie de $-\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{6}$.
(On ne calculera ni les coordonnées du vecteur vitesse, ni celles du vecteur accélération.)

4. a) Vérifier que pour tout réel $x$ on a

$$\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} - \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $g$ de la variable réelle définie par :

$$g(x) = \frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

b) Établir pour tout $x$ réel l'égalité :

$$x - \log(\mathrm{e}^x+1) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right).$$

Étudier

$$\lim_{x\to+\infty} [x - \log(\mathrm{e}^x+1)].$$

5. Á tout nombre $\alpha$ ($\alpha > 0$) on associe la nombre $S(\alpha)$ qui mesure en $\mathrm{cm}^2$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_{-1}$ et $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$
Exprimer $S(\alpha)$ en fonction de $\alpha$. Calculer $S(1)$ à $0{,}01$ près par défaut.
Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$. En donner la valeur approchée à $0{,}01$ près par défaut.

## XXXIV. Paris, série A

**Ex. 1655.** ./1981/parisA/exo-1/texte.tex

1. Un suite réelle $u$ est définie par son premier terme $u(0)$ strictement positif, et pour tout entier naturel $n$, par la relation

$$u(n+1) - u(n) = -0{,}05u(n).$$

Calculer $u(1)$, $u(2)$, et $u(3)$ en fonction de $u(0)$ ;
Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
Quelle est la nature de la suite $u$ ? Indiquer son sens de variation.
Exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et de $n$.

2. Le 1er janvier 1981, la population d'une zone rurale est de 2 000 personnes. On admet qu'elle diminue chaque année de 5%.
Quelle sera la population de cette zone el 1er janvier 1986 ?
Á partir de quelle année la population chutera-t-elle à moins de 1 000 personnes ?

Ex. 1656. ./1981/parisA/exo-2/texte.tex

Un boîte contient douze jetons. Trois sont rouges et marqués $-2$ ; quatre sont verts et marqués 0, cinq sont jaunes et marqués $+2$.
On tire simultanément et au hasard deux jetons dans la boîte, tous les tirages étant équiprobables.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux jetons rouges ? Deux jetons verts ? Deux jetons jaunes ? Deux jetons de couleurs différentes ?
2. Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des nombres marqués sur les deux jetons tirés.
   Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   Établir la loi de $X$.
   Calculer l'espérance mathématique de $X$ ;
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : $(X \geqslant 0)$, $(x \leqslant 0)$, $(X > 0)$, $(X < 0)$.

- On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles dont on donnera une valeur approchée par défaut à $10^{-2}$ près.

## Problème 601

./1981/parisA/pb/texte

On considère la fonction réelle $f$ d'une variable réelle définie par

$$f(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{10} + \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

où la notation $\log$ désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de $f$. Étudier les limites de $f$ aux bornes de chacun des intervalles composant $\mathscr{D}$.
2. Calculer la dérivée $f'$ de $f$.
   N.B.– On rappelle que si $u$ est une fonction dérivable à valeurs strictement positives, la fonction $\log u$ est dérivable et a pour dérivée $\dfrac{u'}{u}$.
   Montrer que $f'$ garde un signe constant $\mathscr{D}$.
   Dresser la tableau de variation de $f$.
3. Calculer les valeurs approchées à $10^{-1}$ près par défaut de $f(1{,}5)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(-1{,}5)$ et $f(-4)$.
   Représenter $f$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; unité : 1 cm.

# XXXV. Poitiers, série C

Ex. 1657. ./1981/poitiersC/exo-1/texte.tex

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $f_n$ la fonction d'une variable réelle $x$telle que

$$f_n(x) = \log\frac{2+x}{2-x} - n\log(x+n).$$

(où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien).

**1.** Quel est l'ensemble de définition de $f_n$ ? Étudier les limites et déterminer le tableau de variations de $f_n$ . (on distinguera le cas $n = 2$). (On ne demande pas de construire la courbe).

**2.** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

pour tout $x$ appartenant à $[0\,;2[$.
(On pourra utiliser, à condition de la justifier, la propriété $f_n(x) \geqslant f_n(0)$ pour tout $x$ appartenant à $[0\,;2[$).

**Ex. 1658.** ./1981/poitiersC/exo-2/texte.tex

1. Un dé cubique A porte inscrits sur ces faces les nombres : $-2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2n,\ -n$ (où $n$ est un entier relatif). On suppose qu'à chaque lancer, les faces de A ont même probabilité d'apparition.
   a) On lance une fois le dé A et on note $X$ le nombre obtenu. On définit ainsi une variable aléatoire.
      — Déterminer la loi de probabilité de $X$, en fonction du paramètre $n$.
      — Déterminer $n$ pour que l'espérance mathématique de $X$ soit nulle.
      Dans la suite, on donnera à $n$ cette valeur.
   b) On lance A *six fois* de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus *quatre fois* le nombre 1.
2. Soit B un autre dé cubique dont les faces portent les nombres $-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$ de telle sorte que les probabilités d'apparition respectives de ces nombres soient six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   a) Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces de B.
   b) On lance simultanément les dés A et B. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à $-2$ ?
      Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à $-1$ ?

## Problème 602

./1981/poitiersC/pb/texte

A- Soit u la fonction numérique d'une variable réelle qui à $x$ associe

$$u(x)=\frac{x-3}{x-1}.$$

1. Soit $h$ et $h_1$ les fonctions définies par

$$\begin{aligned} h(x) &= u(\tan x),\\ h_1(x) &= \frac{\sin x-3\cos x}{\sin x-\cos x}. \end{aligned}$$

   Montrer que $h$ et $h_1$ coïncident sur une partie de $\mathbb{R}$ à préciser.
   Étudier la fonction $h$, établir le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative.
2. a) Soit $v$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. À quelle condition supplémentaire doit satisfaire la fonction $v$ pour que $u\circ v$ soit dérivable sur $I$ ?
   Préciser, lorsqu'il en est ainsi, la dérivée de $u\circ v$.
   b) On note

$$J(x)=\int_0^x \frac{2}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

   et

$$K(x)=\int_{-1}^x \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

   c) Calculer $J(x)$ et $K(x)$ en précisant les valeurs de $x$ pour lesquelles ces intégrales sont dé ?nies.

B- Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans $\mathscr{P}$ on désigne respectivement par $\mathscr{H}_1,\ \mathscr{H}-2,\ \mathscr{H}_3$ les courbes d'équations :

$$y=\frac{x-3}{x-1}, \qquad (\mathscr{H}_1)$$

$$xy=-2, \qquad (\mathscr{H}_2)$$

$$x^2-y^2=-4. \qquad (\mathscr{H}_3)$$

1. Précisez la nature de la conique $\mathscr{H}_3$ son excentricité, ses sommets, ses asymptotes, ses foyers et les directrices associées.



Retour page 1

2. On désigne par $r$ la rotation de centre $O$ dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ et par $r^{-1}$ la transformation réciproque de $r$.
Étant donné un point $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ quelles sont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $m = r^{-1}(M)$ ?
Quelle est l'équation de la transformée de $\mathscr{H}_3$ par $r$ ?
3. Soit $A$, $B$ et $C$ les points de coordonnées $A(1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1)$ et $C(0\ ;\ 1)$. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des déplacements du plan $\mathscr{P}$ qui transforment la paire de droites $\{(BA),\ (BC)\}$ en la paire $\{(OA),\ (OC)\}$.
   a) Quelle est l'image de $B$ par un élément de $\mathscr{F}$ ?
   b) Montrer qu'il existe un déplacement unique $f_1$ d'endomorphisme associé $\varphi_1$, tel que $f_1(B) = O$ et $\varphi_1(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$, et que $f_1$ appartient à $\mathscr{F}$.
   c) Montrer qu'il n'existe que trois autres déplacements $f_2,\ f_3,\ f_4$ qui appartiennent à $\mathscr{F}$ (en préciser les angles et les centres).
4. a) Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des déplacements du plan qui transforment $\{(BA),\ (BC)\}$ en la paire des bissectrices des axes de coordonnées. Déduire des questions précédentes le nombre et la nature (sans autres précisions) des éléments de $\mathscr{G}$.
   b) Soit $m$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$. Préciser les coordonnées de son image $M$ par $r^{-1} \circ f_1$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $r^{-1} \circ f_1$.
   c) Montrer que $\mathscr{H}_1$ est transformée en $\mathscr{H}_3$ par $r^{-1} \circ f_1$. Combien y a-t-il de déplacements transformant $\mathscr{H}_1$ en $\mathscr{H}_3$ (on admettra qu'un tel déplacement transforme toute asymptote de $\mathscr{H}_1$ en une asymptote de $\mathscr{H}_3$) ?

- Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

# XXXVI. Rennes, série C

**Ex. 1659.** ./1981/rennesC/exo-1/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23X - 17Y = 6$.
2. Déduire de l'étude précédente les entiers naturels $A$ inférieurs à 1 000 tels que dans la division euclidienne de $A$ par 23, le reste soit 2, et dans celle de $A$ par 17, le reste soit 8.

**Ex. 1660.** ./1981/rennesC/exo-2/texte.tex

1. Montrer que si $x$ est un réel strictement positif
$$1 + \frac{1}{x} > \mathrm{e}^{-x}.$$
Montrer que si $x$ est un réel strictement négatif $1 + \frac{1}{x} < \mathrm{e}^{-x}$.
(On pourra comparer $1 + \frac{1}{x}$ et $\mathrm{e}^{-x}$ au nombre 1.)
2. Soit $f$ la fonction numérique définie par
$$f(x) = x + \ln|x| + \mathrm{e}^{-x}\ ;$$
(ln désigne le logarithme népérien).
Étudier $f$, (ne pas oublier des limites quand $x$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$) et construire sa courbe représentative.

Retour page 1

## 🏛Problème 603

./1981/rennesC/pb/texte

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct d'un plan affine euclidien $P$. Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel associé à $P$. On appelle $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications affines de $P$ transformant toute droite $D$ de $P$ en une droite $D'$ orthogonale à $D$.

A- 1. Vérifier que la rotation $R$ de centre $O$ dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ un élément de $\mathscr{A}$.

2. On appelle $\varphi$ l'endomorphisme du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à l'application affine.
Montrer que $f$ appartient à $\mathscr{A}$ si, et seulement si, pour tout vecteur non nul $\vec{u}$ :
$$\varphi(\vec{u}) \neq \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}.\varphi(\vec{u}) = 0.$$

3. Montrer que si $f$ appartient à $\mathscr{A}$, la matrice de $\varphi$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ où $\lambda$ est un réel non nul.
En déduire que $f$ est une similitude directe, en préciser le rapport et l'angle suivant les valeurs de $\lambda$.

4. En déduire quel est l'ensemble $\mathscr{A}$.

B- Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{B}$ l'ensemble des applications (non supposées affines) de $P$ dans $P$, transformant toute droite $D$ de $P$ en une droite $D'$ de $P$ orthogonale à $D$. On se propose de montrer qu'une telle application est nécessairement affine et donc que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

1. Soit $f_1$ un élément de $\mathscr{B}$.

a) Montrer qu'il existe au moins un couple de points $(A,\ B)$ tel que
$$A \neq B \qquad \text{et} \qquad f_1(A) \neq f_1(B).$$
On notera $A' = f1(A)$ et $B' = f1(B)$.

b) On appelle $M$ un point de $P$ n'appartenant pas à la droite $AB$. Montrer que $M' = f_1(M)$ peut être obtenu comme intersection de deux droites que l'on précisera.
En déduire une construction de $M'$.

2. Soit $f_2$ la similitude plane directe transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$ (c'est-à-dire que $f_2(A) = f_1(A)$ et $f_2(B) = f_1(B)$.

a) Donner une mesure de l'angle de $f_2$.

b) Si $M$ n'est pas un point de la droite $AB$, montrer que $f_2(M) = f_1(M)$.

c) Si $M$ est un point de la droite $AB$, indiquer une construction de $f_1(M)$. (On pourra introduire un point $C$ n'appartenant pas à la droite $AB$).

d) En déduire que $f_1 = f_2$. On a ainsi prouvé que $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

C- $R$ désigne toujours la rotation de centre $O$ dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
La loi $\circ$ est la composition des deux applications.

1. Montrer qu'on définit une loi interne, notée $\star$, sur $\mathscr{A}$ en posant
$$\forall f \in \mathscr{A}, \quad \forall g \in \mathscr{A}, \qquad f \star g = f \circ R \circ g.$$

2. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{A}$ un élément $e$, neutre pour la loi $\star$.

3. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des homothéties de rapport non nul et des translations.
Montrer que pour tout $h$ appartenant à $D$, $e \circ h$ appartient à $\mathscr{A}$. Soit $L$ l'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{A}$ qui à $h$ associe $e \circ h$. Montrer que $L$ est un isomorphisme du groupe $(\mathscr{D},\ \circ)$ sur $(\mathscr{A},\ \star)$.



Retour page 1

# XXXVII. Rouen, série C

**Ex. 1661.** ./1981/rouenC/exo-1/texte.tex

$a$ et $b$ étant deux entiers naturels non nuls, soit $d$ leur P.G.C.D et $m$ leur P.P.C.M.
Trouver tous les couples $(a,\ b)$ vérifiant le système

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geqslant b. \end{cases}$$

**Ex. 1662.** ./1981/rouenC/exo-2/texte.tex

On pose, pour tout nombre complexe $z$,

$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2\mathrm{i})z + 3 - 2\mathrm{i}.$$

**1.** Montrer que le polynôme $f(z)$ possède une , et une seule, racine réelle $z_0$ que l'on déterminera.
En déduire une factorisation de $f(z)$ sous la forme $(z - z_0)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme complexe du 3ᵉ degré que l'on précisera.

**2.** Vérifier que $Q(\mathrm{i}) = 0$ ; en déduire les solutions de l'équation

$$(\forall z \in \mathbb{C}), \qquad f(z) = 0.$$

**3.** On note P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
$z_1,\ z_2$ et $z_3$ étant les solutions de l'équation : $Q(z) = 0$, on appelle $M_0,\ M_1,\ M_2$ et $M_3$ les points de P d'affixes respectives $z_0,\ z_1,\ z_2$ et $z_3$. Montrer que $(M_1,\ M_2,\ M_3)$ est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est $M_0$ et faire la figure correspondante.

## Problème 604

./1981/rouenC/pb/texte

A) Soit $a$ une constante réelle. $F$ est l'endomorphisme du plan vectoriel défini par sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ :

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de $F$ et l'image de $F$. Calculer $A^2$. Les deux premiers résultats laissaient-ils prévoir le troisième ?
2. $I$ étant la matrice unité d'ordre 2, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^s tar$ : $(aI + A)^n$. La formule du binôme de Newton est-elle applicable ? Expliquer pourquoi.

B) *Rappel :* on nomme suites réelles les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Leur ensemble V, muni de l'addition des applications, et de la multiplication par un réel, constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$a$ désignant un réel non nul, soit W l'ensemble des suites réelles $u$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 2au_{n+1} - a^2 u_n. \tag{1}$$

1. Vérifier que W est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'application $\varphi$ donnant de $u \in$W l'image $(u_0,\ u_1)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel W vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
   Définir une base $\mathscr{B}$ de W dans laquelle $u$ a pour coordonnées $u_0$ et $u_1$ dans cet ordre.
2. a) Évaluer $u_n$ en fonction de $n$ dans le cas où $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
   b) Trouver toutes les suites géométriques de W.
   c) Montrer, sans les calculs, l'existence et l'unicité des réels $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$\forall u \in \mathrm{W}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha a^n + \beta n a^{n-1}. \tag{2}$$

   d) Calculer $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $u_0$ et $u_1$.

Retour page 1

3. A toute suite $u$ élément de W, on associe la suite $u' = f(u)$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = u_{n+1}. \tag{3}$$
Vérifier que $u'$ est un élément de W, et que $f$ est un endomorphisme de W, dont on déterminera la matrice $M$ dans la base $\mathscr{B}$ définie au B1.
4. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application $g$ donnant de $(u_0,\ u_1)$ l'image $(u_1,\ u_2)$ ? Quelle est l'application qui donne de $(u_0,\ u_1)$ l'image $(u_n,\ u_{n+1})$ ?
En utilisant A2, retrouver l'expression de $u_n$ à partir de $u_0,\ u_1$ et $n$.

C) Dans le plan affine P, sopit $O$ un point fixe et la suite de points $M_0,\ M_1,\ \dots, M_n,\ /dots$ tels que
$$\forall n \in \ GN, \qquad \overrightarrow{OM}_{n+2} = 2a\overrightarrow{OM}_{n+1} - a^2\overrightarrow{OM}_n. \tag{4}$$

1. On suppose $a \neq 1$. Soit $G_{n+1}$ le barycentre de $M_{n+1}$ et $M_n$ affectés respectivement des coefficients $1$ et $-a$. Vérfier que $G_{n+1}$ et $G_{n+2}$ sont alignés avec $O$. Comment $G_n$ se déduit-il simplement de $G_{n-1}$ ?
2. Dans tout ce qui suit $a = \dfrac{1}{2}$, $M_0$ et $M_1$ ont pour coordonnées respectives $(2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 1)$ dans un repère d'origine $O$ . Placer sur un graphique (axes perpendiculaires, unité : 1 dm) les points $M_0,\ M_1,\ G_1$ et résumer très sommairement la construction par laquelle chacun des points $G_2,\ M_2$ se éduit des précédents.
Calculer, en fonction de $n$, les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $M_n$. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont-elles convergentes ?
$M_n$ a-t-il une position limite pour $n$ infini ?
3. Soit dans le même plan P rapporté au repère précédent, la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2^{1-t} \\ y = t.2^{1-t} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$
Établir qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite $(OM_0)$.
Montrer que son abscisse vaut $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ ; quelle est son ordonnée ?
Placer la tangente à $\mathscr{C}$ en $M_0$. Établir l'existence d'une tangente en $O$ à $\mathscr{C} \cup \{O\}$.
4. Former une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$.
5. Au moyen d'une intégartion par parties, calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto x \log x$.
En déduire l'aire de $\mathscr{E}$, partie du plan P délimitée par la segment $OM_0$ et l'arc $OM_0$ de $\mathscr{C}$ .

## XXXVIII. Rouen, série E

**Ex. 1663.** ./1981/rouenE/exo-1/texte.tex

On donne $Z = frac1(4-z)(2-\mathrm{i}z)$.
Soit $M$ l'image du nombre complexe $z$, dans un repère orthonormé.
Construire l'ensemble des points $M$ tels que $Z$ soit un réel.

**Ex. 1664.** ./1981/rouenE/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que
$$f(x) = \frac{x-1}{|x^2-2x|+1}$$
et $m$ un réel supérieur à 2.
Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x$.
Quelle est la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[1\,;m]$.

## Problème 605

./1981/rouenE/pb/texte

Dans $E$ espace euclidien de base orthonormée $\mathscr{B}=\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, $f$ est un endomorphisme défini par

$$f(\vec{i})=-\sqrt{2}\,\vec{i}+\vec{k}\ ;\ f(\vec{j})=-\sqrt{2}\,\vec{j}+\vec{k}\ ;\ f(\vec{k})=\vec{i}+\vec{j}.$$

A-

B-

C-

# XXXIX. Strasbourg, série C

**Ex. 1665.**

./1981/strasbourgC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{1-3x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$.

**1.** Étudier les variations de $f$. Étudier l'existence et la valeur de

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

(On ne cherchera pas d'asymptote).

Préciser la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

Tracer $(\mathscr{C})$.

**2.** Soit $\mathscr{D}$ le domaine délimité par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=\frac{1}{3}$ et $y=x$. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$.

**Ex. 1666.**

./1981/strasbourgC/exo-2/texte.tex

Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 indiscernables au toucher.

**1.** On tire au hasard simultanément trois jetons du sac (on se place dans l'hypothèse d'équiprobabilité). On appelle $X$ la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les trois numéros d'un tirage.

a) Donner la loi de probabilité de $X$. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

b) Quelle est la probabilité pour que la somme des trois numéros d'un tirage soit paire ?

**2.** On répète dix fois le tirage décrit au 1 en remettant les jetons dans le sac après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement quatre fois une somme paire au cours de ces dix tirages successifs ?

## Problème 606

./1981/strasbourgC/pb/texte

A) Soit $E_3$ un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $B=\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

**1.** On considère les droites vectorielles $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ de bases respectives $\vec{i}-\vec{j},\ \vec{j}-\vec{k},\ \vec{k}-\vec{i}$.

a) Montrer que $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ sont contenues dans un même plan vectoriel $\pi$ dont on donnera une équation cartésienne.

b) Soit $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ les plans vectoriels orthogonaux respectivement à $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$. Donner une équation cartésienne de chacun de ces plans.

**2.** Soit $s_1,\ {}''_2,\ s_3$ les endomorphismes de $E_3$ définis par

$$s_1\ :\ \begin{cases}x'=y\\ y'=x,\\ z'=z\end{cases}\qquad s_2\ :\ \begin{cases}x'=x\\ y'=z,\\ z'=y\end{cases}\qquad s_3\ :\ \begin{cases}x'=z\\ y'=y,\\ z'=x\end{cases}$$

où $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées d'un vecteur dans la base $B$ et $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ celles de son image.

a) Vérifier que $s_1$, $''_2$, $s_3$ sont des isométries et donner leurs éléments caractéristiques.

b) Montrer qu'en composant ces endomorphismes deux à deux, on obtient l'une ou l'autre de deux rotations $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de même axe $\Delta$ orthogonal à $\pi$. (On posera $\varphi_1 = s_2 \circ s_3$).

**3.** Soit $\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$, $\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$.

a) Vérifier que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base orthonormée de $\pi$.

b) Déterminer la matrice dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$ de la restriction de $\varphi_1$ à $\pi$.
Donner la mesure de l'angle de cette restriction, le plan $\pi$ étant orienté par $(\vec{I},\ \vec{J})$.

c) Soit $H = \{\text{Id},\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \varphi_1,\ \varphi_2\}$ où Id est l'application identique de $\text{E}_3$.
On munit $H$ de la loi de composition des applications notée $\circ$. $(H,\ \circ)$ est-il un groupe ?

d) Pour $i = 1$ ou $2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$(\varphi_i)^n = \underbrace{\varphi_i \circ \varphi_i \circ \cdots \circ \varphi_i}_{n \text{ fois}}.$$

Déterminer $(\varphi_1)^n$ et $(\varphi_2)^n$.

B) Soit $\mathscr{E}_3$ un espace affine euclidien associé à $\text{E}_3$ et $O$ un point de $\mathscr{E}_3$.
On munit $\mathscr{E}_3$ du repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On appelle $d$ la distance euclidienne de $\mathscr{E}_3$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ où $\vec{u} = \alpha(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**1.** Soit $a$ un réel strictement positif et $A$, $B$, $C$ les points de coordonnées respectives dans el repère $\mathscr{R}$ : $(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ a\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$. On note $A' = t_{\vec{u}}(A)$, $B' = t_{\vec{u}}(B)$, $C' = t_{\vec{u}}(C)$.
Quelle est la nature du triangle $ABC$ ? En déduire celle du triangle $A'B'C'$.

**2.** Soit $P_1$, $P_2$, $P_3$ les trois plans définis par

$$\begin{aligned} P_1 &= \{M \in \mathscr{E}_3 \,|\, d(M,\ A') = d(M,\ B')\} \\ P_2 &= \{M \in \mathscr{E}_3 \,|\, d(M,\ B') = d(M,\ C')\} \\ P_3 &= \{M \in \mathscr{E}_3 \,|\, d(M,\ C') = d(M,\ A')\} \end{aligned}$$

Montrer qu'ils ne dépendant pas du choix de $\alpha$. Donner une explication géométrique.
Déterminer l'ensemble D des points équidistants de $A'$, $B'$ et $C'$.

**3.** Montrer qu'il existe un déplacement $f$ unique tel que

$$f(A) = B'\ ;\ f(B) = C'\ ;\ f(C) = A'.$$

En donner les éléments caractéristiques.

## XL. Sports Études, série D

**Ex. 1667.** ./1981/sportsetudesD/exo-1/texte.tex

Une piste est divisée en cases successives numérotées $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.
Un kangourou saute de case en case le long de cette piste de la manière suivante :

— à chaque saut, il quitte une case et retombe au hasard, soit une case plus loin (probabilité $\frac{1}{2}$), soit deux cases plus loin (probabilité $\frac{1}{2}$).

1. On suppose que le kangourou saute trois fois.
On note $X$ le numéro de la case atteinte au bout de ces trois sauts. Déterminer le loi de probabilité de $X$.
2. Même question lorsque la kangourou saute $n$ fois, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Retour page 1

# XLI. Toulouse, série C

**Ex. 1668.** ./1981/toulouseC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer, pour $p = 0$, puis $p$ entier strictement positif, le reste de la division de $10^p$ par 6.

**2.** Un entier naturel $x$ est écrit $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ dans le système de numération de base 10.
Démontrer que 6 divise $x$, si et seulement si, 6 divise

$$4(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1) + a_0.$$

**Ex. 1669.** ./1981/toulouseC/exo-2/texte.tex

P est le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle $F$ l'application de P dans P, qui à tout point $M$ d'affixe complexe $z$, associe le point $F(M)$ d'affixe $z^2 + 2z + \dfrac{1}{2}$.

**1.** L'application $F$ est-elle une bijection de P dans P ?

**2.** Déterminer les points de P invariants par $F$.

**3.** Soit $D$ la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
$M$ étant un point de $D$, calculer les coordonnées de $F(M)$ en fonction de l'ordonnée de $M$.
Écrire une équation cartésienne de l'image de $D$ par $F$.
Reconnaître la courbe obtenue et la tracer.

## Problème 607

./1981/toulouseC/pb/texte

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations addition et multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A) Soit $f_1$ et $f_2$ les éléments de $\mathscr{F}$ définis par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos\frac{\pi}{2}x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin\frac{\pi}{2}x.$$

Soit $E$ l'ensemble des applications $f$ telles que $f = af_1 + bf_2$, $(a,\ b)$ étant un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ et que $B = (f_1,\ f_2)$ est une base de $E$.
2. a) Démontrer que tout élément de $E$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que son application dérivée est élément de $E$.
   b) Soit $d$ l'application de $E$ dans $E$ qui à tout élément de $E$ associe son application dérivée.
   Démontrer que $d$ est un endomorphisme de $E$. Écrire sa matrice dans la base $B$.
   c) Vérifier que $d$ est une bijection de $E$ sur $E$. Écrire, dans la base $B$, la matrice de l'application réciproque $d^{-1}$ ;
   En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ d'un élément quelconque de $E$.

B) 1. Soit $\varphi$ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,\ g) \in E \times E, \qquad \varphi(f,\ g) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-2x} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Démontrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique.
b) Calculer $\varphi(f_1,\ f_1)$, $\varphi(f_1,\ f_2)$, $\varphi(f_2,\ f_2)$.
c) Écrire $\varphi(f,\ g)$ en fonction des coordonnées de $f$ et $g$ dans la base $B$.
d) En déduire que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$ et que $B$ est, pour ce produit scalaire, une base orthonormée.

2. $E$ muni de ce produit scalaire est un espace vectoriel euclidien que l'on oriente par la base orthonormée directe $B$.

   Démontrer que $d = h\circ = r \circ h$ où $h$ est l'homothétie vectorielle de rapport $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$ et $r$ une rotation vectorielle.
   Montrer qu'une mesure en radians de l'angle de $r$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$. On notera $\alpha$ cet angle.
3. En déduire que, pour toute application $f$ de coordonnées $(a,\ b)$ dans la base $B$, quel que soit $x$ de $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\mathrm{e}^x\left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\alpha\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\alpha\right)\right].$$

C) On se propose d'étudier l'élément $f_1$ de $E$, c'est à dire l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x\cos\frac{\pi}{2}x.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\left\|\vec{\imath}\right\| = 4\left\|\vec{\jmath}\right\|$.
on appelle $\Gamma$ et $\Gamma'$ les courbes qui, dans ce repère, ont respectivement pour équations cartésiennes

$$y = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. a) Démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-\mathrm{e}^x \leqslant f_1(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.
   b) Calculer les abscisses des points communs aux courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$. Démontrer qu'en chacun de ces points, les courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente.
   c) Faire la même étude pour les courbes $\Gamma'$ et $\mathscr{C}$.
2. Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite du repère $(O;\vec{\imath})$.
3. Utiliser le résultat obtenu au B3, pour écrire, quel que soit $x$ de $\mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\mathrm{e}^x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

   Étudier $f_1$ sur l'intervalle $[-1\,;3]$.
   Tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant à cet intervalle. (On pourra prendre $-1$ comme valeur approchée de $\alpha$).

# Chapitre XXIV

# 1982.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe II : Amiens, Lille & Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Orléans-Tours & Rennes.

# I. Aix-Marseille, série C

**Ex. 1670.** *4 points.* *./1982/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$.
Á tout nombre complexe $z$, $z = x + \text{i}y$, on associe le point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\mathscr{R}$.
Le nombre complexe conjugué de $z$ est noté $\overline{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ dont l'affixe $z$ vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{\text{i}}{2}\left(z^2 - (\overline{z})^2\right) = 1.$$

Soit $r$ la rotation affine de centre $O$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) par $r$.

**1.** Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathscr{R}$. Reconnaître la nature de (E').

**2.** En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathscr{R}$ ; on prendra 5 cm pour unité graphique.

**Ex. 1671.** *3 points.* *./1982/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

(La question 3 peut être traitée indépendamment des deux questions précédentes.)
On envisage une particule $\pi$ pouvant occuper deux positions A et B se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

a) La position initiale (au temps 0) de la particule $\pi$ est A. Au temps $n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, la particule $\pi$ est soit en A soit en B.

b) Entre deux instants successifs, $n$ et $(n+1)$, la particule $\pi$ saute éventuellement d'une position à l'autre. Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule $\pi$ au temps $n$.

On ne demandera pas d'expliciter d'espaces probabilisés. Mais nous pouvons traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante :
si $n \in \mathbb{N}$, on note $\text{A}_n$ l'événement « la particule $\pi$ est en A au temps $n$ » et $\text{B}_n$ l'événement « la particule $\pi$ est en B au temps $n$ ».
Ainsi $\text{A}_n \cap \text{A}_{n+1}$ est l'événement « la particule $\pi$ est en A au temps $n$ et aussi au temps (n+1) », etc...
Soit respectivement $\alpha_n$ et $\beta_n$ le probabilité des événements $\text{A}_n$ et $\text{B}_n$.
On donne un nombre $\theta$ dans l'intervalle $]0\,;1[$. Nous exprimerons a et b par les *hypothèses* :

a') $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$),

b') La probabilité de $\text{A}_n \cap \text{A}_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $\text{B}_n \cap \text{B}_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

**1.** Calculer, en fonction de $\theta$ et $\beta_n$, la probabilité de l'événement $\text{B}_n \cap \text{A}_{n+1}$ (c'est à dire de l'événement « la particule $\pi$ se trouve en B au temps $n$ et en A au temps $(n+1)$).

**2.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.

**3.** Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n = \dfrac{(2\theta-1)^n}{2} + \dfrac{1}{2}$.
Quelle est la limite de la suite $(\alpha_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**PROBLÈME 608** *13 points.* *./1982/aixmarseilleC/pb/texte*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k$ l'application de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{si}\quad k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}, \qquad \text{et}\quad f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

I. 1° Étudier la continuité de $f_k$ et la dérivabilité de $f_k$.

2° Donner, en distinguant selon la valeur de $k$, le tableau de variation de $f_k$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes $C_0$, $C_1$ et $C_2$ représentatives de $f_0$, $f_1$ et $f_2$.

3° Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\text{d}x$.

Retour page 1

4° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer, en intégrant par parties, que pour tout entier $k \geqslant 1$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}.$$

En déduire une expression de $I_k$ (que l'on ne cherchera pas à simplifier).

5° Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

II. On considère la fonction numérique $F$ de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle fermé $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{si } x \in [0\,;1[ \quad \text{et} \quad F(1) = 0.$$

1° Étudier la continuité de $F$ sur $[0\,;1]$.
Présenter son tableau de variation.

2° Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$, on note $F_n$ la fonction définie pour tout $x \in [0\,;1]$ par :

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_{n-1}(x).$$

Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout $x$ réel fixé dans $[0\,;1]$, $F(x)$ est la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.

3° Pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par $A_n$ l'intégrale $\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer $A_n$. Déterminer la limite de $A_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

4° Établir que $\int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers 2 quand $n$ tend vers $+\infty$.

On pourra écrire :

$$\int_0^1 F_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ par $\sqrt{n}$, et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par $\sqrt{n}$.

## II. Aix-Marseille, Corse, Montpellier Nice & Toulouse, série E

**A**Ex. 1672. ——— *4 points.* *./1982/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

le plan affine euclidien $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est le centimètre.
$\mathscr{E}$ est la conique d'équation : $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$.
$\mathscr{H}$ est la conique d'équation : $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$.

1. Déterminer la nature, le centre, les sommets (éventuellement les asymptotes) de chacune des conique $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$.
2. Tracer $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$.
3. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$16x^2 + 25y\,|y| + 96x - 256 = 0.$$

Ex. 1673. 4 points. ./1982/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

$ABCD$ est un carré dans le plan affine $P$.

1. Construire la barycentre $G$ du système $S = \{(A,\ 2),\ (B,\ -2),\ (C, 1)\}$.
2. Construire l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ de $P$ tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|.$$

3. Soit $f$ l'application de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que $f$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

## Problème 609 12 points. ./1982/aixmarseilleE/pb/texte

Soit $n$ un entier naturel ; on appelle $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f_n(0) = 0$ et, pour tout $x$ réel positif,

$$f_n(x) = x(n + \log x)$$

où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative des $f_n$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) 1. Montrer que $f_n$ est continue à droite en $0$. $f_n$ est-elle dérivable à droite en $0$ ?
 2. Étudier les variations de la fonction $f_n$.
 3. Montrer que $\mathscr{C}_{n+1}$ se déduit de $\mathscr{C}_n$ par une homothétie de centre $O$ et de rapport que l'on déterminera.
 4. Soit $\lambda$ un réels strictement positif.
 Calculer l'intégrale $S_n(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{\mathrm{e}^{-n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
 Montrer que $S_n(\lambda)$ admet une limite $U_n$ lorsque $\lambda$ tend vers $0$.
 Vérifier que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; en préciser le premier terme et la raison.

B) Dans cette partie, $n = 0$.
 1. Dresser le tableau de variation de $f_0$.
 2. Calculer les approximations de $f_0(x)$ pour les valeurs de $x$ suivantes : $0{,}1$ ; $0{,}2$ ; $0{,}4$ ; $0{,}6$ ; $0{,}8$ ; $1$ ; $1{,}2$ ; $1{,}4$ ; $1{,}6$ ;$1{,}8$ ; $2$.
 (On donnera les résultats sous forme de nombres décimaux comportant deux chiffres après la virgule).
 3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_0$ (on prendra 5 cm pour unité de longueur et on utilisera les valeurs obtenues à la question précédente).
 4. On appelle $\alpha$ et $\beta$ les solutions des équations $f_0(t) = 1$ et $f_0(t) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Déduire de ce qui précède un encadrement de $\alpha$ et $\beta$.
 5. Soit $t$ un réels strictement positif.
 Discuter suivant les valeurs de $t$ le nombre de solutions de l'équation $f_0(t) + f_0(x) = 1$.

C) Dans un plan affine euclidien $P$, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application $\varphi_a$ qui à tout point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ax\log a + ay \end{cases}$$

 où $a$ est un réel strictement positif.
 1. Soit $\phi$ l'ensemble des applications $\varphi_a$ lorsque $a$ décrit l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que $\phi$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

2. On définit dans $P$ une relation binaire $\mathscr{R}$ par

$$\forall (M,\ M') \in P^2, \qquad M\mathscr{R}M' \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}_+^\star, \quad M' = \varphi_a(M)$$

   a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

   b) Quelles sont les classes d'équivalences des points $A_n\,(1\ ;\ n)$ $n \in \mathbb{N}$?

   c) Montrer que toute courbe $\mathscr{C}_n$ est globalement invariante par toute application $\varphi_a$.

## III. Amiens, série C & E

**Ex. 1674.** ——— *4 points.* *./1982/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et B=$(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de E. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de E défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\left(-x + z\sqrt{3}\right) \\ y' = -y \\ z' = \dfrac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - z\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\varphi$ est une isométrie de E.
2. a) Chercher le sous-espace vectoriel U de E des vecteurs transformés par $\varphi$ en leurs opposés. On en donnera une base.

   b) Montrer que les sous-espace U' orthogonal de U est globalement invariant par $\varphi$. On en donnera une base.

   c) Le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ étant supposé orienté par la base directe $(\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1}$, préciser la restriction de $\varphi$ à cette base.
3. En conclure qu'il existe deux isométries $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de E que l'on caractérisera avec précision telles que

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

**Ex. 1675.** ——— *série C et E, 4 points.* *./1982/amiensC/exo-2/texte.tex*

1. Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star \qquad \varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1$$

   déduire de l'étude des variations de $\varphi$ dans $\mathbb{R}^\star$ celle du signe de $\varphi$ dans $\mathbb{R}^\star$.
2. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f(x) = \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

   a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en zéro.

   b) Déterminer le tableau de variations complet de $f$ sur $\mathbb{R}$ (on utilisera le 1)pour trouver le signe de $f'(x)$).

   c) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'un plan affine euclidien. Étudier la limite de $f(x) - \dfrac{x}{2}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et quand $x$ tend vers $-\infty$. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote et construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On représentera la courbe en choisissant une unité de longueur égale à 5 cm.)

Retour page 1

## 🏛PROBLÈME 610 *12 points.* ./1982/amiensC/pb/texte

**Partie préliminaire**

1. $(P)$ est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ Soit $\varphi$ l'application de $(P)$ dans $(P)$ définie analytiquement par :
$$\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4. \end{cases}$$
Montrer que $\varphi$ est une isométrie affine de $(P)$ que l'on précisera.
2. On appelle $f_a$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ dé ?nie par :
$$f_a(x) = \frac{(a+2)x}{x+2-a},$$
$a$ étant un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ et on appelle $(C_a)$ la courbe représentative de $f_a$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $(P)$.
   a) Montrer que, pour tout $a$ de $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $(C_a)$ est globalement invariante par $\varphi$.
   b) Montrer que toutes les courbes $(C_a)$ passent par deux points indépendants de $a$.
   c) Étudier les variations de $f_a$ et construire dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes $(C_{-1}$ et $(C_{\frac{3}{2}}$.
   (On utilisera pour la représentation graphique une unité de longueur égale à 2 cm.)

A) Soit$\omega_a$ le point de coordonnées $(a-2\,;\,a+2)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $(P)$ et les vecteurs :
$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}).$$

1. Montrer que $(\omega_a,\ \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé de $(P)$.
2. Déterminer une équation de $(C_a)$ dans le repère $(\omega_a,\ \vec{I}, \vec{J})$.
   En déduire que$('C_a)$ est une hyperbole équilatère (on notera $A$ et $A'$ les points d'intersection de l'hyperbole avec ses axes de symétrie ; points appelés sommets de l'hyperbole).
3. a) Soit $D$ la droite d'équation $y = x + 4$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que par tout point $M$ de $D$, à l'exclusion de points que l'on précisera, passe une courbe $(C_a)$ unique.
   b) Montrer que $(C_a)$ a ses sommets sur $D$ si et seulement si $|a| > 2$.
   c) En déduire l'ensemble des points $A$ et $A'$ lorsque $a$ varie dans $]-\infty\,; -2[\cup]2\,; +\infty[$.
4. On suppose ici $|a| < 2$. Évaluer en fonction de $a$ les distances $\omega_0\omega_a$ et $\omega_a A$ ; en déduire la distance $\omega_0 A$. Déterminer l'ensemble des points $A$ et $A?$ lorsque a varie dans $]-2\,; 2[$.

B) Dans cette partie on suppose $a$ élément de l'intervalle $I = [0\,; 2[$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique dé ?nie par $U_0$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = f_a(U_n).$$
On suppose que $U_0 \in [0\,; 2a]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0\,; 2a]$.
   En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est partout définie dans $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $U_0 = 0$ ou si $U_0 = 2a$ ?
2. On suppose que $U_0$ est différent de $0$ et $2a$ (par suite $a$ est différent de $0$).
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad U_n \geqslant 2a.$
   b) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $$\forall n_i n\mathbb{N}, \qquad V_n = \frac{U_n}{U_n - 2a}.$$
   Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de $a$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire l'existence et la valeur de la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. *Les parties* **??** *et* **??** *sont indépendantes.*



Retour page 1

# IV. Besançon, série C

**Ex. 1676.** ——— *4 points* *./1982/besanconC/exo-1/texte.tex*

**1.** Calculer la somme suivante pour $x$ réel et $p$ entier naturel :

$$1-x+x^2-\cdots+(-1)^p x^p.$$

**2.** Montrer que, quels que soient les entiers naturels $x$ et $n$, l'entier $x^{2n+1}+1$ est divisible par $x+1$.

**3.** En déduire que, quel que soit l'entier naturel $p$, $(2^{(2^p)})^k$ est divisible par $2^{(2^p)}+1$ si l'entier $k$ est impair.

**4.** Démontrer qu'une condition nécessaire pour que l'entier $2^m+1$ soit premier est que l'entier $m$ soit une puissance de $2$.
On ne cherchera par à étudier si cette condition est suffisante.

**Ex. 1677.** ——— *4 points* *./1982/besanconC/exo-2/texte.tex*

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$S$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D) d'équation $y=x$,
$s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
$k$ étant un réel donné on considère l'application du plan dans lui-même associant au point M de coordonnées $x$ et $y$ le point M' de coordonnées $x'$ et $y'$définies par :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = x+ky. \end{cases}$$

**1.** Trouver l'ensemble des poins invariants par $f_k$.

**2.** Montrer que $f_0$ est la composée de deux applications simples à déterminer.

**3.** Trouver l'expression analytique de $f_{k'} \circ f_k$ pour deux réels $k$ et $k'$ quelconques. Donner la nature de la composée pour $k'=-k$.

**4.** Déterminer analytiquement l'application $f_k \circ s \circ f_k \circ S$. Reconnaître cette application et donner ses éléments caractéristiques, directement ou en utilisant les nombres complexes.

## Problème 611 *12 points* *./1982/besanconC/pb/texte*

I. Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1° Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ tels que, quel que soit le réel $t$ appartenant au domaine de définition de $f$

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}.$$

3° Montrer l'existence du réel

$$A(x,\ y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x$ strictement positif et $x$ strictement inférieur à $y$.
Donner une interprétation géométrique de ce réel.

II. Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2(1+t)}.$$

1° Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad t \longmapsto g(t)-f(t)$ admet des primitives. Les calculer.

Retour page 1

2° En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x$ strictement positif et $x$ strictement inférieur à $y$.

3° $x$ étant fixé, trouver la limite $F(x)$ de $A(x,\ y)$ quand $y \to +\infty$ puis la limite $G(x)$ de $B(x,\ y)$ quand $y \to +\infty$.

III. On suppose $x$ réel positif strictement.

1° Étudier les variations de la fonction $F$. En déduire que :
quel que soit $x$ strictement positif, $0 < F(x)$.

2° Étudier les variations de la fonction $F$. En déduire que :
quel que soit $x$ strictement positif, $G(x) < 0$.

3° Déduire des questions précédentes que :
quel que soit $x$ strictement positif, $\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.

4° Puis que :
pour tout entier naturel non nul $n$,

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

## V. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg, série E

Ex. 1678. 4 points ./1982/besanconE/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le plan $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est le plan horizontal de projection et $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection.
Le point $O$ est à gauche de la feuille et à mi-hauteur, la ligne de terre définie par $\left(O; \vec{\jmath}\right)$ est le petit axe de la feuille.
On prendra 2 cm pour unité.

**1.** a) Construire les traces du plan $R$ dont une équation cartésienne est $x - 2y + 2z = 0$.
b) Tracer la projection de la droite $\Delta$ issue du point $\Omega \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ et orthogonale à $R$.
c) Déterminer sur l'épure l'intersection $H$ de $R$ et de $\Delta$.
d) Par la méthode de votre choix, donner une valeur approchée de $\alpha$, distance de $\Omega$ au plan $R$, cette valeur étant mesurée sur l'épure.

**2.** On se propose dans cette question de vérifier par le calcul les résultats obtenus précédemment, pour cela on déterminera :
a) une représentation paramétrique de la droite $\Delta$,
b) les coordonnées du point $H$,
c) la distance $d(\Omega,\ R)$ de $\Omega$ au plan $R$ que l'on comparera avec la valeur mesurée.

Ex. 1679. 4 points ./1982/besanconE/exo-2/texte.tex

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On considère l'application $f$ de $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i} - 2}{z + \mathrm{i}}.$$

**1.** Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i}\}$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ à préciser.

**2.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par $f$.

**3.** Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, déterminer et représenter l'ensemble des points $M$ d'affixes $z$ qui vérifient $|f(z)| = 1$.



Retour page 1

## PROBLÈME 612 *12 points*



A) Soit $P$ un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm).
Soit $f_1$ et $f_2$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad f_2(x) = x - \sqrt{x^2-1}.$$

On désigne par $C_1$ (respectivement $C_2$) la représentation graphique de $f_1$ (respectivement $f_2$) dans le repère $\mathscr{R}$.

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_1$. Préciser les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et +1 de $C_1$.

2° Étudier les variations de $f_1$ et tracer $C_1$. On montrera en particulier que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote pour $x \to +\infty$.

3° Montrer que la restriction de $f_1$ à $[1\,;+\infty[$ réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle $I$ à préciser.

Montrer que la bijection réciproque $g$ est définie par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ pour $x$ appartenant à $I$ et tracer la courbe représentative $\Gamma$ de $g$.

4° Soit $\lambda$ un réel strictement supérieur à 1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine délimité par $\Gamma$ et les trois droites d'équations respectives $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 1$ et $x = \lambda$.

B) Soit $C$ la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 1 = 0$.

1° Soit $s$ la symétrie par rapport à $O$. Montrer que $s(C_1) = C_2$. Tracer $C_2$.

2° Prouver que $C$ est égal l'union de $C_1$ et $C_2$.

3° a) Soit $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$. Montrer que $(O;\ \vec{i},\ \vec{u})$ est un repère de $P$.

b) Déterminer une équation de $C$ dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{u})$

C) A tout couple $(a,\ b)$ de réels, on associe l'application affine $\varphi_{a,\ b}$ définie par

$$\varphi_{a,\ b} : M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

où

$$x' = ax, \qquad y' = bx - ay.$$

1° a) Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$, $\varphi_{a,\ b}$ est-elle une bijection ?

b) Déterminer suivant la valeur de $a$ et de $b$ l'ensemble des points invariants de $\varphi_{a,\ b}$.

c) Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$, $\varphi_{a,\ b}$ est-elle une symétrie affine ?

2° On suppose désormais $a = 1$ et $b = 2$.

*i.* Montrer que $\varphi_{1,\ 2}$ est une symétrie affine dont on déterminera les éléments.

*ii.* Montrer que $\varphi_{1,\ 2}(C) = C$.

D) On considère, dans le repère $\mathscr{R}$, le mouvement du point $M$ dont les coordonnées sont données en fonction du temps par

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^t \quad (t \geqslant 0).$$

1° Montrer que la trajectoire du mobile est une partie de $C$ que l'on précisera.

2° Déterminer la nature du mouvement de $M$.



Retour page 1

# VI. Bordeaux, série C

**Ex. 1680.** ———— *3 points* *./1982/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien P on considère un triangle équilatéral $(A,\ B,\ C)$ inscrit dans un cercle $(\Gamma)$. Soit $M$ un point, distinct de $A$ et de $C$, situé sur celui des arcs $AC$ dont $B$ n'est pas élément. $I$ est le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.

1. Montrer que le triangle $(I,\ M,\ A)$ est équilatéral.
2. On oriente le plan P de façon qu'une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ soit $+\dfrac{\pi}{3}$.

   Soit $r$ la rotation de centre $A$et d'angle dont une mesure est $+\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer les images par $r$ des points $B$ et $I$.
   En déduire
   $$MA + MC = MB$$
   .

**Ex. 1681.** ———— *4 points* *./1982/bordeauxC/exo-2/texte.tex*

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et i un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1+2\mathrm{i})z^3 - 4(1-6\mathrm{i})z^2 - 8\sqrt{3}(4-6i)z - 192.$$

Démontrer qu'il existe deux éléments $a$ et $b$ de $\mathbb{C}$ tels que pour tout élément $z$de $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = (z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
Préciser le module et l'argument de chaque solution.
Calculer le produit de ces quatre racines.

## Problème 613 *13 points* *./1982/bordeauxC/pb/texte*

On désigne par $E$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\omega$ étant un nombre réel non nul, on considère les fonctions $f_\omega$ et $g\omega$ , de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f_\omega(x) = \mathrm{e}^{-\omega x}\sin\omega x \qquad \text{et} \qquad g_\omega(x) = \mathrm{e}^{-\omega x}\cos\omega x$$

et $F_\omega$ désignera le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $f_\omega$ et $g_\omega$.

A) 1. a) Démontrer que le couple $(f_\omega,\ g_\omega)$ détermine une base de $F_\omega$.
   b) Montrer que tout élément de $F_\omega$ admet une dérivée élément de $F_\omega$ .
2. On considère l'application $\varphi_\omega$ de $F_\omega$ vers $F_\omega$, qui à tout élément $f$ de $F_\omega$ fait correspondre la fonction dérivée $f'$ de $f$.
   a) Démontrer que $\varphi_\omega$ est un endomorphisme de $F_\omega$ ; déterminer sa ma- trice $M_\omega$ , relativement à la base$(f_\omega,\ g_\omega)$ ; montrer que $\varphi_\omega$ est bijectif.
   b) À la matrice $M_\omega$ est associé le nombre complexe $z_\omega = -\omega + \mathrm{i}\omega$. (i étant un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).
   Déterminer les entiers naturels $n$ supérieurs ou égaux à 1 pour lesquels $z_\omega^n$ est un nombre réel ; quelle est alors la nature de l'endomorphisme $\varphi_\omega^n = \varphi_\omega \circ \varphi_\omega \circ \cdots \circ \varphi_\omega$, composé de $n$ termes égaux à $\varphi_\omega$ ?

B) 1. On pose $\omega = 2$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x \end{aligned}$$

   a) Étudier les variations de $f_2$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

b) Soit $C$ et $\Gamma$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x$ et $y = \mathrm{e}^{-2x}$ relativement à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$du plan.
Calculer les abscisses des points communs à $C$ et $\Gamma$ et démontrer qu'en chacun de ces points les courbes $C$ et $\Gamma$ ont même tangente.

c) Construire l'arc de la courbe C correspondant à l'intervalle $[0\,;\pi]$ dans le repère orthogonal O$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = 3$ et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 10$, en centimètres). Construire également $\Gamma$.

2. a) Déterminer pour $\omega = 2$ l'endomorphisme réciproque $\varphi_\omega^{-1}$ de l'endomorphisme $\varphi_\omega$, de la question A2. En déduire les primitives, sur $\mathbb{R}$, des fonctions f$f_2$ et $g_2$.

b) Soit $F$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$F(X) = \int_0^X f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X)$.

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

b) $a$ et $b$ étant deux nombres réels calculer

$$I(a,\ b) = \int_0^\pi \left(a\mathrm{e}^{-x}\sin x + b\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)\mathrm{d}x$$

en fonction de $a$ et $b$.

c) Démontrer que $\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, $I(a,\ b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ et en déduire que l'application $\phi$ de $F_1 \times F_1$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f,\ g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire.

?

## VII. Caen, série C

**Ex. 1682.** ——— *3 points* *./1982/caenC/exo-1/texte.tex*

Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$P.G.C.D(a,\ b) + P.P.C.M(a,\ b) = b + 9.$$

**Ex. 1683.** ——— *4 points* *./1982/caenC/exo-2/texte.tex*

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté au repère orthonormé $oijk$. On considère l'application $v$ de E dans E , qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que

$$\begin{cases} x' = -x + 2\\ y' = z + 1\\ z' = y + 1.\end{cases}$$

1. Soit $f = h_1 \circ v$, application composée de $v$ par $h_1$ , où $h_1$ est l'homothétie de centre $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et de rapport 2.
Démontrer que $f$ admet un unique point invariant $B$.



Retour page 1

2. Soit $r = h_2 \circ v$, application composée de $v$ par $h_2$, où $h_2$ est l'homothétie de centre $B$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
   Démontrer que $r$ est un demi-tour d'axe une droite $D$, que l'on précisera.
3. En déduire que $v$ est un vissage.
   Préciser les éléments caractéristiques de ce vissage.

## Problème 614 *13 points*

*./1982/caenC/pb/texte*

Soit $\lambda$ un réel non nul, on considère la fonction $f_\lambda$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

On désigne par $C_\lambda$ la courbe représentative de la fonction $f_\lambda$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

*- Les parties B et C de ce problème sont indépendantes.*

A- 1. Déterminer $f'_\lambda$ et $f''_\lambda$ les fonctions dérivées première et seconde de $f$.
   Étudier les variations de $f_\lambda$.
2. Discuter, selon le réel $\lambda$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $x$,

$$f'_\lambda(x) = 0.$$

   Préciser la position de ces solutions par rapport à $0$ et à $1$. (On distinguera les quatre cas $\lambda < 0$ ; $0 < \lambda < \mathrm{e}$ ; $\lambda = \mathrm{e}$ ; $\lambda > \mathrm{e}$).
3. Déduire de ce qui précède, le sens de variation de $f_\lambda$ suivant les valeurs du réel $\lambda$.
4. Étudier les limites de $f_\lambda$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe $C_\lambda$.
5. Montrer qu'il existe un unique point commun $A$ à toutes les courbes$C_\lambda$.
6. Soit $I_\lambda$ le point de $C_\lambda$ dont l'abscisse est $1$. Écrire une équation de la tangente $D_\lambda$ en $I\lambda$ à la $C_\lambda$. Montrer que les droites $D_\lambda$ ont un point commun $B$.
7. On se propose de tracer avec précision les courbes $C_{-1}$, $C_{\mathrm{e}}$, $C_4$. Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétrique en prenant 2 cm comme unité.
   a) On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation d'inconnue $x$, $f'_{-1}(x) = 0$, n'a qu'une solution notée $x_1$ comprise entre $-0{,}57$ et $-0{,}56$.
      Construire la courbe $C_{-1}$.
   b) Tracer $C_{\mathrm{e}}$.
   c) Montrer que l'équation d'inconnue $x$, $f'_4(x) = 0$, a deux solutions : $x_1$ comprise entre $0{,}35$ et $0{,}36$ et $x_2$ comprise entre $2{,}15$ et $2{,}16$. Tracer $C_4$ .

B- 1. Montrer que la fonction $f_\lambda$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'en- semble de ces primitives.
2. Montrer que, pour chaque réel non nul $\lambda$, on peut définir une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi_1(x) = \displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t - 2\lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda. \end{cases}$$

   Calculer $\varphi_1$. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout réel $x$,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

C- On suppose dans cette partie $-\frac{1}{\mathrm{e}} < \lambda < 0$.



Retour page 1

1. Montrer que le réel $x_1$ tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à $-1$.
   En déduire que, si $-1 < x < 0$ , alors, $-1 < f'_\lambda(x) < 0$.
2. On considère la suite $u$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f_\lambda(u_n) = u_n + \lambda(u_n+1)\mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$

   Montrer que :

   a) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad -1 < u_n < 0$.

   b) La suite $u$ est décroissante.

   c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(u_n+1)$.
   En déduire que la suite $u$ est convergente et trouver sa limite.

## VIII. Cameroun, série C

Ex. 1684. *4 points* *./1982/camerounC/exo-1/texte.tex*

On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels *premiers*. On se propose de résoudre dans $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ l'équation :

$$x^2 - y^2 = pq \qquad (1)$$

où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels *premiers*.

**1.** Étudier le cas $p = q = 2$.

**2.** On suppose $q = 2$ et $p > 2$.
Démontrer que $x$ et $y$ sont nécessairement tous les deux impairs.
En posant $x = 2x' + 1$ et $y = 2y' + 1$, en déduire que l'équation (1) n'a pas de solution.

**3.** On suppose $2 < q \leqslant p$.

a) Montrer que $y$ est nécessairement égal à 2.

b) Démontrer que, qi $p - q \neq 4$, l'équation (1) n'a pas de solution.

c) On se place dans le cas où $p - q = 4$.
Démontrer que $(q,\ x,\ p)$ forme une suite arithmétique de raison 2. En déduire que l'équation (1) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.
( : on démontrera que, quel que soit l'entier naturel $n$, l'un des trois nombres $n$, $n+2$, $n+4$ est divisible par 3). Quelle est la solution dans ce cas ?

## IX. Clermont-Ferrand, série C

Ex. 1685. *4 points* *./1982/clermontC/exo-1/texte.tex*

**1.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation :

$$5x - 4y = 2. \qquad (1)$$

**2.** On considère les couples $(a,\ b)$ solutions de l'équations (1).

a) Quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun de $a$ et de $b$ ?

b) Montrer qu'il existe un seul couple $(a,\ b)$ dont le plus petit multiple commun de $a$ et de $b$ est 60 et le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$ est 2.

**Ex. 1686.** ______ *4 points* ./1982/clermontC/exo-2/texte.tex

On considère les intégrales définies :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^\star$$

et

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x\,\mathrm{d}x$.

   En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de $n$.
2. Calculer $I_1$. En déduire $I_3$ et $I_5$.
3. a) Soit $f$ l'application qui à $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ associe

   $$f(x) = \log\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

   Montrer que $f$ est une primitive de la fonction $g$ définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ par

   $$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

   b) En déduire $I_0$, puis $I_2$ et $I_4$.

**Problème 615** *12 points.* ./1982/clermontC/pb/texte

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et soit $E$ l'espace vectoriel associé de base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

A- On considère l'endomorphisme $\varphi$ de $E$ défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{j}) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right) \\ \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}. \end{cases}$$

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de $E$ de composantes $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ relativement à la base $\mathscr{B}$. Déterminer les composantes $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ de '$\varphi(\vec{u})$ relativement à cette même base.
2. Déterminer le noyau $D$ de $\varphi$. En donner une base.
3. Montrer que l'image de $\varphi$ est le plan vectoriel $P$ orthogonal à $D$.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi$.
5. Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ peut être mis sous la forme

   $$\varphi = \psi \circ p$$

   où $\psi$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}+\vec{j}$ et $p$ une projection vectorielle à déterminer.

B- Soit $A$ le point de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées dans $\mathscr{R}$ sont $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$. Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ associée à l'endomorphisme $\varphi$ et laissant $A$ invariant.

Au point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans $\mathscr{R}$, correspond le point $M = f(m)$ de coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ dans ce même repère.

Retour page 1

1. Montrer que $f$ est définie analytiquement par

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}[x+y-1] \\ Y = \frac{1}{2}[x+y+1] \\ Z = -z+2. \end{cases}$$

5.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$ et l'image de $\mathscr{E}$ par $f$.Donner les équations cartésiennes dans $\mathscr{R}$ de ces ensembles.
3. Montrer que le repère $\mathscr{R}' = (A,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}),\ \vec{k})$ est un repère orthonormé du plan $P$ d'équation dans $\mathscr{R} : x-y+1=0$.
4. Déterminer, dans ce repère $\mathscr{R}'$, l'expression analytique de la restriction $\widehat{f}$ de $f$ à $P$ . Quelle est la nature de $\widehat{f}$.
5. Soit $m \in \mathscr{E}$ et $M = f(m)$ son transformé par $f$. Indiquer par quelles transformations géométriques on passe du point $m$ au point$M$. (On pourra illustrer la réponse à l'aide d'une figure.)

C- On considère le point mobile $m(t)$ dont les coordonnées à la date $t$ sont définies, relativement au repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ , par

$$\begin{cases} x(t) = 1+\cos t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1+\sin t, \qquad t \in [0\,;2\pi[ \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la trajectoire de $m(t)$?
   Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point $m(t)$ à la date $t$.
   Quelle est la nature du mouvement?
2. Soit $M(t)$ le transformé de $m(t)$ par $f$.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire $(\Gamma)$ de $M(t)$, relativement au repère $\mathscr{R}$. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ du point $M(t)$ à la date $t$.
   b) Étudier les variations de l'application :
   $$t \in [0\,;2\pi[ \longmapsto \left\|\vec{V}(t)\right\|.$$
   et tracer la courbe représentative.
   c) Trouver les positions de $M(t)$ pour lesquelles $\left\|\vec{V}(t)\right\|$ est maximal, minimal.
3. Montrer que $(\Gamma)$ est globalement invariante par $f$.
4. Montrer que la trajectoire $(\Gamma)$ est située dans le plan $P$ et trouver son équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R}'$. Préciser la nature et les éléments géométriques de $(\Gamma)$.

## X. Côte d'Ivoire, série C

**Ex. 1687.** ———— *4 points* *./1982/cotedivoireC/exo-1/texte.tex*

**1.** Montrer que, si $p$ et $q$ sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de $p$ et de $q^3$.

**2.** On se propose de trouver les racines rationnelles de l'équation :

$$3x^3-2x^2+6x-4=0. \qquad (1)$$

a) Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible.
   Montrer que, s'il est solution de (1) , alors $a$ divise 4 et $b$ divise 3.

b) Montrer qu'une solution de (1) ne peut être négative.

c) Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

Retour page 1

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0.$$

# XI. Dijon, série C

**Ex. 1688.** *3 points* *./1982/dijonC/exo-1/texte.tex*

$n$ étant un entier naturel fixé, on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$165x - 132y = n \qquad (E_n)$$

Résoudre cette équation dans les trois cas particuliers :

**1.** $n = 33$.

**2.** $n = 66$.

**3.** $n = 42$.

Dans ces différents cas, on déterminera pour chaque couple $(x,\ y)$ solution, le PGCD de $x$ et de $y$.

**Ex. 1689.** *4 points* *./1982/dijonC/exo-2/texte.tex*

Soient $E$ un espace affine euclidien, $(O,\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé, $f$ l'application de $E$ dans $E$ qui à tout point $m$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = z^2 + \mathrm{i}z + 1$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M$ dont l'image par $f$ est le point $A$ d'affixe $3\mathrm{i}$.
2. Soit $M$ un point de $E$ de coordonnées $x$ et $y$, et $M' = f(M)$ de coordonnées $x'$ et $y'$ son image par $f$. Déterminer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
3. Soit $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan dont l'image est sur le droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de $\Gamma$.
4. Soit $\mathscr{C}$ l'image par $f$ de la droite $(O\overrightarrow{e_1})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
5. Montrer que $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

## Problème 616 *13 points* *./1982/dijonC/pb/texte*

Les parties I et II pourront être abordées indépendamment l'une de l'autre. ($\mathrm{e}$ désignera dans tout le problème la base des logarithmes népériens).

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $C(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Question préliminaire :** Justifier, pour tout $f$ élément de $C(\mathbb{R})$ et pour tout réel $x$, l'existence du réel $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On note $F(x)$ ce réel ; on construit ainsi une fonction numérique $F$ définie sur $\mathbb{R}$, associée à $f$.

-I- Soit $V$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1\ ;\ f_2(x) = x\ ;\ f_3(x) = \mathrm{e}^x.$$

a) Montrer que $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ est une base de $V$.

b) Montrer que, si $f$est élément de $V$, $F$ est élément de $V$. Soit alors $\Phi : V \longrightarrow V$ l'application définie par $\Phi(f) = F$. Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $V$, et donner l'expression des coordonnées $a_1$, $b_1$ et $c_1$ de $F$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées $a$, $b$ et $c$ de $f$ dans cette même base.

**Application :** On pose $f = -f_1 - f_2 + f_3$. Déterminer $\Phi(f)$.

c) Soit $P$ le plan vectoriel engendré par $f_1$ et $f_2$ et $D$ la droite vectorielle engendrée par $f_3$.

a) Montrer que ces deux sous-espaces de $V$ sont stables par $\Phi$, c'est-à-dire que $\Phi(P) \subset P$ et $\Phi(D) \subset D$.



Retour page 1

b) On définit $Phi^1 = \Phi$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $\Phi^n = \Phi^{n-1} \circ \Phi$.
Soit $f$ un élément de $V$, de coordonnées $a$, $b$ et $c$ dans la base $\mathscr{B}$, et $a_n$, $b_n$, $c_n$ les coordonnées de $\Phi^n(f)$ dans cette même base. Déterminer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

Soit $f$ et $F$ les fonctions numériques définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

$$F(x) = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^x - x - \frac{3}{2}.$$

-II- 1. Montrer que $F$ est la fonction associée à $f$ (au sens de la question préliminaire).

2. Étudier les fonctions $f$ et $F$ et construire leurs représentations graphiques respectives $\gamma$ et $\Gamma$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. (Tracer les deux courbes sur le même dessin).

3. Justifier l'existence, pour tout réel positif $x$, d'un réel unique $c$ de l'intervalle $[x\,;x+1]$ tel que

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

4. On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c_n)$$

puis la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\delta_n = c_n - n$.

a) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) En utilisant les courbes $\gamma$ et $\Gamma$ du II2, déterminer graphiquement les points $M_0$, $M_1$ et $M_2$ de l'axe $(O, \vec{\imath})$ d'abscisse respective $c_0$, $c_1$, $c_2$.

c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{2\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{\mathrm{e}^n}.$$

d) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ que l'on déterminera.

e) Calculer $F(x) - f(x+\ell)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En déduire une transformation affine $T$ du plan $E$ telle que l'on ait $T(\gamma) = \Gamma$.
Quelle est la nature de $T$ ?

# XII. Grenoble, série C

**Ex. 1690.** ——— *3 points* *./1982/grenobleC/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 = -1$ où $z$ est l'inconnue.
2. Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

**Ex. 1691.** ——— *5 points* *./1982/grenobleC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \log\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.
2. a) Soit $\lambda$ un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Calculer l'aire géométrique $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. (On pourra intégrer par parties).

   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \mathscr{A}(\lambda)$.

Retour page 1

## Problème 617 *12 points*

./1982/grenobleC/pb/texte

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2. On désigne par $L(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de $E$. On notera $Id$ l'application identique de $E$, $\theta$ l'application nulle de E. Pour tout élément $\varphi$ de $L(E)$ on pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi + \varphi = 2\varphi$..

A- On étudie dans cette partie les éléments $\varphi$ de $L(E)$ tels que

$$(\varphi - Id)^2 = \theta \tag{1}$$

1. Montrer que $(\varphi - Id)^2 = \theta$ équivaut à $2\varphi - \varphi^2 = Id$. En déduire que si $\varphi$ est solution de (1) alors $\varphi$ est bijectif et préciser $\varphi^{-1}$.
2. a) Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1) ?

   b) Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les endomorphismes de matrices respectives :

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont solutions de (1). En déduire qu'il existe un élément $\psi$ de $L(E)$tel que $\psi \neq \theta$ et $\psi^2 = \theta$.
3. Soit $\varphi$ une solution de (1) et $\lambda$ un réel : démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que $\varphi(\vec{U}) = \lambda \vec{U}$ si, et seulement si, $\lambda = 1$.
4. a) Soit $\psi$ un élément de $L(E)$ différent de $\theta$ tel que $\psi^2 = \theta$. Soit $\vec{U}_0$ un vecteur de $E$ tel que $\psi(\overrightarrow{U_0}) \neq \vec{0}$ : montrer que $(\psi(\overrightarrow{U_0}), \overrightarrow{U_0})$est une base de $E$. Donner la matrice de $\psi$ dans cette base.

   b) En déduire que, pour $\varphi$ solution de (1) et$\varphi \neq Id$, il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $\varphi$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Soit $\varphi$ une solution de (1) autre que l'identité. On appelle $F$ le sous-espace vectoriel de $L(E)$ engendré par $\varphi$ et $Id$.

   a) Démontrer que la dimension de $F$ est 2.

   b) Démontrer que $F$ muni de l'addition des applications et de la composition des applications a une structure d'anneau commutatif unitaire. Déterminer $G$, l'ensemble des éléments inversibles de $F$. Quelle est la structure de $(G, \circ)$ ?

B- On étudie dans cette partie les applications affines du plan affine $P$ associé à $E$ laissant au moins deux points distincts invariants.

On considère dans $P$, trois points non alignés $A$, $B$, $C$ et $C$ un point quelconque de $P$. Soit $f$ l'application affine laissant $A$ et $B$ invariants et transformant $C$ en $C'$ et $\varphi$ l'endomorphisme associé. ( $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C'$ ).

1. On suppose $C = C'$ . Que peut-on dire de $f$ ? Dans la suite du problème on suppose $C \neq C'$.
2. Montrer que la droite $AB$ est invariante point par point par $f$.
3. On suppose les droites $AB$ et $CC'$ (sécantes en) $O$. Soit $(x\ ;\ y)$ les coordonnées d'un point $M$ de $P$ dans le repère $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$.

   a) Calculer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M' = f(M)$.

   b) Quelle est la nature de f si $C' = O$ ?

   c) Si $C' \neq O$ étudier comment se transforment les droites parallèles aux axes.
4. On suppose que les droites AB et CC sont parallèles. Soit $k$ tel que $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{AB}$.

   a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$ image par $f$ d'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   Vérifier que $(\varphi - Id)^2 = \theta$.

   b) Démontrer que, pour tout point $M$ de $P$

   $$\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB}$$

   ($y$ est l'ordonnée de $M$). En déduire une construction géométrique de $f(M)$. (On envisagera les cas : $CM$ est parallèle à $AB$, $CM$ n'est pas parallèle à $AB$).



Retour page 1

# XIII. Groupe I, série C

**Ex. 1692.** ——— *4 points* *./1982/groupeIC/exo-1/texte.tex*

1. Dans $\mathbb{Q}$, résoudre le système à l'inconnue $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ :

$$\begin{cases} x+2y-4z=-1 \\ 3x+y-2z=2. \end{cases}$$

2. Dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, résoudre le système à l'inconnue $xyz$ :

$$\begin{cases} x+\overline{2}y-\overline{4}z=-\overline{1} \\ \overline{3}x+y-\overline{2}z=\overline{2}. \end{cases}$$

**Ex. 1693.** ——— *4 points* *./1982/groupeIC/exo-2/texte.tex*

On donne un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ dont le plan vectoriel associé est noté $P$, un triangle $A_1A_2A_3$ de $\mathscr{P}$ et une similitude $\mathscr{S}$ de $P$. On note $B_1B_2B_3$ le triangle de $\mathscr{P}$ défini par :

$$\overrightarrow{A_2B_1}=\mathscr{S}(\overrightarrow{A_2A_3}),\quad \overrightarrow{A_3B_2}=\mathscr{S}(\overrightarrow{A_3A_1}),\quad \overrightarrow{A_1B_3}=\mathscr{S}(\overrightarrow{A_1A_2}).$$

**1.** On désigne par $G$ l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ (barycentre des sommets affectés de coefficients égaux). Montrer que $G$ est aussi l'isobarycentre du triangle $B_1B_2B_3$.

**2.** On rapporte le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal direct d'origine $G$. On appelle $a_1$, $a_2$, $a_3$ les affixes de $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $b_1$, $b_2$, $b_3$ les affixes de $B_1$, $B_2$, $B_3$.
On désignera par $s$ le nombre complexe associé à la similitude $\mathscr{S}$ c'est-à-dire que, si $z$ est le nombre complexe associé à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $P$ et $z'$ le nombre complexe associé au vecteur $\overrightarrow{v'}$ transformé de $\overrightarrow{v}$ par $\mathscr{S}$, on a $z'=sz$.
Montrer qu'il existe, en général, deux similitudes $\mathscr{S}$ telles que le triangle $B_1B_2B_3$ soit équilatéral et que celles-ci sont indépendantes du choix du triangle $A_1A_2A_3$.
Quel est le cas d'exception ?

N.B. - On utilisera le nombre complexe $j$ de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

## Problème 618 *12 points* *./1982/groupeIC/pb/texte*

Partie préliminaire

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, calculer l'intégrale :

$$B_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}} x\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que chacune des cinq fonctions numériques :

$$\begin{aligned} &x\longmapsto x-\sin x\\ &x\longmapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x\\ &x\longmapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x\\ &x\longmapsto 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x\\ &x\longmapsto x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\sin x \end{aligned}$$

ne prend que des valeurs positives (au sens large) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



Retour page 1

3. Montrer que, pour $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

vérifie :

$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20}\right) \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}}.$$

Première partie

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application continue $f_n$ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f_n(0) = n, \qquad f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} \quad \text{pour tout } x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

Montrer que l'application $f_n$ est dérivable et calculer $f_n'(0)$.
On utilisera les résultats de la partie préliminaire 2

2. Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $C_n$ la représentation graphique de $f_n$ par rapport à un repère orthonormal donné (unité graphique : 2 cm). Déterminer les abscisses des points communs à $C_n$ et $C_{n+1}$. Construire $C_1,\ C_2,\ C_3$. Interpréter en terme d'aire l'intégrale :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (n \geqslant 2).$$

3. On note $\omega = \int_0^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, où $\varphi$ est l'application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.$$

On admettra que l'intégrale $\omega$, que l'on ne cherchera pas à calculer, s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_n(t)$$

où la fonction continue $\varphi_n$ est définie par :

$$\varphi_n(0) =, \qquad \varphi_n(t) = \frac{\sin nx}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $n \geqslant 2$, justifier l'égalité :

$$A_n - \omega = \int_0^{\frac{\pi}{n}} x \sin nx . g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire :

$$\frac{\pi}{6n^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{20n^2}\right) \leqslant A_n - \omega \leqslant \frac{\pi}{6n^2}\left(\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{6n^2}}\right).$$

Trouver les limites des suites $(A_n)_{n\geqslant 2}$ et $(n^2(A_n - \omega))_{n\geqslant 2}$.

Troisième partie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

1. Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$.
2. Exprimer $I_{n+2} - I_n$ en fonction de $n$ et en déduire une expression de $I_n$ ne faisant intervenir aucun symbole d'intégration.

N. B. - On rappelle la formule : $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

## XIV. Groupe I bis, série C

**Ex. 1694.** ———— *4 points* *./1982/groupeIbisC/exo-1/texte.tex*

Démontrer que, si un entier naturel premier $p$ est tel que la somme de tous les diviseurs de $p^4$ est le carré d'un entier naturel $n$, alors

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + 2p + 2.$$

En déduire l'existence et l'unicité de $p$ ainsi que le calcul du couple $(p,\ n)$.

**Ex. 1695.** ———— *4 points* *./1982/groupeIbisC/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien orienté, une similitude directe $\mathscr{S}_O$ de centre $O$ transforme un couple donné $(A,\ B)$ de points distincts, autres que $O$, en un couple $(A',\ B')$.
La similitude directe $\mathscr{S}_A$ de centre $A$ qui transforme $B$ en $B'$, transforme $O$ en $P$. La similitude directe $\mathscr{S}_B$ de centre $B$ qui transforme $A$ en $A'$, transforme $O$ en $Q$.
Démontrer que $O$ est le milieu de $(P,\ Q)$.

**PROBLÈME 619** *12 points* *./1982/groupeIbisC/pb/texte*

On donne les deux applications numériques

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -1 + \sqrt{1+x^2}$$

et

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2}{1+|x|}.$$

**1.** Démontrer que $f$ et $\varphi$ sont paires, continues et dérivables.
Étudier $f(x)$ et $\varphi(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Montrer que les courbes représentatives $\mathscr{C}$ de $f$ et $\Gamma$ de $\varphi$ rapportées au repère orthonormé direct $\mathscr{R}$ (unité : 2 cm) admettent pour asymptotes deux droites ayant respectivement pour équation

$$y = x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = -x - 1.$$

Étudier les variations de $f$ et de $\varphi$.

**2.** Démontrer que, quel que soit $x$ réel,

$$1 + |x| \leqslant 1 + \sqrt{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant \varphi(x).$$

En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\Gamma$ que l'on construira en plaçant les points d'abscisses 1, 2, 3, 4 notamment, points dont les ordonnées seront calculées à 0,1 près par excès.
Justifier la position de $\mathscr{C}$ et $\Gamma$ par rapport à leurs asymptotes communes.

**3.** Démontrer que l'application numérique :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

est paire, continue et dérivable et que l'application numérique

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

est l'une de ses primitives. ($\log$ désigne le logarithme népérien). Démontrer par une intégration par parties que



Retour page 1

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Calculer en cm$^2$ l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ ensemble des points $M$ dont les couples de coordonnées $xy$ sont tels que

$$\leqslant x \leqslant 4 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x).$$

Calculer la valeur numérique de $\mathscr{A}$ à 0,01 près par défaut.

**4.** Soit $\mathscr{C}_\alpha$ le cercle passant par $O$ origine de $\mathscr{R}$ et centré en $I$ dont le couple de coordonnées est $(0\ ;\ \alpha)$ avec $\alpha > 0$.

Former l'équation aux ordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\alpha$. Montrer que ces deux courbes ont deux points communs $A$ et $A'$ autres que $O$ si, et seule- ment si, $\alpha > 1$. Dans la suite $a(\alpha)$ désigne la valeur absolue commune des abscisses de $A$ et $A'$.

Démontrer que la droite $AA'$ coupe le segment $[OI]$.

Pour quelle valeur $\alpha_1$ de $\alpha$, $A$, $A'$ et $O$ sont-ils confondus ?

Démontrer que $\alpha_1$ est la limite de $\dfrac{x^2}{f(x)}$ quand $x$ tend vers zéro.

Calculer l'ordonnée $q(x)$ du point $Q$ d'(abscisse $x$ de l'arc $AOA'$ de $\mathscr{C}_\alpha$. Démontrer que

$$|x| \leqslant a(\alpha) \Rightarrow f(x) \geqslant q(x).$$

En déduire la position relative des arcs $AOA'$ de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_\alpha$.

# XV. Groupe III, série E

**Ex. 1696.** ——— *4 points* *./1982/besanconE/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Le plan $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est le plan horizontal de projection et $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection.
Le point $O$ est à gauche de la feuille et à mi-hauteur, la ligne de terre définie par $\left(O;\vec{\jmath}\right)$ est le petit axe de la feuille.
On prendra 2 cm pour unité.

**1.** a) Construire les traces du plan $R$ dont une équation cartésienne est $x-2y+2z=0$.

b) Tracer la projection de la droite $\Delta$ issue du point $\Omega\,(2\ 3\ 1)$ et orthogonale à $R$.

c) Déterminer sur l'épure l'intersection $H$ de $R$ et de $\Delta$.

d) Par la méthode de votre choix, donner une valeur approchée de $\alpha$, distance de $\Omega$ au plan $R$, cette valeur étant mesurée sur l'épure.

**2.** On se propose dans cette question de vérifier par le calcul les résultats obtenus précédemment, pour cela on déterminera :

a) une représentation paramétrique de la droite $\Delta$,

b) les coordonnées du point $H$,

c) la distance $d(\Omega,\ R)$ de $\Omega$ au plan $R$ que l'on comparera avec la valeur mesurée.

**Ex. 1697.** ——— *4 points* *./1982/besanconE/exo-2/texte.tex*

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation

$$f(z) = \frac{z-\mathrm{i}-2}{z+\mathrm{i}}.$$

**1.** Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{C}-\{-\mathrm{i}\}$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ à préciser.

**2.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par $f$.

**3.** Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, déterminer et représenter l'ensemble des points $M$ d'affixes $z$ qui vérifient $|f(z)|=1$.



Retour page 1

## 🏛Problème 620 *12 points* 



A) Soit $P$ un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm).
Soit $f_1$ et $f_2$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, \qquad f_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

On désigne par $C_1$ (respectivement $C_2$) la représentation graphique de $f_1$ (respectivement $f_2$) dans le repère $\mathscr{R}$.

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_1$. Préciser les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et +1 de $C_1$.

2° Étudier les variations de $f_1$ et tracer $C_1$. On montrera en particulier que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote pour $x \to +\infty$.

3° Montrer que la restriction de $f_1$ à $[1\,;+\infty[$ réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle $I$ à préciser.

Montrer que la bijection réciproque $g$ est définie par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ pour $x$ appartenant à $I$ et tracer la courbe représentative $\Gamma$ de $g$.

4° Soit $\lambda$ un réel strictement supérieur à 1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine délimité par $\Gamma$ et les trois droites d'équations respectives $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 1$ et $x = \lambda$.

B) Soit $C$ la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 1 = 0$.

1° Soit $s$ la symétrie par rapport à $O$. Montrer que $s(C_1) = C_2$. Tracer $C_2$.

2° Prouver que $C$ est égal l'union de $C_1$ et $C_2$.

3° a) Soit $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$. Montrer que $(O;\ \vec{i},\ \vec{u})$ est un repère de $P$.

b) Déterminer une équation de $C$ dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{u})$

C) A tout couple $(a,\ b)$ de réels, on associe l'application affine $\varphi_{a,\ b}$ définie par

$$\varphi_{a,\ b} : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

où

$$x' = ax, \qquad y' = bx - ay.$$

1° a) Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$, $\varphi_{a,\ b}$ est-elle une bijection ?

b) Déterminer suivant la valeur de $a$ et de $b$ l'ensemble des points invariants de $\varphi_{a,\ b}$.

c) Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$, $\varphi_{a,\ b}$ est-elle une symétrie affine ?

2° On suppose désormais $a = 1$ et $b = 2$.

*i.* Montrer que $\varphi_{1,\ 2}$ est une symétrie affine dont on déterminera les éléments.

*ii.* Montrer que $\varphi_{1,\ 2}(C) = C$.

D) On considère, dans le repère $\mathscr{R}$, le mouvement du point $M$ dont les coordonnées sont données en fonction du temps par

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad y(t) = \mathrm{e}^t \quad (t \geqslant 0).$$

1° Montrer que la trajectoire du mobile est une partie de $C$ que l'on précisera.

2° Déterminer la nature du mouvement de $M$.



Retour page 1

# XVI. Groupe IV, série E

**Ex. 1698.** ———— *3 points* *./1982/groupeIVE/exo-1/texte.tex*

**1.** Linéariser $\sin^6 x$.

**2.** Calculer :

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{6}} (1+\cos x)^4(1-\cos x)^3\,\mathrm{d}x.$$

**Ex. 1699.** ———— *4 points, Épure* *./1982/groupeIVE/exo-2/texte.tex*

L'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le plan horizontal de projection.
Le point $O$ est au centre de la feuille. l'unité est le centimètre.
On considère les points $A(3\ ;\ 2\ ;\ 5)$ ; $B(6\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ; $C(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$.

**1.** Construire les épures des points $a$, $B$, $C$ ainsi que l'épure $(h_b,\ h'_b)$ de l'horizontale du plan $(A,\ B,\ C)$ passant par $B$.

**2.** Rabattre les points $A$, $B$, $C$ sur le plan horizontal de projection en prenant l'horizontale $(h_b,\ h'_b)$ pour charnière de façon que $a_1$ (rabattement de $A$) et $a$ (projection horizontale de $A$) soient de part et d'autre de $h_b$.

**3.** Construire l'épure $(k,\ k')$ du point $K$ intersection des hauteurs du triangle $ABC$ puis l'épure de la perpendiculaire en $K$ au plan $(A,\ b,\ C)$.

## Problème 621 *13points* *./1982/groupeIVE/pb/texte*

: les parties A et B sont indépendantes.
Le plan affine euclidien orienté $P$ est rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3x^2+4}\right).$$

1. Étudier les variations de $f$.
2. La fonction $f$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans $P$. Montrer que $\mathscr{C}$ pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x\sqrt{3} - 2$. Construire $\mathscr{C}$ sur la première feuille de papier millimétré en prenant pour unité 2 cm.
3. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
4. Calculer $g(x)$ pour $x$ appartenant à $I$.
5. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Comment peut-on interpréter la valeur absolue $|J|$ de $J$ ?
   Déduire

B) On considère, dans le plan $P$, le mobile $M$ dont les coordonnées cartésiennes dans $\mathscr{R}$ sont données en fonction de $t$ par :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t\right). \end{cases}$$

1. Montrer que le point $M$ appartient à la courbe $\mathscr{H}$ d'équation cartésienne :

$$3x^2 - y^2 = 2.$$



Retour page 1

2. Soit $h$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par $h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t})$. Étudier les variations de $h$, puis déterminer la trajectoire $T$ de $M$.
3. Construire $T$ sur le deuxième feuille de papier millimétré en prenant 2 cm pour unité de longueur.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ du mouvement à la date $t$.
5. Montrer que $\overrightarrow{V}$ est l'image de $\overrightarrow{\Gamma}$ par un endomorphisme $s$, de l'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ associé à $P$, dont on donnera la matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de $\overrightarrow{P}$.
   Montrer que $s$ est une involution et donner les éléments qui la caractérisent.
6. Soit $M_1$ le point de $T$ qui a pour ordonnée $-\dfrac{5}{4}$. Ce point $M_1$ correspond à la position du mobile à l'instant $t_1$ (on ne demande pas de calculer $t_1$).
   Construire, sans aucun calcul, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}_1$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma}_1$ correspondant à cette date $t_1$. (On construira pour cela les points $P_1$ et $Q_1$ tels que $\overrightarrow{OP}_1=\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{OQ}_1=\overrightarrow{\Gamma}_1$ sur la deuxième feuille de papier millimétré).
7. Quelles sont les valeurs de $t$ pour lesquelles le mouvement est retardé ? Accéléré ?

## XVII. Lille, série C

**Ex. 1700.** ——— *3 points* ./1982/lilleC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$9x-22y=55. \qquad (1)$$

**2.** Déterminer les couples solutions de l'équation (1) tels que le plus grand commun diviseur de $x$ et de $y$ soit 55.

**Ex. 1701.** ——— *4 points* ./1982/lilleC/exo-2/texte.tex

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$z^4-(10\mathrm{i}-5)z^2-14\mathrm{i}-48=0.$$

2. On appelle $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ les solutions de cette équation en supposant que

$$\mathbf{Re}(z_4)<\mathbf{Re}(z_3)<0<\mathbf{Re}(z_2)<\mathbf{Re}(z_1)$$

où $\mathbf{Re}(z_i)$ représente la partie réelle de $z_i$ avec $i\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.
Soient $M_1$ et $M_2$ les points du plan complexe d'affixes respectives $2+\mathrm{i}$ et $1+3\mathrm{i}$. Déterminer les deux similitudes laissant le point $O$ d'affixe 0 invariant et transformant $M_1$ en $M_2$. On précisera les éléments caractéristiques des ces similitudes.

**Problème 622** *13 points* ./1982/lilleC/pb/texte

Soit $F$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de leur multiplication par un scalaire.
Soit $E$ l'ensemble des applications de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto \mathrm{e}^{x}(a+b\sin x+c\cos x)$$

où $a,\ b,\ c$ sont 3 réels quelconques.

A– On appelle $g$ l'élément de $E$ correspondant au cas où $a=0,\ b=c=1$.

1. Étudier les variations de $g$, démontrer que $g$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.
   On appelle $\tilde{g}$ l'application telle que

$$\tilde{g}:\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow J$$
$$x\longmapsto g(x)$$

   Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque $h=\tilde{g}^{-1}$. Préciser $h'(1)$.

2. Tracer la courbe représentative C de $\tilde{g}$ dans un plan affine euclidien $P$ muni d'un repère orthonormé R (unité 2 cm). Construire la tangente à C au point d'abscisse 0. Tracer dans le même repère la courbe représentative C' de $h$.
3. a) Á l'aide éventuellement d'une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre C, les droites d'équations

$$y = x,\ x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{\pi}{2}$$

dans le repère $\mathscr{R}$. En déduire l'aire $\mathscr{A}'$ du domaine $\mathscr{D}'$ du plan compris entre C', les droites d'équations

$$y = x,\ y = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{\pi}{2}$$

dans le repère $\mathscr{R}$.

B– 1. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$ admettant pour base $B = (f_1,\ f_1,\ f_3)$, avec

$$\begin{cases} f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longmapsto \mathrm{e}^x \\ f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin x \\ f_3 : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos x \end{cases}$$

2. Soit $f$ un élément de $E$ de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ dans la base $B$. Démontrer que la fonction dérivée première $f'$ et la fonction dérivée seconde $f''$ sont des éléments de $E$ dont on donnera les coordonnées dans la base $B$. Préciser $f\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $a,\underline{,}\ c$.
3. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ qui, à la fonction $f$de coordonnées $a,\ b,\ c$ dans la base $B$ associe la fonction $\tilde{f}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} a' = 3a + 4b \\ b' = -2a - 3b \\ c' = 2a + 2b - c \end{cases}$$

dans cette base.

a) Déterminer $D$, ensemble des éléments de $E$ invariants par $\varphi$ et vérifier que

$$D = \{f \in E \mid f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\}$$

.

b) Déterminer $P$, ensemble des éléments de $E$ changés par $\varphi$ en leur opposé et vérifier que

$$P = \{f \in E \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\}$$

.

c) Démontrer que $D$ et $P$ sont supplémentaires dans $E$. En déduire la nature de $\varphi$ et l'ensemble des éléments de $E$ vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

4. Soit $\phi$ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f,\ g) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right)g''\left(\frac{\pi}{2}\right).$$



Retour page 1

a) Démontrer que $\phi$ est un produit scalaire défini sur $E$. Dans toute la suite du problème, $E$ est muni de ce produit scalaire.

b) Vérifier que le plan vectoriel $P$ et la droite vectorielle $D$ introduits en **??** sont orthogonaux et préciser alors $\phi$.

5. a) Vérifier que, pour le produit scalaire $\phi$, la base $B$ n'est pas orthonormée.

b) On donne

$$g_1 : \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}(2-2\sin x+\cos x)$$

Vérifier que $g_1$ est normé. Trouver $g_2$ normé, orthogonal à $g_1$ appartenant à $P$ et tel que $g_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Soit $g_3$ le vecteur normé de $D$ tel que $g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Déterminer $g_3$et démontrer que $(g_1,\ g_2,\ g_3)$ est une base orthonormée qu'on notera $B'$.

# XVIII. Lille, série E

**Ex. 1702.** *3points* ./1982/lilleE/exo-1/texte.tex

Dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, (unité 2 cm), on considère la famille de courbes $\mathscr{C}_m$ d'équation :

$$2mx^2 - 8mx - (m-1)y^2 + 12m - 2 = 0,$$

$m$ étant un paramètre réel.

1. Discuter selon la valeur de $m$, la nature de $\mathscr{C}_m$.
2. Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles $\mathscr{C}_m$ est :
   a) un cercle,
   b) une hyperbole équilatère.
   Construire ces deux courbes.

**Ex. 1703.** *4 points* ./1982/lilleE/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère l'application $f$, qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}. \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une isométrie affine. $f$ est-elle un déplacement ou un anti-déplacement ?
2. Quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ?
3. Déterminer $f \circ f$.
4. Déterminer le vecteur $\vec{v}$ et la droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{v}$ tels que $f = s \circ t = t \circ s$, $t$ étant la translation de vecteur $\vec{v}$ et $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{D}$.

**Problème 623** *13 points* ./1982/lilleE/pb/texte

A) Soit la fonction numérique $f$ d'une variable réelle, définie par :

$$f(x) = \log\left|\frac{x}{x-2}\right|$$

où le symbole $\log$ désigne le logarithme népérien.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
   Étudier ses variations et construire sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.
2. Démontrer que $(C)$ admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

3. Soit $\alpha \in ]1\,;2[$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.
   Cette aire admet-elle une limite finie lorsque $\alpha$ tend vers 2 par valeurs inférieures ?

B) Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]0\,;2[$.

1. Établir que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$. Exprimer $g^{-1}(x)$.
2. Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives $(C_1)$ de $g$ et $(C_1')$ de $g^{-1}$.
3. Soit $x_0$ l'abscisse du point d'intersection des courbes $(C_1)$ et $(C_1')$.
   Sans calculer $x_0$, exprimer en fonction de $x_0$ l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine limité par les courbes $(C_1)$ et $(C_1')$ et les axes de coordonnées.
4. Déterminer la fonction $F = g^{-1} \circ f$ et construire sa courbe représentative.

C) Á tout réel strictement positif $a$, on associe la fonction $g_a$ définie sur l'intervalle $]a-1\,;a+1[$ par :

$$g_a(x) = \log \frac{a+1-x}{a(x+1-a)}.$$

a) Étudier les variations de la fonction $g_a$.

b) On considère le point $I_a\,(a-1\,;\,-\log a)$. Écrire une équation de la courbe $(\Gamma_a)$ (représentation graphique de $g_a$) dans le repère $(I_a,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

c) Établir que $(\Gamma_a)$ est l'image de $(C_1)$ par une application affine $\varphi_a$ que l'on définira comme la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation.

d) En utilisant les résultats précédents, construire dans un même repère les courbes $(\Gamma_2)$ et $(\Gamma_{\mathrm{e}})$ (e désignant la base du logarithme népérien).

## XIX. Limoges, série C

**Ex. 1704.** ———— *4 points* ./1982/limogesC/exo-1/texte.tex

Déterminer les paires $\{a,\ b\}$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$$2m + 7d = 111,$$

$m$ désignant le PPCM et $d$ le PGCD de $a$ et de $b$.

**Ex. 1705.** ———— *4 points* ./1982/limogesC/exo-2/texte.tex

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x$, on a $\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x$.
2. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose

$$S_n(\theta) = \log\left(2\cos\frac{\theta}{3} - 1\right) + \log\left(2\cos\frac{\theta}{3^2} - 1\right) + \cdots + \log\left(2\cos\frac{\theta}{3^n} - 1\right)$$

où $\log$ désigne le logarithme népérien et $\theta$ un nombre réel donné de l'intervalle

$$I = \left]-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[.$$

a) Justi?er l'existence de $Sn(\theta)$.

b) En utilisant la première question, montrer que :

$$S_n(\theta) = \log\cos\frac{\theta}{2} - \log\cos\frac{\theta}{2.3^n}.$$

c) Calculer : $S(\theta) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta)$.

3. Calculer $S'(\theta)$, pour tout $\theta$ de l'intervalle $I$, $S'$ désigne la dérivée de $S$. En dé- duire la valeur de

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

**Problème 624** *12 points* *./1982/limogesC/pb/texte*

La partie II est independante de I2 et I3

On considère $E$ un espace vectoriel euclidien orienté, muni de la base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$

On note $f_0$ l'identité de $E$.

I Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

1. Déterminer $f \circ f$ et vérifier que :
$$f \circ f = f + 2f_0.$$
En déduire que $f$ est uen bijection et déterminer $f^{-1}$ en fonction de $f$ et de $f_0$.
2. Soit $f_n = f^{n-1} \circ f\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que $f^n$ peut s'écrire :
$$f^n = U_n f + V_n f_0$$
$U_n$ et $V_n$ étant deux réels.
Calculer $U_{n+1}$ et $V_{n+1}$ en fonction de $U_n$ et $V_n$.
3. Soit
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2U_{n+1} + V_{n+1} \\ \beta_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Exprimer $\alpha_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n$ puis $\beta_{n+1}$ en fonction de $\beta_n$.
En déduire $U_n$ et $V_n$ en fonction de $n$ et $f^n$ en fonction de $f$ et de $f_0$.

II Soit $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $E$ dé ?ni par

$$\varphi_{a,b} = af_0 + bf.$$

On note $\phi$ l'ensemble de ces endomorphismes avec $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1. 2. 3.

1. Montrer que $\phi$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$, et que $(f_0,\ f)$ est une base de $\phi$.
2. Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ tels que :
$$\varphi_{a,b} \circ \varphi_{a,b} = \varphi_{a,b} + 2f_0\ ?$$
3. Montrer que $(\phi,\ +,\ \circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
4. Déterminer les couples $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels
   a) $\varphi_{a,b}$ est une symétrie vectorielle de $E$. Caractériser les symétries trouvées.
   b) $\varphi_{a,b}$ est une projection vectorielle de $E$. Caractériser les projections trouvées.
   c) $\varphi_{a,b}$ est une isométrie vectorielle de $E$. Caractériser les isométries trouvées.

# XX. Maroc, série C

**Ex. 1706.** ________ *3 points* *./1982/marocC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $E$, on considère le triangle $ABC$ isocèle rectangle en $A$ tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 3a$ $(a \in \mathbb{R}_+^\star)$.

1. Déterminer le barycentre $G$ des points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients 4, -3, 2. Construire ce point.
2. Soit $\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto f(M) = 4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 - 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 \end{aligned}$ Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $f(M) = -36a^2$. Représenter cet ensemble.

Retour page 1

**Ex. 1707.** 5 points ./1982/marocC/exo-2/texte.tex

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension trois, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(\vec{\imath}) = f(\vec{\imath}) = f(\vec{k}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

1. Déterminer l'ensemble image $\mathbf{Im}f$ et le noyau $\ker f$ de l'endomorphisme $f$. Montrer que $\mathbf{Im}f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de l'espace vectoriel $E$.
2. a) Montrer que $f \circ f = 3f$.

   b) Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de $E$, $\vec{u} \in \mathbf{Im}f \iff f(\vec{u}) = 3\vec{u}$.
3. On désigne par $id_E$ l'application identique de $E$. Montrer qu'on peut trouver un réel $\alpha$ non nul tel que l'endomorphisme $g = \alpha f - id_E$ soit une involution. Montrer alors que $g$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathbf{Im}f$ .

## Problème 625 — 12 points ./1982/marocC/pb/texte

Soit $P$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct. On appelle $\mathscr{P}$ le plan vectoriel associé à $P$.

A- Pour tout réel $a$ non nul, on considère l'application affine $F_a$ de $P$ dans $P$ qui au point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = \mathrm{i}a\overline{z} + 2a(1-\mathrm{i}) \qquad \text{avec } \overline{z} = x - \mathrm{i}y.$$

1. Donner suivant les valeurs de $a$ l'ensemble des points invariants de $F_a$.
2. Pour quelles valeurs de $a$, $F_a$ est-elle une isométrie de $P$ ?
   Dans chaque cas préciser les éléments caractérisant $F_a$.

B- Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+3}{\mathrm{e}^{x}-1}\right).$$

On appelle $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le plan affine $P$.

1. Vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad f(x) = x + \log\left[\frac{1+3\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right].$$
   Étudier la fonction $f$ . Préciser les asymptotes à $\Gamma$. Construire $\Gamma$ (unité : 2 cm).
2. On appelle $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [\log 3\,; +\infty[$. Montrer que $g$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à préciser.
   Énumérer les propriétés de $g^{-1}$.
   Sans calculer $g^{-1}(x)$ déterminer $(g^{-1})'(\log 7)$(nombre dérivé de $g^{-1}$ au point $\log 7$).
3. $\alpha$ étant un réel strictement positif, résoudre $f(x) = \alpha$.
4. Étudier les variations de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^\star$
$$v(x) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^{x}+3}{\mathrm{e}^{x}-1}\right)$$
   (ne pas construire sa courbe). Calculer $v(\log 3)$.
5. Soit $F = g^{-1} \circ f$.

   a) Donner l'ensemble de définition de $F$.

   b) Exprimer $F(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

C- On considère le mouvement d'un point $m$ de $P$ dont les coordonnées sont données à l'instant $t$ par

$$\begin{cases} x = \log(t + 2 + \dfrac{4}{t}) + 2 \\ y = \log(t+1) - 2. \end{cases}$$

Soit $(\gamma)$ la trajectoire de $m$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$ ?



Retour page 1

1. Donner une équation cartésienne de la courbe $(\gamma')$ transformée de $(\gamma)$ par l'application$F_1$ (de la partie A avec $a = 1$).
2. À l'aide de la courbe $(\Gamma)$ tracée en B, construire la trajectoire $(\gamma)$. Déterminer les asymptotes à $(\gamma)$.
3. Donner le nombre de points de $(\gamma)$ d'abscisse 4. La courbe $(\gamma)$ est-elle la courbe représentative d'une fonction numérique ?

## XXI. Maroc, série E

**Ex. 1708.** *4 points* *./1982/marocE/exo-1/texte.tex*

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer pour tout nombre complexe $z$ différent de 1 l'égalité

$$\frac{z^4-1}{z-1} = z^3+z^2+z+1.$$

2. Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ : $z^4 = 1$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) + 1 = 0.$$

**Ex. 1709.** *4 points* *./1982/marocE/exo-2/texte.tex*

Soit $E$ un espace affine de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère quatre points $A$, $B$, $C$ et $S$ de $E$ non coplanaires.

**1.** Soit $M$ le milieu du bipoint $(B,\ C)$, montrer que l'isobarycentre des quatre points $A$, $B$, $C$ et $S$ est un point point du plan $P$ de $E$ passant par les points $S$, $A$ et $M$.

**2. Épure**

On donne les coordonnées des points $A$, $B$, $C$ et $S$.

$$A(2\ ;\ 11\ ;\ 0)\ ;\ B(10\ ;\ 9\ ;\ 0)\ ;\ C(0\ ;\ 4\ ;\ 0) \qquad \text{et} \qquad S(0\ ;\ 0\ ;\ 8).$$

L'unité de longueur est le centimètre. On place la ligne de terre au milieu de la terre et parallèle au peit côté de celle-ci. L'origine est à 2 cm du bord gauche de la feuille.

a) Représenter le plan $P$ défini au 1 par ses traces et déterminer le point $I$ intersection du plan $P$ et de la droite passant par le milieu $Q$ du bipoint $(A,\ C)$ et le milieu $R$ du bipoint $(S,\ B)$.

b) Trouver le calcul les coordonnées du point $I$.

### Problème 626 *12 points* *./1982/marocE/pb/texte*

Soit $E$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $a$ un nombre réel, on considère l'application $\varphi_a$ de $E$ dans $E$ qui à tout vecteur $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ayant pour affixe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ fait correspondre la vecteur $\varphi_a(\vec{V})$ d'affixe

$$z' = \frac{a+1}{2}z + \frac{a-1}{2}\mathrm{i}\overline{z}$$

($\overline{z}$ est le nombre conjugué de $z$).

A- 1. Montrer que l'application $\varphi_a$ est une application linéaire de $E$ dans $E$ et déterminer sa matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

2. Pour quelles valeurs de $a$, $\varphi_a$ est-elle bijective ? Déterminer suivant les valeurs de $a$, le noyau et l'image de $\varphi_a$.

3. Soit $F$ l'ensemble des applications $\varphi_a$ qui sont bijectives.
Déterminer l'application $\varphi_b \circ \varphi_a$. Montrer que $(F,\ \circ)$ est un groupe commutatif pour la composition des applications.

4. L'application $\varphi_a$ peut-elle une isométrie vectorielle ? Si oui, précise sa nature et ses éléments caractéristiques.

B- Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien associé à $E$. Le plan $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $F_a$ l'application qui au point $M(x\ ;\ y)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a+1}{2}x + \dfrac{a-1}{2}y + a^2 \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + \dfrac{a+1}{2}y + a^3 - 4a - 1. \end{cases}$$

1. Déterminer les applications $F_1$ et $F_{-1}$. Préciser leurs éléments caractéristiques.
2. On considère le point $A(-1\ ;\ 1)$. Déterminer l'ensemble $(C)$ des images $A'(x\ ;\ y)$ de $A$ par les applications $F_a$ lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'équation de la courbe $(C)$ peut s'écrire

$$y^2 = (x+1)(x-3)^2.$$

C- 1. Étudier la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x+1}.$$

   Construire la courbe $(C)$ définie en B2.

2. Déterminer l'aire du domaine $\Delta$ défini par

$$M(x\ ;\ y) \in \Delta \iff (-1 \leqslant x \leqslant 3 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant y \leqslant 0).$$

D- Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère le point mobile $M$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$$

où $t$ désigne le temps.

1. Déterminer la trajectoire de $M$ lorsque $t$ décrit l'intervalle $\left[-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\right]$.
2. Calculer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de $M$ à l'instant $t$.
3. Décrire le mouvement de $M$ sur cette trajectoire.

## XXII. Montpellier, série C

**Ex. 1710.** — *4 points* — *./1982/MontpellierC/exo-1/texte.tex*

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^\star \\ (n,\ p) &\longmapsto 2^n(2p+1) \end{aligned}.$$

**1.** a) Calculer $\varphi(0,\ 0)$, $\varphi(3,\ 4)$ et $\varphi(2,\ 6)$.

b) Décomposer $1584$ en produit de facteurs premiers. Déterminer l'antécédent de $1584$ par $\varphi$.

c) Montrer que $\varphi$ est bijective.

**2.** On définit une loi de composition interne notée $T$ dans $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall (n,\ p) \in \mathbb{N}^2,\ \forall (n',\ p') \in \mathbb{N}^2, \quad (n,\ p)T(n',\ p') = (n+n',\ 2pp'+p+p').$$

a) Calculer $(3,\ 4)T(2,\ 6)$.

b) Résoudre l'équation $(3,\ 4)T(n,\ p) = (4,\ 49)$.

c) Démontrer que l'application $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{N}^2,\ T)$ sur $(\mathbb{N}^\star,\ \times)$.

d) Est-ce que $(\mathbb{N}^2,\ T)$ admet un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?



Retour page 1

**Ex. 1711.** 4 points ./1982/MontpellierC/exo-2/texte.tex

On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes $z_1$ et $z_2$ de module 1 et d'arguments respectifs $\alpha$ et $\beta$.

**1.** Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ?

**2.** Soit deux points $A$ et $B$ d'un plan complexe d'origine $O$ d'affixes respectives $a$ et $b$ (on supposera $O,\ A$ et $B$ non alignés).
Calculer en fonction de $a$ et $b$ l'affixe $z$ du point $I$ barycentre de $(A,\ |b|)$ et $(B,\ |a|)$.

**3.** A l'aide du 1 montrer que $\dfrac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.
Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

## Problème 627 *12 points* ./1982/MontpellierC/pb/texte

I. Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{(a,\ b)}=\begin{pmatrix} a+b & 0\\ a & b-a\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a,\ b)\in\mathbb{R}^2.$$

On pose $I=M_{(0,\ 1)}$ et $J=M_{(1,\ 0)}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de base $(I,\ J)$ de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $2\times 2$.
2. Calculer $J^2$. En déduire que si $M\in$E, $M'\in$E alors $M\times M'\in$E.
   Montrer que (E, $+$, $\times$) est un anneau commutatif unitaire.
3. Quelles sont les matrices $M_{(a,\ b)}$ inversibles dans E ? Exprimer alors $\left(M_{(a,\ b)}\right)^{-1}$ dans la base $(I,\ J)$.

II. Dans ce qui suit on suppose $b=0$.
Soit $V$ le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soit $P$ un plan affine d'espace vectoriel associé $V$ ; $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit $f_a$ l'application affine de $P$ dans $P$ dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

$$M_{(a,\ 0)}=\begin{pmatrix} a & 0\\ a & -a\end{pmatrix}$$

et qui au point $O$ fait correspondre le point $O'(0\ ;\ a+3)$.

1. Déterminer analytiquement $f_a$.
2. Pour quelles valeurs de $a$, $f_a$ est-elle une bijection ?
   Déterminer analytiquement, quand elle existe $f_a^{-1}$.
3. Déterminer suivant les valeurs de $a$, l'ensemble $D$ des points invariants par $f_a$.
4. Démontrer que seule l'application $f_1$, obtenue pour la valeur 1 du paramètre $a$, est une involution que l'on caractérisera.
5. $f_a$ peut-elle être une isométrie ?
6. On prend $\alpha\in\mathbb{R}_+^\star$. Soit $G$ le barycentre des points $A(\alpha\ ;\ \alpha)$, $B(\alpha\ ;\ 2)$, $C\left(\alpha\ ;\ -\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}\right)$.
   Trouver les coordonnées de $G$ ; en déduire une équation cartésienne de la courbe décrite par $G$ quand $\alpha$ varie dans $\mathbb{R}_+^\star$.
7. Soient $A_1,\ B_1,\ C_1$ les images des points $A,\ B,\ C$ par l'application $f_1$ (définie en II4).
   Soit $G_1$ le barycentre de $A_1,\ B_1,\ C_1$ respectivement affectés de 1, 2, -1.
   Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par $G_1$ quand $\alpha$ varie dans $\mathbb{R}_+^\star$.

III. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de la fonction numérique $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$g(x)=\frac{x}{2}+2+\frac{\log x}{x}.$$



Retour page 1

1. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2\log x + 2 \end{aligned}$$

Étudier les variations de $h$ et préciser le signe de $h(x)$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de $h$).

2. Étudier les variations de la fonction $g$. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

3. Soit $(\mathscr{C}_1)$ la transformée de $(\mathscr{C})$ par $f_1$ (définie dans II4).

a) Écrire une équation de $(\mathscr{C}_1)$. ($(\mathscr{C}_1)$ est la courbe représentative d'un fonction $g_1$).

b) Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont les mêmes droites asymptotes.
Tracer $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ que $(\mathscr{C})$ sans étudier $g_1$.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = m$ $(m > 1)$ et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$.

# XXIII. Nancy & Metz, série C

**Ex. 1712.** *4 points.* *./1982/nancymetzC/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17q - 11p = 2$.

**2.** On désigne par $\overline{n}$ la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$.
Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \overline{1} = \overline{0}$.

**Ex. 1713.** *4 points.* *./1982/nancymetzC/exo-2/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - [(1+2\mathrm{i})u + 1]z + (-1+\mathrm{i})u^2 + \mathrm{i}u = 0$$

où $z$ est l'inconnue complexe et $u$ un paramètre complexe.
On appellera $z'$ la racine qui est un polynôme du premier degré en $u$ et dont le coefficient de $u$ est $(1+\mathrm{i})$, $z''$ l'autre racine.

**2.** Dans le plan affine euclidien, on appelle $P$ le point d'affixe $u$, $M'$ celui d'affixe $z'$, $M''$ celui d'affixe $z''$.
Par quelles transformations du plan passe-t-on de $P$ à $M'$ (on appellera $T_1$ cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques), puis de $P$ à $M''$ (on appellera $T_2$ cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques).

## Problème 628 *12 points.* *./1982/nancymetzC/pb/texte*

I. On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$.

2. Déterminer une fonction polynôme $P$, de degré inférieur ou égal à 3, qui a une même valeur et un même nombre dérivée que $f$ en 0 et 1.

3. Soit $k$ la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser $k$ et en déduire la position relative de $C_f$ et $C_P$ courbes représentatives respectives de $f$ et $P$ dans un même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tracer soigneusement $C_f$ et $C_P$. Faire figurer les tangentes aux points communs.

Retour page 1

4. Á l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0\,;1]$, montrer que

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{120}.$$

5. Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{n}{240} < \log 2 < \frac{n+1}{240}.$$

II. On désigne par $E$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
Soit $h$ un réel strictement positif et $\varphi$ l'application de $E$ vers $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\varphi(P) = (P(0),\ P'(0),\ P(h),\ P'(h)).$$

1. Quelle est la dimension de $E$ ? Montrer que $\varphi$ est une application linéaire bijective de $E$ sur $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $\varphi^{-1}$ la bijection réciproque de $\varphi$.
   Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}((0,\ 0,\ 1,\ 0))$ et $P_4 = \varphi^{-1}((0,\ 0,\ 0,\ 1))$.
3. Soit $P_1 = 1 - P_3$ et $P_2$ défini par $P_2 = -P_4(h-x)$.
   Vérifier que $P_1 = \varphi^{-1}((1,\ 0,\ 0,\ 0))$ et $P_2 = \varphi^{-1}((0,\ 1,\ 0,\ 0))$.
4. Calculer pour $i$ élément de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ l'intégrale $\int_0^h P_i(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Montrer que tout élément $P$ de $E$ s'écrit comme combinaison linéaire de $P_1,\ P_2,\ P_3$ et $P_4$.
   En déduire la relation, pour $P$ élément de $E$,

$$\int_0^h P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}\,(P(0)+P(-h)) + \frac{h^2}{12}\left(P'(0)-P'(h)\right).$$

III. Soit $a$ un réel strictement positif et $g$ une application de $[0\,;a]$ dans $\mathbb{R}$ possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0\,;a]$.
Soit $h \in ]0\,;a]$, et $Q_h$ l'élément de $E$ ayant même valeur et même nombre dérivé que $g$ en $0$ et $h$.

1. Montrer que $g$ est intégrable sur $[0\,;h]$, et, en utilisant les résultats de la partie II, qu'on a la relation

$$\int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h Q_h(t) = \int_0^h g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}\,(g(0)+g(h)) - \frac{h^2}{12}\left(g'(0)-g'(h)\right).$$

2. Pour tout $u$ de $[0\,;a]$, on pose

$$\Psi(u) = \int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{u}{2}\,(g(0)+g(u)) - \frac{u^2}{12}\left(g'(0)-g'(u)\right).$$

Montrer que l'application $\Psi$ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0\,;a]$, que $\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$, et que

$$\forall u \in [0\,;a], \qquad \Psi^{(3)}(u) = \frac{u^2}{12} g^{(4)}(u).$$

Retour page 1

3. On pose $M = \sup\limits_{t\in[0\,;a]} \left|g^{(4)}(t)\right|$.

 Montrer successivement que :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0\,;a], \qquad \left|\Psi''(x)\right| \leqslant M\frac{x^3}{36} \\ &\forall y \in [0\,;a], \qquad \left|\Psi'(y)\right| \leqslant M\frac{y^4}{144} \\ &\forall z \in [0\,;a], \qquad \left|\Psi(z)\right| \leqslant M\frac{z^5}{720} \end{aligned}$$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes que :

$$\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\left(g(0)+g(-h)\right) + \frac{a^2}{12}\left(g'(0)-g'(h)\right) + R, \qquad \text{avec } |R| \leqslant \frac{a^5}{720}M.$$

## XXIV. Nantes, série C

**Ex. 1714.** ———— *4 points.* *./1982/nantesC/exo-1/texte.tex*

Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros : $a$ et $b$. On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire $X$ associant à chaque paire de jetons tirés, $a$, $b$, le plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$.
 a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
 b) Déterminer la loi de probabilité de $X$ et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
 c) Déduire de la question précédente les probabilités des évènements suivants :

 $A$ : « l'équation $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax+by=1$ admet des solutions ».

 $B$ : « l'équation $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax+by=2$ admet des solutions ».

 $C$ : « l'équation $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax+by=12$ admet des solutions ».

2. On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note $a$ et $b$, on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite.
 a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$ au cours de quatre tirages successifs ?
 b) Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de $a$ et de $b$ au cours de $n$ tirages successifs soit supérieure à $0{,}999$ ?

**Ex. 1715.** ———— *4 points.* *./1982/nantesC/exo-2/texte.tex*

Soit $E_3$ l'espace affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. $f$ désigne l'application affine de $E_3$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z. \end{cases}$$

 Démontrer que $f$ est une rotation affine ; préciser son axe et une mesure de son angle.

Retour page 1

2. On considère les quatre points :

$$A(2\ ;\ 0\ ;\ 0),\ B\left(-1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0\right),\ C\left(-1\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ 0\right),\ D(0\ ;\ 0\ ;\ 4).$$

On pose $F = \{A,\ B,\ C,\ D\}$.

a) Vérifier que $ABC$ est un triangle équilatéral de centre de gravité $O$.

b) Vérifier que l'application $f$ laisse $F$ globalement invariant.

3. Soit $g$ une isométrie affine de $E_3$ qui laisse $F$ globalement invariant.

a) Déterminer l'isobarycentre $G$ des quatre points $A,\ B,\ C,\ D$. Calculer

$$\left\|\overrightarrow{GA}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{GB}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{GC}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{GD}\right\|.$$

b) En déduire que $g$ laisse invariant les points $G$ et $D$.

c) En déduire l'ensemble des déplacements de $E_3$ qui laissent $F$ globalement invariant.

4. Soit $s$ un antidéplacement de $E_3$ qui laisse $F$ globalement invariant.

a) Démontrer que $s$ est associé à une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel ; en déduire la nature géométrique de $s$.

b) Quel est l'ensemble des isométries affines de $E_3$ qui laissent $F$ globalement invariant ?

## Problème 629 *12 points.*

*./1982/nantesC/pb/texte*

Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes.

$P$ est un plan affin euclidien muni d'un au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ ; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Les affixes des points de $P$ sont toujours données par rapport au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

$f$ et $g$ sont les deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$\begin{cases} f(z) = z^3 + 4(1-\mathrm{i})z^2 - 2(2+7\mathrm{i})z - 16 + 8\mathrm{i}, \\ g(z) = z^3 + 2 - 2\mathrm{i}. \end{cases} \quad \text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}$$

I. 1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z$ vérifiant $g(z) = 0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.

2. Déterminer qu'il existe un et un seul réel $r$, que l'on déterminera, tel que $f(r) = 0$. Déterminer les deux nombres complexes $a$ et $b$ de façon à avoir :

$$f(z) = (z-r)(z^2 + az + b) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

3. Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 0$. Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan $P$.

4. $A,\ B,\ C$ sont les points d'affixes respectives sont $-1+3\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i},\ -4$. Déterminer l'affixe du barycentre $G$ des points $A,\ B,\ C$ affectés respectivement des coefficients 4, 3 , 5.

5. On désigne par $h$ l'application de $P$ vers $\mathbb{R}$, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le réel :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}.$$

Calculer $h(C)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$ et de $h(G)$.

Déterminer et dessiner l'ensemble des points $M$ de $P$ vérifiant $h(M) = 18$.

II. À tout point $M$ de $P$ d'affixe $z$ on associe le point $M'$ de $P$ d'affixe :

$$f(z) - g(z)$$

1. Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ dans le même repère.

Retour page 1

2. $A$, $B$, $C$ sont les points définis au **??**. Donner une équation de l'ensemble $H_1$ des points $M$ de $P$ tels que $O$, $B$ et $M'$ soient alignés. Démontrer que $H_1$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.
3. Donner une équation de l'ensemble $H_2$ des points $M$ de $P$ tels que $O$, $I$ et $M'$ soient alignés, $I$ étant le centre de gravité de $A$, $B$, $C$. Démontrer que $H_2$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra par exemple, donner une équation de $H_2$ sous la forme : $y = \phi(x)$.
4. Démontrer qu'un point $M$ est commun à $H_1$ et $H_2$ si, et seulement si, $M'$ est confondu avec $O$.
   Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$.
   En déduire les points communs à $H_1$ et $H_2$.
   Construire $H_1$ et $H_2$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

III. Un mobile du plan $P$ a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps $t$ par :

$$z(t) = f(t.\mathbf{i}) + 10 - 6\mathbf{i}$$

quand $t$ décrit l'intervalle $[0\,;2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant $t$.

1. Déterminer les coordonnées $(x(t)\ ;\ \ )y(t)$ de $M(t)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant $t$.
2. Faire un tableau indiquant les variations de $x$ et de $y$ en fonction de $t$.
3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs :

   $$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{7}{4},\ 2$$

   du réel $t$ et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs :

   $$0,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{4},\ 2 \quad \text{de } t.$$

4. Déduire de ce qui précède la tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens de parcours, quand $t$ décrit $[0\,;2]$.

## XXV. Nice, série C

**Ex. 1716.** *4 points.* *./1982/niceC/exo-1/texte.tex*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à $n$. On suppose $n \geqslant 3$.
On tire une boule, qu'on remet dans l'urne après en avoir noté le numéro. On admet que le tirage de chacune des boules est équiprobable. Puis on tire une seconde boule et on en note le numéro.
On appelle $X$ la variable aléatoire définie de la façon suivante :

— si les numéros sont égaux, $X$ prend leur valeur commune,

— si les numéros sont différents, $X$ prend la valeur du plus grand des deux.

**1.** Trouver la probabilité des évènements suivants :
$E_1$ : $X$ prend la valeur 1.
$E_2$ : $X$ prend la valeur 2.
$E_3$ : $X$ prend la valeur 3.
$E_p$ : $X$ prend la valeur $p$ ($p$ entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$).

**2.** Calculer l'espérance de $X$. On rappelle que la somme des $n$ premiers entiers no nuls est :

$$\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$$

et que la somme des carrées des $n$ premiers nombres entiers non nuls est :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ex. 1717. 4 points. ./1982/niceC/exo-2/texte.tex

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.
Soit $C$ la courbe d'équation

$$x^2-3y^2+8x+12y+16=0.$$

**1.** Démontrer que $C$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer $C$.

**2.** Soit $(D)$ la droite d'équation $y-3=0$. On désigne par $d(M,\ D)$ la distance du point $M$ à la droite $(D)$. Soit $P$ le point de coordonnées $(-4\ ;\ 6)$ ; $d(M,\ P)$désigne la distance de $M$ à $P$.
Quel est l'ensemble des points $M$ tels que $d(M,\ P)=2d(M,\ D)$ ?

## Problème 630 12 points

./1982/niceC/pb/texte

On désigne par $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

A- On appelle $\mathscr{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynômes $P$ définies par

$$(\forall x\in\mathbb{R})\qquad P(x)=ax^2+bx+c$$

où $(a,\ b,\ c)$ est élément de $\mathbb{R}^3$.
On appellera $\theta$ la fonction polynôme nulle.
On rappelle que $\mathscr{P}_2$ est un espace vectoriel sur R, de dimension trois, dont la base canonique est $(e_0,\ e_1,\ e_2)$ avec

$$(\forall x\in\mathbb{R})\qquad e_0(x)=1,\ e_1(x)=x, e_2(x)=x^2.$$

.
On considère l'application $\varphi$ de $\mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{P}_2$, qui à tout élément $P$ associe $\varphi(P)=Q$, avec $Q$ défini par la relation

$$(\forall x\in\mathbb{R},\qquad [\varphi(P)](x)=x^2P''(x)-(\alpha x+\alpha-1)P'(x)+P(x)\tag{1}$$

où $\alpha$ est un réel donné, $P'$ et $P''$
étant les fonctions dérivées première et seconde de $P$.

1. a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{P}_2$.
   b) Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ en fonction de $e_0$, $e_1$, $e_2$. $P$ étant défini par $(\forall x\in\mathbb{R})\qquad P(x)=ax^2+bx+c$, calculer $\varphi(P)$ en fonction de $e_0$, $e_1$, $e_2$.
2. Montrer que si $\alpha\in\mathbb{R}-\{1,\ \dfrac{3}{2}\}$, $(\varphi(e_0),\ \varphi(e_1),\ \varphi(e_2))$ est une base de $\mathscr{P}_2$. En déduire que $\varphi$ est un automorphisme de $\mathscr{P}_2$.
   Déterminer la fonction polynôme $P$ telle que $\varphi(P)=\theta$.
3. Dans cette question, on suppose $\alpha=1$.
   a) Calculer alors $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.
   b) Montrer que $\varphi$ est une projection vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.
   c) Comment faut-il choisir $Q$ dans $\mathscr{P}_2$ pour qu'il existe des fonctions polynômes $P$ de $\mathscr{P}_2$ vérifiant $\varphi(P)=Q$ ?
   On donne $Q$ défini par $Q(x)=x^2-2$. Trouver les fonctions polynômes $P$ solutions de $\varphi(P)=Q$.
4. Dans cette question, on suppose $\alpha=\dfrac{3}{2}$.
   a) Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.
   b) En déduire $\mathbf{Im}\varphi$.
   c) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

B- On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble $F$ des fonctions $f$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, et vérifiant la relation

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^\star),\qquad x^2f''(x)-xf'(x)+f(x)=0.\tag{2}$$



Retour page 1

1. Vérifier que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$, est une solution de (2). Comparer à A3.
2. On se propose de chercher les éléments $f$ de $F$, sous la forme $f(x) = xg(x)$ où $g$ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   a) Vérifier que (2) équivaut à $xg'(x) = d$, où $d$ est une constante réelle arbitraire.
   b) En déduire la forme générale des fonctions $g$ puis celles des fonctions $f$.
3. Soit $h$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $h(x) = x\log x - 2x$.
   a) Montrer que $h$ est un élément de $F$.
   b) On définit la fonction $\tilde{h}$ par

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star \\ \text{et} \\ \tilde{h}(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $\tilde{h}$ pour $x = 0$.
Étudier les variations de $\tilde{h}$ et donner sa représentation graphique dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. On prendra

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1.$$

Préciser la tangente à l'origine.

## XXVI. Orléans Tours, série C

**Ex. 1718.** *4 points.* *./1982/orleansC/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, l'équation (1)

$$2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(a+\mathrm{i})z + \mathrm{i}a(1-\mathrm{i}) = 0 \tag{1}$$

où $z$ est l'inconnue complexe, et $a$ un paramètre réel.

**2.** A tout nombre complexe $z$, on associe dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M$ d'affixe $z$.
Déterminer l'ensemble E des points, images des solutions de l'équation (1), quand $a$ décrit $\mathbb{R}$.

**3.** Quel est l'ensemble transformé de E par la similitude directe plane $S$, de centre $I\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$, d'angle $+\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

**Ex. 1719.** *4 points.* *./1982/orleansC/exo-2/texte.tex*

$\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cube de sommets $O$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, défini par

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}\,,\ \overrightarrow{OC} = \vec{j}\,,\ \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}\,,\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \vec{k}\,.$$

**1.** Dessiner $\mathscr{C}$ ; soit $r_1$ la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe $(OA)$ dirigée par $\vec{i}$, dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$ ; soit $r_2$ la rotation de $\mathscr{E}$, d'axe $(OC)$ dirigée par $\vec{j}$, dont une mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.
Montrer que $f$ et $g$ sont des rotations de $\mathscr{E}$, définies par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} & \qquad g : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} \\ M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \longmapsto f(M)\left|\begin{array}{l} -y \\ -z \\ x \end{array}\right. & \qquad M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \longmapsto g(M)\left|\begin{array}{l} -z \\ -x \\ y \end{array}\right. \end{array}.$$

(On ne cherchera ni l'axe, ni l'angle de chacune des rotations $f$ et $g$).

**2.** On note $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$, $F_1$, $G_1$ les images respectives par $f$ des points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ et $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, $E_2$, $F_2$, $G_2$, les images respectives par $g$ des points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$.
Montrer que $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}$.

**3.** On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathscr{C}_2$ par $\varphi$ de la liste ordonnée de points $\mathscr{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$ ?
Montrer que $\varphi$ est une rotation dont on précisera l'axe.

## Problème 631 *12 points.*

./1982/orleansC/pb/texte

I. Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$x \longmapsto f(x) = x \log \left| x + \frac{1}{x} \right|$$

où $\log$ désigne la fonction logarithme népérien de base $\mathrm{e}$.

1° Préciser l'ensemble de définition $D_f$ ; étudier la continuité et la dérivabilité de $f$, en énonçant les théorèmes utilisés.

2° a) Étudier la dérivabilité de $f'$, fonction dérivée de $f$, et en déduire les variations de $f'$.

b) Soit $F$ la restriction de $f'$ à l'intervalle $I = ]-1\,;0[$.
Démontrer que $F$ est une bijection de $I$ sur un intervalle à préciser.
En déduire que dans $I$, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée $a$ ; on ne cherchera pas à calculer $a$, mais on montrera que $a > -\dfrac{1}{2}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

d) Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_f$, et les variations de $f$.

3° Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$. (On pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$).

4° Pour une étude locale de $f$ au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant :
soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = f(x) \quad \text{pour } x \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad h(0) = 0.$$

a) Démontrer que $h$ est le prolongement par continuité de $f$ en zéro.

b) Étudier la dérivabilité de $h$ en zéro.

*Conclusion de la partie* **??** : Donner le tableau de variation de $f$ et construire la courbe (C) représentative de $f$ dans $P$ plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en précisant l''intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

II. $P$ est la plan affine euclidien muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $s$ l'application de $P$ dans $P$ définie par :

$$\begin{aligned} s : P &\longrightarrow P \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} &\longmapsto s(M) = M' \begin{vmatrix} x' = x - 1 \\ y' = y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1° Déterminer la nature et les points invariants de $s$.

2° Soit (C') est l'image de (C) par $s$, (C) étant la courbe représentative dans $P$ de la fonction $f$ étudiée dans la partie I. Construire (C') dans le même repère que (C).
Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant (C') comme courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Calculer $g(x)$ et préciser $D_g$ ensemble de définition de $g$.

III. 1° Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(n) < 1 < f(n+1)$.
En déduire l'encadrement suivant de $\mathrm{e}$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Préciser cet encadrement pour $n = 1$. Soit $\ell(n)$la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire :

$$\ell(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ell(n)$ est majoré par $\dfrac{4}{n}$ et minoré par $\dfrac{2}{n}$.

2° Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de $\mathrm{e}$ permet d'obtenir une valeur approchée de $\mathrm{e}$ à $10^{-3}$, c'est à dire :

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - \mathrm{e}\right| < 10^{-3}.$$

# XXVII. Papeete, série C

**Ex. 1720.** ——— *3 points* *./1982/papeeteC/exo-1/texte.tex*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ : $493\lambda + 10 \equiv 2$ modulo 5.
2. Soit $N = \overline{xyzt}$ un entier naturel écrit dans le système décimal, $x$ étant non nul. Déterminer ce nombre sachant que les restes de la division de $N$ par 17 et par 29 sont égaux à 10, et que le reste de la division de $N$ par 5 et par 9 sont égaux à 2.

**Ex. 1721.** ——— *4 points* *./1982/papeeteC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x + 5}{\mathrm{e}^x + 2}$.

1. Étudier $f$.
2. Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque $f^{-1}$.
3. On considère la plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).
   Calculer l'aire du domaine $D$ délimité par les droites d'équations $x = 1,\ x = 3,\ y = \dfrac{5}{2}$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$.

**Problème 632** *13 points* *./1982/papeeteC/pb/texte*

A- 1. Pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des matrices $M(a,b)$ où $(a,b)$ appartient à $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, $\mathscr{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déterminer une base. Quelle est la dimension de $\mathscr{M}$ ?

b) Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathscr{M}$ a une structure de corps commutatif.

2. a) Montrer que $(1,\ 1+2\mathrm{i})$ est une base de $\mathbb{C}$, espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
En déduire que tout nombre complexe peut se mettre de façon unique sous la forme $a + b(1+2\mathrm{i})$.

b) A tout nombre complexe $z$ s'écrivant $a + b(1+2\mathrm{i})$ on associe la matrice $M(a,b)$ que l'on notera $\varphi(z)$.
Montrer que l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathscr{M}$ ainsi définie est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ muni de l'addition dans $\mathscr{M}$ muni de l'addition.
Quelle conclusion en tirer ?

3. a) Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$



Retour page 1

b) De façon générale, montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^\star$ :

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n=\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\\ -\frac{5}{2}\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}.$$

B- Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé $E$ rapporté au repère orthonormé $(0,\ \overrightarrow{\epsilon_1},\ \overrightarrow{\epsilon_2})$.

Soit $\psi$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui laisse $O$ invariant et qui a pour endomorphisme associé l'endomorphisme de matrice $\varphi\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit $A_0$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans le repère $(0,\ \overrightarrow{\epsilon_1},\ \overrightarrow{\epsilon_2})$. On considère la suite de points $A_1=\psi(A_0)$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^\star)\quad A_n=\psi(A_{n-1})$.

1. Déterminer les coordonnées $x_n$ et $y_n$ du point $A_n$.
2. Montrer que les suites $x_n$ et $y_n$ sont périodiques.
3. Déterminer l'isobarycentre des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A3,\ A_4,\ A_5$.

C- On considère dans $\mathscr{E}$ l'application affine $g$ définie par

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

On désigne par $F$ son endomorphisme associé.

1. Pour tout réel $\lambda$ on appelle $E_\lambda$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $F(\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}$. Montrer que $E_\lambda$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $\lambda$ pour lesquelles $E_\lambda$ n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Déterminer une base de $E_{\lambda_1}$ et une base de $E_{\lambda_2}$.
3. a) On considère $\overrightarrow{U}=3\overrightarrow{\epsilon_1}+\overrightarrow{\epsilon_2}$ et $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\epsilon_2}$. Montrer que $(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V})$ est une base de $E$. Est-elle orthonormée ?

   b) Quelle est la matrice de $F$ dans la base $(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V})$ ?

   c) Si un point $M$ a pour coordonnées $(X,\ Y)$ dans le repère $(O,\ \overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V})$, exprimer les coordonnées $(X',\ Y')$ de $g(M)$ dans ce même repère en fonction de $(X,\ Y)$.
4. Soit $p$ la projection affine sur la droite passant par $O$, de vecteur directeur $\overrightarrow{U}$, de direction la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{V}$.

   Montrer que $\quad(\forall M\in\mathscr{E})\qquad \overrightarrow{p(M)g(M)}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{p(M)M}.$
5. Représenter les points $g(A_0),\ g(A_1),\ \ldots,\ g(A_5)$ puis les points $A_0,\ A_1,\ \ldots A_5$ dans le repère $(0,\ \overrightarrow{\epsilon_1},\ \overrightarrow{\epsilon_2})$.

# XXVIII. Papeete, série E

**Ex. 1722.** ——— *4 points* *./1982/papeeteE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien $P$, on considère un triangle équilatéral $ABC$ de côté $a$.

1. Déterminer les nombres réels $b$ et $c$ pour que le point $D$ symétrique de $B$ par rapport à la droite $(AC)$, soit le barycentre des points $A,\ B,\ C$ affectés de respectivement des coefficients $1,\ b\ ,\ c$. (On pourra rapporter le plan au repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$).
2. Soit $k$ un nombre réel quelconque. Étudier suivant les valeurs de $k$ l'ensemble $(C_k)$ des points $M$ du plan $P$ tels que :
$$MA^2-MB^2+MC^2=ka^2.$$



Retour page 1

Ex. 1723. 4 points ./1982/papeeteE/exo-2/texte.tex

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) :

$$z^3 - z^2(1+8\mathrm{i}) + z(-7+17\mathrm{i}) - 10\mathrm{i} + 30 = 0. \tag{E}$$

1. a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure (on pourra poser $z = \mathrm{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$).
   b) Mettre l'équation (E) sous la forme $(z - \mathrm{i}y)(z^2 + \alpha z + \beta)$ avec $y \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{C}^2$ puis la résoudre.
2. Dans le plan affine euclidien $(P)$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :
   - $A$ image de la solution $z_1$ imaginaire pure
   - $B$ image de la solution $z_2$ dont la partie réelle est strictement positive
   - $C$ image de la solution $z_3$.

   Déterminer sous forme complexe la similitude plane indirecte $f$ telle que :

$$f(A) = A \qquad \text{et} \qquad f(B) = C.$$

## Problème 633 *12points* ./1982/papeeteE/pb/texte

I. Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a) Étudier la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   et tracer sa courbe courbe représentative $(\mathscr{C})$.

   b) Déterminer l'intervalle $J$ tel que $g$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J$. Calculer $g^{-1}$ pour $x$ appartenant à $J$ et tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de $g^{-1}$.

   c) Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécantes en un point $k$. Montrer que l'abscisse du point $k$ est comprise entre 1,13 et 1,14.
   On pourra utiliser la fonction $d$ définie par $d(x) = g(x) - x$.

2. a) Soit $h_b$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_b(x) = (x+b)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   où $b$ est un réel.
   Montrer que, quel que soit le réel $b$, la fonction $h_b$ admet un extrémum unique au point $x_b$ que l'on déterminera en fonction de $b$.
   Montrer que, lorsque $b$ décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des extrema, c'est-à-dire des points $M_b\left(x_b\ ;\ y_b = h(x_b)\right)$, est la courbe $(\mathscr{C})$.

   b) Étudier la fonction $h_3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_3(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   et tracer sa courbe représentative $(\Gamma)$.

   c) Calculer l'intégrale $I_{\lambda,\mu} = \displaystyle\int_{\lambda}^{\mu} h_3(x)\,\mathrm{d}x$ où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels tels que $\lambda < \mu$.
   Calculer, $\lambda$ fixé, la limite de $I_{\lambda,\mu}$ quand $\mu$ tend vers $+\infty$. Soit $J_\lambda$ cette limite. Donner une valeur décimale approchée par défaut à $10^{-1}$ près de $J_{-1}$. Interpréter géométriquement le résultat. Déterminer $\lambda$ tel que $J_\lambda = 0$.

II. $E$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_{a,b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

1. a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{B} = \{f_{1,0},\ f_{0,1}\}$ est une base de $E$.



Retour page 1

b) Déterminer dans cette base les coordonnées des fonctions $g$ et $h_3$ de la partie I du problème.

c) Montrer que, quel que soit le couple $(a,\ b)$ de réels, la fonction dérivée $f'_{a,b}$ de $f_{a,b}$ est un élément de $E$. Quelles sont les coordonnées de $f_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}$ ?

2. Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $E$ définie par :

$$\varphi(f_{a,b}) = \frac{1}{2}\left(f_{a,b} - f'_{a,b}\right)$$

où $f'_{a,b}$ est la fonction dérivée de $f_{a,b}$.

a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer les coordonnées de $\varphi(h_3)$ dans cette base.

b) Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Calculer $M^2 = M \times M$ puis $M^3$.
Montrer par récurrence que

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^n & 0 \\ -\frac{n}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

## XXIX. Paris, série C

Ex. 1724. ./1982/parisC/exo-1/texte.tex

Pour chaque couple $(a,\ q)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant q \leqslant a$, on note $b_q$ le quotient dans la division euclidienne de $a$ par $q$.
On appelle $S_q$ l'ensemble des entiers naturels non nuls $b$ tels que $s$ soit le quotient dans la division euclidienne de $a$ par $b$.

**1.** On suppose que $a = 1982$.

a) Déterminer $b_1$ ; $b_8$ ; $b_9$ et $b_{1982}$.

b) Soit $b$ un entier naturel non nul.
Démontrer que $b \leqslant b_8$ si, et seulement si, $8b \leqslant 1982$.
Démontrer que $b > b_8$ si, et seulement si, $9b > 1982$.

c) En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N}\ ;\quad b_9 < b \leqslant b_8\}$.
Déterminer le cardinal de $S_8$.

**2.** On suppose que $a$ est quelconque et que $1 \leqslant q < a$.

a) Démontrer que $S_q = \{b \in \mathbb{N}\ ;\quad b_{q+1} < b \leqslant b_q\}$.

b) Démontrer que $\forall a \geqslant 1$

$$\sum_{q=1}^{a} \text{Card}(S_q) = a$$

où $\text{Card}(S_q)$ désigne le cardinal de $S_q$.



Retour page 1

**Ex. 1725.** ./1982/parisC/exo-2/texte.tex

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension trois muni d'un repère orthonormé $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ et $\mathscr{E}$ un espace affine muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On donne l'application $f_\alpha$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M' = f_\alpha(M)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ définies par

$$\begin{cases} x' = -z+\alpha \\ y' = -x \\ z' = y-2 \end{cases}$$

où $\alpha$ est un réel donné.

**1.** Montrer que $f_\alpha$ est un déplacement que l'on caractérisera.

**2.** Pour quelle valeur de $\alpha$ ce déplacement $f_\alpha$ est-il une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation.

**3.** Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$.
Montrer que $f_1$ est un vissage dont on précisera l'axe.

## Problème 634

./1982/parisC/pb/texte

Pour chaque entier $k$ strictement positif, on définit une application $f_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x$ associe $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$. On a appelle $f_0$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x$ associe $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

**1.** a) Démontrer que pour chaque $k \geqslant 1$, la fonction $f_k$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ ; en déduire suivant la parité de l'entier $k$, le sens de variation des fonctions $f_k$.

b) Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geqslant 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\dfrac{f_k(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives $\mathscr{C}_k$ des fonctions $f_k$ ?

c) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par deux points fixes ; construire sur une même figure dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$. On précisera s'il y a lieu les asymptotes. (On prendra 2 cm comme unité).

**2.** Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \log(x+\sqrt{x^2}+1)$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (log désigne la fonction logarithme népérien).
En déduire la valeur de $I_0$.

b) Calculer $I_1$.

c) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation

$$k.I_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

En déduire $I_2$ et $I_3$.

d) Démontrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite $(I_k)$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

**3.** Soit $u_0$ un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$ ; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $k > 0$ fixé $u_1 = f_k(u_0)$ $u_n = f_k(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.

a) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) On suppose $k \geqslant 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n < \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand $n$ tend vers $+\infty$.



Retour page 1

**4.** Pour chaque entier $k$ strictement positif on définit une application $g_k$ de $[0\,;1]$ dans $\left[0\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.

a) Démontrer que pour chaque entier $k \geqslant 1$, la fonction $g_k$ admet une fonction réciproque $g_k^{-1}$.

b) Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions $g_k^{-1}$ pour $k = 1,\ 2,\ 3$.

c) Donner l'expression des fonctions $g_1^{-1}$ et $g_2^{-1}$.

## XXX. Paris, série E

**Ex. 1726.** *4 points* *./1982/parisE/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par $x'x,\ y'y, z'z$ les axes ayant pour vecteurs directeurs $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. $(Ox,\ Oy)$ est le plan horizontal de projection ; $(Oy,\ Oz)$ est le plan frontal de projection ; la ligne de terre est $y'Oy$, elle est le petit axe de la feuille, orientée positivement de la gauche vers la droite.
Le point $O$ est à 5 cm du bord gauche de la feuille ; $Oz$ est dirigé vers le haut de la feuille, $Ox$ vers le bas ; l'unité est le centimètre.

1. Construire les traces horizontale et frontale du plan $P$ d'équation $x - y + 2z - 4 = 0$.
2. On appelle $D$ la droite du plan $P$ dont la projection horizontale $d$ a pour équation $z = 0$ et $3x + y - 9 = 0$.
   Déterminer sur l'épure la projection frontale $d'$ de la droite $D$.
3. Soit $\Omega$ le point du plan $P$ de coordonnées $\left(4\ ;\ 5\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$. On considère le carré de centre $\Omega$ dont un côté est porté sur $D$.
   Construire les projections horizontale et frontale de ce carré.

**Ex. 1727.** *4 points* *./1982/parisE/exo-2/texte.tex*

Dans un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les points $A$ de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$ et $A'$ de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et le cercle $(C)$ de centre $o$ et de rayon 1.
On considère deux points $P$ et $P'$ du cercle $(C)$ symétriques par rapport à la droite $(AA')$.
On appelle $\theta$ une détermination de la mesure de l'angle $(\vec{\imath},\ \overrightarrow{OP})$ ; on suppose que $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

**1.** On appelle $I$ le point d'intersection des droites $(AP)$ et $(A'P')$ quand il existe. Calculer en fonction de $\theta$ les coordonnées du point $I$.

**2.** On appelle $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points $I$ quand $\theta$ prend toutes les valeurs possibles.

a) Donner une équation cartésienne de $(\mathscr{H})$.

b) Représenter $(\mathscr{H})$ ; on précisera ses éléments caractéristiques.

**3.** Montrer que les bissectrices de l'angle de droites $(\widehat{IA,\ IA'})$ sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

### Problème 635 *12 points* *./1982/parisE/pb/texte*

: les parties B et C sont indépendantes.

A- 1. On appelle $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de $f$.

b) Dessiner la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ dans un plan affine affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; on prendre 2 cm pour unité.
Préciser la tangente à l'origine.

c) Pour $x \geqslant 0$ on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer $I(x)$ et en déduire la limite de $I(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

2. On appelle $f_1$ l'application de $]-\infty\,;1[$ dans $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ définie par $f_1(x) = f(x)$.

Retour page 1

a) Montrer que $f_1$ admet une fonction réciproque notée $g_1$ ; préciser l'ensemble des points où $g_1$ est dérivable.

b) Dessiner la courbe représentative de $g_1$ sur la figure précédente.

3. On appelle $\gamma$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $x \longmapsto \log x$ et $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction réciproque $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

a) Dessiner $\gamma$ et $\Gamma$ sur la figure précédente.

b) Démontrer qu'il existe un point $M_0$ appartenant à $\gamma$ tel que la tangente à $\gamma$ en ce point passe par $O$ ; ce point est-il unique ?

En déduire le nombre de tangentes à $\Gamma$ passant par $O$.

c) Soient $M$ un point quelconque de $\gamma$ d'abscisse notée $t$ et $N$ un point quelconque de $\Gamma$ d'abscisse notée $x$.

i. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x$ et $t$ pour que l'angle de droites $(\widehat{OM,\ ON})$ soit droit.

ii. On appelle $\alpha$ l'unique nombre réel défini par $\alpha \mathrm{e}^{-\alpha} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Montrer que si l'angle $(\widehat{OM,\ ON})$ est droit, alors $x$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ et $t$ appartient à l'intervalle $[\mathrm{e}^{\alpha}\,;+\infty[$.

Montrer que, pour chaque $x$ appartenant à $[\alpha\,;1]$, il existe un et un seul $t$ appartenant à $[\mathrm{e}^{\alpha}\,;\mathrm{e}]$ tel que l'angle $(\widehat{OM,\ ON})$ soit droit.

B- On considère l'application affine $F$ du plan affine euclidien dans lui-même qui à chaque point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $F(m)$ de coordonnées $(X,\ Y)$ définies par

$$\begin{cases} X = 1 - x \\ Y = \mathrm{e}^{y-1} \end{cases}$$

a) Est-ce que $F$ est une application injective ? bijective ?

b) Pour chaque $t$ appartenant à $]-\infty\,;1[$, on considère le point mobile $m(t)$ de coordonnées $x = t$ et $y = t + \log(1-t)$.

Démontrer que la trajectoire de $F(m)$ est une partie de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

C- L'objet de cette question est de déterminer une valeur approchée du nombre $\alpha$ défini par $\alpha \mathrm{e}^{-\alpha} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Calculer $f(x)$ pour $x = -0{,}25$ et $x = -0{,}30$.

Calculer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

# XXXI. Poitiers, série C

**Ex. 1728.** —————— *3,5 points.* *./1982/poitiersC/exo-1/texte.tex*

Dans l'exercice, les lettres $a,\ b,\ p,\ q$ désignent des entiers relatifs.

**1.** a) Supposons que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers $a$ et $b$ d'une part ; $p$ et $q$ d'autre part ont le même *pgcd*.

b) Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux.

**2.** Déterminer le *pgcd* des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de $p$.

**Ex. 1729.** —————— *3,5 points.* *./1982/poitiersC/exo-2/texte.tex*

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ de ce plan dont les affixes $z = x + \mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ réels) vérifient

$$|(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}| = 2.$$

Les deux questions proposent chacune une méthode et peuvent être résolues de façon indépendante l'une de l'autre.

1. Calculer le carré du module du complexe $(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}$ en fonction des coordonnées $xy$ de $M$. Déterminer $E$ par une équation cartésienne. Reconnaître $E$ puis le dessiner.

2. On note $s$ la similitude directe de centre $O$, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et $t$ la translation de vecteur $-2\vec{v}$.

   a) Un point $M$ ayant pour affixe $z$, calculer l'affixe du point $s(M)$ puis l'affixe du point $t \circ s(M)$.

   b) Soit $C$ l'ensemble des points $M'$ d'affixe $\left|z'\right| = 2$
   Reconnaître $C$ et le dessiner. Déterminer l'ensemble $t \circ s(E)$ ; en déduire l'ensemble $E$.

## Problème 636 *13 points.*

*./1982/poitiersC/pb/texte*

Un plan affine est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé ; pour exécuter les figures on prendra pour unité de longueur 2 cm.
On donne le point $A$ de coordonnées $(1 ; 1)$.

-A- 1. $\alpha$ étant un réel donné non nul, soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = \alpha$. Montrer qu'il existe une application affine $f_\alpha$, et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions

$$f_\alpha(O) = A \qquad \text{et} \qquad \forall M \in \mathscr{D} \qquad \overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{\imath}.$$

2. On considère l'application $f$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ fait correspondre $M' = f(M)$ de coordonnées $(x' ; y')$ telles que

$$x' = x + 1 \qquad \text{et} \qquad y' = x + y + 1.$$

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que $f$ est une bijection du plan affine.
Y a-t-il des points invariants par $f$ ? Quelle est la matrice de l'endomorphisme $\varphi$ associé à $f$ ?

3. a) Vérifier que, quel que soit le réel $\lambda$, les vecteurs $(\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath})$ et $\varphi(\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath})$ forment une famille libre.

   b) Soit $\Delta$ une droite affine du plan : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$.

4. Chercher l'image $f(\Delta)$ de la droite $\Delta$ dans chacun des cas suivants :

   a) $\Delta$ a pour équation $x = k$. Montrer que, si $M$ appartient $\Delta$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur constant $\vec{u}_k$ dont on donnera les coordonnées.

   b) $\Delta$ a pour équation $y = k'$.

   c) $\Delta$ a pour équation $y = tx$ ; calculer dans ce cas les coordonnées du point $P$ d'intersection des droites $\Delta$ et $f(\Delta)$ en fonction de $t$. Quel est l'ensemble $\Pi$ décrit par $P$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$ ?
   *Figure* : représenter $\Pi$. Tracer les droites $\Delta$ et $f(\Delta)$ dans le cas des droites ayant respectivement pour équation $x = -1$, $y = -1$, $y = -2x$.

5. Faire une nouvelle figure.
On appelle $M_0$ l'origine du repère et l'on pose

$$M_1 = f(M_0) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad M_n = f(M_{n-1}).$$

Soit $(x_n ; y_n)$
les coordonnées de $M_n$. Calculer les coordonnées de $M_1$, $M_2$, $M_3$. Exprimer $x_n$ et $y_n$ en fonction de $x_{n-1}$ et $y_{n-1}$.
En déduire $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.
Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $M_n$ appartient à la courbe $C$ d'équation

$$y = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Reconnaître $C$ et la dessiner.

6. a) Soit $g$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En utilisant une primitive $G$ de $g$, établir l'égalité

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1)\,\mathrm{d}x$$

   $\lambda_1$ et $\lambda_2$ réels donnés.

b) Si une courbe $\Gamma$ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation $y = h(x-1)+x$. Quelle est l'image de la courbe $C$ du A5. ?

c) *Cas particulier* : soit $E_n$ la région du plan comprise entre la courbe $C$ et le segment $[M_{n-1}M_n]$ ; hachurer sur la figure les régions $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$.
Déduire du A(6)a et du A(6)b ci-dessus que l'aire de $E_n$ est indépendante de $n$.
Quelle est sa valeur ?

-B- On considère l'application $h_0$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_0(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1.$$

Soit $\Gamma$ sa représentation graphique. Montrer que son image $f(\Gamma)$ est la représentation de l'application $h_1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_1(x) = \mathrm{e}^{1-x} - 1 + x.$$

Étudier les applications $h_0$ et $h_1$ ; représenter sur la même figure $\Gamma$ et $f(\Gamma)$, en dessinant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles.

$\Lambda$ étant un réel, supérieur à 1, calculer en fonction de $\lambda$ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan dont les frontières sont les droites $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\Gamma)$ et son asymptote. Montrer que, lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$, $\mathscr{A}(\lambda)$ a une limite à déterminer.

# XXXII. Pondichéry, série C

**Ex. 1730.** ./1982/pondicheryC/exo-1/texte.tex

On considère le nombre $A$ qui s'écrit dans le système décimal : $A = \overline{xyxyxyxyx5}$, $x$ et $y$ étant des chiffres de ce système, $x$ étant non nul.

**1.** Á quelle condition ce nombre est-il divisible par $25$ ?

**2.** Déterminer les différentes valeurs de $A$, telles que $A$ soit divisible par $225$.

**3.** On considère le nombre $B = \overline{xyxyxy}$ toujours écrit dans le système décimal avec $x$ et $y$ qui sont des chiffres, $x$ étant non nul. Déterminer $B$ tel que $B$ soit divisible par $225$.

**Ex. 1731.** ./1982/pondicheryC/exo-2/texte.tex

**1.** Soit $\varphi$ la fonction numérique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = 1 + \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t.$$

Étudier les variations de $\varphi$. En déduire le signe de $\varphi(t)$ suivant les valeurs de $t$.

**2.** On définit la fonction numérique $f$ par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}\ f(x) = \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}.$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $0$.

b) Étudier les variations de $f$.
Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ $\left(\text{on pourra poser } t = \frac{1}{x}\right)$.
Construire la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6 cm (on admettra que la courbe est au-dessus de l'asymptote).



Retour page 1

**Ex. 1732.** ./1982/pondicheryC/exo-3/texte.tex

*Notations :* $E$ est un espace affine, $\overrightarrow{E}$ est son espace vectoriel associé. $f_1$ et $f_2$ sont deux applications affines de $E$ dans $E$, $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sont les endomorphismes associés respectivement à $f_1$ et $f_2$.
Pour tout point $M$ de $E$, on notera $M_1$ le point $f_1(M)$ et $M_2$ le point $f_2(M)$.
Étant donné deux réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que $\alpha_1+\alpha_2=1$, on étudie dans la suite du problème l'application $f$ (qui dépend de $f_1,\ f_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$) qui à tout point $M$ de $E$ associe le point $f(M)$ barycentre de $M_1$ affecté du coefficient $\alpha_1$ et de $M_2$ affecté du coefficient $\alpha_2$.
On notera $M'$ l'image par $f$ du point $M$.

**Partie A** *Étude de deux cas particuliers :*

**1.** Dans cette question, $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont deux éléments de $\overrightarrow{E}$, $f_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{V_1}$ et $f_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{V_2}$.
Montrer que $f$ est la translation de vecteur $\alpha_1\overrightarrow{V_1}+\alpha_2\overrightarrow{V_2}$.

**2.** Dans cette question, $E$ est un plan affine, $D$ est une droite affine de $E$, $\overrightarrow{D'}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{E}$ distincte de la direction de $D$., $f_1=\mathrm{Id}_E$ et $f_2$ est la projection affine sur $D$ de direction $\overrightarrow{D'}$.

a) Montrer que les points de $D$ sont invariants par $f$.

b) Exprimer $\overrightarrow{M_2M'}$ en fonction de $\alpha_1$ et de $\overrightarrow{M_2M}$. Quelle est la nature de $f$ ? Dessiner l'image $M'$ d'un point $M$ par $f$ dans le cas où $\alpha_1=2$. Quelle est l'application $f$ dans le cas où $\alpha_1=-1$ ?

**Partie B**

**1.** Soit $O$ un point de $E$. Montrer que :

$$\overrightarrow{O'M'}=\alpha_1\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{OM})+\alpha_2\overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{OM})$$

pour tout point $M$ de $E$ (on rappelle que $M'$ désigne $f(M)$ et $O'$ désigne $f(O)$. En déduire que $f$ est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

**2.** Si $f_1$ et $f_2$ sont deux homothéties de rapports respectifs $k_1$ et $k_2$, quelle est la nature de $f$ (discuter) ?

**3.** Dans cette question $E$ est un plan affine.

a) $(A,\ B,\ C,\ D)$ est un parallélogramme de $E$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$), $g$ est une application affine.
Montrer que $(g(A),\ g(B),\ g(C),\ g(D))$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

b) Soit $(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1)$ et $(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2)$ deux parallélogrammes ($\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1},\ \overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$).
(On suppose que $(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1)$ n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée $f_2$ telle que :

$$f_2(A_1)=A_2,\qquad f_2(B_1)=B_2,\qquad f_2(C_1)=C_2,\qquad f_2(D_1)=D_2.$$

c) Soit $A',\ B',\ C',\ D'$ les barycentres respectifs de $(A_1,\ \alpha_1)$ et $(A_2,\ \alpha_2)$, $(B_1,\ \alpha_1)$ et $(B_2,\ \alpha_2)$, $(C_1,\ \alpha_1)$ et $(C_2,\ \alpha_2)$, $(D_1,\ \alpha_1)$ et $(D_2,\ \alpha_2)$.
Montrer que $(A',\ B',\ C',\ D')$ est un parallélogramme.

**Partie C**

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. À tout point $M$ de E on associe son affixe $z$.

**1.** Soit $f_1$ et $f_2$ deux similitudes directes de E. Montrer que $f$ est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).

**2.** $f_1$ et $f_2$ sont de similitudes directes de même rapport $k$ ($k>0$), de même angle $\theta$, de centres respectifs $A_1$ et $A_2$.
Montrer que $f$ est la similitude directe de rapport $k$, d'angle $\theta$, et de centre $A$ barycentre de $(A_1,\ \alpha_1)$ et $(A_2,\ \alpha_2)$.

**3.** [1]

1. pour a) et b) l'usage des nombres complexes est déconseillé.



Retour page 1

a) Soit un carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$) et $g$ une similitude directe.
Montrer que $(g(A),\ g(B),\ g(C),\ g(D))$ est un carré tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{g(A)g(B)};\overrightarrow{g(D)g(C)}}\right).$$

b) $(A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1)$ et $(A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2)$ sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$, $\quad \overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$ et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1};\overrightarrow{A_1D_1}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2};\overrightarrow{A_2D_2}}\right).$$

Montrer qu'il existe une unique similitude directe $f_2$ telle que

$$f_2(A_1)=A_2,\qquad f_2(B_1)=B_2,\qquad f_2(C_1)=C_2,\qquad f_2(D_1)=D_2.$$

$A',\ B',\ C',\ D'$ étant définis comme dans la question **B**(3c), montrer que $(A',\ B',\ C',\ D')$ est un carré, éventuellement réduit à un point.

**4.** On donne trois points $A_1,\ A_2$ et $B$ distincts. $M_1$ décrit le cercle de centre $A_1$ contenant $B$ d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1M_1}}\right)=\omega t$ $(\omega\neq 0)$.

$M_2$ décrit le cercle de centre $A_2$ contenant $B$ d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B};\overrightarrow{A_2M_1}}\right)=\omega t$.
$M'$ est la barycentre de $(M_1,\ \alpha_1)$ et $(M_2,\ \alpha_2)$. Quel est le mouvement de $M'$ (utiliser (**C**2)).

# XXXIII. Reims, série C

**Ex. 1733.** ——— *4 points* ./1982/reimsC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer l'ensemble $U$ des entiers relatifs $n$ tels que $n+2$ divise $2n-1$.

**2.** Montrer que pour tout entier relatif $n$, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

**3.** Déterminer l'ensemble $V$ des entiers relatifs $n$, $n\neq 2$, tels que

$$\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$$

soit un entier relatif.

**Ex. 1734.** ——— *4 points.* ./1982/reimsC/exo-2/texte.tex

1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation :

$$z^3=4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$$

dans l'ensemble des nombres complexes.

2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3. Déduire des questions précédentes les valeurs de

$$\cos\frac{11\pi}{12}\ \text{ et }\ \sin\frac{11\pi}{12}.$$



Retour page 1

## Problème 637 *12 points.*

./1982/reimsC/pb/texte

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On munit l'ensemble $L(\text{E})$ des endomorphismes de E de sa structure euclidienne usuelle d'espace vectoriel.
Pour chaque endomorphisme $f$ de E, on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice relative à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $T(f)$ le réel $a+d$.
L'application identique de E sera noté $id$.
On appelle $F$ l'ensemble des endomorphismes $f$ de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, d)$ réels quelconques.

I- On note $f_1, f_2, f_3$ les endomorphismes de E de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivement dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $L(\text{E})$ de base $(f_1, f_2, f_3)$.

2° Trouver deux éléments $f$ et $g$ de $F$ tels que $g \circ f$ ne soit pas dans $F$.

3° Montrer qu'il existe un endomorphisme $r$ de $F$, et un seul, vérifiant :

$$\begin{aligned} r(f_1) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3), \\ r(f_2) &= f_1 - f_3, \\ r(f_3) &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + f_3). \end{aligned}$$

Soit un élément $f$ de $F$ tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ; calculer (en fonction de $a, b, d$) $M(f')$ où $f' = r(f)$.

II- Soit $t$ la restriction de $T$ à $F$.

1° Montrer que $t$ est une application linéaire de $F$ dans $\mathbb{R}$.

2° Montrer que le noyau de $t$, noté $\ker t$, est un plan vectoriel de $F$ contenant toujours les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E.

3° Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E, on note $S_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{u}$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E et $\alpha$ une mesure de l'angle du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\vec{v}} \circ S_{\vec{u}}$ ?

b) Calculer $T(R)$ en fonction de $\alpha$.

III- Soit $\varphi : F \times F \to \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi(f, g) = T(g \circ f)$.

1° Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $F$.

2° a) Calculer $\varphi(f, id)$ pour tout $f \in F$.

b) En déduire l'orthogonal de $\ker t$ pour $\varphi$.

3° On reprend l'endomorphisme $r$ défini à la question I3.

a) Montrer que $r$ est une isométrie vectorielle de $F$ pour le produit scalaire $\varphi$.

b) Calculer $r(id)$ et en déduire que $r(\ker t) = \ker t$.

c) Calculer $\varphi(f, r(f))$ pour tout $f$ élément de $\ker t$.

d) En déduire que $r$ est une rotation de $F$. Que peut-on dire de son angle ?



Retour page 1

# XXXIV. Rennes, série C

**Ex. 1735.** *5 points.* ./1982/rennesC/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$, définie par :

$$f(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x-\ln(x+1).$$

1. Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan $(P)$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Soit $\lambda$ un réel supérieur à 1, et,

$$\Delta_\lambda=\left\{M(x\ ;\ y)\qquad \begin{array}{l}1\leqslant x\leqslant \lambda\\ 1\leqslant y\leqslant f(x).\end{array}\right\}$$

   Calculer l'aire $\mathscr{A}(\Delta_\lambda)$ de $\Delta_\lambda$.
   Étudier la limite de $\mathscr{A}(\Delta_\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 1736.** *3 points.* ./1982/rennesC/exo-2/texte.tex

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $7^n$ par 10.
2. Dans le système de numération décimale déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par :

$$A(n)=1+7+7^2+\cdots+7^n.$$

## Problème 638 *12 points.* ./1982/rennesC/pb/texte

Soient :
$\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathbb{B}=(\vec{i}\,\vec{j})$
$P$ le plan affine euclidien muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
$\Delta$ la droite affine d'équation $x-2y=0$
$(D)$ la droite vectorielle de base $\vec{j}$.
Dans toute la suite du problème S désigne la symétrie affine par rapport à la droite $(\Delta)$ suivant la droite vectorielle $(D)$ ; $\sigma$ est l'endomorphisme associé à S. On appelle **F** l'ensemble des applications affines bijectives $f$ de $P$ dans $P$ telles que $f\circ \mathrm{S}=\mathrm{S}\circ f$.

I-
1. Démontrer que **F** n'est pas l'ensemble vide et que **F** est stable pour la loi de composition des applications, notée $\circ$.
   Montrer que (**F**, $\circ$) est un groupe.
2. Au point $M(x\ ;\ y)$, la symétrie affine S associe le point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$. Donner $x_0$ et $y_0$ en fonction de $x$ et $y$.
3. Soit $g$ l'application de $P$ dans $P$ qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe la point $M'(x'\ ;\ y')$ :

$$\left\{\begin{array}{l}x'=-\dfrac{1}{2}x+1\\[2em] y'=-\dfrac{3}{4}x+y+\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

   Montrer que $g\in$ **F**.
4. Soit $f$ une application affine bijective de $P$ dans $P$ d'endomorphisme associé $\varphi$. Démontrer que $f$ est un élément de **F** si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\left\{\begin{array}{l}f(O)\in(\Delta)\\ \exists a\in\mathbb{R}^\star,\ \varphi(2\vec{i}+\vec{j})=a(2\vec{i}+\vec{j})\\ \exists b\in\mathbb{R}^\star,\ \varphi(\vec{j})=b\vec{j}.\end{array}\right.$$



Retour page 1

Écrire alors en fonction de $a$ et $b$ la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Vérifier ce résultat dans la cas particulier étudié au (I3)

5. a) Préciser les couples $(a,\ b)$ pour que $f$ soit une homothétie (caractériser géométriquement $f$).
   b) Préciser les couples $(a,\ b)$ pour que $f$ soit une translation. Caractériser $f$.
6. On appelle $\mathbf{F}_1$ le sous-ensemble des éléments de $\mathbf{F}$ dont l'endomorphisme associé $\varphi$ vérifie : $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$.
   a) Montrer que $(\mathbf{F}_1,\ \circ)$ est un groupe.
   b) Soit $f_1$ un élément de $\mathbf{F}_1$.
   Démontrer que $M(x\ ;\ y)$ a pour image $f_1(M) = M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ :

$$\begin{cases} x' = ax = 2\alpha \\ \\ y' = \dfrac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} a \in \mathbb{R}^\star \\ \\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Quel est l'ensemble des points invariants par $f_1$ ?
   (On discutera selon les valeurs de $a$ et $\alpha$).
   c) Vérifier que l'application $g$ donnée au I3 est un élément de $\mathbf{F}_1$.
   On note $M' = g(M)$.
   Déterminer l'ensemble $(E)$ des points invariants par $g$. Si $M$ n'est pas invariant, la droite $(MM')$ garde une direction indépendante de $M$ que l'on précisera.
   Calculer alors les coordonnées du point $M_1$ commun à la droite $(MM')$ et à $(E)$.
   Comparer $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{M_1M}$ ; en déduire une construction géométrique de $M'$.

II- 1. Soit $F$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x.$$

   Étudier et représenter $F$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $F$.

2. a) Soit $f_1$ un élément quelconque de $\mathbf{F}_1$. Déterminer une équation de l'image de $(C)$ par $f_1$.
   b) Soient : $(m,\ p) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ et $(C_{m,\ p})$ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{mx+p} + \dfrac{1}{2}x$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Montrer que $(C_{m,\ p})$ est l'image de $(C)$ par une application appartenant à $\mathbf{F}_1$.
3. Soit $(\Gamma)$ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-2x+2} + \dfrac{1}{2}x$.
   En utilisant la partie I, reconnaître l'application élément de $\mathbf{F}_1$ qui transforme $(C)$ en $(\Gamma)$.
   Dessiner $(\Gamma)$ à partir du tracé de $(C)$.
4. Construire l'image $(C')$ de $(C)$ par $g \circ$ S.
5. $(m,\ p) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, montrer, en utilisant I(6)a que tout autre courbe $(C_{m',\ p'})$ est l'image de la courbe $(C_{m,\ p})$ par une application appartenant à $\mathbf{F}_1$.

# XXXV. Rouen, série C

**A**Ex. 1737. ______ *4 points* *./1982/rouenC/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre l'équation d'inconnue $(x\ ;\ y)$ élément de $\mathbb{Z}^2$ :

$$661x - 991y = 1.$$

*(On pourra remarquer que 1982 = 2 × 991 et 1983 = 3 × 661).*



Retour page 1

**2.** On considère deux suites arithmétiques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par

$$u_0 = 3,\ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + 991 \qquad v_{n+1} = v_n + 661.$$

Indiquer tous les couples $(p\ ;\ q)$, avec $p$ et $q$ entiers naturels inférieurs à 2000 tels que $u_p = v_q$.

**Ex. 1738.** *4 points.* *./1982/rouenC/exo-2/texte.tex*

Soit $V$ un espace vectoriel réel, de dimension 2 ou 3, $A$ et $B$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $V$, chacun distinct de $\{\overrightarrow{0}\}$ et de $V$.
On désigne par

- ☐ $q$ la projection vectorielle sur $A$, de direction $B$
- ☐ $q$ la projection vectorielle sur $B$, de direction $A$
- ☐ $e$ l'identité dans $V$.

On rappelle que l'ensemble $L(V)$ des endomorphismes de $V$ est un espace vectoriel réel pour l'addition des endomorphismes et la multiplication des endomorphismes par un réel.

$$\text{Soit } F = \{ap + bq\ ;\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que $F$ est un espace vectoriel réel.
   Démontrer que $(p\ ;\ q)$ est une base de $F$.
2. Démontrer que $F$ est stable pour la composition des endomorphismes.
3. Soit $\varphi$ un élément de $F$. On pose $\varphi^0 = e$, et pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.
   Calculer $\varphi^n$.
4. Déterminer l'ensemble des projections vectorielles éléments de $F$. Donner leurs éléments caractéristiques.

## Problème 639 *12 points.*

*./1982/rouenC/pb/texte*

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté au repère orthonormé, $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On note $\mathscr{P}^*$ le plan $\mathscr{P}$ privé du point $O$ .
Un point $M$ quelconque ayant pour coordonnées $x$ et $y$ par rapport au repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ a pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$ ; on note $\overline{z}$ le conjugué de $z$ ; on désigne par $[r,\ \theta]$ le nombre complexe qui s'écrit $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r$ un élément de $\mathbb{R}_+$ et $\theta$ un élément de $\mathbb{R}$.

A- Étant donné **un nombre complexe** $a$ **non nul**, on considère l'application $\varphi_a$ de $\mathscr{P}^*$ dans lui même telle que :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : \mathscr{P}^* & \longrightarrow & \mathscr{P}^* \\ z & \longmapsto & \varphi_a(z) = \dfrac{a}{\overline{z}} \end{array}$$

1. Cette application est-elle bijective ? Déterminer suivant les valeurs de $a$, les points invariants par $\varphi_a$ .
2. Démontrer que $\varphi_a \circ \varphi_a$ est la restriction à $\mathscr{P}^*$ d'une isométrie dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de $a$ .
   Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier $a$ pour que $\varphi_a$ soit involutive ?

B- Dans cette partie, $a$ est un réel strictement positif.

1. En utilisant la première partie, répondre aux questions suivantes :
   $\varphi_a$ est-elle bijective ? Quel est l'ensemble des points invariants ? Est-elle involutive ?
2. $M'$ étant l'image de $M$ par $\varphi_a$ , calculer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ de $M$ , puis les coordonnées $x$ et $y$ de $M$ en fonction de $x'$ et $y'$ . $z'$ étant l'affixe de $M'$ , on pose $z' = [r'; \theta']$ ; calculer $r'$ et $\theta'$ en fonction de $r$ et $\theta$ où $z = [r; \theta]$ est l'affixe de $M$ .
3. Montrer que les points $O$ $M$ et $M'$ sont alignés .
   Soit $D$ une droite passant par $O$ ; déterminer l'image de $D$ privée de $O$ par $\varphi_a$ .
4. Soit $C$ un cercle passant par $O$ et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse $c$ . Déterminer l'image par $\varphi_a$ du cercle $C$ privé de $O$ . En déduire l'image par $\varphi_a$ d'une droite parallèle àl'axe des ordonnées et distincte de celui-ci .

C- Soit $H$ la coube d'équation $x^2 - y^2 + 2x = 0$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers et asymptotes. Dessiner $H$ en prenant $4cm$ pour unité sur chacun des deux axes.
2. Montrer que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z = [r, \theta]$ tels que :

$$r = f(\theta) \quad \text{et} \quad f(\theta) = \frac{-2\cos(\theta)}{\cos(2\theta)} \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

En étudiant le signe de $f(\theta)$ suivant les valeurs de $\theta$ , vérifier que $H$ se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine $O$ ; sur la figure, on hachurera les autres régions .
3. Á partir de cette question on suppose que $a = 1$ . Soit $\Gamma^*$ l'image de $\mathscr{H}$ privée de $O$ et on pose $\Gamma = \Gamma \cup \{O\}$.
Montrer que $\Gamma$ est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z = [r, \theta]$ tel que $r = g(\theta) \qquad \theta \in [0; 2\pi]$ ; calculer $g(\theta)$ .
4. Montrer que $\Gamma$ se trouve dans les mêmes régions que celles définies au (2) et qui contiennent $H$. Montrer que $\Gamma$ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie .
Placer les points invariants de $H$ et calculer leurs coordonnées .
5. Soit $A$ le point de $H$ appartenant à l'axes des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative. Déterminer $A' = \varphi_1(A)$. Soit $\Delta$ la tangente à $A$ en $H$.
Déterminer l'image $\Delta'$ de $\Delta$ par $\varphi_1$ et construire $\Delta'$ .
6. Montrer qu'une équation cartésienne de $\Gamma$ est $y^2 = x^2\dfrac{1+2x}{1-2x}$. Soit $\Gamma_1$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $x$ et $y$ telles que :

$$y = x\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

En étudiant la fonction $F : x \longrightarrow x\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ et en utilisant les questions précédentes, construire $\Gamma_1$ sur le même graphique que $\mathscr{H}$, puis en déduire $\Gamma$.
7. Préciser les tangentes en $O$ et en $A'$ à $\Gamma_1$. Vérifier que $\Gamma$ et $\Delta'$ ont la même tangente en $A'$ .

## XXXVI. Rouen, série E

Ex. 1739. ——— *5 points* *./1982/rouenE/exo-1/texte.tex*

Dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, on considère le polynôme $P$ défini par :

$$P(z) = z^3 - 4\mathrm{i}z^2 - (6+\mathrm{i})z + 3\mathrm{i} - 1.$$

1. a) Montrer que $P$ admet une racine imaginaire pure, notée $z_0$.
   b) En déduire les deux autres racines de $P$. On notera $z_1$ la racine de $P$ ayant une partie réelle négative et on otera $z_2$ l'autre.
2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $M_0$, $M_1$, et $M_2$ d'affixes respectives $z_0$, $z_1$ et $z_2$.
   a) Placer $M_0$, $M_1$, et $M_2$.
   b) Démontrer qu'il existe une similitude directe unique de centre $M_0$ qui transforme $M_1$ en $M_2$. Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude.
   c) Soit C l'ensemble des points $M$ du plan qui sont les centres des similitudes directes transformant $M_1$ en $M_2$ dans un rapport $\sqrt{2}$. Déterminer C et le tracer dans le plan complexe.

**Ex. 1740.** ——— *3 points* ./1982/rouenE/exo-2/texte.tex

On définit les deux suites $u$ et $v$, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 12 & \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad w_n = v_n - u_n.$$
Montrer que le suite $w$ est une suite géométrique. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ pour tout entier $n$ non nul. En déduire la limite de la suite $w$.
2. Démontrer que $u$ est une suite croissante et que $v$ est une suite décroissante. Que peut-on en conclure à l'aide du **??** sur les suites $u$ et $v$ ? (on utilisera sans le démontrer le résultat suivant : une suite réelle bornée admet une limite).
3. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$
Démontrer que la suite $t$ est stationnaire. En déduire la limite de $u$ et $v$.

## Problème 640 *12 points*

./1982/rouenE/pb/texte

`Note préliminaire` : *Toutes les représentations graphiques demandées dans ce problème seront faites sur la même feuille de papier millimétré. L'unité sera de 5 cm.*

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- 1. Soit $C$ le cercle de centre $\omega(1\ ;\ 0)$ et de rayon 1. Tracer $C$ et en donner une équation dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. Soient $\Delta$ la droite d'équation $x = 1$ et $D$ la droite d'équation $y = tx$ où $t$ est un réel.
$D$ coupe $\Delta$ au point $M_0$ et la cercle $C$ aux points $O$ et $M_1$.
On définit le point $M$ par la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_0M_1}$.
   a) Tracer $\Delta$, $D$, $M_0$, $M_1$ et $M$ dans les cas particuliers où $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = 1$.
   b) Calculer les coordonnées de $M_0$, $M_1$ et celles de $M$ en fonction de $t$.

3. Lorsqu'on fait varier $t$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que les points $M$ se trouvent sur la courbe $S$ d'équation :
$$(x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0.$$

B- Le but de cette partie est de représenter graphiquement la courbe $\mathscr{S}$.

a) On définit la fonction numérique $f$ par :
$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$
   a) Donner l'ensemble de définition, $\mathscr{D}_f$, de $f$.
   b) Donner l'ensemble de définition de la fonction dérivée de $f$, $f'$, et calculer cette fonction.
   c) Étudier le signe de $f'$. En déduire le tableau de variation de $f$.

b) a Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
   b Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point $O$.

c) a) Représenter graphiquement $f$. Soit $\mathscr{S}_1$ la courbe obtenue.
   b) Comment peut-on déduire $\mathscr{S}$ de $\mathscr{S}_1$ ?
   Représenter graphiquement $\mathscr{S}$.



Retour page 1

C- On considère maintenant $M$ comme un point mobile dont les coordonnées sont données, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, en fonction de $t$ par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in [0\,;+\infty[.$$

1. a) Donner la trajectoire du mobile $M$ et indiquer le sens dans lequel elle est parcourue.

   b) A quel instant le mobile traverse-t-il l'axe $Ox$ ?
   A quel instant le mobile atteint-il son ordonnée maximale ?

2. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du mouvement en fonction de $t$.

# XXXVII. Strasbourg, série C

**Ex. 1741.** *4 points* ./1982/strasbourgC/exo-1/texte.tex

**1.** On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur autre que lui-même. Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220.

**2.** On appelle nombres amiables, deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

**3.** a) On appelle nombre parfait, un nombre égal à la somme de ces diviseurs stricts (amiable avec lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ? Déterminer un entier $p$ premier tel que le nombre $2^4p$ soit parfait.

b) Plus généralement, soient $n$ et $p$ deux entiers naturels, $p$ premier ; quelle doit être l'expression nécessaire de $p$ en fonction de $n$ pour que $2^np$ soit parfait ? Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

**Ex. 1742.** *4 points* ./1982/strasbourgC/exo-2/texte.tex

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère un triangle $ABC$ isocèle et rectangle en $A$ tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = a$ ($a$ étant un réel strictement positif donné).

**1.** Déterminer et construire le barycentre $G$ des points pondérés $(A,\ 2)$, $(B,\ 1)$ et $(C,\ 1)$.

**2.** Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, on pose $\vec{v} = -2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.
Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant, indépendant de $M$.
Construire le point $A'$ tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$. Calculer $\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AG}\right\|$ en fonction de $a$.

**3.** Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC\left\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|}\right\|.$$

**4.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$-2MA^2+MB^2+MC^2 = a^2.$$

(On pourra montrer que le point $G$ appartient à $\mathscr{E}$).

## Problème 641 *12 points* ./1982/strasbourgC/pb/texte

Dans l'espace vectoriel $F$ de toutes les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble $E$ des fonctions $f$ définies par :

$$\exists(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}(a\cos x + b\sin x + cx\cos x + dx\sin x).$$

I- 1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

2. Soient les quatre fonctions de $E$ suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x \ ; \ f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$$
$$f_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}x\cos x \ ; \ f_4 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}x\sin x$$

Montrer que $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ est un système libre de $E$.

(On pourra utiliser les valeurs des ses fonctions en $0$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$).

En déduire que $\mathscr{B} = (f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ est une base de $E$.

3. a) Calculer les dérivées $f_1',\ f_2',\ f_3',\ f_4'$ de $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ et montrer qu'elles appartiennent à $E$ ; en déduire que :

$$\begin{aligned} D : E &\rightarrow E \\ x &\longmapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $E$.

# XXXVIII. Toulouse, série C

**Ex. 1743.** *3 points* *./1982/toulouseC/exo-1/texte.tex*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ ; ; on considère l'endomorphisme $f$ de E défini par :

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= -\vec{i} \\ f(\vec{j}) &= (\sin\theta).\vec{j} + (\cos\theta).\vec{k}\ ; \qquad \text{avec } \theta \in [0\,;2\pi[, \\ f(\vec{k}) &= (-\cos\theta).\vec{j} + (\sin\theta).\vec{k}. \end{aligned}$$

1. Démontrer que $f$ est une isométrie vectorielle de $E$.
2. Démontrer l'existence d'une valeur unique de $\theta$ telle que $f$ soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel ; on précisera ce plan.

**Ex. 1744.** *4 points* *./1982/toulouseC/exo-2/texte.tex*

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 - \frac{4}{\sin t}z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0.$$

$z$ désigne l'inconnue, $t$ désigne un paramètre réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$.

2. Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, on considère le point $M$ mobile d'affixe

$$z = \frac{2}{\sin t} + 3\mathrm{i}\cot t, \qquad t \text{ décrivant l'intervalle } ]0\,;\pi[.$$

a) Soit $T$ la trajectoire du mobile ; démontrer que $T$ est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
Préciser et construire $T$.

b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ à l'instant $t$ et déterminer $t$ pour que $\left\|\vec{V}\right\| = 3$.

## Problème 642 *13 points* *./1982/toulouseC/pb/texte*

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. On sait que $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que tout élément de $\mathscr{F}$ est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
À toute fonction $f$, élément de $\mathscr{F}$, on associe la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et, pour } n \geqslant 1, \quad U_n(f) = \int_{-1}^{1} x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Retour page 1

A- **Cette partie est indépendante des deux suivantes.**

Dans cette partie, on note $f$ la fonction exponentielle de base e

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$g$ la fonction
g la fonction, élément de $\mathscr{F}$, définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

, et on désigne par $E$ l'ensemble des fonctions $h = af + bg$ où $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer $U_0(f)$, puis $U_1(f)$ grâce à une intégration par parties.
2. Établir, pour $n \geqslant 1$, la relation
$$U_{n+1}(f) = \mathrm{e} + \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}} - (n+1)U_n(f).$$
3. Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ et que $\mathscr{B} = (f,\ g)$ est une base de $E$.
4. Établir que, quelle que soit la fonction $h$ élément de E , il existe une fonction $H$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \int_{-1} h(x+t)\,\mathrm{d}t.$$
Démontrer que $H$ appartient à $E$ et que $H$ est l'image de $h$ par une application linéaire de $E$ dans $E$ dont on précisera la matrice dans la base $\mathscr{B}$.

B- Dans cette partie, on désigne par $\varphi$ la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \varphi(y) = \tan y \end{aligned}$$

1. Démontrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque notée $\phi$ dont on donnera l'ensemble de définition (on ne cherchera pas à expliciter $\phi(x)$).
2. Démontrer que $\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée $\phi'$ vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. Montrer que $\phi'$ appartient à $\mathscr{F}$ et calculer $U_0(\phi')$, $U_1(\phi')$ et $U_2(\phi')$.
4. a) Montrer que, si $n$ est impair, $U_n(\phi') = 0$.
   b) Montrer que, si $n$ est pair,
   $$U_n(\phi') \leqslant \frac{2}{n+1}$$
   et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(\phi')$.

C- 1. $f$ étant un élément quelconque de $\mathscr{F}$, on considère la fonction $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   a) Montrer que $F$ est un élément de $\mathscr{F}$.
   b) Montrer que $U_0(f) = F(1) - F(-1)$.
   c) Calculer $U_n(F)$ en fonction de $F(1)$, de $F(-1)$ et de $U_{n+1}(f)$.
2. Soit $\varphi$ la fonction définie au B.
   a) Montrer que, si $n$ est pair, $U_n(\phi) = 0$.
   b) Calculer $U_1(\phi)$ sans nouvelle intégration.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)U_{2n+1}(\phi)$.

Retour page 1

# Chapitre XXV

# 1983.

## Sommaire



## I. Aix-Marseille, série C

Ex. 1745. ——— *3 points.* *./1983/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

1. Quel est l'ensemble des nombres complexes $z$ vérifiant $|z-1| = |\overline{z}+1|$? Expliquer géométriquement le résultat trouvé, en considérant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ et en associant à tout point $M(x\ ;\ y)$ du plan son affixe $z$, c'est à dire le nombre complexe défini par $z = x+\mathrm{i}y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ vérifiant $(z-1)^n = (\overline{z}+1)^n$.

**Ex. 1746.** ——— *4 points.* *./1983/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$.

1. Étudier la fonction $f$ (variations et limites) ; tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

et

$$S_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}.$$

Pour $x \neq 1$, justifier que $g(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En déduire, par dérivation pour $x \neq 1$, une expression de $S_n(x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Déterminer une expression de $s_n$. Quelle est la limite de la suite $(s_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Problème 643 *13 points.* *./1983/aixmarseilleC/pb/texte*

*La seconde partie est indépendante de la première ; et dans la première partie B ne dépend pas de A.*

Dans tout le problème, $E$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ dont les axes sont notés O$x$, O$y$ et O$z$.

**Partie I.**

On note $\Omega$ et $\overline{\Omega}$ les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ -1)$. On dira qu'une isométrie laisse **invariant** un sous ensemble $G$ de $E$ si et seulement si $f(G) = G$.

A. 1. Soit $f$ une isométrie affine de $E$ vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite O$z$ invariante. On note $\vec{f}$ l'endormorphisme associé.

a) Établir que $f(\Omega)$ est égal à $\Omega$ ou $\overline{\Omega}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\vec{f}(\vec{k})$ ?
Montrer que $\vec{F}(\vec{\imath})$ et $\vec{f}(\vec{\jmath})$ sont orthogonaux à $\vec{k}$

b) Soit $M$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, soit $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ les coordonnées du point $M'$ image de $M$ par $f$. Montrer que $z'^2 = z^2$. Puis en déduire que

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

2. Quels sont les déplacements $f$ de $E$ vérifiant $f(O) = O$ et qui laissent la droite O$z$ invariante ?

B. Dans toute la suite du problème, on note $\Gamma$ le sous ensemble de $E$ défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. a) Étudier l'intersection de $\Gamma$ avec le plan d'équation $x = 0$. Faire une figure.

b) Pour tout $\lambda$ réel, on note $P_\lambda$ le plan d'équation $z = \lambda$. Donner une équation de $P_\lambda \cap \Gamma$ dans le repère $(\omega_\lambda\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ où $\omega_\lambda$ est le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ \lambda)$.
Quelle est la nature de $P\lambda \cap \Gamma$ lorsque $\lambda \neq 0$ ?
Préciser $P_0 \cap \Gamma$.

2. a) Soit $A$ un point quelconque de $\Gamma$, distinct de O. Montrer que la droite $(OA)$ est incluse dans $\Gamma$.

b) Soit $\Delta$ un droite incluse dans $\Gamma$. Montrer que $\Delta$ passe par O. (*On pourra étudier l'intersection de $\Delta$ et $P_0$*).

C. 1. Soit $f$ une isométrie affine de $E$ vérifiant $f(O) = O$ et laissant globalement invariante la droite O$z$. Déduire des résultats de la question A1 que $f(\Gamma) = \Gamma$ ;
Dans la question suivante, on va établir qu'il s'agit là des seules isométries laissant $\Gamma$ invariant.



Retour page 1

2. Soit, maintenant, $f$ une isométrie de $E$ vérifiant $f(\Gamma) = \Gamma$.

   a) Établir que $f(O) = O$. (*On pourra considérer deux droites distinctes incluses dans* $\Gamma$.)

   b) Soit $M$ un point de $\Gamma$, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Quelle est en fonction de $z$s seulement, la distance de $M$ à O ?
   Soit $S$ la sphère de centre $O$ et de rayon $\sqrt{2}$. Vérifier que $S \cap \Gamma$ est l'union deux deux cercles dont on précisera les plans les contenant, les rayons et les centres.

   c) Montrer que $f(S \cap \Gamma) = S \cap \Gamma$ ; en déduire que $f(\Omega)$ est égal à $\Omega$ ou $\overline{\Omega}$. Que peut-on en conclure pour l'image de la droite O$z$ par $f$ ?

**Partie II.**
On considère la plan $\Pi$ d'équation $y + z\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

1. Déterminer les points $B$ et $C$ d'intersection de $\Pi$ avec, respectivement $Oy$ et $Oz$.
   On définit $\vec{u}$ par : $\overrightarrow{BC} = BC\vec{u}$, où $BC$ est la distance de $B$ à $C$.
   Calculer les coordonnées de $\vec{u}$. Vérifier que $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$ est un repère orthonormé de $\Pi$.
2. Soit $M$ un point quelconque de $\Pi$, de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans le repère $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$.
   Montrer que les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $M$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de $E$ sont données par :
$$x = X \qquad y = \sqrt{3} - Y\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z = \frac{Y}{2}.$$
3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M$ du plan $\Pi$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de $E$ vérifient $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
   Trouver une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ dans le repère $(B,\ \vec{i},\ \vec{u})$ de $\Pi$.
   Quelle est la nature de $\mathscr{E}$ ?
   Le plan $\Pi$ étant pris comme plan de feuille, tracer $\mathscr{E}$.
4. On considère l'application $g$ de $E$ dans lui-même qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ défini par :
$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} \\ y' = y\sqrt{3} + z \\ z' = y + z\sqrt{3}. \end{cases}$$
   Comparer $x'^2 + y'^2 - z'^2$ et $x^2 + y^2 - z^2$. Quelle est l'image de $\Pi$ par $g$ ?

*Si vous avez traité la première partie, commentez éventuellement brièvement.*

## II. Amiens & Rouen, série C

**Ex. 1747.** *4 points.* *./1983/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \cos 3x . \cos^3 x.$$

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ et construire se courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra 3 cm comme unité).

**2.** Montrer que, quel que soit le réel $x$, on a :
$$f(x) = a\cos 6x + b\cos 4x + c\cos 2x + d,$$
où $a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre réels que l'on déterminera.

**3.** Calculer, en cm$^2$, l'aire de l'ensemble $E$ limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

Retour page 1

Ex. 1748. 4 points ./1983/amiensC/exo-2/texte.tex

Les suites $(U) = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_1 = 31 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = -1 \\ V_1 = -11 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n \end{cases}$$

Les suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = U_n + V_n \quad \text{et} \quad Y_n = U_n - V_n.$$

**1.** Calculer $X_0$ et $X_1$. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $X$ est une suite géométrique de raison 5.

**2.** Montrer de même que la suite $Y$ est une suite géométrique.

**3.** Calculer $X_n$ et $Y_n$ en fonction de $n$ ; en déduire le calcul de $U_n$ et $V_n$ en fonction de $n$.

**4.** Le **??** a montré : $\forall x \in \mathbb{N},\ U_n = 2\times 5^n + 3\times 7^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on pose $d_n =$P.G.C.D$(U_n,\ U_{n+1})$.
Calculer $U_{n+1} - 5U_n$ et $7U_n - U_{n+1}$ ; utiliser les résultats de ce calcul pour montrer que $d_n$ est égal à 1 ou à 2.
$U_n$ et $U_{n+1}$ sont-ils premiers entre eux ?

## Problème 644 *12 points.* ./1983/amiensC/pb/texte

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Si $M$ et $M'$ appartiennent à $\mathscr{M}$ et si $\lambda$ est un réel, on note :

- $M + M'$ la somme des matrices $M$ et $M'$,
- $M \times M'$ le produit des matrices $M$ et $M'$ ;
- $\lambda.M$ le produit de la matrice $M$ par le réel $\lambda$.

On rappelle que $(\mathscr{M},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau unitaire.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

A) On désigne par $E$ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ & \\ b & b-a \end{pmatrix},$$

où $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1° Montrer que $(E,\ +,\ .)$ est un espace vectoriel dont $(I,\ J)$ est une base.

2° Calculer $J^2$.
Montrer que $(E,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3° a) Trouver les éléments de $E$ tels que $M^2 = M$.
b) Trouver les éléments de $E$ tels que $M^2 = I$.

4° Montrer que $E$ est l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}$ telles que $M \times J = J \times M$.

B) Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Pour tout couple $(a,\ b)$ de réels, on note $\varphi_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ de matrice

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ & \\ b & b-a \end{pmatrix},$$

dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.



Retour page 1

1° Déterminer les coordonnées dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de $\varphi_{a,\ b}(\vec{e_1})$ et $\varphi_{a,\ b}(\vec{e_2})$ ; comparer ces deux vecteurs à $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ respectivement.

2° Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ de réels pour lesquels $\varphi_{a,\ b}$ est à la fois non nul et non bijectif ; donner alors une base de son image et une base de son noyau.

3° Déterminer les couples $(a,\ b)$ de réels pour lesquels :

a) $\varphi_{a,\ b}$ est une projection sur une droite vectorielle ; caractériser cette projection ;

b) $\varphi_{a,\ b}$ est une symétrie par rapport à une droite vectorielle ; caractériser cette symétrie.

C) Soit $P$ un plan affine associé à $\mathscr{P}$ et rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1° On considère l'application affine $f$ d'endomorphisme associé $\varphi_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}}$ et lissant le point $A(0\ ;\ 1)$ invariant. Donner la nature de $f$ et ses éléments caractéristiques.

2° Soit $g$ l'application de $P$ dans $P$ qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y + 3 \\[2ex] y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

a) Montrer que $g$ est une application affine de $P$ sans point invariant et dont l'endomorphisme associé est involutif.

b) Montrer que $g$ est la composée commutative d'une symétrie affine $s$ et d'une translation $t$ dont le vecteur est colinéaire à $\vec{e_2}$ Donner les éléments caractéristiques de $s$ et $t$.

3° Déterminer les images du plan $P$ par $g \circ f$ et $f \circ g$.

D) Soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = -x + \frac{4}{3}\log(3\mathrm{e}^x + 1).$$

($\log$ désigne le logarithme népérien.)

1° Montrer que, pour tout $x$ réel, $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}\log(3 + \mathrm{e}^{-x})$.

Etudier les variations de $h$.

2° Montrer que la coure $\mathscr{C}$ représentative de $h$ admet deux asymptotes que l'on précisera. La courbe $\mathscr{C}$ coupe-t-elle ses asymptotes ?

Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unités : 1 cm).

Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point $B$ d'abscisse nulle.

3° Construire les transformés des asymptotes à $\mathscr{C}$, du point $B$ et de la tangente à $\mathscr{C}$ en $B$ pat l'application $g$ (définie à la question **??**). Utiliser ces résultats pour effectuer sur le graphique un tracé approximatif de l'image de $\mathscr{C}$ par $g$.

## III. Amiens & Rouen, série E

Ex. 1749. ./1983/amiensE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos 3x . \cos^3 x.$$

1. Étudier les variations de la fonction $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On prendra 3 cm pour unité.)
2. Montrer que, quel que soit le réel $x$, on a :

$$f(x) = a\cos 6x + b\cos 4x + c\cos 2x + d,$$

où $a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre réels que l'on déterminera.

3. Calculer, en $\mathrm{cm}^2$ l'aire de l'ensemble $E$ limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.



Retour page 1

Ex. 1750. ./1983/amiensE/exo-2/texte.tex

L'espace affine euclidien $E$ est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Le point $O$ est au centre de la feuille ; le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est le plan horizontal de projection ; le plan $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection ; la ligne de terre, définie par $(O;\vec{\jmath})$ est le petit axe de la feuille ; l'unité est le centimètre.
On donne les points $A(11~;~3~;~11)$, $B(-9~;~-7~;~-1)$, $C(0~;~6~;~0)$.

1. Construire les traces du pla $(P)$ passant par le point $C$ et orthogonal à la droite $(AB)$.
2. Déterminer sur l'épure l'intersection $H$ du plan $(P)$ et de la droite $(AB)$.
3. a) Déterminer une équation cartésienne du plan $(P)$.
   b) Déterminer analytiquement les coordonnées du point $H$.
4. Déterminer la distance du point $C$ à la droite $(AB)$ ; on donnera la valeur exacte de cette distance ainsi qu'une valeur approchée à 1 mm près par défaut.

ℹ : On justifiera les constructions effectuées.

## Problème 645 ./1983/amiensE/pb/texte

Le texte est identique à celui de la série C : Amiens C 1983, problème

# IV. Besançon, série C

Ex. 1751. 4 points. ./1983/besanconC/exo-1/texte.tex

Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

**1.** $a$ et $b$ étant deux réels quelconques, on note $M(a,~b)=\begin{pmatrix} a & -b\\ 2b & -a\end{pmatrix}$.

Soit $E$ l'ensemble des matrices $M_{(a,~b)}$.

a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Trouver une base de $E$ et en déduire la dimension de $E$.

b) Montrer que $E$ est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.

**2.** Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (a,~b)\in\mathbb{R}^2,\qquad \varphi\left(M_{(a,b)}\right)=a+\mathrm{i}\sqrt{2}b.$$

a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de corps.

Ex. 1752. 4 points. ./1983/besanconC/exo-2/texte.tex

Un plongeur de restaurant lave 30 verres, 10 de chaque type A, B, C. Au cours de la vaisselle, deux verres sont cassés. On admet que le hasard seul est responsable de la casse. On suppose ainsi qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires.

**1.** Construire l'espace probabilisé correspondant à la situation.

**2.** a) Quelle est la probabilité que les deux verres cassés soient du même type ?

b) Quelle est la probabilité de casser au moins un verre de type A ?

c) Quelle est la probabilité de casser un verre de type B et un verre de type C ?

**3.** Soit $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de verres de type A cassés.

a) Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

b) Trouver l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de cette variable aléatoire.

## Problème 646 *12 points.*

./1983/besanconC/pb/texte

I. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur $\vec{I}$ étant l'image du vecteur $\vec{i}$ dans la rotation vectorielle d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ radians, on appelle $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un nouveau repère orthonormé direct.

le point $M$ du plan, de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a pour coordonnées $(X ; Y)$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ .

1. Calculer $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$, puis $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.
2. $A$ est un point variable de la demi-droite $(O, \vec{I})$ et $B$ un point variable de la demi-droite $(O, \vec{J})$ tels que l'aire du triangle $(OAB)$ soit égale à 1.
   Le point $M$, milieu du bi-point $(A, B)$ décrit alors une courbe $(\Gamma)$.
   a) Donner l'équation de $\Gamma$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ .
   b) Donner l'équation de $\Gamma$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   c) Montrer que $M$ décrit une partie de conique dont on précisera la nature.
3. Soit $M_0$ un point de $(\Gamma)$. Montrer analytiquement que la tangente à $(\Gamma)$ au point $M_0$ coupe les deux asymptotes de $(\Gamma)$ en deux points $A_0$ et $B_0$ tels que $M_0$ soit la milieu du segment $A_0B_0$. Vérifier que l'aire du triangle $(OA_0B_0)$ est égale à 1.

II. Pour toutes les fonctions considérées, on prend à chaque fois le plus grand ensemble de définition possible.

On pose :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Étudier la fonction $f$ et tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $h$ dont on déterminera le domaine de définition.
   Donner l'expression de $h(x)$ et tracer la courbe représentative de $h$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer les fonctions dérivées $f'$ et $g'$ des fonctions $f$ et $g$. Effectuer $f'(x) \times g'[f(x)]$, $x$ étant réel. Expliquer le résultat obtenu.

III. 1. Montrer que la fonction $F$ définie par $F(x) = \sqrt{1+x^2}$ est une primitive de la fonction $f$ définie au II.
   En déduire l'aire $S(\lambda)$ de la portion du plan délimitée par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$, la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $x = \lambda$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\lambda$ étant un réel positif donné.
   Cette aire a-t-elle une limite quand $\lambda$ tend vers $+\infty$ ? Si oui, laquelle ?
2. Trouver une primitive $G$ de la fonction $g$ définie au II.
   Quelle est l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de $g$ et la droite d'équation $x = \mu$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mu$ étant un réel donné compris entre 0 et 1 ?
   Cette aire a-t-elle une limite quand $\mu$ tend vers 1 par valeurs inférieures ?
   Comparer la limite de $S(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$. Expliquer le résultat obtenu.
3. $m$ étant strictement positif, on définit la fonction $f_m$ par :

$$f_m(x) = \frac{mx}{\sqrt{x^2+m^2}}.$$

   Trouver la primitive $F_m$ de $f_m$ prenant la valeur $m^2$ en zéro.
   Montrer que la courbe représentative de $F_m$ dans un repère orthonormé est une partie de conique dont on précisera la nature, le centre, les sommets, les asymptotes, les foyers, les directrices et l'excentricité.



Retour page 1

# V. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy Metz, Nantes, Reims, Strasbourg, série E

Ex. 1753. ./1983/besanconE/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe $P$, on considère l'application $s$ définie par :

$$z' = (-3+4\text{i})\overline{z} + 4 - 10\text{i}.$$

**1.** Démontrer que $s$ possède un point invariant $\Omega$ que l'on déterminera.

**2.** Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport 5. Démontrer qu'il existe une application $\sigma$ telle que :

$$s = h \circ \sigma = \sigma \circ h.$$

Définir l'application $\sigma$ ; préciser ses éléments caractéristiques.

Ex. 1754. ./1983/besanconE/exo-2/texte.tex

On considère la fonction $f$ de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f(x) = x + \ln|x|.$$

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé$(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

**2.** Calculer l'aire du domaine :

$$D = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad -2 \leqslant x \leqslant -1, \quad x \leqslant y \leqslant f(x) \right\}.$$

**3.** Soit $S$ la symétrie du plan $(P)$, par rapport à la droite $(O, \overrightarrow{\jmath})$ de direction $\delta$ droite vectorielle dirigée par la vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

Démontrer que la courbe $(C)$ est globalement invariante par $S$.

## Problème 647

./1983/besanconE/pb/texte

Les parties A et B du problème sont largement indépendantes.

A. On se propose de dégager un méthode permettant de trouver une valeur approchée de l'équation $\text{e}^x - 2 = x$.

1° Etudier les variations de la fonction $g$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^x - 2 - x.$$

En déduire que l'équation $\text{e}^x - 2 = x$ admet une unique solution, notée $\omega$, sur $I = ]-\infty\,; -\ln 2]$. (ln désignant le logarithme népérien). Vérifier que $\omega$ appartient à $]-2\,; -1[$.

2° Soit $f$ la fonction numérique définie par $f(x) = \text{e}^x - 2$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in I \quad \text{e}^x \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\forall x \in I \quad f(x) \in I.$$

b) Montrer que :

$$\forall (x,\ y) \in I \times I, \quad \text{et} \quad x \geqslant y, \quad \int_y^x \text{e}^t\,\text{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_y^x \,\text{d}t.$$

En déduire que :

$$\forall (x,\ y) \in I \times I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$



Retour page 1

3° $x_0$ désignant un élément de $I$, on considère la suite $(x_n)$ définie par son premier terme $x_0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - \omega| \leqslant \frac{1}{2^n} |x_0 - \omega|.$$

En déduire la limite de la suite $(x_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4° On choisit $x_0 = -1$ ; déterminer le plus petit entier $n$ tel que $|x_n - \omega| \leqslant 10^{-2}$.

B. Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et $P$ un plan affine euclidien ; $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé de $P$.
Soit $f$ l'application affine de $P$ dans $P$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $xy$ dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, associe le point $M'$ de coordonnées $(x' \ ;\ y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{12}x - \dfrac{1}{12}y + 1 \\ y' = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{5}{12}y + 3. \end{cases}$$

1° Calculer les coordonnées de $\Omega$, point invariant de $f$.

2° Soit $\varphi$ l'endomorphisme associé à $f$. Montrer que $D_1 = \left\{\vec{u} \in \vec{P} \middle| \varphi(\vec{u}) = \dfrac{1}{2}\vec{u}\right\}$ est une droite vectorielle dont on précisera une base $\vec{I}$ de norme 1.
Montrer que $D_2 = \left\{\vec{u} \in \vec{P} \middle| \varphi(\vec{u}) = \dfrac{1}{3}\vec{u}\right\}$ est une droite vectorielle dont on précisera une base $\vec{J}$ de norme 1.

3° a) Montrer que $(\vec{I},\ \vec{J})$ est une base orthonormée de $\vec{P}$.
b) Soit $\vec{w} = X\vec{I} + Y\vec{J}$. Calculer les coordonnées de $\varphi(\vec{w})$ dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$. En déduire que :

$$\forall \vec{w} \in \vec{P}, \qquad \|\varphi(\vec{w})\| \leqslant \frac{1}{2}\|\vec{w}\|.$$

4° On se donne un point $M_0$ et on définit les points $M_n$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle $(x_n \ ;\ y_n)$ les coordonnées de $M_n$ dans la repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\|\overrightarrow{M_n\Omega}\right\| \leqslant \frac{1}{2^n}\left\|\overrightarrow{M_0\Omega}\right\|.$$

($\Omega$ est le point fixe défini en B1).

b) Quelle est la limite de la suite $\left(\left\|\overrightarrow{M_n\Omega}\right\|\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
En déduire les limites des suites $(x_n)$ et $(y_n)$.

## VI. Bordeaux, série C

Ex. 1755. ——— *4 points.* *./1983/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

**1.** Étudier la fonction numérique $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

**2.** Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$g(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à à calculer cette intégrale.
Démontrer que $g$ est définie et dérivable sur $[1 ; +\infty[$. Calculer $g'(x)$.

**3.** Soit $h = g \circ f$. Démontrer que $h$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $h'(x)$ puis $h(x)$.



Retour page 1

Ex. 1756. 3 points. ./1983/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Déterminer les couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$\begin{cases} a+2b=42 \\ \text{P.P.C.M}(a,\ b)=20. \end{cases}$$

## Problème 648 13 points. ./1983/bordeauxC/pb/texte

### Partie I.

On désigne par $E$ un plan vectoriel, et par $B=(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une base de $E$.
A tout couple $(a,\ b)$ de réels, on associe l'endomorphisme $F_{a,b}$ de $E$ dont la matrice dans la base $B$ est

$$M_{a,b}=\begin{pmatrix} a-2 & a-1 \\ b+1 & b \end{pmatrix}.$$

On désigne par I l'application identique de $E$.

**1.** Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $F_{a,b}$ soit bijective est $a+b\neq 1$.

**2.** $\lambda$ étant un réel, démontrer que l'endomorphisme $(F_{a,b}-\lambda\text{I})$ n'est pas une bijection sis et seulement si $\lambda$ est solution de l'équation

$$\lambda^2-(a+b-2)\lambda-(a+b-1)\lambda=0.$$

Rechercher pour chacune des solutions de cette équation, le noyau de $(F_{a,b}-\lambda\text{I})$, et en donner une base.

**3.** Dans quels cas $F_{a,b}$ est-elle involutive ? Caractériser cette involution.

### Partie II.

On suppose dans cette partie que $a$ est un réel non nul et différent de 1 et que $b$ est nul.

**1.** On pose $\vec{v}_1=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v_2}=(a-1)\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.
Montrer que $(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)$ est une base $B'$ de $E$.
Quelle est la matrice de l'endomorphisme $F_{a,0}$ dans la base $B'$ ?

**2.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $(F_{a,0})^{n+1}=F_{a,0}\circ(F_{a,0})^n$ et $(F_{a,0})^1=F_{a,0}$.
Déterminer la matrice de l'endomorphisme $(F_{a,0})^n$ dans la base $B'$.
En déduire $(F_{a,0})^n(\vec{\imath})$ et $(F_{a,0})^n(\vec{\jmath})$ puis $(M_{a,0})^n$.

**3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0$ et de $u_1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_{n+2}=(a-2)u_{n+1}+(a-1)u_n.$$

On pose pour tout entier naturel $n$ : $V_n=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que : $\forall n\in GN \qquad V_{n+1}=M_{a,0}V_n$.
Utiliser la question précédente pour calculer $V_n$ en fonction de $n$ et de $V_0$, puis $u_{n+1}$ en fonction de $n$, $u_0$ et $u_1$, $n$ étant un entier naturel non nul.

**4.**

### Partie III.

On désigne par $\mathscr{E}$ un plan affine de plan vectoriel associé $E$, dont un repère cartésien est $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $a$ étant un réel, on appelle $f_a$ l'application qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe la point $M'$ dont les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ sont données par

$$\begin{cases} x'=2(a-2)x+2(a-1)y+2 \\ y'=2(3-a)x+2(2-a)y-1. \end{cases}$$

**1.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f_a$.



Retour page 1

**2.** Montrer que $f_a$ est la composée d'une homothétie et d'une symétrie affine dont la direction est indépendante du réel $a$.

**3.** Dans cette question on prend $a = 1$.

Soit $\Omega$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$ et $A$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

On définit la suite de points $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases}\Omega_0 = \Omega\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Omega_{n+1} = f_1(\Omega_n).\end{cases}$$

Dessiner les triangles $A\Omega\Omega_1$ et $A\Omega_2\Omega_3$.

A quelle condition simple le triangle $A\Omega\Omega_1$ a-t-il pour image le triangle $A\Omega_{2n}\Omega_{2n+2}$ ?

# VII. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes série E

**Ex. 1757.** ./1983/bordeauxE/exo-1/texte.tex

On considère l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ :

$$Z^2 + 2(1-\cos u)Z + 2(1-\cos u) = 0$$

$u$ étant un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. On notera $Z_1$ et $Z_2$ les solutions.
2. Déterminer le module et l'argument de $Z_1$ et $Z_2$.

**Ex. 1758.** ./1983/bordeauxE/exo-2/texte.tex

Le plan affine est rapporté à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; soit $A$ le point de coordonnées $(3\ ;\ 0)$ et $B$ le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

1. a) Montrer qu'il existe une application affine unique $f$ telle que :

$$f(O) = f(B) = B, \qquad f(A) = A$$

   et calculer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $M' = f(M)$ en fonction de $(x\ ;\ y)$ coordonnées de $M$.

   b) Définir $f\circ f$ ; reconnaître $f$ et en donner ses éléments.

2. Soit $g$ l'application affine qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\begin{cases}x' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y + 3\\ y' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y\end{cases}$$

   $g$ est-elle une projection ?

   Montrer que $g = t\circ f = f\circ t$ où $t$ est une translation affine que l'on précisera.

## Problème 649

./1983/bordeauxE/pb/texte

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'unité de longueur étant 10 cm.
$\Delta$ désigne la droite d'équation $y = x$.
Le problème comporte l'étude de trois fonctions $f$, $g$, $\varphi$ dont les représentations graphiques, désignées respectivement par $(\mathscr{C})$, $(\Gamma)$, $(\mathscr{C}')$, seront tracées sur le même graphique.

I. soit $f : \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \tan x$.

1. Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans $(P)$ (placer $O$ en bas et à gauche de la feuille).

   $A$ désigne le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $x = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Montrer que $f$ est une bijection.
 ℹ : On en conclut l'équivalence logique suivante :

$$\forall a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall b \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ [\tan a = \tan b \Longleftrightarrow a = b].$$

 $g$ désignant le bijection réciproque de $f$, étudier ses variations, sa continuité et sa dérivabilité ainsi que $\lim\limits_{+\infty} g$.
 Par quelle transformation affine $\sigma$ déduit-on de $(\mathscr{C})$, la courbe $(\Gamma)$ représentative de $g$?
 Construire $(\Gamma)$ après avoir placé les tangentes aux points d'abscisses respectives $0,\ 1,\ \sqrt{3}$.
3. Donner une primitive de $f$.
4. On pose $B = \sigma(A)$.
 Soit $(D_1)$ la partie duplan $(P)$ limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.
 Calculer l'aire de $D_1$.
 En déduire l'aire de la partie $D$ du plan limitée par les deux courbes $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ et la droite $(AB)$ ; en donner une valeur approchée en $\text{cm}^2$ à $0{,}1$ près par défaut.

II. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

 $(\mathscr{C}')$ désigne la courbe représentative de $\varphi$.
1. Montrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En utilisant le tableau de variations de $g$, construire celui de $\varphi$.
3. a) Calculer pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\tan[\varphi(x)]$, $\tan[g(x)]$. En déduire (en justifiant) les propriétés suivantes

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x). \tag{1}$$

$$(\mathscr{C}') = s(\Gamma) \tag{2}$$

 où $s$ est la symétrie affine orthogonale d'axe $D$ d'équation $y = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\varphi \text{ est dérivable au point } x = 0 \text{ et } \varphi'(0) = -1. \tag{3}$$

 b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Retrouver le résultat de (1) après avoir calculé $\varphi'(x)$ pour x$\in \mathbb{R}_+^\star$ à partir de la définition de $\varphi$.
 c) Construire $(\mathscr{C}')$ et la tangente en $I\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Montrer que $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par une rotation affine $r$ de $(P)$ dont on donnera les éléments caractéristiques.
 En déduire $r(\Gamma) = s(\mathscr{C})$ où $s$ est la symétrie définie au II(3)a
5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$, $b \in \mathbb{R}_+^\star$, $a < b$. Montrer que

$$\begin{cases} 0 < \varphi(a) - \varphi(b) < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan[\varphi(a) - \varphi(b)] = \dfrac{b-a}{1+ab}. \end{cases}$$

III. Soit la suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \varphi(n^2 + 3n + 3).$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Retour page 1

2. En utilisant II5, prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \varphi(n+1) - \varphi(n+2).$$

3. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$ en fonction de $\varphi(n+2)$.

   Montrer que la suite de terme général $S_n$ est convergente vers une valeur $\ell$ que l'on calculera.

## VIII. Caen, série C

**Ex. 1759.** *3,5 points* *./1983/caenC/exo-1/texte.tex*

Soit $k$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient $5k$ boules blanches et $3k$ boules rouges.

**1.** On tire simultanément trois boules de l'urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.
On note $p(k)$ la probabilité de l'événement $E$ : « tirer plus de boules rouges que de boules blanches ».
Calculer $p(1)$, puis $p(k)$.
Étidier la limite de $p(k)$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

**2.** On tire successivement trois boules de l'urne en notant chaque fois la couleur de la boule, puis en la remettant dans l'urne. On admet l'équiprobabilité des tirages. On note $p'(k)$ la probabilité de l'événement $E'$ : « tirer plus de boules rouges que de boules blanches ». Montrer que $p'(k)$ est indépendant de $k$ et vérifier que

$$p'(k) = \lim_{k \to +\infty} p(k).$$

**Ex. 1760.** *3,5 points.* *./1983/caenC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $E$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Étudier et construire $E$. En particulier, préciser les axes de symétrie, les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les demi-tangentes aux points d'abscisse nulle.

**Problème 650** *13 points.* *./1983/caenC/pb/texte*

Soit $F$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que $F$, muni de l'addition et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Si $f$ est un élément de $F$, on note $f'$ la dérivée de $f$ et $f''$ la dérivée seconde de $f$.

A) Soit $f_1,\ f_2,\ f_3$ les éléments de $F$ définis par :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f_2(x) = \cos \pi x, \qquad f_3(x) = \sin \pi x.$$

Soit $E$ l'ensemble des applications $f$ telles que :

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3,$$

$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ étant un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1° Démontrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$ et que $B = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ est une base de $E$.

2° Soit $\varphi$ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,\ g) \in\ E \times E, \qquad \varphi(f,\ g) = \int_0^2 f(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$ pour lequel $B$ est une base orthonormée.
(On pourra calculer d'abord $\varphi(f,\ g)$ en fonction des coordonnées de $f$ et de $g$ dans la base $B$.)



Retour page 1

3°

B) Dans le suite du problème, $E$, muni du produit scalaire défini dans la partie A, est un espace vectoriel euclidien que l'on oriente de manière que la base $B$ soit directe.

A tout élément $f$ de $E$, on associe l'application $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

1° Montrer que $g$ appartient à $E$ et que l'application

$$\begin{aligned} r : E &\longrightarrow E \text{ [1]} \\ f &\longmapsto g \end{aligned}$$

est une rotation vectorielle de $E$ dont on précisera l'axe et dont on déterminera l'angle après avoir orienté cet axe.

2° a) Vérifier que $r \circ r = s$, où $s$ est l'endomorphisme de $E$ : $f \longmapsto s(f)$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ s(f)(x) = f(x+1)$.

b) Préciser la nature de l'endomorphisme $s$. Le caractériser simplement.

c) Démontrer que :

$$\forall f \in E, \qquad s(f) = f + \frac{2}{\pi^2} f''.$$

3° Résoudre dans $E$ l'équation d'inconnue $f$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + \frac{2}{\pi^2} f'' = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \pi x.$$

C) Soit $p$ l'application :

$$\begin{aligned} p : [0\,;2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x - x^2 \end{aligned}.$$

Pour tout $f$ de $E$, on pose $I(f) = \displaystyle\int_0^2 [p(x) - f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$.

On se propose de déterminer une fonction $\gamma$ de $E$ telle que :

$$\forall f \in E, \qquad I(\gamma) \leqslant I(f) \tag{2}$$

et de calculer $I(\gamma)$.

On pose $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ où $a_1,\ a_2,\ a_3$ sont trois réels.

1° Déterminer, en utilisant le A2, $\displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$ en fonction de $a_1,\ a_2,\ a_3$.

2° Pour tout élément $i$ de $\{1,\ 2,\ 3\}$, on pose :

$$\alpha_i = \int_0^2 p(x) f_i(x) \,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer, sans calculer $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, que :

$$I(f) = \int_0^2 [p(x)]^2 \,\mathrm{d}x + (a_1 - \alpha_1)^2 + (a_2 - \alpha_2)^2 + (a_3 - \alpha_3)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

b) Comment faut-il choisir $a_1,\ a_2,\ a_3$ pour que $I(f)$ soit le plus petit possible ?

3° a) En déduire qu'il existe une fonction $\gamma$ et une seule satisfaisant à la condition (2) et donner l'expression de $\gamma(x)$. Calculer $I(\gamma)$.

b) Tracer sur le même graphique les courbes représentatives de $p$ et $\gamma$ sur l'intervalle $[0\,;2]$. (Unité : 5 cm.)

1. $g$ définie en 1



Retour page 1

# IX. Clermont-Ferrand, série C

**Ex. 1761.** *4 points.* *./1983/clermontC/exo-1/texte.tex*

On considère les trois entiers naturels $a$, $b$ et $c$ qui, dans le système de numération à base $n$, s'écrivent :

$$a = \overline{1983}, \qquad b = \overline{11}, \qquad c = \overline{12}.$$

**1.** Prouver que P.G.C.D$(a,\ b)$=P.G.C.D$(b,\ 3)$.
En déduire les différentes valeurs possibles de P.G.C.D$(a,\ b)$.

**2.** Pour quelles valeurs de l'entier $n$ les deux nombres $a$ et $b$ sont-ils premiers entre eux ? En dresser la liste pour $n$ strictement inférieur à vingt-cinq.

**3.** Vérifier que $a = (n+2)(n^2+7n-6)+15$.
Par un raisonnement analogue à celui du 1, trouver les différentes valeurs possibles de P.G.C.D$(a,\ c)$.

**4.** Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on

$$\text{P.G.C.D}(a,\ b) = \text{P.G.C.D}(a,\ c)\ ?$$

En dresser la liste pour $n$ strictement inférieur à vingt-cinq.

**Ex. 1762.** *./1983/clermontC/exo-2/texte.tex*

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(\log|x|)^2 \qquad \text{pour} \qquad x \neq 0. \end{cases}$$

**1.** Étudier les variations de l'application f . On précisera en particulier la continuité et la dérivabilité en 0. Tracer la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, en prenant 4 cm pour unité de longueur.

**2.** On désigne par $I(a)$ l'intégrale

$$\int_a^{1/\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour} \qquad a > 0.$$

Calculer $I(a)$. Calculer la limite de $I(a)$ lorsque $a$ tend vers zéro.

## Problème 651

*./1983/clermontC/pb/texte*

A. **??**

1. Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$2x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Déterminer la nature de cette courbe et la tracer.

2. Pour chaque nombre réel $t$, on désigne par $M(t)$ le point du plan, dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$sont

$$x = \cos^2 t, \qquad y = \sqrt{2}\sin t \cos t.$$

Montrer que le point $M(t)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ quel que soit $t$. Pour chaque point $A$ de la courbe $\mathscr{C}$, montrer qu'il existe un nombre réel $t$ unique tel que l'on ait

$$A = M(t) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant t < \pi.$$

Déterminer les coordonnées des points $M(t)$ qui correspondent aux valeurs suivantes de $t$ :

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \text{et } \frac{\pi}{12}.$$

B. Dans toute la suite du problème, on désigne par E un espace vectoriel euclidien orienté et par $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E ; on désigne par $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques et on pose

$$\vec{u} = 2a\vec{\imath} - b\vec{\jmath} - b\vec{k}.$$

a) On désigne par $D$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{u}$. Soit $T$ le sous-espace vectoriel de E orthogonal à $D$.

Quelles sont les dimensions de $D$ et de $T$ suivant les valeurs de $a$ et $b$?

Lorsque $T$ est un plan vectoriel, écrire son équation cartésienne.

b) On désigne par $f$ l'endomorphisme de E défini analytiquement par

$$\begin{cases} x' = (1-2a)x + by + bz \\ y' = bx + ay + (a-1)z \\ z' = bx + (a-1)y + az. \end{cases}$$

L'endomorphisme $f$ fait ainsi correspondre au vecteur de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ le vecteur de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$. Déterminer l'endomorphisme $f \circ f$ de E par son expression analytique. En dé- duire que l'endomorphisme $f$ est une involution si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$2a^2 + b^2 - 2a = 0. \qquad (*)$$

c) On suppose désormais dans toute la suite du problème que la condition(*) ci-dessus est satisfaite. L'endomorphisme $f$ est-il une isométrie ?

Déterminer les vecteurs invariants par $f$ . Déterminer $f(\vec{u})$. Caractériser $f$.

d) On considère l'endomorphisme $s$ de E dé ?ni analytiquement par

$$x' = -x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

On pose $g = f \circ s$.

a) Quelle est la nature de l'endomorphisme $s$ ?

Que peut-on dire, sans calcul, de l'endomorphisme $g$ ?

b) Soit $F$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$$\vec{j} - \vec{k}.$$

Soit $U$ le plan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle $F$. Déterminer une base orthonormée du plan vectoriel $U$ de la forme $(\vec{i},~\vec{v})$ où $\vec{i}$ est le premier vecteur de la base $\mathscr{B}$ de E.

c) Exprimer $g(\vec{i})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{v}$.

En déduire la caractérisation complète de $g$.

d) Appliquer ce qui précède au cas particulier suivant

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

e) On pose $h = s \circ f$, $g^1 = g$, $h^1 = h$ et , par récurrence, pour tout entier $n > 1$, $g^n = g^{n-1} \circ g$ et $h^n = h^{n-1} \circ h$. On désigne par $G$ l'ensemble de tous les endomorphismes suivants :

$$g \circ h, \qquad g^n \quad \text{et} \quad h^n \quad \text{pour } n \text{ entier naturel non nul.}$$

Montrer que $(G,~\circ)$ est un groupe commutatif.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres $a$ et $b$ pour que $G$ soit fini. (On pensera à se servir du résultat de la partie **??** du problème.)

## X. Dijon, Série C



Retour page 1

**Ex. 1763.** ./1983/dijonC/exo-2/texte.tex

$\mathscr{E}$ est une espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On note $E$ l'espace vectoriel associé à $\mathscr{E}$.
Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$, qui à tout point $M$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le point $M'$ dont les coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ sont :

$$\begin{cases} x' &= x+a \quad (a \text{ étant un réel quelconque})\\ y' &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z+1\\ z' &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z+1-\sqrt{2} \end{cases}$$

**1.** Montrer que l'endormorphisme $\varphi$ associé à $f$ est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

**2.** Discuter, suivant les valeurs de $a$, la nature de $f$ ; on précisera dans chaque cas les éléments caractéristiques de $f$.

## XI. Groupe I, série C

**Ex. 1764.** *4 points.* ./1983/groupeIC/exo-1/texte.tex

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, on donne deux points fixes $A$ et $B$.
Déterminer l'ensemble $(S)$ des couples $(P,~Q)$ de $\mathscr{E}^2$ qui vérifient les deux conditions :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{Q} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = 0.$$

**Ex. 1765.** *4 points.* ./1983/groupeIC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ le système

$$\begin{cases} x+2y+3z=4,\\ 5x+6y+7z=8. \end{cases}$$

**2.** Démontrer qu'il existe un et une seul triplet de $\mathbb{Z}^3$, solution du système précédent, tel que :

$$x^3+y^3+z^3 = 1~051.$$

**Problème 652** *12 points.* ./1983/groupeIC/pb/texte

*

I.- On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

1° Préciser l'ensemble de définition de $f$ qu'on notera $\mathscr{D}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathscr{D}$.

2° Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, l'unité de distance étant 2 cm, dessiner la courbe représentative $F$ de $f$.

3° Démontrer que, pour tout couple $(x,~y) \in \mathscr{D}^2$ tel que $xy+1 \neq 0$, $f$ satisfait la propriété

$$f(x).f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \tag{P}$$

II.- On considère maintenant le fonction numérique $g$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{\frac{1}{2}}.$$



Retour page 1

1° Préciser l'ensemble de définition de $g$ qu'on notera $\mathscr{D}_1$. Déduire brièvement de I la continuité et le dérivabilité de $g$ sur $\mathscr{D}_1$.

2° Démontrer que, pour tout couple $(x,\ y) \in \mathscr{D}_1^2$ tel que $xy+1 \neq 0$, $g$ satisfait la propriété (P).

3° Dessiner la courbe représentative $G$ de $g$ dans le même plan rapporté au repère $\mathscr{R}$ que $F$.

4° Dans ce plan, on appelle $A$ l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1-\epsilon$$

(où $\epsilon$ est un réel strictement positif et inférieur à 1) et

$$g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $\mathscr{A}(\epsilon)$ de $A$ (on raisonnera sur $f-g$).
$\mathscr{A}(\epsilon)$ admet-elle une limite lorsque $\epsilon$ tend vers $0$ ?

III.- Dans cette partie, on appelle $\Delta$ l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

1° $y$ étant fixé dans $\Delta$, étudier la fonction $u$ définie sur $\Delta$ par :

$$u(x) = \frac{x+y}{1+xy}.$$

2° On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $\varphi$ définies sur $\Delta$, qui sont continues sur $\Delta$ et dérivables en zéro et qui vérifient pour tout couple $(x,\ y)$ éléments de $\Delta$, la relation

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \qquad \text{(P)}$$

a) Justifier l'écriture (P).

b) Rechercher s'il existe des fonctions $\varphi$ constantes sur $\Delta$.
*Dans toute la suite, on suppose que $\varphi$ n'est pas le fonction nulle sur $\Delta$.*

c) Montrer que $\varphi(0) = 1$.

d) Montrer que $\varphi$ ne peut s'annuler sur $\Delta$ et que, pour tout $x$ de $\Delta$, on a

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

3° a) $x$ et $y$ appartenant à $\Delta$, montrer qu'il existe un réel $h$ tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

b) Réciproquement, $x$ et $x+h$ étant donnés dans $\Delta$, montrer qu'il existe $y$ dans $\Delta$ tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

(On pourra utiliser le **??**) Déterminer $y$.

c) On suppose $h$ non nul, exprimer le rapport

$$\rho = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

au moyen de $x$ et de $y$ déterminer au III(3)b).

d) Montrer que $\varphi$ est dérivable en tout point $x$ de $\Delta$. On rappelle que $\varphi$ est supposée dérivable en zéro (on posera $\varphi'(0) = C$).
En conclure que les fonctions $\varphi$ sont telles que pour tout $x$ de $\Delta$ :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{C}{1-x^2}.$$

4° a) Démontrer qu'il existe deux réels $m$ et $n$ tels que, pour tout $x$ différent de $1$ et de $-1$ :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{n}{1+x}.$$

b) Déterminer alors toutes les fonctions $\varphi$.

c) Peut-on trouver des fonctions $\varphi$ non constantes vérifiant les conditions du 2° sur les intervalles $[-1\,;1[,\ ]-1\,;1], [-1\,;1]$ ? pouvait-on prévoir le résultat ?

# XII. Lille, série C

**Ex. 1766.** *4 points.* ./1983/lilleC/exo-1/texte.tex

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.
On donne les points $A(1\ ;\ 1)$ et $B(-1\ ;\ 0)$.

**1.** Soit $f$ la similitude inverse de centre $A$, d'axe $(OA)$ et de rapport 2. Exprimer l'affixe $z'$ de $M' = f(M)$ à l'aide de l'affixe $z$ de $M$.

**2.** Faire de même avec la similitude directe $g$ de centre $B$, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

**3.** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $g \circ f$.

**Ex. 1767.** *4 points.* ./1983/lilleC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ chacune des équations suivantes :

a) $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{Z}^2$ ; $\quad 17\alpha - 19\beta = 2$ ;

b) $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{Z}^2$ ; $\quad 17\alpha - 19\beta = -2$ ;

**2.** a) Trouver tous le entiers relatifs $n$ vérifiant simultanément

$$\begin{cases} n \equiv 0\ [17], \\ n \equiv -2\ [19]. \end{cases}$$

b) Résoudre, de même, le système

$$\begin{cases} n \equiv -2\ [17], \\ n \equiv 0\ [19]. \end{cases}$$

**3.** Déduire de ce qui précède l'ensemble des entiers relatifs $n$ tels que $n^2 + 2n \equiv 0\ [323]$.

## Problème 653 *12 points.* ./1983/lilleC/pb/texte

(Les trois parties du texte sont dans une large mesure indépendantes).
Pour tout entier naturel $n$, on définit la fonction numérique $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant $f_n$ dans un plan affine euclidien $E$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 4 cm), et on désigne par $I_n$ l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

I. 1. Étudier les variations de $f_1$ et tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

2. Soit $\varphi$ l'application du plan $E$ dans lui-même qui au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, associe le point $M'$ de coordonnées $x' = x$ et $y' = x - y$. Montrer que $\varphi$ est une symétrie, dont on précisera l'axe et la direction. Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_3$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par $\varphi$. Tracer alors $\mathscr{C}_3$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$.

3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de $I_3$.

4. Calculer en cm$^2$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

II. 1. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Montrer que $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(x)$.

2. On pose, pour tout $x$ de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = u(\tan x)$.

a) Préciser $F(0)$.

b) Montrer que $F$ est dérivable er calculer $F'(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \quad F(x) = x$.

d) Déduire de l'égalité précédente la valeur de $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel $p$,

$$I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}.$$

Calculer alors $I_2$, $I_4$ et $I_6$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant I_{2p} \leqslant \frac{1}{2p+1}$.

En déduire la limite de $I_{2p}$ quand $p$ tend vers $+\infty$.

4. On définit la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall p \geqslant 1, \qquad v_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}.$$

Montrer que $\forall p \geqslant 1, \qquad v_p = I_0 + (-1)^{p-1} I_{2p}$.

Quelle est la limite de $v_p$ quand $p$ tend vers $+\infty$ ?

III. On considère, dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, un mobile $M$ dont les coordonnées sont, dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ :

$$x = \frac{1}{1+t^2} \qquad y = \frac{t}{1+t^2} \qquad z = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$t$ désignant le temps et décrivant l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1. Montrer que le point $M$ appartient à un plan $P$ dont on donnera une équation.
2. vérifier que le point $O'$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k})$ constituent un repère orthonormé de $P$.
   Trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ soit un repère orthonormé de $\mathscr{E}$.
3. Exprimer, en fonction de $t$, les coordonnées $X$, $Y$ et $Z$ du point mobile $M$ dans le repère $(O',\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$. En déduire que le point $M$ appartient à la courbe $\Gamma$ du plan d'équation $4X^2 + 2Y^2 = 1$.
   Tracer cette courbe dans le repère $(O',\ \vec{u},\ \vec{v})$.
   Préciser la trajectoire de $M$ et le sens de parcours sur sa trajectoire.

## XIII. Lille, série E

Ex. 1768. ______ *points.* *./1983/lillee/exo-1/texte.tex*

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Le plan $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est le plan horizontal de projection ; le plan $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est la plan frontal de projection.
La ligne de terre est la petit axe de la feuille ; le point $O$ est au centre de la feuille.
On considère par $(\pi)$ le plan d'équation $6x - 3y + 2z - 18 = 0$ et par $M$ le point de coordonnées $(6\ ;\ -4\ ;\ 6)$.

**1.** Construire les traces du plan $(\pi)$ et l'épure du point $M$.

**2.** Déterminer, par un procédé de géométrie descriptive la distance du point $M$ au plan $(\pi)$.
On expliquera, dans une brève notice, la méthode utilisée.

Ex. 1769. ———— *points.* ./1983/lillee/exo-2/texte.tex

1. Calculer les deux solutions complexes $z'$ (de partie réelle positive) et $z''$ de l'équation :

$$z^2+(1-3\mathrm{i})z+(-14+2\mathrm{i})=0.$$

2. Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, soient $C$, $A$, $B$ les points d'affixes respectives : $-3-\mathrm{i}$, $z'$, $z''$.
3. a) Montrer que le triangle $CAB$ est rectangle et calculer les distances $CA$ et $CB$.

   b) Construire le point $G$, barycentre du système $\{(C,\ -2)\ ;\ (B,\ 2)\ ;\ (A,\ 1)\}$.

   c) Déterminer l'ensemble

$$\mathscr{E}=\left\{M\in \mathrm{P}\,\middle|\,-2\overrightarrow{MC}^2+2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}^2=30\ \right\}.$$

## Problème 654 *points.* ./1983/lillee/pb/texte

Le plan affine euclidien $P$ est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (on prendra 4 cm comme unité).

**I**

Soit $n$ un entier naturel. On considère la fonction $f_n$ définie par

$$\begin{cases} f_n(x)=nx+|x|\log(x^2) & \textbf{si } x\neq 0\\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

($\log$ désigne le logarithme népérien). On désigne par

- $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
- $\mathscr{C}_n^+$ la partie de la courbe $\mathscr{C}_n$ dont les points ont une abscisse positive
- $\mathscr{C}_n^-$ la partie de la courbe $\mathscr{C}_n$ dont les points ont une abscisse négative.

1. Donner l'expression de $f_n(x)$ pour $x$ strictement positif puis pour $x$ strictement négatif.
   Démontrer que $f_n$ est continue en $0$.
   $f_n$ est-elle dérivable en $0$ ?
2. Étudier les variations de $f_n$.
3. Soit $A_n$ le point de $\mathscr{C}_n$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}_n^+$ est parallèle à l'axe $x'x$.
   Déterminer les coordonnées de $A_n$ ; démontrer que les points $A_n$, quand $n$ décrit $\mathbb{N}$, appartiennent à une droite fixe $D$ que l'on déterminera.
4. Soit $B_n$ le point d'intersection autre que $O$ de $\mathscr{C}_n^+$ avec l'axe $x'x$. Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_n$ en $B_n$ a une direction indépendante de $n$.

**II**

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=f_0(x)$.
   Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, tracer la courbe $\mathscr{E}$, représentative de $g$, puis $\mathscr{C}_0$.
2. a) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\qquad f_n\left(x\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}g(x)$.

   b) En déduire que $\mathscr{C}_n^+$ est l'image de $\mathscr{E}$ par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
3. Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $T_n$ l'application de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe

$$z'=\mathrm{e}^{-n}\overline{z}\qquad \text{(où } \overline{z} \text{ désigne le conjugué de } z\text{).}$$

   a) Déterminer la nature de $T_n$, et en donner les éléments caractéristiques.

   b) Calculer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ de $M$.

   c) Démontrer que $T_n(\mathscr{C}_n^+)=\mathscr{C}_n^-$.

   d) Contruire $\mathscr{C}_2$ dans le repère précédent.

e) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points $M$ de $P$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \leqslant\leqslant 0.$$

**III**

Un point mobile $M$ a pour coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = 2(1+t)\mathrm{e}^t \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

.

**1.** Déterminer la trajectoire du point $M$ et son sens de parcours.

**2.** Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ de $M$ au temps $t$.

Déterminer si la fonction qui à $t$ associe $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|^2$ est croissante ou décroissante.

# XIV. Limoges, série C

**A**Ex. 1770. ———— *4 points.* *./1983/limogesC/exo-1/texte.tex*

Une urne contient 20 jetons indiscernables au toucher. Cinq jetons portent le numéro 9, deux jetons le numéro 8, six jetons le numéro 3 et sept jetons le numéro 1.
Lorsque l'on tire au hasard un jeton de l'urne, tous ont la même probabilité d'être obtenus.

**1.** On tire successivement quatre jetons dans l'urne, sans les remettre après chaque tirage.
En notant dans l'ordre les numéros obtenus, on obtient ainsi un nombre de quatre chiffres (le chiffre des milliers étant obtenu au premier tirage, le chiffre des centaines au second, le chiffre des dizaines au troisième et le chiffres des unités au quatrième tirage).
Quelle est la probabilité :
a) d'obtenir le nombre 1983 ?
b) d'obtenir un nombre pair ?

**2.** On précède comme dans la question précédente, mais on remet chaque jeton tiré dans l'urne après l'avoir tiré et noté son numéro. Quelle est la probabilité :
a) d'obtenir le nombre 1983 ;
b) d'obtenir un nombre divisible par 9 et ne comportant pas le chiffre 9 ?

(On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible, puis une approximation décimale comportant quatre chiffres après la virgule).

**A**Ex. 1771. ———— *4 points.* *./1983/limogesC/exo-2/texte.tex*

$ABCD$ est un quadrilatère du plan et $\alpha$ un nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument $\theta$.
$a$, $b$, $c$, $d$ désignent les affixes des points $A$, $B$, $C$ et $D$, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

- La similitude directe $s_1$ de centre $A$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$, transforme $B$ en $Q$ ;
- La similitude directe $s_2$ de centre $B$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$, transforme $C$ en $M$ ;
- La similitude directe $s_3$ de centre $C$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$, transforme $D$ en $N$ ;
- La similitude directe $s_4$ de centre $D$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$, transforme $A$ en $P$ ;

On désigne par $p$, $q$, $n$ et $m$ les affixes de $P$, $Q$, $N$ et $M$.

**1.** Déterminer $q$ en fonction de $\alpha$, $a$ et $b$.

**2.** a) Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à $n+q = m+p$.
b) En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme est équivalent à soit $\alpha = \dfrac{1}{2}$ soit à $ABCD$ est un parallélogramme.

**3.** On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.
En déduire $MNPQ$ est un carré.

## Problème 655

./1983/limogesC/pb/texte

Dans tout le problème, $a$ est un réel strictement positif donné et $f$ une application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.
On se propose de résoudre pour chaque $x$ de $\mathbb{R}_+^\star$, l'équation :

$$f(y) = \frac{f(x)+f(a)}{2} \quad \text{(d'inconnue } y \text{ dans } \mathbb{R}_+^\star)$$

et d'étudier l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

quand elle est définie.

A- 1. Calculer $y$ lorsque $f$ est successivement $f_1$, $f_2$, $f_3$ définies respectivement par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = \log x$.

2. Soit $\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+a}{2} \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g_2 : \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2ax}{x+a} \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g_3 : \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{ax} \end{aligned}$.

On note $C_1$, $C_2$ et $C_3$ leurs courbes représentatives respectives.
Tracer, sur un même graphique, ces trois courbes en précisant pour chacune d'elles, la tangente au point d'abscisse $a$.
Justi ?er leurs positions relatives.

B- **Dans cette partie $f(x) = x$.**

1. Dé ?nir la fonction $g$ associée (on ne demande pas l'étude de cette fonction).
2. Montrer que la représentation graphique $C$ de $g$ , dans un repère orthonormé est une partie d'une conique $\Gamma$ dont on précisera les axes, les sommets, les asymptotes.
3. Tracer la conique $\Gamma$ et la courbe $C$ en précisant sa tangente au point d'abscisse $a$.

C- **Dans cette partie, $f(x) = \mathrm{e}^x$.**

1. Définir la fonction $g$ qui sera notée ici $g_a$ et étudier ses variations.
2. Montrer que la droite d'équation $y = x?\log 2$est asymptote à la représentation graphique $C_a$ de $g_a$. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
3. Donner une équation de la tangente à $C_a$ au point d'abscisse $a$ Construire $C_a$.
4. Si $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs, montrer qu'il existe une translation qui transforme $C_a$ en $C_b$.

D- **Dans cette partie $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^\star$.**

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, l'équation $f(y) = \dfrac{f(x)+f(a)}{2}$ a une solution unique $y = g(x)$ appartenant à l'intervalle d'extrémités $a$ et $x$.
Calculer $g(a)$.
2. On suppose $f$ dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$, montrer que $g$ est dérivable en $a$ et calculer $g'(a)$.

# XV. Lyon, série C

Ex. 1772. ——— *4 points.* ./1983/lyonC/exo-1/texte.tex

Soit un plan affine $P$ rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; soit $m$ un entier relatif ; soit $(D)$ la droite d'équation $3x - 4y = 6$ et $(D_m)$ la droite d'équation $16x + 3y = m$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3x - 4y = 6$.

**2.** Trouver les points de $(D)$ dont les coordonnées sont des multiples de 6.

**3.** Déterminer l'ensemble des valeurs de $m$ telles que le point d'intersection de $(D)$ et $(D_m)$ ait des coordonnées entières.

**4.** Déterminer l'ensemble des valeurs de $m$ telles que les coordonnées entières du point d'intersection de $(D)$ et $(D_m)$ soient divisibles par 6.

Retour page 1

Ex. 1773. 4 points. ./1983/lyonC/exo-2/texte.tex

**1.** $E$ est un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

$D$ est la droite vectorielle de base : $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. $R$ est la symétrie d'axe $D$. ($R$ est aussi appelé demi-tour d'axe $D$).

Exprimer dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, les vecteurs $R(\vec{\imath}),\ R(\vec{\jmath}),\ R(\vec{k})$. (On pourra utiliser les images par $R$ de vecteurs orthogonaux à $D$).

**2.** $\mathscr{E}$ est un espace affine associé à $E$ rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans laquelle un point $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ a pour image $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + 1\\ y' = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z + 4\\ z' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + 2 \end{cases}$$

Reconnaître la nature de $f$ et donner ses éléments caractéristiques. (On pourra rechercher les points $M$ tel que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit parallèle à $D$).

## Problème 656 12 points. ./1983/lyonC/pb/texte

N.B. : les parties A et B sont indépendantes.

A- Soit $f$ la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g$ la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1° Montrer que $g$ est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$.

2° Montrer que $f$ a une application réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Construire sur une même figure les courbes représentatives de $f$ et de $f^{-1}$.

3° Montrer que $h$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

4° En déduire que $g = f^{-1}$.

5° Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

B- On considère les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n\,\mathrm{d}t$ où $n$ désigne un entier naturel.

1° Exprimer $I_{n+1}$ en fonction de $I_n$ et de $J_n$.

2° Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a, pour tout entier naturel $n$, $I_{n+1} = 2(n+1)J_n$.

3° Établir alors une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$. En déduire que pour tout $n$

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}.$$

C- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 1 + \frac{1}{1\times 3}$$

et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1\times 3} + \frac{1\times 2}{1\times 3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{1\times 3\times 5\times 7} + \cdots + \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}.$$

Retour page 1

1° En utilisant les résultats du B-, montrer qu'on a, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 2\int_0^1 \frac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2° On pose $v_n = 2I - u_n$ où $I$ est l'intégrale du A.

Exprimer $v_n$ à l'aide d'une intégrale. Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} \leqslant 1$. En déduire un encadrement de $v_n$.

3° Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4° Déterminer un entier $n_0$ tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

$$\pi - 2u_n \leqslant 10^{-3}.$$

# XVI. Maroc, série C

**Ex. 1774.** ./1983/marocC/exo-1/texte.tex

**1.** Calculer les restes dans la division par 13 des puissances successives de 6.

**2.** En déduire le reste dans la division par 13 de $(1982)^{1983}$.

**3.** Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$, le nombre

$$6^{12n} + (2\times 6^n) + 2$$

est-il multiple de 13 ?

**Ex. 1775.** ./1983/marocC/exo-2/texte.tex

**1.** On considère la fonction de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x\sqrt{d^2 - x^2},$$

où $d$ désigne un nombre réel strictement positif fixé.

a) Étudier $f$ et dessiner sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$.

**2.** Déterminer l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets appartiennent à un même cercle de rayon $R$, $R$ désignant un nombre réel strictement positif fixé.

# XVII. Maroc, série E

**Ex. 1776.** ./1983/marocE/exo-1/texte.tex

Soient les équations du second degré dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

$$z^2 + (1-2\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i} = 0 \qquad (1)$$

$$z^2 - 4(1-2\mathrm{i})z - 19 - 40\mathrm{i} = 0 \qquad (2)$$

1. Résoudre ces équations.
2. $A$ et $B$ sont les images des solutions de l'équation (1) dans le plan complexe. On appelle $A$ celle dont la partie réelle est positive. $A'$ et $B'$ sont les images des solutions de l'équation (2). On appelle $A'$ celle dont la partie réelle est positive.
   Déterminer la similitude plane directe qui transforme le bi-point $(A,\ B)$ en le bi-point $(A',\ B')$.

Ex. 1777. ./1983/marocE/exo-2/texte.tex

L'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le centimètre.
Un point $M$ se déplace dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de façon qu'à chaque instant $t$ $(t > 0)$ les coordonnées du vecteur vitesse soient :

$$x' = \frac{1}{t^2} \qquad y' = \frac{1}{t}.$$

1. Déterminer les coordonnées du point $M$ sachant qu'en $t = 1$, $M$ est en $A(0\ ;\ 2)$.
2. Donner une équation cartésienne de la trajectoire et la tracer.
3. Calculer le vecteur accélération. Quell est l'allure du mouvement ?

## Problème 657 ./1983/marocE/pb/texte

A. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 dont une base est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
A tout couple $(a,\ \lambda)$ de $\mathbb{R}^2$, on associe l'endomorphisme $f_{a,\lambda}$ de $E$ défini par sa matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda a & \lambda \\ -\lambda a^2 & 1-\lambda a \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. MOntrer qu'à tout couple $(a,\ \lambda)$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{a,\lambda}$ est automorphisme de $E$.
   Trouver l'ensemble des couples $(a,\ \lambda)$ de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $f_{a,\lambda}$ est l'application identique de $E$.
2. On suppose que le couple $(a,\ \lambda)$ appartient à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$.
   Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $f_{a,\lambda}$ est une droite vectorielle $\mathscr{D}_a$ indépendante de $\lambda$ et que l'on caractérisera par une équation.
   Étudier le cas où $\lambda = 0$.
3. on suppose dans cette question que $a$ est fixé.
   a) Soit $\vec{u} = \vec{i} - a\vec{j}$. Montrer que $\vec{u} \in \mathscr{D}_a$.
   Quelle est la matrice de $f_{a,\lambda}$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{j})$ ?
   b) On note $\mathscr{T}_a$ l'ensemble des applications $f_{a,\lambda}$ quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.
   Montrer que $\mathscr{T}_a$ muni de la loi de composition des applications (notée $\circ$) est un groupe isomorphe au groupe des nombres réels muni de l'addition.
4. On pose $f = f_{0,\ 1}$.
   a) Quelle est la matrice de $f$ dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ?
   b) Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ ayant pour matrice dans la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s$.
   Montrer que $f \circ s$ est une involution dont on déterminera les éléments caractéristiques.
   c) En déduire que $f$ est la composée de deux symétries vectorielles.

B. Soit $P$ un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction numérique à la variable réelle $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$.
   On appelle $(Gamma_1)$ sa représentation graphique dans le repère donné.
2. On note $\sigma$ la symétrie affine de centre $O$. On pose $\Gamma_2 = \sigma(\Gamma_1)$.
   a) Montrer que tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère donné est un point de $(\Gamma_2)$ si, et seulement si, $y = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4}\right)$.
   b) Construire $(\Gamma_2)$.
   c) Montrer que : tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère donné, est un point de $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, si, et seulement si, $y^2 - xy - 1 = 0$.

3. Soit $t$ l'application affine su plan, qui au point $M$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère donné, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

Quel est l'endomorphisme associé à $t$ ?

4. Soit $(\Gamma)$ la représentation graphique de la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x}$.

   Montrer que l'image de $(\Gamma)$ par $t$ est $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

## XVIII. Montpellier, série C

**Ex. 1778.** *5 points.* *./1983/montpellierC/exo-1/texte.tex*

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges.
Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules tombent dans un panier. On traitera l'exercice en admettant que toutes les boules ont la même probabilité de tomber dans le panier.
Si les trois boules obtenues sont rouges, le joueur gagne un lot de 100 francs.
Si deux des boules obtenues sont rouges, le joueur gagne un lot de 15 francs.
Si une des trois boules est rouge, le joueur gagne un lot de 5 francs.
Si les trois boules sont blanches, le joueur ne gagne rien. Le prix du jeton est fixé à 8 francs.

**1.** La variable aléatoire $X$ désignant la valeur du lot gagné par le joueur, déterminer la loi de probabilité de $X$. Calculer l'espérance mathématique de $X$.

En déduire le gain moyen du forain.

**2.** L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 francs le prix du jeton, ou bien ajouter une boule blanche à l'intérieur de l'appareil. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

**Ex. 1779.** *4 points.* *./1983/montpellierC/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ la fonction numérique définie comme suit :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 2 : f(x) &= \mathrm{e}^{x^2-3x+2} \\ x > 2 : f(x) &= x - 1 - \frac{1}{\log(x-2)}. \end{aligned}$$

**1.** Quel est l'ensemble de définition de $f$ ? En quels points $f$ est-elle continue ? En quels points $f$ est-elle dérivable ?

**2.** Étudier les variations de $f$. Construire la courbe représentative de $f$.

**3.** Montrer qu'il existe une bijection $g$ de $\left[\dfrac{3}{2}\ ;2\right]$ sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\ ;1\right]$ telle que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right], \qquad g(x) = f(x).$$

Calculer $g^{-1}(y)$ pour tout $y \in \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\ ;1\right]$.

### Problème 658 *11 points.* *./1983/montpellierC/pb/texte*

A Soit $\vec{E}_3$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de $\vec{E}_3$.

On définit une forme bilinéaire symétrique $\varphi$ sur $\vec{E}_3$ de la façon suivante :

$$\text{si } \vec{u}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k},$$

$$\varphi(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2) = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2 + y_2z_1.$$

1° a) Prouver que $\forall \vec{u} \in \vec{E}_3 - \{\vec{0}\}$, $\varphi(\vec{u},\ \vec{u}) > 0$. (Ainsi $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\vec{E}_3$).

Dans toute la suite du problème, les termes orthonormé, orthogonal, unitaire, ... s'entendent eu sens de $\varphi$.

b) Calculer $\vec{i}.\vec{i}$, $\vec{j}.\vec{j}$, $\vec{k}.\vec{k}$, $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{j}.\vec{k}$, $\vec{i}.\vec{k}$.

2° Soit $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

a) Montrer que $\vec{I}$ est un vecteur unitaire.

b) Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle de base $(\vec{I})$. Quelle est la nature de l'orthogonale de $\vec{D}$ ? En donner une équation (on notera $\vec{D}^{\perp}$ l'orthogonal de $\vec{D}$).

c) Montrer que $(\vec{J},\ \vec{K})$ où $\vec{J} = \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{K} = \vec{k}$, est une base orthonormée de $\vec{D}^{\perp}$. En déduire que $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$ est une base orthonormée de $\vec{E}_3$.

B Soient $a$ et $b$ deux réels non tous deux nuls, $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $F_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\vec{E}_3$ défini par :

$$\begin{aligned} F_{a,\ b}(\vec{i}) &= \lambda\vec{i} + (a-\lambda)\vec{j} + (b - a + \lambda)\vec{k}, \\ F_{a,\ b}(\vec{j}) &= (a-b)\vec{j} + 2b\vec{k}, \\ F_{a,\ b}(\vec{k}) &= -b\vec{j} + (a+b)\vec{k}. \end{aligned}$$

1° Montrer que $F_{a,\ b}$ est bijectif.

2° Déterminer $F_{a,\ b}(\vec{I})$.

3° Déterminer $F_{a,\ b}(\vec{J})$ et $F_{a,\ b}(\vec{K})$. En déduire $F_{a,\ b}(\vec{D}^{\perp}) = \vec{D}^{\perp}$. Soit $G_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\vec{D}^{\perp}$ tel que

$$\forall \vec{u} \in \vec{D}^{\perp}, \qquad G_{a,\ b}(\vec{u}) = F_{a,\ b}(\vec{u}).$$

Montrer que dans la base $(\vec{I},\ \vec{J})$ la matrice de $G_{a,\ b}$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

4° Nature et caractérisation de $F_{1,\ 0}$, de $F_{-1,\ 0}$ et de $F_{0,\ 1}$.

5° Quelle relation doivent vérifier $a$ et $b$ pour que $F_{a,\ b}$ soit une isométrie ?

6° Nature et caractérisation de $\dfrac{1}{\lambda}F_{a,\ b}$.

C Soit $(O,\ \vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien $E_3$ associé à $\vec{E}_3$.

On désigne par $f$ l'application affine de $E_3$ dans $E_3$ ayant pour application linéaire associée $F_{0,\ \sqrt{2}}$ et laissant le point $O$ invariant.

Soit $E$ l'ellipse du plan de repère $(O,\ \vec{J},\ \vec{K})$ ayant pour équation dans le repère $(O,\ \vec{J},\ \vec{K})$ : $\dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

Préciser grand axe, petit axe, foyers, et sommets de $E$. Montrer que $E' = f(E)$ est une ellipse dont on indiquera le grand axe, le petit axe, les foyers et sommets. Construire $E$ et $E'$ sur une même figure.

## XIX. Nancy, série C

**Ex. 1780.** ____________ *5 points.* *./1983/nancyC/exo-1/texte.tex*

On considère l'entier naturel $A$ s'écrivant en base six :

$$A = \overline{y2xx}.$$

**1.** Montrer qu'on peut déterminer un couple unique $(x,\ y)$ tel que $A$ soit à la fois divisible par 5 et par 7. $A$ est-il divisible par 2, par 3 ?

**2.** Écrire en base 10 le nombre A trouvé dans la première question et vérifier les résultats précédents. Donner le nombre de diviseurs positifs de $A$ et en dresser la liste.

**3.** Soit l'entier naturel $B$ s'écrivant $\overline{2400}$ en base sept. Donner dans le système décimal

$$d = \text{P.G.C.D.}(A,\ B) \quad \text{et} \quad m = \text{P.P.C.M.}(A,\ B).$$

Retour page 1

# XX. Nantes, série C

**Ex. 1781.** ./1983/nantesC/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$ ; les solutions seront données sous forme trigonométrique ; les représenter dans le plan complexe.

**2.** Démontrer que la somme des solutions est nulle.

**3.** En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

**4.** 4. Exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$, puis calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

**Ex. 1782.** ./1983/nantesC/exo-2/texte.tex

Soit P un plan affine euclidien ; $ABC$ est un triangle équilatéral ; on note $MN$ la distance euclidienne des points $M$ et $N$ et $a = AB$.

**1.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ de P tels que :

$$2a^2 \leqslant 2AM^2 + BM^2 + CM^2 \leqslant 3a^2.$$

**2.** Pour $k \in \mathbb{R}$ on considère l'ensemble :

$$\Delta_k = \left\{M/\ M \in \text{P}, \qquad (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k\right\}.$$

a) Déterminer $\Delta_k$ et tracer $\Delta_k$ pour $k = 3a^2$.

b) Considérons $(\mathscr{E})$ l'ellipse de centre $G$ barycentre du système $\{(A,\ 2), (B,\ 1), (C,\ 1)\}$ dont le grand axe est porté par la médiatrice de $BC$ et est égal à $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ et dont le petit axe vaut $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Déterminer les réels $k$ pour que $\Delta_k$ soit l'une des directrices de l'ellipse $(\mathscr{E})$.

# XXI. Nice, série C

**Ex. 1783.** ./1983/niceC/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien (P), on donne un triangle équilatéral $ABC$ tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = 1$. Soit $A'$ le milieu du segment $[BC]$.

**1.** Montrer que le milieu $G$ du segment $[AA']$ est le barycentre de $A,\ B,\ C$, respectivement affectés des coefficients 2, 1, 1.

**2.** Soit $h$ l'application de (P) dans (P) qui, à tout point $M$ de (P), associe le point $M'$ de (P) tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que $h$ est une homothétie affine dont on précisera le centre et le rapport.

**3.** Calculer $2GA^2 + GB^2 + GC^2$.

**4.** Trouver l'ensemble des points $N$ de (P) tels que :

$$2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2.$$

**Ex. 1784.** ./1983/niceC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$11x - 6y = 8.$$

**2.** Une variable aléatoire réelle $X$ ne prend que les valeurs $-2,\ 1,\ 3$, avec les probabilités respectives :

$$A = \frac{x}{16}, \qquad B = \frac{3x-y}{16} \quad \text{et} \quad C = \frac{18x-11y}{16}.$$

Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers $(x,\ y)$ tel que ces coordonnées soient acceptables. Calculer alors l'espérance mathématique et la variance de $X$.

**3.**

## Problème 659

./1983/niceC/pb/texte

A- Soit $U$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad U(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. Étudier $U$ et tracer la courbe représentative de $U$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité : 6 cm).
2. Soit $r$ la restriction de $U$ à l'intervalle $I = [1\,; +\infty[$.

   a) Montrer que $r$ est une bijection de $I$ sur l'intervalle$J = \left]0\,; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

   b) On désigne par $r^{-1}$ la bijection réciproque de $r$ (on n'explicitera pas $r^{-1}$). Représenter graphiquement $r^{-1}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   c) Étudier la dérivabilité de $r^{-1}$ sur $J$.

B- Dans toute la suite, $E$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel.

On note $\varphi$ l'application de $E$ dans $E$ qui, à $f$ élément de $E$, associe $F = \varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
2. Montrer que, pour toute fonction $f$ de $E$, $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 ; exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$.

   En déduire que $\varphi$ est injectif.
3. a) Soit $g$ une fonction de $E$, qui s'annule en $0$, dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée continue. On désigne par $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = g'(x)\mathrm{e}^{x^2}.$$

   Montrer que $\varphi(h) = g$ ; en utilisant les résultats des questions B2 et 3. a,[2] caractériser l'image de $\varphi$.

   b) Déterminer les antécédents des fonctions $U$, $V$, $W$définies sur $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad U(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2} \quad ; \quad V(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2} \quad ; \quad W(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$
4. Soit $\mathscr{P}_2$ le sous-espace vectoriel de $E$ dont une base est $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ où $f_0,\ f_1,\ f_2$ sont définies par :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = 1 \quad ; \quad f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = x^2.$$

   a) Montrer que $(f_0,\ 2f_1,\ f_0 - 2f_2)$ est une base de $\mathscr{P}_2$.

   b) En déduire que $(\varphi(f_0),\ V,\ W)$ est une famille libre de $\mathscr{P}_2$. Montrer que $(\varphi(f_0),\ V,\ W)$ est une base de $\mathscr{P}_2$. (On ne calculera pas $\varphi(f_0)$.)

C- Pour $n$ entier naturel et $x$ réel, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour } n \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad I_0(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 et tout réel $x$ on a l'égalité :

   $$(n-1)I_{n-2}(x)?2I_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   b) Calculer $I_1(x)$ ; en déduire $I_3(x)$.

   c) Calculer $I_2(x)$ en fonction de $I_0(x)$ que l'on ne calculera pas.

2. autoreférence !



Retour page 1

2. On désire prouver qu'il existe un réel $A$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant I_0 \leqslant A.$$

a) Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $x \longmapsto I_0(x)$ est croissante et positive.

b) Montrer que : $I_0(x) - I_0(1) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que :

$$\forall t \in [1\,;+\infty[ \qquad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[ \qquad I_0(x) - I_0(1) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

d) Trouver alors un réel $A$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad I_0(x) \leqslant A.$$

3. Déduire des questions C(1)c et **??** que l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$), l'axe des $x$ et la courbe représentative de la fonction $U$ étudiée au A, est majorée par une constante indépendante de $\lambda$.

## XXII. Orléans Tours, série C

**Ex. 1785.** *4 points.* *./1983/orleansC/exo-1/texte.tex*

Pour tout entier naturel non nul $q$, on note $E_q$ l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $z^q = 1$.

**1.** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls, $d$ leur plus grand commun diviseur. On pourra poser $n = dn'$ et $p = dp'$.

a) Démontrer que $E_d$ et inclus dans $E_n \cap E_p$.

b) Justifier l'existence de deux entiers relatifs $a$ et $b$ tels que $an + bp = d$. En déduire que $E_n \cap E_p$ est inclus dans $E_d$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} z^{42} = 1, \\ z^{444} = z^{5\ 222}. \end{cases}$$

**Ex. 1786.** *4 points.* *./1983/orleansC/exo-2/texte.tex*

On pose $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

**1.** Soit $f$ la fonction de $]1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Calculer la fonction dérivée de $f$. En déduire la valeur de $K$.

**2.** On pose $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2 - 1}$.

Démontrer que :

$$J = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x - K.$$

Calculer $J$ à l'aide d'une intégration par parties.

**3.**

# XXIII. Paris, série C

**Ex. 1787.** ____________ *4 points.* ./1983/parisC/exo-1/texte.tex

On considère des entiers $a,\ b,\ c$ tels que :

$$\text{P.G.C.D.}(a,\ b) = 3 \qquad \text{et} \qquad \text{P.G.C.D.}(b,\ c) = 4. \tag{I}$$

**1.** Montrer que $a,\ b,\ c$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

**2.** On suppose dans cette question que $a$ et $c$ sont premiers entre eux. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$abc = \text{P.P.C.M.}(a,\ b,\ c)\text{P.G.C.D.}(a,\ b)\text{P.G.C.D.}(b,\ c)\text{P.G.C.D.}(c,\ a)$$

.

**3.** On suppose dans cette question que $abc = 12\ 096,\ a,\ b,\ c$ vérifiant le système (I). Trouver tous les triplets $(a,\ b,\ c)$.

**Ex. 1788.** ____________ *4 points.* ./1983/parisC/exo-2/texte.tex

Dans un espace affine euclidien $E$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A(0\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$, $D(0\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

**1.** Montrer qu'il existe un, et un seul retournement (ou demi-tour), noté $f$, tel que $f(0) = A$ et $f(B) = B$. Caractériser géométriquement ce demi-tour et donner sa représentation analytique.

**2.** Soit $g$ l'application : $E \to E$ qui à tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z+2. \end{cases}$$

Déterminer la nature de $g$ et ses éléments caractéristiques ; on précisera les images de $A$ et de $B$ par $g$.

**3.** Soit $h = f \circ g$.

Montrer que $h$ est un déplacement dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

## Problème 660 *12 points.* ./1983/parisC/pb/texte

On définit, pour $t \in \mathbb{R}^\star$, l'application $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_t(x) = x\log|x| - (x-t)\log|x-t| & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{0,\ t\} \\ f_t(0) = f_t(t) = t\log|t| \end{cases}$$

où $x \mapsto \log x$ désigne la fonction logarithme népérien de $x$.

On appelle $C_t$, la courbe représentative de $f_t$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a) Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}^\star$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f_{-t}(x) = -f_t(-x)$ ; que peut-on en déduire pour les courbes $C_t$ et $C_{-t}$ ? On suppose dans toute la suite du problème que $t > 0$.

   b) Montrer que la courbe $C_t$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{t}{2}$.

2. Soit l'intervalle $I_t = \left[\dfrac{t}{2}\ ; +\infty\right[$.

   a) Montrer que pour tout réel $a$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+ah)}{h} = a$.

   b) Montrer que $f_t$ est continue sur $I_t$.

   c) Étudier la dérivabilité de $f_t$ sur $I_t$ et en déduire le sens de variation de $f_t$ sur $I_t$.

   d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f_t(x)}{x} = 0$.

   e) Dessiner sur la même figure les courbes $C_t$ pour $t = 1,\ t = 4,\ t = \dfrac{1}{4}$ en prenant 2 cm pour unité.

Retour page 1

f) Déterminer l'image $J_t$ de $I_t$ par $f_t$.
On pose :

$$\begin{aligned} g_t : I_t &\longrightarrow J_t \\ x &\longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

Montrer que $g_t$ est bijective. On note $h_t$ la fonction réciproque de $g_t$.

3. a) Montrer que si $t > 2$, $f_t$ ne s'annule pas.
   b) En combien de points s'annule $f_2$ ?
   c) Montrer que si $t \in ]0\,;2[$, $f_t$ s'annule en deux points dont on appelle les abscisses $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ avec $\alpha(t) < \beta(t)$.
   Montrer que $\alpha(t) + \beta(t) = t$.
4. On suppose dans cette question que $t \in ]0\,;1[$.
   a) Montrer que $t < \beta(t) < 1$.
   b) Montrer que $f_1\left(\dfrac{\beta(t)}{t}\right) = -\log t$ et en déduire que :

$$\beta(t) = t \times h_1(-\log t).$$

   (On rappelle que $h_1$ est définie dans 2f ).
   c) i) Pour $x \in I_1$, on pose $\varphi(x) = f_1(x) - 1 - \log(x)$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

   ii) On définit une fonction $\psi$ sur $I_1$ par $\psi = \varphi \circ h_1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$ et que :

$$\forall x \in J_1, \qquad h_1(x) = \exp(x - 1 - \psi(x)).$$

   d) Montrer que $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \beta(t)$ existe et la calculer.

# XXIV. Paris, série E

**Ex. 1789.** ./1983/parisE/exo-1/texte.tex

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On désigne par $x'x$, $y'y$, $z'z$ les axes ayant pour vecteur directeur respectivement $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.
On place $O$ à 6 cm du bord gauche de la feuille et à 15 cm du bas. $(Ox,\ Oy)$ est le plan horizontal de projection, $(Oy,\ Oz)$ est le plan frontal, la ligne de terre est $y'y$ ; elle est parallèle au petit côté et orientée positivement de la gauche vers le droite. $Ox$ est dirigé vers le bas de la feuille, $Oz$ vers le haut. L'unité de longueur est le cm.

**1.** a) Construire les traces du plan $\Pi$ d'équation $2x - 2y + z - 8 = 0$.
   b) Soit $A$ le point de $\Pi$ dont la projection horizontale $a$ est le point de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$. Déterminer la projection frontale $a'$ de $A$.

**2.** Soit $(A,\ B,\ C,\ D)$ un carré du plan $\Pi$ défini par :
   - $(AB)$ est une frontale ;
   - $AB = 5$ cm ;
   - les plans de projections ne coupent pas la surface délimitée par $ABCD$.

   Construire les projections de ce carré.

**3.** Soit $(S,\ A,\ B,\ C,\ D)$ une pyramide régulière telle que $S$ soit situé à 6 cm de $\Pi$. Construire $S$

Ex. 1790. ./1983/parisE/exo-2/texte.tex

Soit $P$ un plan affine et $A$ et $B$ deux points distincts de $P$.
A tout réel $\alpha$ et à tout point $M$ de $P$ on associe le système de points pondérés

$$\mathscr{S}_\alpha = \{(A,\ \alpha),\ (B, \alpha+1),\ (M,\ -\alpha)\}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble $E$ des réels $\alpha$ pour lesquels $\mathscr{S}_\alpha$ admet un barycentre.

**2.** Soit $\alpha$ un élément de $E$. On note $\Phi_\alpha$ l'application de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ associe le point $M'$ barycentre du système $\mathscr{S}_\alpha$.
Quelle est la nature de $\Phi_\alpha$ ?

## Problème 661

./1983/parisE/pb/texte

A. Soit $\begin{array}{rl} u : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \end{array}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, la fonction $u$ admet une dérivée $n^{\text{e}}$ (on dira que $u$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$).
2. Étudier les variations des fonctions $u''$, $u'$ et $u$ sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad u(x) \geqslant 0.$$
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \sin x \leqslant x$.
4. Déduire des questions précédentes : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x^3|}{6}$.
5. Soit $\begin{array}{rl} \widehat{s} : \mathbb{R}^\star & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$.
   a) Montrer que $\widehat{s}$ admet un prolongement par continuité en $0$, qu'on notera $t$.
   b) En utilisant les questions précédentes, montrer que $t$ est dérivable en $0$.
   c) Montrer que $t$ est dérivable, et qu'il existe dans l'intervalle $]0\,;2\pi[$ un unique réel $\alpha$ tel que $t'(\alpha) = 0$.
   d) Indiquer une méthode permettant de trouver une valeur approchée de $\alpha$.
   e) Construire la courbe représentative de la restriction de $t$ à $[0\,;2\pi[$.

B. Soit $D$ l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et soit $F^\star$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$.
A chaque élément $f$ de $D$, on associe l'élément $\widehat{f}$ de $F^\star$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star \quad \widehat{f}(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

On notera $\Phi$ l'application de $D$ dans $F^\star$ ainsi définie.

1. Dire pourquoi $D$ et $F^\star$ sont des espaces vectoriels réels, montrer que $\Phi$ est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de $\Phi$.
3. Montrer que, pour tout $f$ de $D$, $\widehat{f}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et qu'on a, pour tout réel non nul $x$ et entier naturel non nul $n$ :
$$f^{(n)}(x) = x(\widehat{f})^{(n)}(x) + n(\widehat{f})^{(n-1)}(x).$$
4. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)$ de fonctions polynômes telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad f^{(n)}(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha} P_n\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$
Que peut-on dire du degré du polynôme $P_n$ ?

Retour page 1

C. Soit $G$ l'image de $\Phi$. A tout élément de $G$ on associe une fonction $h$ :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\widehat{f})'(x) + \frac{1}{x}\widehat{f}(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que $h$ est un élément de $G$.
2. Soit $\varphi$ l'application de $G$ dans $G$ définie par $\varphi(\widehat{f}) = h$. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
3. Montrer que le noyau de $\varphi$ est une droite vectorielle, dont on donnera une base. Quel est la noyau de $\varphi \circ \varphi$?
4. soit $\widehat{g}$ un élément donné de $G$. Quels sont les antécédents de $\widehat{g}$ pat $\varphi$? En déduire que $\varphi$ est surjective.
5. On considère la fonction $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}\mathrm{e}^x \end{aligned}$

   a) Vérifier que $f_1 \in G$ et que $\varphi(f_1) = f_1$.

   b) Montrer que, pour tout élément $\widehat{f}$ de $G$, il existe une fonction $u$ élément de $D$ telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^\star \quad \widehat{f}(x) = u(x) f_1(x).$$

   Montrer que $\widehat{f}$ est solution de l'équation $\varphi(\widehat{f}) = \widehat{f}$ si, et seulement si on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^\star \quad u'(x) = 0.$$

   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\widehat{f}) = \widehat{f}$.
6. Montrer que $\widehat{s}$ et $\varphi(\widehat{s})$ engendrent un espace vectoriel de dimension deux, stable par $\varphi$. Quels sont les antécédents de $\widehat{s}$ par $\varphi \circ \varphi$?

# XXV. Pondichery, série C

Ex. 1791. ./1983/pondicheryC/exo-1/texte.tex

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4\cos^3 x - 3\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 1792. ./1983/pondicheryC/exo-2/texte.tex

Une personne compose au hasard un numéro de téléphone à 6 chiffres (un cadran téléphone comporte les dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0).

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) la personne compose le numéro $11-03-50$.

   b) La personne compose un numéro dont les chiffres sont tous distincts.

   c) La personne compose un numéro dont les chiffres constituent une suite strictement croissante (par exemple, le $03-47-89$).
2. Soit $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de chiffres 0 utilisés dans le numéro composé par cette personne.
   déterminer la loi de probabilité de $X$.

**Problème 662** *Partiel* ./1983/pondicheryC/pb/texte

I.

II. $(\pi)$ est un plan vectoriel de base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$F$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $(\pi)$ dont le noyau contient la droite vectorielle $(D)$ de base $\vec{i} + \vec{j}$.
$G$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $(\pi)$ ayant une image incluse dans $(D)$.



Retour page 1

1. Donner deux exemples démontrant que $F$ et $G$ ne sont pas vides.
2. Démontrer que, pour tout $\Phi$ de $F$ et $\Psi$ de $G$, $\Psi \circ \Phi \in F \cap G$.
   Identifier $\Phi \circ \Psi$.
3. $s$ étant la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{\imath}$ et $r$ la rotation vectorielle d'angle droite direct, calculer $(s+r)(\vec{\imath})$ et $(s+r)(\vec{\jmath})$. En déduire que $s+r$ appartient à $F \cap G$. Déterminer le noyau et l'image de $s-r$.
4. $E$ est l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$ ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que $\Phi$ est un élément de $F$ si et seulement si sa matrice dans le base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ appartient à $E$. En déduire que $F$ est la plan vectoriel de base $(p,\ q)$, $p$ et $q$ ayant respectivement pour matrices $A$ et $B$.
5. Caractériser $p$ et $-q$.

III. $P$ est le plan affine associé à $(\pi)$ de repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $f$ l'application de $P$ dans $P$ qui à tou point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x. \end{cases}$$

   Démontrer que l'endomorphisme associé à $f$ est la somme de $p$ et d'une projection vectorielle $\Psi$ appartenant à l'ensemble $G$ de la partie II dont on précisera les éléments.
   En remarquant que le point $O$ est invariant par $f$, donner une construction de de $M'$ à partir de $M$.
   Démontrer que $f$ est bijective.
2. Soit $h_1$ et $h_2$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$h_1(x) = 2x + \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad h_2(x) = 2x - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

   On désigne par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs représentations graphiques respectives.
   a) Étudier les variations de $h_1$. tracer $\mathscr{C}_1$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Démontrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport au point $O$. Tracer $\mathscr{C}_2$.
   b) Soit $\mathscr{C}$ la réunion de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Démontrer que l'image de $\mathscr{C}$ par $f$ est une conique dont on déterminera les éléments. Tracer cette conique.

## XXVI. Reims, série C

Ex. 1793. ./1983/reimsC/exo-1/texte.tex

Soit $P$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application $T$ de $P$ dans $P$ qui, à chaque point $M$ d'affixe $z$, associe la point $M'$ d'affixe $z'$ $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 2 + 2\mathrm{i}$.

**2.** Soit $H$ le milieu du segment $[MM']$. Exprimer l'affixe de $H$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$ et de $\overline{z}$; en déduire, toujours en fonction de $z$ et $\overline{z}$, la distance de $M$ à $H$.

**3.** Préciser la nature et les caractéristiques géométriques de l'ensemble des points $M$ de $P$ dont l'affixe $z$ vérifie :

$$|z + 1 + \mathrm{i}| = \frac{1}{2}\,|z + \mathrm{i}\overline{z} - 2 - 2\mathrm{i}|\,.$$

**Ex. 1794.** ./1983/reimsC/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien $P$, on donne le triangle $ABC$ rectangle en $A$ et isocèle avec $AB = AC = a$, où $a$ est un réel donné strictement positif.

**1.** a) Déterminer et construire la barycentre $G$ du système $\{(A,\ 4)(B,\ -1)(C,1)\}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E_1$ des points $M$ du plan $P$ tels que

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2a^2.$$

**2.** $\mathscr{P}$ est le plan vectoriel associé à $P$.

a) Soit $\begin{array}{rl} \overrightarrow{f} : P & \longrightarrow \mathscr{P} \\ M & \longmapsto 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \end{array}$.

Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une fonction constante que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E_2$ des points $M$ du plan $P$ tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

## Problème 663

./1983/reimsC/pb/texte

I. Étant donné un entier $\geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et on considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}.$$

1. Montrer que $f(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes d'un suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Dire pourquoi $f(x)$ est intégrale sur $[0\,;1]$ et montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = u_n.$$

3. Vérifier que, pour $x \neq -1$, $f(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$.
4. En déduire que

$$u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

5. Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

II. On considère les fonctions numériques $F$, $G$, $H$ définies sur $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \ln(1+x), \quad G(x) = x - F(x), \quad H(x) = F(x) - x + x^2.$$

Retour page 1

1. Étudier les variations de $G$ et $H$ sur $[0\,;1]$. En déduire le signe de $G$ et de $H$ sur $[0\,;1]$.
2. Montrer que $x-x^2 \leqslant F(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
3. Étant donné un entier $k \geqslant 0$ et un entier $n \geqslant 1$, montrer que
$$\frac{1}{n+k}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant F\left(\frac{1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k}.$$
4. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$v_n = F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+F\left(\frac{1}{2n}\right)$$
$$\text{et } a_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$
Montrer que $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_n \leqslant v_n \leqslant a_n$.
5. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_n = a_n - \dfrac{1}{n}$.
Calculer $b_n - b_{n-1}$ (pour $n \geqslant 2$), puis comparer $b_n$ au réel $u_n$ défini au I. (pour $n \geqslant 1$).
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

III. On considère la fonction numérique $S$ définie sur $[0\,;1]$ par $S(x)=\sin(x)$ et la suite
$$w_n = S\left(\frac{1}{n}\right)+S\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+S\left(\frac{1}{2n}\right) \quad \text{(définie pour tout entier } \geqslant 1).$$
a) Montrer que $x-x^2 \leqslant S(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

## XXVII. Rennes, série C

**Ex. 1795.** ——— *3 points.* *./1983/rennesC/exo-1/texte.tex*

Soit $E$ l'ensemble des entiers relatifs vérifiant : $x^2 \equiv 2$ [mod 7] et $F$ l'ensemble des entiers relatifs vérifiant : $x^2 \equiv 2$ [mod 49].

**1.** Déterminer l'ensemble $E$.

**2.** Montrer que $F$ est inclus dans $E$.

**3.** a) Trouver tous le entiers relatifs $k$ tels que $3+7k$ appartienne à $F$.
b) Déterminer $F$.

**Ex. 1796.** ——— *3 points.* *./1983/rennesC/exo-2/texte.tex*

$P$ est le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.
Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels et $A$ le point d'affixe $(\alpha+\text{i}\beta)$.
Soient $M_1$ et $M_2$ deux points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

**1.** Démontrer que les conditions (1a) et (1b) sont équivalentes :
(a) : $M_1$ et $M_2$ sont distincts et la droite $(M_1M_2)$ a pour coefficient directeur 1 ;
(b) : $\dfrac{(z_1-z_2)^2}{\text{i}}$ est un nombre réel strictement positif.

**2.** On suppose maintenant que $z_1$ et $z_2$ sont solutions de l'équation :
$$z^2-2(\alpha+\text{i}\beta)z-1-\alpha^2-2\text{i}=0.$$
Démontrer que la condition (a) est équivalente à la condition :
$$2\alpha^2-\beta^2+1=0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta+1>0. \tag{c}$$

**3.** Représenter l'ensemble des points $A$ satisfaisant la condition (c).

# XXVIII. Strasbourg, série C

**Ex. 1797.** ——————— *4 points.* *./1983/strasbourgC/exo-1/texte.tex*

Le symbole log désigne le logarithme népérien.
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1,\ +1\}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\log|x+1|.$$

**1.** Étudier la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien $E$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**2.** On considère la fonction $F$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_3^x f(x)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer le sens de variation de la fonction $F$.

**3.** Soit $(\Delta)$ l'ensemble des points $M$ de $E$, de coordonnées $(x,\ y)$ vérifiant : $3\leqslant x\leqslant 5$ ; $0\leqslant y\leqslant f(x)$.
Calculer l'aire de $(\Delta)$.

**Ex. 1798.** ——————— *4 points.* *./1983/strasbourgC/exo-2/texte.tex*

On définit dans $\mathbb{Z}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$u_0=6,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=1-3u_n.$$

**1.** Démontrer que, pour tout entier positif $n$, $u_n$ et $u_{n+1}$ sont premiers entre eux.

**2.** Pour quels entiers positifs $n$, $u_n$ est-il divisible par 5 ?

**3.** a) Trouver un nombre relatif $\alpha$ tel que la suite $(u_n-\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique de raison (-3).

b) Déterminer $u_n$ en fonction de $n$.

c) Justifier que pour tout entier positif $n$, $[23(-3)^n,+1]$ est divisible par 4.

# XXIX. Toulouse, série C

**Ex. 1799.** ——————— *4 points.* *./1983/toulouseC/exo-1/texte.tex*

$n$ étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs $a$ et $b$ définis par :

$$a=3n^2-7n-8\quad;\quad b=n-2.$$

**1.** Montrer que P.G.C.D.$(a,\ b)=$P.G.C.D.$(b,\ 10)$.

**2.** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles : P.G.C.D.$(a,\ b)=5$.

**3.** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

**4.** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles le nombre $\dfrac{a}{b}$ est un entier relatif.

**Ex. 1800.** ——————— *4 points.* *./1983/toulouseC/exo-2/texte.tex*

Soit $\vec{E}$ un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Pour tout couple $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}^2$ on définit l'application linéaire $f_{(a,\ b)}$ de $\vec{E}$ vers lui-même dont la matrice relativement à la base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ s'écrit :

$$M_{(a,\ b)}=\begin{pmatrix}1 & b\\ a & a+b\end{pmatrix}.$$

**1.** a) Pour quelles valeurs de $a$ et $a$, l'application $f_{(a,\ b)}$ est-elle bijective ?

b) Dans le cas où elle ne l'est pas, déterminer le noyau et l'image de $f_{(a,\ b)}$. Donner une base de chacun d'eux.

c) Pour quels couples $(a,\ b)$ ces deux espaces vectoriels sont-ils non supplémentaires ?

**2.** Quelles sont les application $f_{(a,\ b)}$ involutives ?
Nature géométrique de $f_{(0,\ -1)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.

**3.** Quelles sont les applications $f_{(a,\ b)}$ vérifiant :

$$f_{(a,\ b)} \circ f_{(a,\ b)} = f_{(a,\ b)}\ ?$$

Nature de $f_{(0,\ 0)}$. Préciser ses éléments caractéristiques.

## **Problème 664** *12 points.*

*./1983/toulouseC/pb/texte*

On rappelle que l'ensemble $F$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'ensemble $\mathscr{C}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

A- Soit $E$ l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \mathrm{e}^x(ax+b) \end{aligned}.$$

où $a$ et $b$ sont des constantes réelles.

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ et que $(f_{0,1},\ f_{1,0})$ est une base de $E$.
2. Montrer que la dérivée $f'_{a,b}$ de $f_{a,b}$ vérifie

$$f'_{a,b} = f_{a,b} + af_{0,1}.$$

En déduire :

a) que $f'_{a,b}$ appartient à $E$ ;

b) une expression de la dérivée $n$-ième $f^{(n)}_{a,b}$ de $f_{a,b}$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) ;

c) une primitive de $f_{a,b}$.

B- 1. a) Soit $\varphi$ un élément de $\mathscr{C}$. A tout élément $f$ de $\mathscr{C}$, on associe l'élément $g$ de $F$ défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On justifiera l'existence de $g$. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On note $U_\varphi$ l'application de $\mathscr{C}$ dans $F$ définie par :

$$U_\varphi(f) = g.$$

Montrer que $U_\varphi$ est une application linéaire de $\mathscr{C}$ dans $F$.

2. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x\mathrm{e}^x.$$

Montrer l'existence d'une application unique $f$ de $\mathscr{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

3. On suppose que $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \neq 0$) et que $g$ est une application dérivable telle que $g'$ appartienne à $\mathscr{C}$ et que $g(0) = 0$.
Montrer l'existence d'une application $f$ de $\mathscr{C}$ telle que $U_\varphi(f) = g$.



Retour page 1

C- 1. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \log(1+x^2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Montrer l'existence d'une application $f$ de $\mathscr{C}$ telle que

$$U_\varphi(f) = g.$$

2. Soit $f$ la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star \ f(x) = \frac{x^2}{\log(1+x^2)}$$
$$f(0) = 1$$

a) Étudier les variations de $f$. Pour déterminer le signe de la dérivée $f'$ de $f$, on mettra $f'$ sous la forme

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{2x}{\left[\log(1+x^2)\right]^2} \times \gamma(x)$$

et l'on précisera les variations de l'application $\gamma$ pour en déduire le signe de $\gamma(x)$ pour $x > 0$.

b) Tracer la courbe $(\Gamma)$ représentative de $f$ dans le plan $P$ rapporté au repère précédent. (On admettra que $f$ est dérivable au point $O$ et que $f'(0) = 0$.)

D- $\varphi$ étant une application de $\mathscr{C}$, on note $\Phi$ la primitive de $\varphi$ qui s'annulé pour $x = 0$.

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

On veut déterminer un couple $(f, g)$ d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} U_\varphi(f) = g \\ g - f = \Phi. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que $f$ et $f'$ vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x)\left[f(x) - 1\right] = f'(x). \tag{2}$$

2. On pose $h(x) = \mathrm{e}^{-\Phi(x)}(f(x) - 1)$.
Montrer que (2) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = 0,$$

et en déduire les solutions de (2).

3. En déduire une solution de (1).

## XXX. Toulouse, série D

**Ex. 1801.** ———— *4 points.* *./1983/toulouseD/exo-1/texte.tex*

1. On considère un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et le point $B$ de coordonnées $(1\ ;\ 1)$. On prendra 5 cm comme unité de longueur.

$\alpha$. Les points $A$, $B$, $C$, $O$ étant respectivement affectés des coefficients réels $a$, $b$, $c$, $10-a-b-c$, calculer les coordonnées $(x_G\ ;\ y_G)$ de leur barycentre $G$.

$\beta$. Les réels $a$, $b$, $c$ étant pris dans l'ensemble $\{1\ ;\ 4\}$, former un tableau qui donne tous les triplets $(a, b, c)$ possibles et les valeurs correspondantes de $x_G$ et $y_G$. Représenter, dans le plan donné, l'ensemble $\mathscr{G}$ des barycentres ainsi obtenus.

Retour page 1

2. On décide de confier la détermination de $(a,\ b,\ c)$ au hasard. Pour cela on place dans un sac trois jetons marqués 1 et deux jetons marqués 4, puis on procède à trois tirages successifs, avec remise d'un jeton. Chaque jeton a la même probabilité d'être tirée et les tirages successifs sont indépendants.
   Soient $X$ et $Y$ les variables aléatoires qui, à tout triplet $(a,\ b,\ c)$ associent respectivement $x_G$ et $y_G$. Calculer les espérances mathématiques $E(X)$ et $E(Y)$.

**Ex. 1802.** ——— *4 points.* *./1983/toulouseD/exo-2/texte.tex*

1. Deux réels étant donnés $a,\ b$, calculer l'intégrale

$$I(a\ ;\ b) = \int_a^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = x$ et de raison $q = -x^2$, où $x$ est un réel positif.
   $\alpha$. Calculer la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de cette suite, c'est-à-dire

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}.$$

   $\beta$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - x^3 + x^5 - x^7 \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant x - x^3 + x^5.$$

   $\gamma$. En déduire un encadrement de

$$I(0\ ;\ 0{,}2) = \int_0^{0{,}2} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

   de largeur inférieure à $10^{-6}$.

## Problème 665 *12 points.* *./1983/toulouseD/pb/texte*

I- On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x \cos x \end{aligned} \qquad \text{où } I = \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Exprimer les dérivées $f'$, $g'$ puis les dérivées secondes $f''$, $g''$ de $f$ et $g$ en fonction de $f$ et $g$.
2. Exprimer $f$ et $g$ en fonction de $f''$ et $g''$ et en déduire des primitives de $f$ et $g$.

II- 1. Étudier les variations de $f$.

2. On pose $J = f(I)$ ; préciser $J$ et montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ de $J$ vers $I$ dont on donnera le tableau de variations. On ne cherchera pas à expliciter $f^{-1}$.
   ($f(I)$ désigne l'image de $I$ par $f$.)
3. On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes respectives de $f$ et $f^{-1}$ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Montrer que $O$ appartient à $\mathscr{C}$, et écrire une équation de la demie-tangente $\Delta$ à $\mathscr{C}$ au point $O$.
   b) Pour préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$, on considère l'application

$$\begin{aligned} h : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

   Calculer la dérivée $h'$ et la dérivée seconde $h''$ de $h$ ; étudier le signe de $h''$, les variations puis le signe de $h'$, les variations puis le signe de $h$.
   Conclure.
   c) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On donne $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} \simeq 2{,}19$ et $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \simeq 4{,}81$.

Retour page 1

d) Calculer l'aire de la partie $\mathscr{P}_1$ du plan décrite par le point $H$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :

$$\mathscr{P}_1 \begin{cases} x \in I \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Faire de même pour la partie $\mathscr{P}_2$ définie de la même façon par :

$$\mathscr{P}_2 \begin{cases} x \in J \\ 0 \leqslant y \leqslant f^{-1}(x). \end{cases}$$

III- Dans le plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et identifie au « plan complexe », le mouvement d'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ ; est défini en fonction du temps $t$ par :

$$t \in I \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases} \quad \text{(les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont définies en I )}$$

On désigne par (T) la trajectoire de $M$.

1. Exprimer en fonction de $(x\ ;\ y)$ les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du vecteur vitesse $\vec{V}$, et les coordonnées $\left(x''\ ;\ y''\right)$ du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ de $M$ à l'instant $t$. Montrer que le mouvement de $M$ est accéléré dur $I$.
2. Calculer le module et l'argument de l'affixe $z = x + \text{i}y$ de $M$ à l'instant $t$.
   Désignant par $M(t)$ la position de $M$ à l'instant $t$, représenter
   $$M(0), \quad M\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right).$$
3. Soit $M'$ le point de P d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$.
   a) Montrer qu'il existe un nombre complexe $a$, qu'on déterminera tel qu'à tout instant $t$ $z' = az$.
   b) En déduire l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \vec{V}}\right)$ puis tracer les tangentes à (T) aux points $M(0)$, $\quad M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\quad M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
4. En utilisant les variations de $x$ et $y$ en fonction de $t$ et les résultats précédents, tracer (T) et indiquer comment $M$ décrit (T).

## XXXI. Maroc, série C

**Ex. 1803.** *4 points.* *./1983/marocC/exo-1/texte.tex*

**1.** Calculer les restes dans la division par 13 des puissances successives de 6.

**2.** En déduire le reste dans la division par 13 de $(1982)^{1983}$.

**3.** Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$, le nombre

$$6^{12n} + \left(2 \times 6^n\right) + 2$$

est-il multiple de 13 ?

**Ex. 1804.** *4 points.* *./1983/marocC/exo-2/texte.tex*

**1.** On considère la fonction de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x\sqrt{d^2 - x^2},$$

où $d$ désigne un nombre réel strictement positif fixé.

a) Étudier $f$ et dessiner sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$.

**2.** Déterminer l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets appartiennent à un même cercle de rayon $R$, $R$ désignant un nombre réel strictement positif fixé.

Retour page 1

# Chapitre XXVI

# 1984.

On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Montpellier, Nice & Toulouse ;

— groupe II : Amiens, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Rennes.

## Sommaire



## I. Aix Marseille, série C

**Ex. 1805.** ——— *4 points.* *./1984/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E.
On désigne par :

▷ $R_1$ la rotation d'axe O$z$ orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

▷ $R_2$ la rotation d'axe O$z$ orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

▷ $T_1$ la translation de vecteur $\left(\dfrac{1}{2}\vec{k}\right)$.

▷ $T_2$ la translation de vecteur $\left(-2\vec{k}\right)$.

On considère les vissages : $V_1=R_1\circ T_1=T_1\circ R_1$ et $V_2=R_2\circ T_2=T_2\circ R_2$.

**1.** Étant donné un point $M$ quelconque de E, calculer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de $M$ les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{V}_1(M),\ \mathrm{V}_2(M),\ \mathrm{V}_1\circ\mathrm{V}_2(M),\ \mathrm{V}_2\circ\mathrm{V}_1(M).$$

**2.** Caractériser les transformations $\mathrm{V}_1\circ\mathrm{V}_2$ et $\mathrm{V}_2\circ\mathrm{V}_1$, et expliquer sans calculs les résultats obtenus.

Ex. 1806. *4 points.* *./1984/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan P muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on définit les trois points :

$$A(1\ ;\ 0)\ ;\ B\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)\ ;\ C\left(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$$

et la droite C dont une équation est : $x=1$.

**1.** Déterminer les coordonnées du point $G$ tel que $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $(A,\ B,\ G,\ C)$?

**2.** On note $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, qui vérifient la relation :

$$-MA^2+MB^2+MC^2=2(x-1)^2.$$

a) Montrer que $B$ et $C$ appartiennent à $(\Gamma)$.

b) Montrer que $(\Gamma)$ est l'ensemble des points $M$ de P tels que :

$$MG=\sqrt{2}d(M,\ \mathrm{D}),$$

où $d(M,\ \mathrm{D})$ désigne la distance de $M$ à la droite D.

c) En déduire la nature de $(\Gamma)$ et préciser ses éléments remarquables. Représenter $(\Gamma)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

## Problème 666 *12 points.* *./1984/aixmarseilleC/pb/texte*

N.B. : Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie A pour aborder la suite.
Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; les points de P sont repérés, soit par leurs coordonnées $(x\ ;\ y)$, soit par leur affixe $x+\mathrm{i}y$.
Le but du problème est l'étude de l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M(t)$, $t\in\mathbb{R}$, du plan P, de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ telles que :

$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^t\cos t\\ y(t)=\mathrm{e}^t\sin t.\end{cases}$$

A) 1. a) Vérifier, pour tout réel $t$, les relations :

$$\cos t-\sin t=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Étudier les variations des fonctions $x: t\longmapsto x(t)$ et $y: t\longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Tracer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la portion de $(\Gamma)$, ensemble des points $M(t)$ lorsque $t$ décrit $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
(on aura soin, en particulier, des représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à $(\Gamma)$ en ces points.)

2. Calculer, pour tout réel $t$ :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right)\qquad\text{et}\qquad\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right).$$

En déduire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}\right)$ est constant et en donner une mesure.



Retour page 1

3. On pose, pour tout réel $a$ et $b$, $\mathrm{L}_a^b = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t$.

   Donner l'expression $\mathrm{L}_0^{\frac{\pi}{2}}$ et en calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
   Étudier la limite éventuelle de $\mathrm{L}_t^0$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.

B) 1. Montrer que les fonctions $x$ et $y$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $X'' - 2X' + 2X = 0$.

C) 1. Pout tout réel $t$, on note $f_t$ l'application de P dans P qui, au point $M$ d'affixe $Z$ fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $Z_1$ telle que $Z_1 = z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie A.

   a) Préciser la nature de $f_t$ et ses éléments remarquables.

   b) Montrer que, pour tout $t$ et $t'$ réels, $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.

   Soit $G$ l'ensemble des applications $f_t$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif des transformations du plan P.

2. a) Montrer que, pour tout $t$ et $t_1$ réels, $f_t(M(t_1)) = M(t+t_1)$. En déduire que, pour tout réel $t$, $f_t(\Gamma) = (\Gamma)$.

   b) Montrer que, si $M_1 = M(t_1)$ est un point quelconque de $(\Gamma)$, l'ensemble : $\{f_t(M_1),\ t \in \mathbb{R}\}$ est égal à $(\Gamma)$.

D) Soit $t$ un réel fixé non nul. On note $A_0$ le point $M(0)$ et on définit les points $A_n (n \in \mathbb{N}^\star)$ par la relation de récurrence :

$$A_n = f_t(A_{n-1}) \qquad \text{si} \qquad n \geqslant 1.$$

1. a) Calculer en fonction de $t$ la longueur $A_0A_1$.

   b) Montrer que la suite $(A_{n-1}A_n)$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.

   c) En déduire une expression de :

$$L_n(t) = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n \quad \text{en fonction de } n \text{ et } t.$$

2. On suppose $t < 0$. Montrer l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.

   Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t \cos t + 1}{(1-\mathrm{e}^t)^2} = 1 + 2\mathrm{e}^t \dfrac{1-\cos t}{(1-\mathrm{e}^t)^2}$.

   En déduire la limite $L(t)$ lorsque $t$ tend vers zéro par valeurs négatives. Comparer ce résultat à la limite de $L_t^0$ trouver au A3.

## II. Groupe I, série E

**Ex. 1807.** ——— *4 points.* *./1984/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien, on donne deux droites parallèles $D$ et $\Delta$ et un point $A$ n'appartenant à aucune de ces droites.
Construire un triangle $ABC$ vérifiant simultanément les conditions suivantes :

— $ABC$ est rectangle en $A$.

— $ABC$ est isocèle.

— $B$ est sur $D$ et $C$ est sur $\Delta$.

Préciser le nombre de solutions au problème posé.
(Toute méthode sera acceptée : géométrique, analytique, utilisation des nombres complexes,. . .)



Retour page 1

**Ex. 1808.** ——— *4 points.* ./1984/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points : $A\left(2\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{2}\right)$, $B(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C\left(1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0\right)$.

**1.** Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle.

**2.** Géométrie descriptive : $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est le plan horizontal de projection, $\left(O; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est le plan frontal de projection.

a) Faire l'épure du triangle $ABC$ et faites apparaître, sur l'épure, le triangle $ABC$ en vraie grandeur (on justifiera les constructions effectuées).

b) On désigne par $I$ le milieu de $(B,\ C)$, et par $a,\ b,\ c$ et $i$ les projections horizontales de $A,\ B,\ C$ et $I$.
Montrer que le triangle $abc$ est isocèle et déterminer une mesure de l'angle en $a$ de ce triangle.
Calculer les rapports : $\dfrac{ab}{AB}$, $\dfrac{bc}{BC}$ et $\dfrac{ai}{AI}$.

: ces rapports interviennent en dessin industriel à propos de perspective isométrique.

## Problème 667 *12 points.* ./1984/aixmarseilleE/pb/texte

On désigne par $f$ la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2x - \sin x$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
*La partie C est largement indépendante des précédentes.*

A) L'objet de cette partie est une étude précise de la fonction $f$ et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.

1. Calculer la dérivée de $f$ et en déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$.
En déduire les limites de $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
2. On appelle $D_1$ et $D_2$ les droites d'équation respective $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.
Déterminer les points communs à $\mathscr{C}$ et $D_1$, d'une part, à $\mathscr{C}$ et $D_2$ d'autre part.
Préciser les tangentes à $\mathscr{C}$ à ces points.
3. Étudier la parité de $f$.
Calculer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de $f$ à $\mathbb{R}^+$ à la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de $f$ à$\mathbb{R}^-$ ?
Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de $f$ à $[-\pi\,;\pi]$ à la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de $f$ à$[-\pi + 2k\pi\,;\pi + 2k\pi]$ ? ($k \in \mathbb{Z}$.)
4. Tracer avec précision sur papier millimétré dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm) la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Déterminer et tracer les tangentes au point $O$ et au point $A$ d'abscisse $\pi$ ; tracer également $D_1$ et $D_2$.
Indiquer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-\pi\,;3\pi]$ (sur un autre graphique).
5. Calculer l'aire, en cm$^2$, de la partie du plan limitée par l'axe $(O; \vec{\imath})$,, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation respective $x = 0$ et $x = \pi$.

B) Dans cette partie, on se propose d'étudier l'équation :

$$2x - \sin x = m \qquad \text{où } m \text{ est un nombre réel donné.}$$

1. Montrer que $f$ admet une application réciproque $g$ (on ne cherchera pas à calculer $g$).
Quelles propriétés possède la fonction $g$ ?
Déterminer $g(0)$, $g(2\pi)$, $g(4k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Déterminer $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.
Tracer la représentation graphique de $g$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Montrer que, pour tout réel $m$, l'équation $2x - \sin x = m$ admet une solution unique.



Retour page 1

3. On considère l'équation : $2x - \sin x = 4$ et on note $x_0$ sa solution.
   Utiliser la courbe $\mathscr{C}$ pour avoir une estimation de $x_0$ à $10^{-1}$ près, puis contrôler ce résultat par un calcul.

C) Dans cette partie, on se propose de dégager une méthode permettant d'obtenir une meilleure approximation de $x_0$, solution de l'équation : $2x - \sin x = 4$.

1. On considère la fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(4 + \sin x).$$
   Montrer que :
$$f(x_0) = 4 \Leftrightarrow x_0 = \varphi(x_0).$$
   Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\varphi'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\varphi' \text{ désignant la dérivée de } \varphi).$$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - x_0|.$$
   En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - x_0|.$$
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. a) Si on suppose que : $|u_0 - x_0| \leqslant 10^{-1}$, combien faut-il calculer de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-p}$ près ?
   b) On prend comme valeur de $u_0$ la valeur approchée de $x_0$ à $10^{-1}$ près par défaut obtenue dans **??**. Déterminer une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-2}$ près.

## III. Groupe II, série C

**Ex. 1809.** ______ *5 points* *./1984/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
   a) Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que $\alpha$ et $\beta$ sont solutions de
$$X^2 + X - 1 = 0. \tag{XXVI.1}$$
   b) Déterminer $\alpha$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
   c) Résoudre l'équation (XXVI.1) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
2. On appelle $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ les points d'affixes respectives $1,\ z_0,\ z_0^2,\ z_0^3,\ z_0^4$ dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   a) Soit $H$ le point d'intersection de la droite $A_1A_4$ avec l'axe $(O,\ \vec{u})$. Montrer que $\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5}$.
   b) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega$ d'affixe $\left(-\frac{1}{2}\right)$ passant par $B$ d'affixe (i).
   Ce cercle coupe l'axe $(O,\ \vec{u})$ en $M$ et $N$. (On appellera M le point d'abscisse positive). Montrer que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que $H$ est le milieu de $[OM]$.
   c) En déduire une construction simple du pentagone régulier dont on connaît le centre $O$ et un sommet $A_0$.



Retour page 1

**Ex. 1810.** ———— *5 points* *./1984/amiensC/exo-2/texte.tex*

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(E)$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation

$$15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768$$

et soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à un point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ associe $M'$ de coordonnées $(x ; y)'$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ y' = \dfrac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y). \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une similitude plane directe que l'on caractérisera. Déterminer $f^{-1}$.

**2.** Déterminer une équation de $(f(E))$ et montrer que $(f(E))$ est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers, et l'excentricité.

**3.** En déduire que $(E)$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MF_1 + MF_1' = 16$ où $F_1$ et $F_1'$ sont deux points que l'on déterminera.

## Problème 668 *10 points.* *./1984/amiensC/pb/texte*

A- On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = x + 2. \tag{E}$$

1. Déterminer une fonction affine $a$ solution de (E).
2. Montrer que si $y$ est solution de (E), alors $y - a$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre. La résoudre.
3. Déterminer toutes les solutions de (E).

B- Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3.$$

1. Étudier les variations de la fonction $f$.
2. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote $D$ dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote.
   b) Construire $(\mathscr{C})$ (unité : 2 cm).
3. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine limité par $(\mathscr{C})$, $D$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$, avec $\alpha < 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.
4. Soit $f_1$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$.
   a) Montrer que $f_1$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
   b) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_1^{-1}$. Construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   c) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

C- Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x+3)$.

1. Étudier les variations de $g$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé· (unité : 2 cm).
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   a) En utilisant la croissance de $g$, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.



Retour page 1

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est majorée par 2.

c) En déduire que cette suite est convergente. Soit $\ell$ sa limite.

3. Soit $(v_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \ln(v_n + 3). \end{cases}$$

a) En utilisant la croissance de $g$, étudier le sens de variation de la suite $(v_n)$.

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par 1.

c) En déduire que cette suite est convergente. Soit $\ell'$ sa limite.

4. Montrer que $\ell = \ell'$.

5. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad v_n - u_n = \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{1}{t+3}\, \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

c) En déduire une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.

## IV. Groupe II, série E

**Ex. 1811.** *4 points* *./1984/amiensE/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 - 4\mathrm{i}z^3 + (3 - 12\mathrm{i})z^2 - (24 + 14\mathrm{i})z + 12 - 36\mathrm{i} = 0$$

sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures. Soient $z_1$ et $z_3$ ces solutions, on notera $z_2$ et $z_4$ les deux autres.

**2.** Montrer que les quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sont les sommets d'un parallélogramme.

**3.** Déterminer un polynôme de dégré 4 :

$$P(z) = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta$$

(où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des nombres complexes à déterminer) dont les racines soient les affixes des points $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$ et $M'_4$ images respectives des points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**Ex. 1812.** *4 points* *./1984/amiensE/exo-2/texte.tex*

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation :

$$y^2 = \frac{16}{9}x^2 - \frac{32}{3}x$$

dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Démontrer que $(\mathscr{C})$ admet une centre de symétrie $\Omega$ dont on déterminera les coordonnées.

**2.** Montrer que (c) est une conique. Déterminer ses foyers F et F' et son excentricité $e$.

**3.** Montre que la conique de foyers F et F' et d'excentricité $e' = \dfrac{1}{2}e$ est une ellipse $(\mathscr{E})$.

Déterminer une équation de $(\mathscr{E})$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Retour page 1

## 🏛Problème 669 *12 points.* *./1984/amiensE/pb/texte*

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel, $f_n$ désigne la fonction numérique définie par

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}.$$

A) 1° Déterminer l'ensemble de définition $f_n$ et étudier sa continuité et sa dérivabilité.

2° Donner le tableau de variation de $f_n$, pour $n \geqslant 1$, en distinguant les deux cas : $n$ pair et $n$ impair. Déterminer l'unique élément $\alpha_n$ de $]0\,;1[$ tel que

$$f_n(\alpha_n) = 0, \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

3° Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$.

B) 1° Étudier, suivant les valeurs du réel $k$, le nombre de solutions de l'équation :

$$f_1(x) = k.$$

2° Montrer que l'équation :

$$\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \tag{E}$$

admet trois solutions $x_1$, $x_2$ et $x_3$ vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad \text{et} \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3° Pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, on pose alors $u_i = \dfrac{3}{2}\left(x_i - \dfrac{1}{3}\right)$.
Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i$ de $[0\,;\pi]$ tel que :

$$u_i = \cos\theta_i.$$

4° Montrer que $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_3$ sont les solutions de l'équation :

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2}, \qquad \theta \in\, ]0\,;\pi[.$$

5° Donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près de $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

C) On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1° Montrer que $(I_n)$ est une suite décroissante minorée par $0$.

2° Établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_n \leqslant f_n(\alpha_n)$$

en déduire la limite de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

3° Calculer $I_0$.

4° A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation de récurrence pour $n \geqslant 1$ :

$$(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}.$$

5° Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}.$$

Retour page 1

# V. Groupe III, série C

**Ex. 1813.** ———— *4 points.* ./1984/besanconC/exo-1/texte.tex

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{tx^2}\,\mathrm{d}t.$$

**1.** Calculer $F(x)$ pour $x \neq 0$ et $F(0)$. Démontrer que $F$ est continue en $0$.

**2.** Écrire un développement limité de à l'ordre 2 de $\mathrm{e}^x$ au voisinage de $0$.
En déduire un développement limité à l'ordre 2 de $F(x)$ au voisinage de $0$. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$.

**3.** Démontrer que : si $0 \leqslant x \leqslant x'$ alors $F(x) \leqslant F(x')$ et que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

**4.** Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de $F$.

**Ex. 1814.** ———— *4 points.* ./1984/besanconC/exo-2/texte.tex

Dans le plan $P$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle disque unité : $D = \{M \in P/\ OM \leqslant 1\}$.
On appelle distance d'un point $M$ à $D$, et on note $d(M,\ D)$, la plus petite des distances de $M$ aux points de $D$.

**1.** Démontrer que si $M$ est extérieur au disque, alors $d(M,\ D) = MM_0$ où $M_0$ est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O,\ M]$.

**2.** En déduire que si $x$ et $y$ sont les coordonnées de $M$, on a alors :

$$d(M,\ D) = \sqrt{x^2+y^2} - 1.$$

**3.** Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = -2$. Chercher alors l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$d(M,\ D) = 2d(M,\ \Delta).$$

Représenter $D$, $\Delta$ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

## Problème 670 *12 points.* ./1984/besanconC/pb/texte

N.B. – Les parties B et C sont indépendantes.

Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan, et $s$ la similitude directe de centre $O$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A) 1° Définir $s$ analytiquement.
$M$ étant un point du plan, on pose $M' = s(M)$, $M'' = s \circ s(M)$.

2° Montrer que pour tout point $M$, $\overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{OM'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

B) On appelle $M_0$ le point de coordonnées $(1 ; 0)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = s(M_n)$. On appelle $(x_n ; y_n)$ les coordonnées de $M_n$.

1° Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 0 \quad \text{et} \quad y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 0.$$

(Utiliser A2.)

2° Soit $(u_n)$ une suite vérifiant la relation :

$$u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = 0,\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} u_k = -\frac{2}{3}u_{n+2} - \frac{4}{5}u_{n+1} + \frac{2}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_0.$$

3° Caractériser géométriquement la composée de $n$ similitudes égales à $s$.
En déduire l'expression de $OM_n$ en fonction de $n$.
Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

4° Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} y_k$.

C) Soit $\sigma$ l'application linéaire associée à $s$. On se donne un point mobile $M(t)$ de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$, de vecteurs vitesse et accélération $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$, tel que $\vec{V}(t) = \sigma(\overrightarrow{OM(t)})$, $\forall t$.
On suppose que $M(0)$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

1° Exprimer $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que $\vec{\Gamma}(t) = \sigma(\vec{V}(t))$, $\forall t$.

2° Montrer que $\sigma\circ\sigma(\vec{v}) + \sigma(\vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{v}$. (Utiliser A2.)

3° Montrer que les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ vérifient l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2}f = 0$.

4° Résoudre l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2}f = 0$. Calculer $\vec{V}(0)$. Calculer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $t$.

5° Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t = 2x'(0) + 2x(0) - 2x'(a) - 2x(a).$$

(Utiliser C3.) Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a x(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer de même $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a y(t)\,\mathrm{d}t$.

# VI. Groupe III, série E

**Ex. 1815.** *3 points.* ./1984/groupeIIIE/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$z^2 = 48 + 14\mathrm{i}.$$

On déterminera la partie réelle et la partie imaginaire de chaque solution.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$z^2 + 5(1-\mathrm{i})z - 4(4\mathrm{i}+3) = 0.$$

**Problème 671** *12 points.* ./1984/groupeIIIE/pb/texte

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour les représentation sgraphiques, on adoptera pour unité de longueur 2 cm.

A- 1. Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation $y^2 - 4x^2 = 4$.
Représenter $(\mathscr{H})$ en précisant les coordonnées de ses sommets et des équations cartésiennes de ses asymptotes.
Déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers de $(\mathscr{H})$.

2. Soient $F$ et $F'$ les points de coordonnées respectives $\left(0\ ;\ \sqrt{3}\right)$ et $\left(0\ ;\ -\sqrt{3}\right)$.
Déterminer une équation de l'ellipse $(\mathscr{E})$ de foyers $F$ et $F'$ et d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Représenter graphiquement $(\mathscr{E})$ en précisant les coordonnées de ses sommets.

B- Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1-x.|x|} \textbf{ pour } x \leqslant 1 \\ f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \textbf{ pour } x > 1. \end{cases}$$



Retour page 1

1. Vérifier que les formules précédentes définissent $f(x)$ pour tout réel $x$. La fonction $f$ est-elle continue ?
2. a) Démontrer que $f$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;1[$, $]1\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   b) Démontrer que $f$ est dérivable en $0$ et préciser la valeur de $f'(0)$ : on pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \sqrt{1+t}$ au voisinage de $0$.
   c) Étudier le comportement du rapport $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ quand $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. Pour $x \geqslant 1$, on pourra poser $x-1=u$ et utiliser le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ au voisinage de $0$ ou le comportement de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ au voisinage de $0$.
3. Démontrer que la courbe représentative de la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty\,;1]$ est un sous-ensemble de $(\mathscr{E}) \cup (\mathscr{H})$. (($\mathscr{E}$ et $(\mathscr{H})$ étant les coniques considérées dans la partie A.)
   Étudier les variations de $f$ et tracer le courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$.
   Préciser les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'intersection avec les axes de coordonnées.

C- 1. Démontrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Tracer que le même graphique de $(\mathscr{C})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de $f^{-1}$ fonction réciproque de $f$.
2. Si $x \geqslant 0$, démontrer l'égalité : $f^{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
3. Si $a \geqslant 0$, calculer $\displaystyle\int_0^a f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.
   En déduire, pour tout $t>1$, la valeur $S(t)$ de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

# VII. Groupe IV, série C

**Ex. 1816.** ./1984/poitiersC/exo-1/texte.tex

$\theta$ désigne un nombre réel appartenant à $[0\,;2\pi[$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue $z$ :

$$z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0.$$

Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

**2.** Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.
Déterminer $\theta$ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

**Ex. 1817.** ./1984/poitiersC/exo-2/texte.tex

**Bac C, juin 1984, Poitiers.**

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère trois points A, B et C tels que :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4d, \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 2d,$$

où $d$ est un réel strictement positif donné.
On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients $\lambda$, 1 et 1 où $\lambda \in \mathbb{R}-\{-2\}$.

**1.** Déterminer l'ensemble $\Delta$ des barycentres $\mathrm{G}_\lambda$ de ces points quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}-\{-2\}$.

**2.** Dans le cas où $\lambda=-1$, on appelle $G$ le barycentre des points affectés respectivement des coefficients $-1$, 1 et 1.

a) Déterminer $G$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2.$$

**3.** a) Démontrer que pour tout point $M$ du plan $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b) Déterminer l'ensemble $\Delta'$ des points $M$ du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2=32d^2.$$

## Problème 672

./1984/poitiersC/pb/texte

On considère l'application $f$ de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x\in\,]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[,\quad f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\quad \text{et } f(0)=1.$$

$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

### Partie -A-

**1.** Étudier la continuité de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$.

**2.** Étudier la dérivabilité de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$.
Expliciter la fonction dérivée $f'$.

**3.** a) On note $g$ l'application de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x).$$

Étudier les variations de $g$ et le signe de $g(x)$. (On ne demande pas l'étude de la limite de $g$ pour $x=-1$)

b) En déduire les variations de $f$.

**4.** Étudier les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

**5.** Construire la courbe $\mathscr{C}$.
Préciser les droites asymptotes et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

**6.** Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 e étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente (on étudiera les variations de l'application $h$ de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x)=x^2\left(\frac{1}{2}+f'(x)\right)$, puis le signe de $h(x)$).

### Partie -B-

**1.** Démontrer qu'il existe un unique nombre réel $\ell$ de l'intervalle $]0\,;1[$ tel que $f(\ell)=\ell$. (On pourra considérer la fonction $k(x)=f(x)-x$ sur $[0\,;1]$. On ne demande pas de calculer $\ell$).

**2.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=\frac{1}{2}\qquad\text{et}\qquad u_{n+1}=f(u_n).$$

a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\,]0\,;1[$.

b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\ell|\leqslant\frac{1}{2}|u_n-\ell|$. (On remarquera que $u_{n+1}-\ell=f(u_n)-f(\ell)$ et on utilisera le résultat : $\forall x\in[0\,;+\infty[,-\frac{1}{2}\leqslant f'(x)<0$)

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

### Partie -C-

**1.** $a$ et $b$ sont deux nombres réels de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ tels que $a<b$, établir les inégalités :

$$(b-a)f(b)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(a).$$

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par l'axes des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, en utilisant la subdivision $\left(0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right)$.



Retour page 1

**2.** Trouver la limite de $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ \frac{1}{x+1} - f(x) \leqslant 0$ que l'on déduira du signe de $f'(x)$.

**3.** a) Démontrer que : $\forall x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$,

$$0 < f(x) \leqslant -2\ln(x+1).$$

En déduire que, pour tout nombre réel $t$ de l'intervalle $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ on a :

$$0 < \int_t^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x < 1+\ln 2.$$

b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Étudier la croissance de cette suite.

Démontrer que cette suite est convergente.

## VIII. Groupe IV remplacement, série C

**Ex. 1818.** ./1984/bordeauxcrem/exo-1/texte.tex

Le plan orienté $\mathscr{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $A$, $B$ et $C$ les points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$, $\left(0\ ;\ \sqrt{3}\right)$ et $(-1\ ;\ 0)$ dans ce repère.

On appelle $r$ la rotation de centre $B$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, $r'$ la rotation de centre $A$ d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$, et $s$ la symétrie par rapport à $I$ ($I$ milieu de $[AB]$) et $f$ l'application $r' \circ s \circ r$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f$ (on utilisera $f(C)$ et $f(B)$).
2. Déterminer les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées à $r$, $r'$, $s$ et $f$ et retrouver ainsi les résultats du 1.

**Ex. 1819.** ./1984/bordeauxcrem/exo-2/texte.tex

Soit ($E_1$) l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 5x + 1. \qquad (E_1)$$

1. Montrer que si une fonction polynôme $P$ est une solution de ($E_1$), alors son degré est 1. Déterminer $P$ solution de ($E_1$).
2. On pose $g = f - P$.

   a) Montrer que $f$ est solution de ($E_1$) si, et seulement si, $g$ est solution de l'équation ($E_2$) :

   $$y'' + 9y = 0. \qquad (E_2)$$

   b) Résoudre ($E_2$).

   c) Résoudre ($E_1$) et montrer que cette équation admet une unique solution $f$ vérifiant les conditions :

   $$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0.$$

## Problème 673



*Effet d' une transformation sur la représentation graphique d' une fonction*

Un plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On note $\overline{\mathscr{P}}$ le plan privé de la droite de repère $(O; \vec{\imath})$. $T$ désigne l'application de $\overline{\mathscr{P}}$ dans $\overline{\mathscr{P}}$ qui, au point $M(x\ ;\ y)$, associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que
$x' = x$ et $y' = \dfrac{1}{y}$.

A 1. L'objet de cette question est de construire $M'$ à partir de $M$ ; la suite du problème n'en dépend pas.
Soit $m$ la projection orthogonale d'un point $M$ de $\overline{\mathscr{P}}$ sur la droite de repère $(O; \vec{\imath})$. On désigne par $N_1$ et par $N_2$ les points tels que $\overrightarrow{mN_1} = -\overrightarrow{mN_2} = \vec{\imath}$, par $M_1$ l'orthocentre du triangle $MN_1N_2$.
Calculer les coordonnées de $M_1$ en fonction des coordonnées de $M$ (on pourra utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{N_2M_1}.\overrightarrow{N_1M}$) et en déduire que M est le symétrique orthogonal de $M_1$ par rapport à la droite de repère $(O; \vec{\jmath})$.

2. On donne les trois demi-droites $D$, $\Delta$ et $L$ définies respectivement par $y = x+1$ et $x \geqslant 1$ ; par $y = 2x+1$ et $x \geqslant 1$ ; par $y = 1$ et $x|eq-1$. Donner une équation des courbes $D'$, $\Delta'$, $L'$ transformées respectives par $T$ de $D$, $\Delta$, $L$. On représentera $D$, $\Delta$, $L$, $D'$, $\Delta'$,, $L'$ sur un même dessin (unité 2 cm).

B Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{(1+x)\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

pour $x \neq 0$ et $f(0) = 2$.

1. Montrer :
   a) qu' on a, pour $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\right)\mathrm{e}^x$ ;
   b) que $f$ est continue sur$\mathbb{R}$.
2. Montrer
   a) que $f$ est dérivable au point zéro et que $f'(0) = 1$ (on pourra utiliser le développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction qui à $x$ associe $\mathrm{e}^x$) ;
   b) que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ pour tout $x$.
3. a) Soit $\alpha$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par$\alpha(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Étudier les signes de $\alpha'(x)$ et de $\alpha(x)$ suivant les valeurs de $x$.
   b) En déduire le tableau de variations de $f$.
   c) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$. Démontrer que $D$ et $L$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$. Préciser la position des branches infinies de $\mathscr{C}$ par rapport à $D$, $\Delta$ et $L$.
   Dessiner $\mathscr{C}$ sur la figure demandée au A2.

C Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + x + 1}$$

pour $x \neq 0$ et $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ pour tout $x$.
   En déduire :
   a) que $g$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ;
   b) que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(-x)$ et de $f'(-x)$. Préciser $g'(0)$.
   c) préciser les limites de $g$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Soit $\Gamma$ la courbe représentative de $g$. Montrer que $\Gamma$ est la transformée, par $T$ de $\mathscr{C}$. En utilisant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $D$ et $\Delta$ (cf. B(3)c), montrer qu'on a :

$$\forall x \in ]-\infty\,;-1], \qquad \frac{1}{1-2x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$$

   et préciser la position de $\Gamma$ par rapport à $D'$ et $\Delta'$. Compléter la figure demandée au A2 par le tracé de $\Gamma$.

Retour page 1

3. Soit $A_1(\lambda)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant -1$ et $0 \leqslant y \leqslant g(x)$ et $A_2(\mu)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que : $1 \leqslant x \leqslant \mu$ et $g(x) \leqslant y \leqslant 1$. On ne cherchera pas à calculer $A_1(\lambda)$ et $A_2(\mu)$.

   a) Prouver que $A1(\lambda)$ tend vers $+\infty$ quand $\lambda$ tend vers $-\infty$.

   b) Prouver que l'on a : $1-g(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire que $A_2(\mu)$ admet une limite finie quand $mu$ tend vers $+\infty$.

## IX. Groupe IV & Orléans-Tours, série E

**Ex. 1820.** 4 points ./1984/bordeauxe/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}-\{-4\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z-4}.$$

**1.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $f(z)$ soit réel.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points $M$ d'affixe $z$ tels qu'un argument de $f(z)$ soit $\frac{\pi}{2}$.

**3.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que le module de $f(z)$ soit 2.

**Ex. 1821.** 4 points. ./1984/bordeauxe/exo-2/texte.tex

Le plan affine $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère l'application affine $f$ de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point $M(x\ ;\ y)$, associe le points $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y - \dfrac{1}{2} \\[2ex] y' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

   a) Montrer que, pour tout point $M$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

   b) Étudier l'ensemble des points invariants par $f$.

   c) Reconnaître la nature de l'application affine $f$.

2. Soit $g$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point $M(x\ ;\ y)$, associe le points $M''\left(x''\ ;\ y''\right)$ défini par :

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

   a) Montrer que $g$ peut s'écrire $(h \circ f)$ où $h$ est une application de $\mathscr{E}$ dans lui-même que l'on précisera.

   b) Sans calcul, vérifier que : $h \circ f = f \circ h$.

**Problème 674** *12 points.* ./1984/bordeauxe/pb/texte

I- On considère la fonction numérique $f$ définie pour tout réel $x$ par

$$f(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}.$$

1. Étudier les variations de $f$. Tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra 4 cm pour unité de longueur).
2. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie $\Omega$ dont on précisera les coordonnées.
3. Soit $a$ un réel strictement positif. Calculer l'aire $S(a)$ de l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient les relations :

$$0 \leqslant x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

$S(a)$ a-t-elle une limite quand $a$ tend vers $+\infty$ ?

II- On considère les fonctions $f_n$ définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

Pour $n=0$ : $\qquad f_0(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

et pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2}.$$

1. Étudier $f_0$ et tracer su courbe représentative $(\Gamma_0)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé (on choisira pour unité de longueur au moins 5 cm).
   On note $A$ et $B$ les points de $(\Gamma_0)$ d'abscisses respectives 0 et 1.
   Tracer la droite $(AB)$ et les demi-tangentes en $A$ et $B$ à la courbe $(\Gamma_0)$ après avoir déterminé leurs équations.
   Étudier la position de $(\Gamma_0)$ par rapport à la droite $(AB)$ et à ces deux demi-tangentes.
2. On pose

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{avec } n \text{ entier naturel.}$$

   Justifier l'existence de $I_n$, sans la calculer.
3. En utilisant la question II1, démontrer que :

$$\frac{7}{12}<I_0<\frac{8}{12}.$$

4. a) Calculer $I_0+2I_1$ ; en déduire $I_1$ en fonction de $I_0$.
   b) Mettre en évidence une relation simple entre $I_0$, $I_1$ et $I_2$.
   En déduire $I_2$ en fonction de $I_0$.
5. Étudier pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et tout $x$ de $[0\,;1]$ le signe de :

$$f_{n+1}(x)-f_n(x).$$

   En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$\frac{1}{3(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

   Que peut-on en déduire ?
7. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n$ :

$$I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

8. En utilisant l'étude de la partie I, démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$1+\frac{1}{n+2}\leqslant 3(n+1)I_n+1+\frac{3}{n+2}.$$

   En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} 3nI_n=1.$$

Retour page 1

# X. Groupe IV remplacement, série E

**Ex. 1822.** ./1984/bordeauxErem/exo-1/texte.tex

1. Déterminer les solutions complexes $z_1$, $z_2$ avec $|z_1| < |z_2|$ de l'équation

$$z^2 - 3(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i} = 0.$$

2. Dans le plan P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $A$, $B$, $C$ les points d'affixes respectives $1$, $z_1$, $z_2$.
   a) Représenter $A$, $B$, $C$ dans P et déterminer l'affixe du barycentre des points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients $2$, $-2$, $1$.
   b) Déterminer l'ensembles des points $M$ de P vérifiant :

$$\overrightarrow{MO}^2 - 2\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2.$$

3. Déterminer la similitude directe transformant $A$ en $B$ et $B$ en $C$. Préciser son centre, son angle, son rapport.

**Ex. 1823.** ./1984/bordeauxErem/exo-2/texte.tex

Soit l'application $f$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} \bullet \forall x \in ]-\infty\,;0[, & f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \\ \bullet \forall x \in [0\,;1], & f(x) = \cos^2 \pi x \\ \bullet \forall x \in ]1\,;+\infty[, & f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un développement limité de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ au point $0$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$, après avoir justifié l'existence de cette intégrale.

## Problème 675

./1984/bordeauxErem/pb/texte

Soit P la plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On note $\Delta$ la droite d'équation : $x - y = 0$.

A- On considère $f$, la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur

$$E = ]-\infty\,; -1[\cup]1\,;+\infty[$$

par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction et représenter graphiquement $f$ dans le plan P. On note $(\mathscr{C})$ la courbe ainsi obtenue.
2. a) Montrer que la restriction $f_1$ de $f$ à $]1\,;+\infty[$ est une application bijective de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle $I_1$ à déterminer.
   En déduire que $f$ est une application bijective de $e$ sur $E$.
   b) Exprimer $f^{-1}(x)$ et en déduire que $(\mathscr{C})$ admet $\Delta$ pour axe de symétrie.
   c) Démontrer que $(\mathscr{C})$ est invariante dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x + y = 0$.
   d) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 \in ]1\,;+\infty[ \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = f(U_n).$$

   Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de $U_0$ et déterminer la valeur de $U_0$ pour laquelle la suite est convergente.

Retour page 1

3. Soit $\alpha \in \left]1 ; \sqrt{2}\right[$, calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Étudier le limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 1, en déduire l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 1$, $y = 1$.

B- Á tout point $M(a ; b)$ de P, on fait correspondre les points $P$ et $Q$, projections orthogonales de $M$ respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Si $M$ est distinct de $O$, on associe à $M$ le point $M'$, projection orthogonale de $O$ sur le droite $(PQ)$.
Dans le cas où $M = O$, $P$ et $Q$ sont confondus avec $O$, on associe à $M$ le point $M'$ tel que $M' = O$.
Soit $\Phi$ l'application de P dans P ainsi définie, on notera $M' = \Phi(M)$ et si $(D)$ est un sous-ensemble de P, on notera $(D')$ son image par $\Phi$.

1. Construire un point $M$ et son image par $\Phi$.
   Quelles sont les images des axes de coordonnées par $\Phi$ ?
2. a) Soit $M \neq O$, démontrer que les coordonnées $(a' ; b')$ du point $M'$ vérifient :

$$\begin{cases} a' = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ b' = \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

   b) Soient $A(4 ; 0)$, $B(0 ; 4)$ et $I$ le milieu de $(A, B)$.
   Déterminer $A'$, $B'$ et $I'$. Peut-on dire que l'application $\varphi$ est affine ?

   c) Soit $\sigma$ la symétrie de centre $O$ et $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta$.
   Démontrer que l'on a

$$\sigma \circ \Phi = \Phi \circ \sigma$$

$$s \circ \Phi = \Phi \circ s.$$

3. Soit $(D_m)$ la droite d'équation $y = mx$, avec $m \neq 0$.
   Montrer que $(D'_m)$ est une droite dont on précisera l'équation.

C- 1. Soit $(L)$ la droite d'équation $y = 1$.

   a) Construire l'image $M'$ d'un point $M$ de $(L)$ par $\Phi$ et montrer que $M'$ appartient à un cercle fixe.

   b) On définit paramétriquement $(L)$ par les équations :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Déterminer les équations paramétriques de $(L')$. Étudier et représenter $(L')$.

2. Soit $(\mathscr{C})$ le courbe représentée en A1 et définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \end{cases} \qquad t \in E.$$

   Démontrer que $(\mathscr{C}')$ est contenue dans le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

3. Déterminer les images des asymptotes de $(\mathscr{C})$ par $\Phi$ et représenter ces image ainsi que $(\mathscr{C}')$ dans un même repère.



Retour page 1

# XI. Lille, série C & E

**Ex. 1824.** 4 points. ./1984/lilleCE/exo-1/texte.tex

Soit, dans le plan affine euclidien P, un carré ABCD, de côté de longueur $c$, où $c \in \mathbb{R}_+^\star$.
On considère un réel $\alpha$ et $f_\alpha$ l'application du plan dans lui-même

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}.$$

a) Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha$, la nature et les éléments caractéristiques de $f_\alpha$.

b) Déterminer, puis construire l'ensemble $E_1$ des points $M$ du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2.$$

c) Déterminer, puis construire l'ensemble $E_2$ des points $M$ du plan P tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$

d) Déterminer, puis construire l'ensemble $E_3$ des points $M$ du plan P tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 2c^2.$$

**Ex. 1825.** 4 points. ./1984/lilleCE/exo-2/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$2z^3 - (7+2\mathrm{i})z^2 + (11+\mathrm{i})z - 4 = 0. \qquad \text{(E)}$$

**1.** Montrer que cette équation admet une solution réelle unique $a$ ; la déterminer.

**2.** Résoudre l'équation (E) et représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, les images A, B, C des solutions.
A désigne l'image de la racine réelle et C l'image de la racine qui a le plus grand module.

**3.** I étant le point du plan d'affixe i, montrer qu'il existe une similitude de centre I qui transforme A en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

## Problème 676 — 12 points. ./1984/lilleCE/pb/texte

A- Soit $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée de $f$ et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \dfrac{1}{x}$.
2. Étudier les variations de la fonction $g$, et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée $\alpha$, comprise entre $\dfrac{3}{2}$ et 2. Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle$]\alpha\,;+\infty[$?
3. Vérifier l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire, de l'inégalité $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$, un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Achever l'étude de la fonction f et tracer sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

B- **Recherche d'une valeur approchée de $\alpha$**

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où $h$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Retour page 1

2. Calculer $h'(x)$ et vérifier que
$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\,;2\right], \qquad -\frac{4}{9}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$
En déduire qu'il existe un réel $k \in ]0\,;1[$ tel que
$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\,;2\right], \qquad |h'(x)| \leqslant k.$$

3. Prouver que, pour tout couple de réels distincts $x$ et $y$ compris entre $\frac{3}{2}$ et 2
$$|h(x) - h(y)| \leqslant k|x - y|.$$

4. Soit $u$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$.
   b) En appliquant au couple $(u_n \;\; \alpha)$ l'inégalité du B3, prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|.$$
   c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|.$$
   et montrer que la suite $u$ converge vers $\alpha$.

5. . Montrer, en utilisant les variations de $h$ que $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ sont de signes contraires, en déduire que $\alpha$ est compris entre les nombres $u_n$ et $u_{n+1}$. En justifiant votre méthode, donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

C- On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}_+^{\star}$, solutions de l'équation différentielle
$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}. \qquad \text{(E)}$$

1. Vérifier que la fonction f définie en A est solution de cette équation.
2. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + 3y' + 2y = 0. \qquad \text{(E')}$$
3. Soit $g$ une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^{\star}$. Montrer que $g$ est solution de E si, et seulement si, $g - f$ est solution de E'.
4. En déduire toutes les solutions de l'équation E.

: *On notera* $\ln x$ *le logarithme népérien de* $x$*. La partie C est indépendante des deux autres parties.*

## XII. Montpellier, série C

Ex. 1826. ―――――― *8 points.* *./1984/montpellierC/exo-1/texte.tex*

On se propose d'étudier une fonction numérique $f$ et de préciser sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\ln$ désigne le fonction logarithme népérien.
$f$ est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^{\star}, & f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0. & \end{cases}$$

**1.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en zéro.

**2.** On considère la fonction $g$ pour $x$ appartenant à $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$ et on appelle $\Gamma$ sa courbe représentative dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Étudier $g$ et tracer $\Gamma$.

**3.** Étudier la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
Montrer que les courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

**4.** Déterminer $f'$ et $f''$ puis étudier le sens de variation de $f'$ et montrer que $f'$ est positive.
Achever l'étude de la fonction $f$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la même figure que $\Gamma$.

Ex. 1827. ——— *5 points.* *./1984/montpellierC/exo-2/texte.tex*

Dans P, plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ deux points $A$ et $B$ ont pour coordonnées respectives $(-a\ ;\ 0)$ et $(a\ ;\ 0)$. ($a$ réel strictement positif.)

$r_A$ est la rotation de centre $A$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

$r_B$ est la rotation de centre $B$, d'angle de mesure $\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$.

Pour tout point $M$ du plan P, on note $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.

1. $M$ étant un point donné de P, construire les points $M_A$ et $M_B$ : justifier la construction.
2. Démontrer que le milieu du segment $[M_AM_B]$ est un point fixe indépendant du choix de $M$ :
   a) en composant les applications $r_A^{-1}$ puis $r_B$.
   b) en utilisant les nombres complexes.
3. Démontrer, par le procédé de votre choix, que lorsque $M \neq M_A$ et $M \neq M_B$ :
$$\text{mes}(\overrightarrow{MM_A},\ \overrightarrow{MM_B}) = \text{mes}(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
   En déduire :
$$\text{mes}(MM_A,\ MM_B) = \text{mes}(MA,\ MB) + \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
   Quel est l'ensemble des points $M$ du plan P tels que $M$, $M_A$, $M_B$ soient alignés ? Construire cet ensemble.

: *Les mesures des angles sont exprimées en radians.*

## PROBLÈME 677 *7 points.* *./1984/montpellierC/pb/texte*

On recense une population tous les 40 ans.
*Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de cette population suivant un modèle particulier que l'on précise à partir de 3 recensements.*

**Première partie :** présentation concrète

La population, pour la tranche d'âge de 0 à 80 ans, a été recensée en 1900, 1940 et 1980, en séparant les deux classes d'âges suivantes :
— la classe A constituée par tous les individus d'âge inférieur ou égal à 40 ans ;
— la classe B constituée par tous les individus d'âge strictement supérieur à 40 ans et d'âge inférieur ou égal à 80 ans.

Les recensements de 1900, 1940, 1980 ont donné les résultats suivants (effectifs en millions d'habitants) :

| Années | Classe A | Classe B | Total |
|---|---|---|---|
| 1900 | $a_0 = 30$ | $b_0 = 20$ | $t_0 = 50$ |
| 1940 | $a_1 = 28$ | $b_1 = 24$ | $t_1 = 52$ |
| 1980 | $a_2 = 28$ | $b_2 = 22{,}4$ | $t_2 = 51{,}2$ |



Retour page 1

On suppose que les classes ont évolué de telle sorte qu'il existe trois coefficients fixes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha a_0 + \beta b_0 \\ b_1 = \gamma a_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ b_2 = \gamma a_1. \end{cases}$$

a) Avec les données ci-dessus, calculer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

b) On note $a_n$ l'effectif de la classe A au recensement de l'année $(1900 + 40n)$. On note $b_n$ l'effectif de la classe B au recensement de l'année $(1900 + 40n)$.

On suppose que le modèle exposant le renouvellement des classes A et B se conserve pour tous les recensements avec les mêmes coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**Deuxième partie :**

On se propose d'étudier les suites $v$ et $w$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} v_{n+1} = \alpha v_n + \beta w_n \\ w_{n+1} = \gamma v_n \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois réels donnés dans l'intervalle $]0\,;1[$.

a) Montrer que $v_{n+2} = \alpha v_{n+1} + \beta\gamma v_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

En déduire que si $q_1$ et $q_2$ sont deux réels distincts de somme $\alpha$ et de produit $(-\beta\gamma)$, alors les suites $(v_{n+1} - q_1 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1} - q_2 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et de raisons respectives $q_2$ et $q_1$. En déduire $v_{n+1} - q_1 v_n$, $v_{n+1} - q_2 v_n$, puis $v_n$ en fonction de $v_0$, $v_1$, $q_1$, $q_2$, $n$.

(*On ne cherchera pas ici à calculer* $q_1$ *et* $q_2$.)

Exprimer de même $w_n$.

b) Calculer $q_1$ et $q_2$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$+8 dans le cas particulier suivant : $\alpha = 0{,}6$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}8$.

c) Dans les notations de la première partie, en déduire $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$. Préciser aussi $t_n = a_n + b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

Que pensez-vous de l'évolution à long terme (on peut dire : $n$ tendant vers l'infini) de la population décrite dans la première partie ?

**Troisième partie :**

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont toujours trois réels dans l'intervalle $]0\,;1[$.

a) On suppose que les suites $v$ et $w$ ont des limites finies non nulles. Montrer en utilisant les relations (1) que nécessairement $\alpha + \beta\gamma = 1$.

b) Réciproquement, si $\alpha + \beta\gamma = 1$, montrer que les suites $v$ et $w$ sont convergentes. (on pourra vérifier que $q_1$ et $q_2$ prennent les valeurs $1$ et $(\alpha - 1)$.

*Remarque ne faisant l'objet d'aucune démonstration* :
La condition $\alpha + \beta\gamma = 1$ est donc un critère permettant, pour ce modèle, de prévoir l'existence à long terme d'un équilibre pour la population, Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut montrer que la population est :

— soit en voie d'expansion $(\alpha + \beta\gamma > 1)$,

— soit en voie d'extinction $(\alpha + \beta\gamma < 1)$.

## XIII. Nice, série C

Retour page 1

Ex. 1828. 4 points. ./1984/niceC/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne le point $A$ de coordonnées $(1 ; 0)$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A$ et de rayon 1. Soit $B$ un point sur l'axe des abscisses, distinct de $O$. Soit $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre $B$ passant par $A$.

**1.** On appelle $\varphi$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$, appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Exprimer en fonction de $\varphi$ l'abscisse du point $B$ et le rayon du cercle $(\mathscr{C}')$.

**2.** a) Déterminer les 2 homothéties qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$ : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties.

b) Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque $B$ parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de $O$), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

# XIV. Orléans-Tours, série C

Ex. 1829. 4 points. ./1984/orleansC/exo-1/texte.tex

Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

**1.** Calculer $I_1$.

**2.** Par intégration par parties, exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.

En déduire que $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$ pour $n \geqslant 1$.

**3.** Majorer la fonction $x \longmapsto (1-x)^n \mathrm{e}^x$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

En déduire le limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et montrer que :

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

N.B.– on rappelle les notations suivantes :

$$0! = 1 \ ; \ 1! = 1 \ ; \quad \text{pou } n > 1, \qquad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Ex. 1830. 5 points. ./1984/orleansC/exo-2/texte.tex

Soit $k$ un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points $A$, $B$ et $C$ deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$.
Une droite $\Delta$ non perpendiculaire à $(AB)$ et distincte de $(AB)$, passant par $A$, recoupe les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ respectivement en $M$ et $N$.

1. a) Quelle est la position relative des droites $(BM)$ et $(CN)$ ?

   b) Pour quelle valeur de $k$ les droites $(BN)$ et $(CM)$ sont-elles parallèles ?

2. On suppose désormais $k$ fixé et différent de $-1$. Soit $P$ le point d'intersection des droites $(BN)$ et $(CM)$.

   a) Soit $h$ l'homothétie de centre $P$ telle que $h(B) = N$.

   Démontrer que $h(M) = C$. Calculer le rapport de l'homothétie $h$ en fonction du réel $k$ (on pourra se servir des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{NC}$.)

   b) Déterminer le réel $\alpha$ tel que :
   $$\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BN}.$$

   Quel est le lieu géométrique du point $P$ lorsque $\Delta$ varie ?

   En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance $AB$ est égale à 6 cm, donner les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P, et faire une figure soignée.



Retour page 1

### Problème 678 *11 points.* *./1984/orleansC/pb/texte*

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct du plan. Soit $f_1$ la fonction numérique de variable réelle définie par
$$f_1(x) = -2x+\sqrt{3(x^2-1)}.$$

A- 1. a) Étudier les variations de $f_1$.

b) Soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Démontrer que $\mathscr{C}_1$ admet deux droites asymptotes, passant l'une et l'autre par l'origine et déterminer la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à ces asymptotes.

c) Préciser les tangentes à $\mathscr{C}_1$ aux points d'abscisse $-1$ et 1.

d) Construire $\mathscr{C}_1$ (on prendra comme unité : 2 cm).

2. Soit $f_2$ la fonction numérique de variable réelle définie par
$$f_2(x) = -2x-\sqrt{3(x^2-1)}.$$
Montrer que sa courbe représentative $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par la symétrie de centre O. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ a pour équation
$$x^2+4xy+y^2+3=0.$$
Construire cette courbe que l'on notera $\mathscr{C}$.

B- 1. Soit $S$ la transformation du plan qui au point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}(1+\mathrm{i})z$. Caractériser cette transformation.
Trouver l'équation de la courbe $\mathscr{H}$ transformée de $\mathscr{C}$ par cette transformation $S$. Donner la nature de la courbe $\mathscr{H}$ ainsi obtenue.

2. En utilisant la définition bifocale d'une hyperbole montrer que l'image par une similitude d'une hyperbole est encore une hyperbole.
En déduire que la courbe $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on donnera les foyers (on précisera les coordonnées de ces deux points).

## XV. Paris, série C

**Ex. 1831.** *4 points.* *./1984/parisC/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère l'application affine $f$ qui à tout point $M$ de P, de coordonnées $x$ et $y$ associe le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ données par :
$$\begin{cases} x' = x-2y+2\\ y' = -2x+4y-1. \end{cases}$$

**1.** Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

**2.** Montrer que l'image de P par $f$ est une droite $D$.

**3.** Montrer que $f = h\circ p$, où $h$ est une homothétie qu'on déterminera et $p$ la projection orthogonale sur la droite $D$.

**Ex. 1832.** *4 points.* *./1984/parisC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan, rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $(C_m)$ d'équation
$$mx^2+y^2-2x=0.$$

**1.** Discuter suivant les valeurs de $m$ la nature de la courbe $(C_m)$.

**2.** Tracer les courbes $(C_0)$ et $(C_2)$ sur une même figure. L'unité de longueur est 4 cm.

Retour page 1

## 🏛 Problème 679 *12 points.* ./1984/parisC/pb/texte

Le symbole $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
Les courbes de la partie **??** sont à construire dans le plan muni rapporté au *même* repère othonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité de longueur est 2 cm.

I 1° A tout réel $x$, tel que $\cos x \neq 0$, on associe :

$$f(x) = -\ln|\cos x|.$$

a) Étudier la fonction $f$ ainsi définie.

b) Construire la courbe représentative de $f$, notée $(\mathscr{C})$.

2° On note $S$ l'ensemble des solutions de l'équation

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0. \end{cases}$$

a) Résoudre cette équation.

b) On considère la fonction

$$g = \begin{pmatrix} \mathbb{R} - \{S\} & \to & \mathbb{R} \\ & x \longmapsto & -\ln\left|\cos x + \sqrt{3}\sin x\right| \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\Gamma)$, courbe représentative de $g$, est l'image de $(\mathscr{C})$ par une application affine que l'on caractérisera.

3° On note $\widetilde{f}$ la restriction de $f$ à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que $\widetilde{f}$ admet une fonction réciproque, notée $\widetilde{f}^{-1}$. Calculer $\widetilde{f}^{-1}(\ln\sqrt{2})$.

b) Étudier la dérivabilité de $\widetilde{f}^{-1}$. Montrer que, pour tout réel strictement positif $x$, on a :

$$\left(\widetilde{f}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}.$$

c) Dessiner la courbe représentative de $\widetilde{f}^{-1}$, notée (C).

4° La suite $u$ est définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et, pour tout entier naturel non nul $n$,

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

a) Montrer que l'équation

$$\begin{cases} x \in \left]\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[ \\ f(x) = x \end{cases}$$

admet une unique solution, notée $\ell$. Donner un encadrement de $\ell$ dans un intervalle de longueur $10^{-2}$.

b) Montrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $u$ appartiennent à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$. Montrer que $u$ est décroissante.

c) Montrer que $u$ est convergente et trouver sa limite.

II On considère la fonction $G$, définie sur $\mathbb{R}+^{\star}$ par

$$G(x) = \int_{\ln\sqrt{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^{2t}-1}}.$$

1° Montrer qu'il existe un réel $k$, que l'on calculera, tel que pour tout réel strictement positif, on ait

$$G(x) = \widetilde{f}^{-1}(x) + k.$$

2° Montrer que $G$ admet une limite en $+\infty$ et une limite en $0$. Calculer ses limites.



Retour page 1

III 1° a) $\alpha$ est un nombre réel, résoudre l'équation

$$(\mathscr{E}_{\alpha,\ 1})\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$(\mathscr{E}_{\alpha,\ n})\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

dans laquelle $n$ est un entier naturel non nul donné.

2° Pour tout entier naturel non nul $n$, pour tout réel $\alpha$ et pour tout complexe $z$, on pose

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1.$$

On admet que, pour tous $z$, $\alpha$ et $n$, on a :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2z\cos\alpha + 1\right) \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right] \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right]$$

et on note

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

b) Pour tout $\alpha$ de l'intervalle $[0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que, pour tout $\alpha$ non nul, on a

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$, lorsque $\alpha$ tend vers $0$ ?

d) En déduire que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 :

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

## XVI. Paris, série E

Ex. 1833. *4 points.* *./1984/parisE/exo-1/texte.tex*

**1.** Écrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe :

$$a = 16(1 - \mathrm{i}).$$

**2.** Pour $\lambda$ nombre réel quelconque, on pose :

$$z_\lambda = 1 + \mathrm{i} + 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} = x_\lambda + \mathrm{i}y_\lambda.$$

a) Calculer les réels $x_\lambda$ et $y_\lambda$ en fonction de $\lambda$.

b) Déterminer l'ensemble $(C)$ des points $M_\lambda$ de coordonnées $(x_\lambda\ ;\ y_\lambda)$ quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.

**3.** Montrer que les solutions de l'équation :

$$(z-(1+\mathrm{i}))^3 = a$$

sont les affixes de points de $(C)$.

# XVII. Paris, série D

Ex. 1834. 5 points. ./1984/parisD/exo-1/texte.tex

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ - unité graphique : 10 cm -, on considère les points $M_n$, $n \in \mathbb{N}$, d'affixes $z_n$ définies par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \dfrac{9}{10}\mathrm{e}^{i} z_n$.

1. Calculer $z_1$ : donner son module et un argument; expliciter sa partie réelle et sa partie imaginaire à l'aide de $\cos(1)$ et de $\sin(1)$, et en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près par défaut.
   Plus généralement calculer $z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6,\ z_7,\ z_8$ en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près par défaut des parties réelles et imaginaires.
   Tracer le segments $[M_n,\ M_{n+1}]$, pour $n \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, dans le plan $P$.
2. Montrer que $n$ est un argument de $z_n$. Donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+1}}}\right)$.
   Soit $r_n$ le module de $z_n$. Exprimer $r\check{r}n$ en fonction de $n$. Quelle est la nature de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Cette suite admet-elle une limite et, si oui, laquelle ?

Ex. 1835. 4 points. ./1984/parisD/exo-2/texte.tex

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, dont quatre blanches, trois bleues et trois rouges. On tire au hasard trois fois de suite trois boules, les boules n'étant pas remises dans l'urne.
Pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$ on considère l'événement $T_i$ : « le i^e^ tirage est tricolore », autrement dit donne une boule blanche, une boule bleue et une boule rouge ».
On désigne d'autre part par $R$ l'événement : « la boule qui reste dans l'urne après les trois tirages est blanche ».
On admettra que la probabilité de l'événement $R$ est $\dfrac{4}{10}$.

1. Calculer la probabilité de l'événement $T_1$, puis la probabilité de $T_2$ sachant que $T_1$ est réalisé. En déduire la probabilité de $T_1 \cap T_2$.
   Calculer de même la probabilité de $T_1 \cap T_2 \cap T_3$.
2. Quelle est la relation entre les événements $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ et $R$ ? Calculer la probabilité pour que les trois tirages aient été tricolores, sachant que $R$ est réalisé.

- On donnera les résultats d'abord sous forme de fraction irréductible, puis sous forme de valeur approchée par défaut à $10^{-2}$ près.

**Problème 680** *11 points.* ./1984/parisD/pb/texte

On considère la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = 2\ln x - [\ln x]^2$$

où $\ln$ désigne le logarithme népérien.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un plan P muni d'un repère orthonormé - unité graphique : 1 cm.

**1.** Quel est l'ensemble de définition de $f$ ? La fonction $f$ admet-elle des limites aux bornes de son ensemble de définition et, si oui lesquelles ?
   Montrer que la fonction $f$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition, et expliciter la fonction dérivée.
   Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

**2.** Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue réelle $x$.
Donner l'équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $e^2$.
Calculer à $10^{-3}$ près $f(5)$ et $f(10)$ ainsi que les ordonnées de points de $T$ d'abscisse 5 et 10.

**3.** Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan. On fera figurer la droite $T$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $e$.
On ne cherchera pas un tracé précis pour les points d'abscisse supérieure à 10.

**4.** Montrer que, pour tout nombre réel $k$ inférieur à 1 ($k < 1$), la droite $D_k$ d'équation $y = k$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en deux points d'abscisses respectives $m$ et $m'$.
Montrer que $mm' = e^2$ quel que soit $k \in ]-\infty\,;1[$.

**5.** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[e\,;+\infty[$. Montrer que $g$ admet une application réciproque $g^{-1}$ dont on explicitera l'ensemble de définition $\Delta$. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \Delta$.

**6.** Calculer $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x$. (On pourra effectuer des intégrations par parties.)
Vérifier que le résultat obtenu est un nombre entier naturel et donner l'interprétation géométrique de ce nombre.

# XVIII. Toulouse, série C

**Ex. 1836.** ——— *4 points.* *./1984/toulouseC/exo-1/texte.tex*

Soit, dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $(E)$ d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ et les points $A(1\,;\,0)$ et $B(0\,;\,2)$.

**1.** Reconnaître $(E)$ et en donner les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers, directrices). Tracer $(E)$.

**2.** $M$ étant un point quelconque de $(E)$, montrer que l'isobarycentre $M'$ des points $A$, $B$ et $M$ est l'image de $M$ par une transformation que l'on précisera.

**3.** Quel est l'ensemble $(F)$ des points $M'$ quand $M$ décrit $(E)$.
Préciser ses éléments caractéristiques.
Tracer $(F)$.

*N.B. : Toute solution, analytique ou non, sera acceptée.*

**Ex. 1837.** ——— *4 points.* *./1984/toulouseC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application $S$ qui, au point $M$ d'affixe $z$ fait correspondre le point $M$? d'affixe $z'$ telle que

$$z' = (1 + \mathrm{i})z + 2.$$

**1.** Reconnaître cette application ; montrer qu'elle a un point invariant $I$. Donner une construction géométrique du point $M'$ image de $M$ par $S$. Quelle est la nature du triangle $(I,\ M,\ M')$ ?

**2.** Quel est l'ensemble $C_1$ des points $M$ de P tels que

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\| \text{ ?}$$

**3.** Quel est l'ensemble $C_2$ des points $M$ de P tels que

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \text{ ?}$$

**4.** Déduire des questions précédentes une construction géométrique des images des points d'intersection de $C_1$ et $C_2$.

Retour page 1

**Problème 681** *12 points.* *./1984/toulouseC/pb/texte*

**1.** 1. En étudiant le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$t \longmapsto t - \ln t - 1$$

montrer que, pour tout réel $t$ strictement positif on a : $\ln t \leqslant t-1$.

2. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

a) Étudier les variations de $f$, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Soit $f_1$ la fonction définie par $f_1(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $f_1(0) = 0$.
Montrer que $f_1$ est un prolongement par continuité de $f$ en zéro.
Construire la représentation graphique de $f_1$ dans un repère orthonormé (unité de longueur 2 cm).
on précisera la demi-tangente au point d'abscisse $0$ ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.

c) Dans cette question $x$ est un réel fixé de l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Calculer, en justifiant son existence, al limite de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad u_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x^2} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{x^n}.$$

**2.** On se propose d'étudier la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star = ]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\ln t - t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence et la dérivabilité de $F$ en sur $\mathbb{R}_+^\star$.**Étudier le sens de variation de $F$. (On n'étudiera pas les limites de $F$ dans cette question.)
2. Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de $x$. Quelle signification géométrique peut-on donner au réel $F(x)$ ?
3. Étude de la limite de F en zéro :
Démontrer que, pour $x$ appartenant à $]0\,;1]$, on a $\dfrac{x}{\ln x - x} \leqslant x$.
En déduire que, pour $x$ appartenant à $]0\,;1]$, on a

$$\frac{x^2-1}{2} \leqslant F(x) \leqslant 0.$$

En déduire que $F(x)$ admet une limite $\lambda$ comprise entre $-\dfrac{1}{2}$ et $0$ quand $x$ tend vers $O$. (On ne cherchera pas à calculer $\lambda$.)
4. Étdude de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ :
Montrer que, pour $x$ de $[1\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 1$.
En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
5. On se propose d'encadrer la fonction $F$ par deux fonctions, lorsque $x$ est supérieur à 1.

a) Calculer $\displaystyle\int_1^x (1+\ln t)\,\mathrm{d}t$ pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}_+^\star$.

- Montrer que si $t$ est supérieur à 1 alors $\dfrac{t}{\ln t - t} \leqslant 1 + \ln t$.
- En déduire que, pour $x$ supérieur à 1, on a :

$$F(x) \leqslant x \ln x.$$



Retour page 1

b) Calculer $\int_1^x \left(1+\frac{\ln t}{t}\right) \mathrm{d}t$ pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}_+^\star$.

Montrer que, pour tout $x$ supérieur à 1, on a :

$$x+\frac{1}{2}(\ln x)^2-1 \leqslant F(x).$$

c) Écrire un encadrement de $F(x)$ pour $x$ supérieur à 1.

**3.** Pour chaque réel $i$ de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, prendre pour valeur approchée $F(i)$, la moyenne arithmétique des deux valeurs qui encadrent $F(i)$. On notre $y_i$ cette valeur approchée, que l'on donnera avec deux chiffres après la virgule.

Présenter les résultats obtenus dans un tableau et placer, dans un repère orthonormé, les points $M_i$ de coordonnées $(i\ ;\ y_i)$, avec $i$ appartenant à $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Déterminer le point moyen du nuage et donner une équation de l'une des droites droites d'ajustement en utilisant la méthode des moindres carrés.

Tracer cette droite dans le repère orthonormé.

ℹ : Droite d'ajustement et droite de régression sont des expressions synonymes.

## XIX. Centres étrangers groupe I, série C

Ex. 1838. ./1984/etrangergroupeIC/exo-1/texte.tex

On se propose d'étudier la suite $u$, de terme général $u_n$, définie par :

$$u_0=\frac{1}{2}\ ; \qquad u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n+2}.$$

**1.** Soit $f$ l'application de l'intervalle $[0\,;1]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}.$$

a) Calculer $f'(x)\,;\ f''(x)$.

b) Étudier le sens de variation de $f$. Quelle est l'image du segment $[0\,;1]$ par $f$ ?

c) Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$\frac{1}{4} \leqslant f'(x) < \frac{2}{3}.$$

d) Établir que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;1]$.

**2.** a) Prouver que si la suite $u$ admet une limite $\ell$, alors $f(\ell)=\ell$.

b) En utilisant le 1c), démontrer que, pour tout entier $n$ :

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} \leqslant \frac{2}{3}.$$

En déduire que la suite $u$ converge vers $\ell$ et déterminer un entier $n_0$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n-\ell| < 10^{-3}$.

**3.**

Ex. 1839. ./1984/etrangergroupeIC/exo-2/texte.tex

Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle :

$$y''-2y'+2y=0$$

sachant que :

$$f(0)=1 \quad ; \quad f'(0)=0.$$



Retour page 1

### PROBLÈME 682

./1984/etrangergroupeIC/pb/texte

Soit, dans le plan affine euclidien, un triangle $A_1A_2A_3$.
A tout point $M$ du plan, distinct des sommets $A_1$ $A_2$, $A_3$, du triangle, on associe :

a) les points $M_1$, $M_2$, $M_3$, symétriques de $M$ dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)}$, $s_{(A_3A_1)}$, $s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs les droites $(A_2A_3)$, $(A_3A_1)$, $(A_1A_2)$.

b) Les droites $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ issues des sommets $A_1$ $A_2$, $A_3$ et respectivement perpendiculaires aux droites $(M_2M_3)$, $(M_3M_1)$, $(M_1M_2)$. Les symétries orthogonales d'axes $\Delta_i$, $i \in [\![1,3]\!]$, sont notées $s_{\Delta_i}$.

**1.** Démontrer que $\Delta_1$ est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

**2.** Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.

a) Quelle est la nature de $s$ ?

b) Déterminer $s(A_1)$, $s(M)$. Caractériser $s$.

c) Démontrer l'égalité entre mesures d'angles orientés de droites :

$$(\widehat{A_1A_2,\ A_1M}) = (\widehat{\Delta_1,\ A_1A_2}) \quad (\pi) \tag{1}$$

**3.** Établir de manière analogue,

$$(\widehat{A_2A_1,\ A_2M}) = (\widehat{\Delta_2,\ A_2A_3}) \quad (\pi) \tag{2}$$

$$(\widehat{A_3A_2,\ A_3M}) = (\widehat{\Delta_3,\ A_3A_1}) \quad (\pi) \tag{3}$$

**4.** Montrer que l'ensemble $(C)$ des points $M$ du plan, distincts des sommets $A_1$, $A_2$, $A_3$ tels que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.

**5.** On suppose dans cette question, que le point $M$ n'appartient pas à $(C)$.

a) Démontrer que les droites $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, sont concourantes en un point $P$ que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
Dans la suite du problème ce point $P$ est appelé l'associé du point $M$.

b) Quel est l'associé d'un point $M$ appartenant aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle ?

c) On suppose que le point $M$ n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Démontrer, en utilisant les relations **(??)**, **(??)**, **(??)**, que si $M$ a pour associé $P$ alors le point $P$ a pour associé $M$.

## XX. Antilles , séries C & E

**Ex. 1840.** ——— *4 points* ./1984/antillesCE/exo-1/texte.tex

Soit P le plan affine euclidien orienté et $\mathscr{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct de P.
Soit $f$ l'application de P dans P, qui, à tout point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe le point $M'$ d'affixe :

$$z' = x' + \mathrm{i}y' = (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}.$$

**1.** Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

**2.** On note $A$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $O'$ l'image de $O$ par $f$. Soit d une droite passant par $O$, D' l'image de D par $f$.

a) Donner une mesure da l'angle (D, D').

b) On désigne par $I$ le point d'intersection de D et D'. Montrer que $(A,\ I,\ O,\ O')$ sont cocycliques.

**Ex. 1841.** ——— ./1984/antillesCE/exo-2/texte.tex

Soit la suite $(u_n)$ à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ par

$$n^2u_n^2 - (n-1)^2u_{n-1}^2 = n.$$

**1.** On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $v_n = n^2u_n^2$. Déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

**2.** En déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

Retour page 1

## 🏛Problème 683

./1984/antillesCErem/pb/texte

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi$ une application continue de $I$ dans $I$, involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ où Id est l'application identique de $I$.

On se propose de déterminer et d'étudier dans certains cas, des applications $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$f'(x) = f(x) + f(\varphi(x)) \qquad \text{pour tout réel } x \text{ de } I. \tag{E}$$

A) On considère les fonctions numériques $\varphi_1$, $\varphi_2$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $\varphi_1(x) = a - x$ ($a$ nombre réel fixé)
- $\begin{cases} \varphi_2(x) = -\ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1° Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont involutives.
Étudier leur continuité et leur dérivabilité.

2° Étudier les variations de $\varphi_2$. Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

B) On suppose qu'il existe une fonction $f$ vérifiant (E).

1° Montrer que $f'$ est continue sur $I$ et que si $\varphi$ est dérivable sur $I$, alors $f'$ est dérivable sur $I$.

2° Établir la relation : pour tout $x$ de $I$,

$$f'(\varphi(x)) = f'(x).$$

En déduire que si $\varphi$ est dérivable sur $I$, alors $f$ vérifie la relation :

$$f''(x) - \left[1 + \varphi'(x)\right] f'(x) = 0 \tag{F}$$

pour tout réel $x$ de $I$.

3° On pose $\varphi = \varphi_1$.

a) Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ vérifiant (F).

b) Préciser, parmi celles-ci, celles qui vérifient aussi (E).

C) On revient au cas général où $\varphi$ est une fonction dérivable et involutive sur $I$. On suppose de plus qu'il existe un point unique $x_0$ de $I$ tel que $\varphi(x_0) = x_0$.

1° Montrer que la fonction $f$ définie sur $I$ par :

$$f(x) = A \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\, \mathrm{d}t + B$$

où $A$ et $B$ sont des constantes réelles, vérifient la relation (F).

2° Montrer que les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\varphi(x)}$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\, \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\, \mathrm{d}t$ sont des primitives sur $I$ d'une même fonction.

En déduire que

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\, \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - \mathrm{e}^{2x_0}.$$

3° En déduire la relation qui doit lier $A$ et $B$ pour que $f$ vérifie la relation (E).

D) On pose $\varphi = \varphi_2$.

1° Montrer que $0$ est la seule valeur de $x$ vérifiant $\varphi_2(x) = x$.

2° Déterminer en appliquant les résultats du C, des fonctions $f$ vérifiant (E).



Retour page 1

3° Soit $g$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t-\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0 \\ g(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

a) Montrer que $g$ vérifie (E). Préciser $g'(0)$.

b) Montrer que si $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{t-\ln(1+t)} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Montrer que $\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \geqslant 0$ pour tout $t$ réel.

En déduire que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t \leqslant x$ pour tout $x \leqslant 0$.

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

d) Donner le tableau de variation de $g$.

## XXI. Antilles remplacement, séries C & E

**Ex. 1842.** ./1984/antillesCErem/exo-1/texte.tex

Soit la suite $(u_n)$ à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ par

$$n^2u_n^2 - (n-1)^2u_{n-1}^2 = n.$$

**1.** On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $v_n = n^2u_n^2$. Déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

**2.** En déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**Ex. 1843.** ./1984/antillesCErem/exo-2/texte.tex

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A$, $B$, $C$ de coordonnées :

$$A(3\ ;\ 2\ ;\ 3) \quad B(9\ ;\ 2\ ;\ 11) \quad C(6\ ;\ -3\ ;\ 7).$$

**1.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

**2.** Donner une équation du plan P passant par les points $A$, $B$ et $C$.

**3.** Donner une équation de la sphère S de diamètre $[AB]$ et préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

**Problème 684** ./1984/antillesCErem/pb/texte

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi$ une application continue de $I$ dans $I$, involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi\circ\varphi =$Id où Id est l'application identique de $I$.

On se propose de déterminer et d'étudier dans certains cas, des applications $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$f'(x) = f(x) + f(\varphi(x)) \qquad \text{pour tout réel } x \text{ de } I. \tag{E}$$

A) On considère les fonctions numériques $\varphi_1$, $\varphi_2$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $\varphi_1(x) = a - x$ ($a$ nombre réel fixé)
- $\begin{cases} \varphi_2(x) = -\ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1° Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont involutives.
Étudier leur continuité et leur dérivabilité.

2° Étudier les variations de $\varphi_2$. Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé.



Retour page 1

B) On suppose qu'il existe une fonction $f$ vérifiant (E).

1° Montrer que $f'$ est continue sur $I$ et que si $\varphi$ est dérivable sur $I$, alors $f'$ est dérivable sur $I$.

2° Établir la relation : pour tout $x$ de $I$,

$$f'(\varphi(x)) = f'(x).$$

En déduire que si $\varphi$ est dérivable sur $I$, alors $f$ vérifie la relation :

$$f''(x) - \left[1+\varphi'(x)\right] f'(x) = 0 \tag{F}$$

pour tout réel $x$ de $I$.

3° On pose $\varphi = \varphi_1$.

a) Déterminer l'ensemble des fonctions $f$vérifiant (F).

b) Préciser, parmi celles-ci, celles qui vérifient aussi (E).

C) On revient au cas général où $\varphi$ est une fonction dérivable et involutive sur $I$. On suppose de plus qu'il existe un point unique $x_0$ de $I$ tel que $\varphi(x_0) = x_0$.

1° Montrer que la fonction $f$ définie sur $I$ par :

$$f(x) = A\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + B$$

où $A$ et $B$ sont des constantes réelles, vérifient la relation (F).

2° Montrer que les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\varphi(x)}$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$ sont des primitives sur $I$ d'une même fonction.

En déduire que

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - \mathrm{e}^{2x_0}.$$

3° En déduire la relation qui doit lier $A$ et $B$ pour que $f$ vérifie la relation (E).

D) On pose $\varphi = \varphi_2$.

1° Montrer que $0$ est la seule valeur de $x$ vérifiant $\varphi_2(x) = x$.

2° Déterminer en appliquant les résultats du C, des fonctions $f$ vérifiant (E).

3° Soit $g$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t-\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0 \\ g(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

a) Montrer que $g$ vérifie (E). Préciser $g'(0)$.

b) Montrer que si $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{t-\ln(1+t)} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Montrer que $\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \geqslant 0$ pour tout $t$ réel.

En déduire que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t \leqslant x$ pour tout $x \leqslant 0$.

En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

d) Donner le tableau de variation de $g$.



Retour page 1

# XXII. Guyane remplacement, séries C & E

**Ex. 1844.** ./1984/guyaneCErem/exo-1/texte.tex

Dans le plan affine euclidien P, on considère un triangle isocèle $ABC$ de sommet $A$ tel que $AB = AC = 3a$ et $BC = 2a$ ($a$ étant un réel strictement positif).
On appelle $G$ le barycentre des points $A$, $B$, $C$ affectés respectivement des coefficients 2, 3 et 3.
Soit $I$ le milieu de $[BC]$, $J$ le milieu de $[AI]$.

**1.** Montrer que $G$ est le milieu de $[IJ]$.

**2.** $M$ étant un point de P, calculer $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ en fonction de $MG$ et de $a$.

**3.** Déterminer l'ensemble des points $M$ de P tels que

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2.$$

**4.** Déterminer l'ensemble E des points $M$ de P tels que

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2.$$

**5.** Démontrer que les droites $(BC)$, $(AB)$ et $(AC)$ ont, chacune, un unique point commun avec E.
Que représente le point $G$ pour le triangle $ABC$ ?

**Ex. 1845.** ./1984/guyaneCErem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, (unité 1 cm) on considère les courbes C et C' d'équations respectives :

$$C: \ 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$$
$$C': \ 16x^2 + 49y^2 - 16x + 294y + 261 = 0$$

**1.** Trouver les équations réduites des deux courbes. Préciser leur nature et vérifier qu'elles ont le même centre.

**2.** Trouver les éléments remarquables de C et C' (sommets, foyers, directrices, asymptotes éventuelles).

**3.** Tracer C et C'.

## Problème 685

./1984/guyaneCErem/pb/texte

-A) 1° Étudier les variations de l'application $g$ de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1).$$

En déduire que pour tout $x$ réel strictement supérieur à -1, $g(x) < 0$.

2° Soit $f$ l'application de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 & x = 0. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.

b) Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

-B) On désigne par E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont des nombres entiers positifs vérifiant $|ad - bc| = 1$. Soit $F$ un élément de E.

Retour page 1

1° Montrer que, pour tout $x$ réel strictement positif :

$$F(x) \in \left]\frac{a}{c}\,;\frac{b}{d}\right[ \quad \text{ou} \quad F(x) \in \left]\frac{b}{d}\,;\frac{a}{c}\right[$$

et que

$$\left|F(x)-\frac{a}{c}\right| \leqslant \frac{1}{cd}, \qquad \left|F(x)-\frac{b}{d}\right| \leqslant \frac{1}{cd}.$$

2° Pour tout $x$ réel strictement positif, on considère

$$m(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \left|F(t)-\frac{a}{c}\right| \,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $0 \leqslant m(x) \leqslant \dfrac{1}{cd}$.

b) Calculer $m(x)$.

c) Reconnaître $m$ dans le cas où $c=d=1$.

-C) On considère la fonction $R$ définie pour tout $x$ strictement positif par $R(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

On pose $F_1=R\circ R$ et pour tout entier $n$ non nul $F_{n+1}=F_n\circ R$.

1° a) Exprimer $F_1(x)$ en fonction de $x$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul $F_n(x)$ s'écrit sous la forme :

$$F_n(x)=\frac{a_n x+b_n}{c_n x+d_n}$$

où $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ sont des entiers naturels strictement positifs, termes généraux de suites définies sur $\mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$a_{n+1}=a_n+b_n, \qquad b_{n+1}=a_n,$$
$$c_{n+1}=c_n+d_n, \qquad d_{n+1}=c_n.$$

c) Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $F_n$ appartient à E.

2° On note $I_n$ l'intervalle ouvert d'extrémités $\dfrac{a_n}{c_n}$ et $\dfrac{b_n}{d_n}$.

a) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel $n$ non nul, $c_n \geqslant n$.

En déduire que la longueur de $I_n$, $\left|\dfrac{a_n}{c_n}-\dfrac{b_n}{d_n}\right|$, tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la suite $(c_n d_n)$, définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ est croissante et trouver un entier $n$ tel que

$$\left|\frac{a_n}{c_n}-\frac{b_n}{d_n}\right| < 10^{-3}.$$

3° Déterminer le réel positif $\Phi$ tel que $R(\Phi)=\Phi$.

Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a

$$\Phi=F_n(\Phi).$$

En utilisant la question B1), montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $\Phi$ élément de $I_n$.

N.B. : dans tout le problème, les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle $x$.

ln désigne la fonction logarithme népérien.

Retour page 1

# Chapitre XXVII

# 1985.

On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier & Nice ;

— groupe II : Amiens, Rennes, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

## Sommaire



## I. Groupe I, série C

**Ex. 1846.** *./1985/groupeIC/exo-1/texte.tex*

Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties

$$I_k = \int_0^k x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la limite de $I_k$ quand $k$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 1847.** *./1985/groupeIC/exo-2/texte.tex*

P est le plan orienté. On appelle « triangle équilatéral direct » tout triplet $(A,\ B,\ C)$ de points de P vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral} \\ \dfrac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right). \end{cases}$$

On se donne un cercle $(\mathscr{C})$ de centre $O$ et de rayon $R$ et une droite $(D)$ ne coupant pas $(\mathscr{C})$.

**1.** Soit $A$ un point de $(D)$. On note $(E_A)$ l'ensemble des points $M$ de P vérifiant la propriété :
« il existe un point $N$ de $(\mathscr{C})$ tel que le triplet $(A,\ M,\ N)$ soit un triangle équilatéral direct ».
Montrer que $(E_A)$ est un cercle dont on déterminera le centre $\Omega_A$ et le rayon $R_A$. Construire $(E_A)$.

**2.** Quel est l'ensemble des points $\Omega_A$ lorsque $A$ décrit $(D)$ ? Construire cet ensemble.

## Problème 686

./1985/groupeIC/pb/texte

A) 1° Résoudre l'équation différentielle

$$X'' + 2X' + 2X = 0 \tag{1}$$

où $X$ représente une fonction numérique de la variable réelle $t$ définie sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer Les solutions $f$ et $g$ de (1) vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = -1$$

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 1$$

B) Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t} \cos t.$$

1° Montrer que, pour tout réel $t$ : $-\mathrm{e}^{-t} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}, \Gamma, \Gamma'$ des fonctions

$$t \longmapsto f(t)\ ; \qquad t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\ ; \qquad t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}\ ?$$

Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

2° Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; vérifier que, pour tout réel $t$ :

$$f'(t) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

3° Déterminer les points communs à $\mathscr{C}$ et $\Gamma$, à $\mathscr{C}$ et $\Gamma'$.
Montrer qu'en ses points les tangentes aux deux courbes sont confondues.

4° Tracer les arcs des courbes $\mathscr{C}, \Gamma, \Gamma'$ correspondant à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités : 2 cm en abscisses ; 16 cm en ordonnées).

5° Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $t$ définie par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t.$$

Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.
Déduire le tableau de variations de $g$ sur $[0\,;2\pi]$ du tableau de variations de $f$ obtenu en B2.

C) Le plan P est rapporté à un nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, orthonormé (unité : 16 cm). A tout réel $t$ on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$, et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(t)$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.
L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de $\mathscr{S}$.

1° Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Placer $A_0, A_1, A_2, A_3$ et la tangente en $A_0$ à $\mathscr{S}$.

b) Tracer l'arc $\overset{\frown}{A_0A_3}$ de $\mathscr{S}$, correspondant aux réels $t \in \left[0\,; \frac{3\pi}{2}\right]$.
Préciser les points de cet arc où les tangentes à $\mathscr{S}$ sont parallèles aux axes.

2° a) Déterminer, en fonction de $t$, le module et un argument de $z(t)$.

b) Prouver qu'il existe une similitude directe de centre $O$, dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel $t$ : $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.

c) Quelle est l'image de l'arc de courbe $\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude ?

3° On admet que tout arc $\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}$ a une longueur $l_n$, et qu'une similitude de rapport $k$ transforme un arc de longueur $l$ en un arc de longueur $kl$.

Retour page 1

a) Calculer $l_n$ en fonction de $l_0$ et de $n$ ; en déduire la longueur $L_n$ de $\widehat{A_0A_n}$.

b) Étudier la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

4° On donne $l_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $l_0$ ; en déduire la valeur de la limite obtenue en C(3)b).

## II. Groupe I remplacement, série C

**Ex. 1848.** *6 points.* ./1985/groupeICrem/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}$ et $f$ l'application telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}_1, \quad f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

1. Résoudre l'équation $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. a) Montrer que
$$\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1, \quad f(z) = f(z') \Longleftrightarrow z = z' \text{ ou } zz' = 1.$$
   b) Soit $(z,\ z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que
$$|z| < 1 \qquad \text{et} \qquad |z'| < 1\ ;$$
   montrer que
$$f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'.$$
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.
4. Dans cette question $z = \mathrm{e}^{ic\theta}$, $\theta \in [-\pi\,;\pi[ - \left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\}$.
   a) Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos\theta$.
   b) Soit $u$ la suite réelle telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \cdots + (f(z))^n.$$
   Pour quelles valeurs de $\theta$ cette suite converge-t-elle ?

**Ex. 1849.** *4 points.* ./1985/groupeICrem/exo-2/texte.tex

Soit dans le plan $P$, orienté, un triangle $OAB$ tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

**1.** Soit $S$ la similitude directe transformant $A$ en $B$, et la droite $(OA)$ en la droite $(OB)$. Montrer que $S$ a un centre $\Omega$ qui appartient au cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $OAB$.

**2.** Réciproquement, montrer que tout point $\Omega'$ de $\mathscr{C}$, distinct de $A$ et de $B$, est le centre d'une similitude directe transformant $A$ et $B$ et $(OA)$ en $(OB)$.

**3.** Donner une construction géométrique simple des centres des rotations transformant $A$ en $B$ et $(OA)$ en $(OB)$.

**PROBLÈME 687** *10 points.* ./1985/groupeICrem/pb/texte

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 4 cm).
$g$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

A- 1.



Retour page 1

2. Dans le problème $\tan$ désigne la bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Exprimer simplement $(g \circ \tan)(x)$. Retrouver alors les extrémums de$g$ et préciser les antécédents correspondants.

3. $\Delta_\alpha$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \alpha \quad \alpha \in ]1\,;+\infty[, \quad \text{réel donné,} \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x). \end{cases}$$

Calculer $\mathscr{A}_\alpha$ l'aire de $\Delta_\alpha$. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}_\alpha$, puis $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{\mathscr{A}_\alpha}{\alpha}$.

B- Soit $u$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   En déduire que $u$ est strictement décroissante.
2. Montrer que $u$ converge, puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

C- Soit $G$ et $H$ les applications de $[1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad H(x) = [1\,;x[G(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Exprimer $G(x)$. Sans chercher à calculer $H(x)$, étudier les variations de $H$ sur $[1\,;+\infty[$.
2. On pose, pour $x \in [1\,;+\infty[,\ \ L(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.

   (La notation $\ln$ désigne le logarithme népérien.)

   a) Montrer que :

   $$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ H(x) - L(x) = \frac{1}{2}\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

   b) Justifier

   $$\forall X \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+X) \leqslant X.$$

   En déduire que

   $$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ H(x) - L(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}.$$

   c) Montrer que $x \longmapsto H(x) - L(x)$ admet une limite finie, $\ell$, lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

3. Soit $\tan^{-1}$ la fonction réciproque de $\tan$ définie en A2.

   a) Justifier la dérivabilité de $\tan^{-1}$ en tout point et montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   b) Calculer $H(x) - L(x)$ au moyen d'une intégration par parties.

   c) Donner la valeur de $\ell$ $\left(\text{on admet que } \lim\limits_{x \to +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}\right)$.



Retour page 1

# III. Groupe I, série E

Ex. 1850. ./1985/groupeIE/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 5(1+\mathrm{i})z + 2(1+7\mathrm{i}) = 0.$$

On appelle $z_1$ la solution qui a la plus grande partie réelle, et $z_2$ l'autre solution.

**2.** La plan affine euclidien P est rapporté à un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.
Soit $a$ un nombre réel.
On définit l'application $f_a$ par :

$$\begin{aligned} f_a : \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où $M'$ est tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + a\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

Déterminer, suivant la valeur de $a$, la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f_a$.

Ex. 1851. ./1985/groupeIE/exo-2/texte.tex

**1.** Déterminer les solutions générale de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

**2.** On lance trois fois un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Chaque numéro à la même probabilité d'apparaître.
On appelle $a$, $b$, $c$ les résultats des premiers, second et troisième jets du dé.
Quelle est la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0$$

soient les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

où $c_1$ et $c_2$ désignent des constantes réelles ?

**3.**

## Problème 688 ./1985/groupeIE/pb/texte

A) 1° Construire la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

Déterminer ses foyers et ses asymptotes.

2° On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction numérique $f$ par :

$$\begin{aligned} (\forall x < 2) \qquad & f(x) = (2-x)\ln(2-x) \\ (\forall x \geqslant 2) \qquad & f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}. \end{aligned}$$

On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$.

a) Prouver que la restriction de $f$ à l'intervalle $[2\,; +\infty[$ a pour représentation graphique une partie de la courbe $(\Gamma)$ que l'on précisera.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ au point 2.

c) Étudier les variations de $f$ et construire la courbe $(C)$ sur la même figure que $(\Gamma)$.

3° Calculer, en cm$^2$, l'aire de la portion du plan comprise entre $(C)$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

Retour page 1

B) A tout instant $t$, élément de $\mathbb{R}$, on considère le point mobile $M$ dont les coordonnées sont

$$x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \quad y(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

1° Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point $M$ à l'instant $t$.

2° Démontrer que la trajectoire de $M$ est une partie de $(\Gamma)$ que l'on précisera.
Préciser le sens et la nature du mouvement de $M$ suivant les valeurs de $t$.

3° On se propose de déterminer un réel $t$ tel que l'abscisse de $M$ à l'instant $t$ soit égale à $5t$.
On définit la fonction $\Phi$ ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{5} \end{aligned}.$$

a) Remarquer que $x(t) = 5t$ équivaut à $\Phi(t) = t$.
Calculer $\Phi(t) - t$ pour $t = 0$ et $t = 1$. En déduire qu'il existe au moins un réel $t_0$ appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$ tel que $\Phi(t_0) = t_0$.

b) Étudier sur l'intervalle $[0\,;1]$ les variations de la dérivée $\Phi'$ de la fonction $\Phi$, puis celles de la fonction $\Phi$. En déduire

$$\begin{aligned} &(\forall t \in [0\,;1]) \quad \left|\Phi'(t)\right| \leqslant \frac{1}{2} \\ &(\forall t \in [0\,;1]) \quad \Phi(t) \in \,]0\,;1[. \end{aligned}$$

c) On définit une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \Phi(u_n). \end{cases}$$

A l'aide de la question (Bb) et de l'inégalité des accroissements finis, démontrer

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in \,]0\,;1[$$

et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - t_0| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - t_0|\,.$$

En déduire

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - t_0| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - t_0|$$

puis

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - t_0| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

En conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $t_0$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

d) Peut-on en déduire que $t_0$ est le seul nombre $t$ de $[0\,;1]$ tel que $x(t) = 5t$ ?
Combien de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit-il de calculer pour obtenir une valeur approchée de $t_0$ à $10^{-2}$ près ? Calculer une telle valeur.

N.B. *La plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).*

## IV. Groupe II, série C



Retour page 1

**Ex. 1852.** ./1985/groupeIIC/exo-1/texte.tex

On désigne par $\mathbb{C}^{\star}$ le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ privé de zéro.
Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^{\star}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

pour tout $z$ élément de $\mathbb{C}^{\star}$.

**1.** Calculer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction des module et argument de $z$.

**2.** Soit $\varphi$ l'application du plan privé de l'origine $O$ dans le plan qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $f(z)$.
Quelle est la nature de l'image par $\varphi$ d'un cercle de centre $O$ et de rayon $R$?

**Ex. 1853.** ./1985/groupeIIC/exo-2/texte.tex

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit $f$ l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, associe le point $M'=f(M)$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ définies par :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{x}-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)\\[2ex] y'=y+1\\[2ex] z'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}).\end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une isométrie et déterminer l'ensemble des points invariants par $f$f.

**2.** a) Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme associé à $f$ est une droite vectorielle dont on précisera une base $(\overrightarrow{U_0})$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{U_0}$ et calculer $\overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point $M$ de $\mathscr{D}$.

**3.** a) Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{\jmath}$. Montrer que l'application $r=t^{-1}\circ f$ admet une droite de points invariants.

b) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $y=0$ et $A$ le point de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
On rapporte $\mathscr{P}$ au repère $\mathscr{R}=(A, \ \vec{i}, \ \vec{k})$.
Montrer que, pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, $r(M)$ appartient à $\mathscr{P}$.
On note $r'$ la restriction de $r$ à $\mathscr{P}$. Pour $M$ de coordonnées $(X\ ;\ Z)$ dans $\mathscr{R}$, déterminer les coordonnées $\left(X'\ ;\ Z'\right)$ dans $\mathscr{R}$ de $r'(M)$ en fonction de $X$ et $Y$.
Caractériser $r'$ ; on supposera que le repère $\mathscr{R}$ est direct.

**4.** En déduire que $f$ est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et le cosinus de l'angle.

## Problème 689

./1985/groupeIIC/pb/texte

A) 1° Étudier les variations de l'application $f$ de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Déduire de l'étude précédente le nombre de solutions réelles de l'équation $\mathrm{e}^{ax}-x=0$ suivant les valeurs du nombre réel $a$.

B) On considère, pour $a$ réel donné, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$U_0=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}\ :\ U_{n+1}=\mathrm{e}^{aU_n}.$$

1° Pourquoi peut-on affirmer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite $u$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{ax}-x=0$?

2° On suppose $a\geqslant 0$.

a) Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.



Retour page 1

b) Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ?

c) On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n$ que $U_n \leqslant \mathrm{e}$.
Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

3° On suppose $a < 0$.

a) $p$ et $n$ étant deux entiers naturels quelconques, exprimer

$$\int_{U_p}^{U_n} \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \text{en fonction de } U_{p+1} \text{ et } U_{n+1}.$$

b) En utilisant la question précédente, comparer les signes de $U_{n+2} - U_n$ et $U_{n+1} - U_{n-1}$. En déduire que $U_{n+2} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$ sont de même signe.

c) Quels sont les signes de $U_2 - U_0$ et $U_3 - U_1$ ? Pour tout entier $n$, soient $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.
Montrer que les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n \leqslant 1$. Les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_{n+1} - U_n| \leqslant |a|^n \, |U_1 - U_0|\,.$$

Que peut-on en conclure qour les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ si $-1 < a < 0$ ?
Qu'en résulte-t-il alors pour la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

## V. Groupe III, série C

**Ex. 1854.** ./1985/groupeIIIC/exo-1/texte.tex

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan, $A_0$ le point d'affixe 6 et $s$ la similitude de centre $O$, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ at d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ 12$.

**1.** Déterminer en fonction de $n$ l'affixe du point $A_n$ et vérifier que $A_{12}$ appartient à la demi-droite $(O,\ \vec{\imath})$.

**2.** Établir que le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$. Représenter les points $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{12}$ (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments $OA_0,\ OA_1,\ \ldots,\ OA_{12}$ et $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots, A_{11}A_{12}$.

**3.** Calculer la longueur du segment $A_0A_1$. En déduire la longueur $\ell$ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_{12}$.
Donner une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.

**Ex. 1855.** ./1985/groupeIIIC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$ $(R > 0)$ et soient $A$ et $B$ deux points diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$.

**1.** Pour tout point $M$ de $\mathscr{C}$, distinct de $A$ et $B$, on construit le point $Q$ tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.
Déterminer l'ensemble décrit par le milieu $I$ du segment $[MQ]$, puis l'ensemble décrit par le centre de gravité $G$ du triangle $BMQ$ lorsque $M$ décrit $\mathscr{C}$ privé des points $A$ et $B$.

**2.** On note $N$ le symétrique de $A$ par rapport à $M$ et $P$ le point d'intersection des droites $(ON)$ et $(BM)$.
Quel rôle joue le point $P$ relativement au triangle $ANB$ ?
Trouver une homothétie de centre $B$ transformant $M$ en $P$ et déterminer l'ensemble décrit par le point $P$ lorsque $M$ décrit $\mathscr{C}$ privé des points $A$ et $B$.

**3.** On considère les cercles circonscrits aux triangles $OBP$ et $MNP$.

a) Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en $P$ ?

b) On note $K$ l'autre point commun de ces deux cercles. En utilisant les angles orientés de droites égaux à $(\widehat{KB,\ KP})$ et $(\widehat{KP,\ KM})$, montrer que les points $K,\ A,\ B,\ M$ sont cocycliques.



Retour page 1

## PROBLÈME 690

./1985/groupeIIIC/pb/texte

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions $f_\lambda$ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où $\lambda$ est un nombre réel non nul. La partie **??** est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de la courbe représentative $\mathscr{C}_\lambda$ de $f_\lambda$, dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
La partie **??** donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

A) 1. Donner l'ensemble de définition de $f_\lambda$ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

2. a) Existe-t-il un lien entre les deux courbes $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}_{-\lambda}$ ?

   b) Soit $\Gamma$ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme $\Gamma$ en $\mathscr{C}_\lambda$.

3. On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x)?x$.

   a) On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{D}$.

   b) On suppose $\lambda > 0$.
   Étudier les variations de $\varphi_\lambda$ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre $x$ en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini).
   Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand $x$ décrit le domaine de définition de $\varphi_\lambda$, est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln\lambda$.

   c) Étudier, quand $\lambda$ décrit $]0\,;+\infty[$ les variations de $m(\lambda)$ ; en déduire son signe.

   d) Combien, lorsque $\lambda$ est positif, $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{D}$ ont-elles de points communs ?

B) **Étude du cas particulier :** $\lambda = 1$

1. a) Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; on prendra comme unité 3 cm.

   b) On appelle $P$ et $Q$ les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{D}$. $P$ est le point d'abscisse négative $p$, $Q$le point d'abscisse positive $q$. Démontrer que : $2 < q < 3$.

2. On se propose de calculer une valeur approchée de q. On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n), \qquad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a) Représenter à l'aide de la courbe $\mathscr{C}_1$ les termes $u_0,\ u_1,\ u_2$ sur $(O; \vec{\imath})$.

   b) Montrer que la suite $u$ est croissante et majorée par $q$.

   c) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que :

$$q - u_{n+1} \leqslant \frac{q - u_n}{3} \qquad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

   d) En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $q - u_n \leqslant \dfrac{q - u_0}{3^n}$ et que la suite $u$ converge vers $q$.

   e) Déterminer une valeur approchée de $q$ à $10^{-2}$ près en justifiant la mé- thode choisie.

3. L'unité d'aire étant le cm$^2$ , calculer en fonction de $p$ et de $q$ l'aire comprise entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$.



Retour page 1

# VI. Groupe III, série E

**Ex. 1856.** ./1985/groupeIIIE/exo-1/texte.tex

Soit la suite réelle $u$ de premier terme $u_0 = 3$ et définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

pour tout entier naturel $n$.

**1.** Démontrer que tous les termes de la suite sont positifs.

**2.** Si la suite $u$ est convergente, démontrer que sa limite $\ell$ est solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

**3.** Soit la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$pour tout entier naturel.

Démontrer que $v$ est une suite géométrique convergente et préciser sa limite.

**4.** En déduire que la suite $u$ est convergente et déterminer sa limite.

**Ex. 1857.** ./1985/groupeIIIE/exo-2/texte.tex

Le plan P est orienté et rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
$f$ est l'application de P dans P, qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left[(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})\overline{z} - 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right].$$

**1.** $s$ étant la symétrie axiale par rapport à la droite du repère $(O,\ \vec{u})$, montrer que $s \circ f$ est une rotation $r$ dont on précisera le centre et une mesure de l'angle en radians.

**2.** En déduire que $f$ est une symétrie axiale et préciser son axe.

## Problème 691

./1985/groupeIIIE/pb/texte

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les trois points $A$, $B$, $C$ définis par

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath},\ \overrightarrow{OB} = \vec{\jmath},\ \overrightarrow{OC} = -\vec{\jmath}.$$

Pour tout point $M$ de P, on pose $\varphi(M) = MA + MB + MC$.
On se propose de trouver un point $M_0$ tel que $\varphi(M) > \varphi(M_0)$ pour tout $M$ de P différent de $M_0$.

A- On note $\Delta$ la demi-droite, ensemble des points d'abscisse $x \geqslant 0$ et d'ordonnée $y = 0$. On se propose d'étudier la restriction de $\varphi$ à $\Delta$.

1. On définit les deux applications $f$ et $g$ de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} + x - 2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1} - x + 2.$$

Étudier les variations de $f$, puis celles de $g$. (L'étude aux bornes n'est pas demandée.)

2. On définit l'application $h$ de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \geqslant 0$,

$$h(x) = 2\sqrt{x^2+1} + |x-2|.$$

Étudier au moyen de la question précédente, les variations de $h$. (L'étude aux bornes n'est pas demandée.)

Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et différent de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $h(x) < h\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Soit $M$ un point de $\Delta$.
Établir que $\varphi(M) = h(x)$ où $x$ désigne l'abscisse de $M$.
Quelle est la plus petite valeur prise par $\varphi(M)$ quand $M$ décrit $\Delta$ ? En quel point de $\Delta$ est-elle atteinte ?

B- Étude de $\varphi$ sur le plan P tout entier.

1. Établir que, pour tout point $M$ de P, on a $MB + MC \geqslant 2$.

2. Étant donné un réel $a$ supérieur ou égal à 1, on note $\Gamma_a$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MB + MC = 2a$.
   Reconnaître $\Gamma_1$.
   Reconnaître $\Gamma_a$ lorsque $a > 1$.
   Tracer, sur une même figure, $\Gamma_1$ et $\Gamma_{\frac{3}{5}}$.
   On prendra l'unité de longueur égale à 3 cm.
3. Établir que, pour tout $a \geqslant 1$, $\Gamma_a$ rencontre $\Delta$ en un unique point $T_a$ dont on précisera l'abscisse.
4. Soit un réel $a \geqslant 1$.
   Vérifier que $\Gamma_a$ admet la représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x = \sqrt{a^2-1}\cos t \\ y = a\sin t \quad (t \in [0\,;2\pi[) \end{cases}$$
   Si $t \in [0\,;2\pi[$ et si $M$ est le point de $\Gamma_a$ défini par les formules ci-dessus, exprimer, en fonction de $t$, la différence $MA^2 - T_aA^2$ et montrer que, si $M$ est différent de $T_a$, cette différence est strictement positive.
   En déduire que, si $M$ est un point de $\Gamma_a$ différent de $T_a$, on a $\varphi(M) > \varphi(T_a)$.
5. Soit $M_0$ le point du plan défini par $\overrightarrow{OM_0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}$.
   Montrer que, pour tout point $M$ du plan différent de $M_0$, $\varphi(M) > \varphi(M_0)$.

## VII. Groupe IV, série C

**Ex. 1858.** ./1985/groupeIVC/exo-1/texte.tex

dans le plan orienté, on considère un triangle $ABC$.
$A'$, $B'$, $C'$ désignent les milieux respectifs des bipoints $(B,\ C)$, $(C,\ A)$, $(A,\ B)$.

**1.** Montrer qu'il existe un point $P$ et un seul vérifiant les propriétés suivantes $PA = PC$ et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PC}}\right)$ est égale à $\left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Soit $Q$ le point tel que :
$QA = QB$ et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{QB};\overrightarrow{PA}}\right)$ est égale à $\left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**2.** a) On désigne par :

- $r_P$ la rotation de centre $P$ et d'angle de mesure $\left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$,
- $r_Q$ la rotation de centre $Q$ et d'angle de mesure $\left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$,
- $s_{A'}$ la symétrie par rapport au point $A'$.

Étudier l'image de $A$ par l'application $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.

**3.** Quelle est la nature du triangle $A'PQ$ ?

**Ex. 1859.** ./1985/groupeIVC/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ d'affixes respectives $z$, $z^2$, $z^3$ où $z$ désigne un nombre complexe.

**1.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ soient deux à deux distincts.

**2.** On suppose les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des points $M_1$ tels que l'un des angles du triangle $M_1M_2M_3$ soit un angle droit.

## Problème 692

./1985/groupeIVC/pb/texte

A) *Étude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*

1. Démontrer que pour tout nombre réel $x$ élément de l'ensemble $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est définie ($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).
   On considère l'application :
   $$f:\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$$
   $$x\longmapsto f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$
2. Démontrer que $f$ est dérivable en tout point de l'ensemble de définition, et que pour tout $x$ élément de $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[$ :
   $$f'(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}.$$
   Déterminer le sens de variation de $f$.
3. a) Démontrer que pour tout $x$ élément de $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[$ :
   $$\frac{x}{\ln 2x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{\ln x}.$$
   b) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers zéro.
   c) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. On considère l'application
   *Phi* :
   $$\Phi:]0\,;1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
   $$t\longmapsto\Phi(t)=2-2t+\ln t$$
   De l'étude des variations de $\Phi$ sur $]0\,;1]$ (sens de variation de $\Phi$ et limites de $\Phi$ aux bornes de l'intervalle de définition) déduire l'existence d'un unique nombre réel $\alpha$ élément de $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$ tel que $\Phi(\alpha)=0$ et et justifier que pour tout nombre réel $t$ élément de $[\alpha\,;1]$, on a : $\ln t>2t-2$.
   Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que pour tout $x$ élément de $\left[\alpha\,;\,\frac{1}{2}\right[$ :
   $$f(x)\leqslant\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t-1}.$$
   En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.
5. Démontrer que pour tout nombre réel $t$ élément de $[1\,;+\infty[$ : $\ln t\leqslant t-1$.
   Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $1$.
6. a) Résumer dans un tableau l'étude des variations de $f$.
   b) On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(C')=(C)\cup\{O\}$.
   Donner l'allure de la courbe $(C')$ en précisant la tangente en $O$ et les droites asymptotes.

Retour page 1

B) *Étude d'une famille de fonctions numériques définies par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*
On considère, pour chaque entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'application :

$$\begin{aligned} g_n : [1\,;+\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_n(x) = \int_x^{nx} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et on désigne par $(\Gamma_n)$ la courbe représentative de $g_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

a) $n$ et $m$ étant des entiers tels que : $2 \leqslant n < m$, étudier la position relative des courbes $(\Gamma_n)$ et $(\Gamma_m)$.

b) Démontrer que $g_n$ est dérivable en tout point de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.
En déduire que $(\Gamma_n)$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = g_n(u_n)$.

c) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < \mathrm{e} \qquad \text{et} \qquad \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$$

(on pourra utiliser le résultat : pour tout réel $t$ élément de $]1\,;+\infty[$, $\ln t < t-1$). En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

d) Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$.

# VIII. Groupe IV, série E

**Ex. 1860.** ./1985/groupeIVE/exo-1/texte.tex

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 + 4\mathrm{i}z^2 + 12(1+\mathrm{i})z - 45.$$

1. a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution réelle $d$ et une unique solution imaginaire pure $a$ que l'on déterminera.
   b) Démontrer qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres complexes, que l'on déterminera, tel que :
   pour tout élément $z$ de $\mathbb{C}$,
   $$f(z) = (z-d)(z-a)(z^2+pz+q).$$
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$.
2. $A,\ B,\ C,\ D$ sont les points du plan complexe, d'affixes respectives : $3\mathrm{i},\ 1-2\mathrm{i}, 2-\mathrm{i},\ -3$.
   a) Montrer qu'il existe une rotation $r$ qui transforme $A$ en $B$ et $C$ en $D$. On précisera son centre ainsi que le cosinus et le sinus d'une mesure (en radians) de son angle.
   b) Montrer qu'il existe une homothétie qui transforme $A$ en $B$ et $D$ en $C$. On précisera son centre et son rapport.
3. Quelle est la nature géométrique de $r \circ h$ ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

**Ex. 1861.** ./1985/groupeIVE/exo-2/texte.tex

La plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et $F$ le point de coordonnées $(8\ ;\ 0)$.
Soit $\theta$ un nombre réel tel que : $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$. On désigne par $(\Gamma_\theta)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta},$$

où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur (D).



Retour page 1

1. Préciser la nature de $(\Gamma_\theta)$ suivant les valeurs de $\theta$.
2. Construire la courbe $(\Gamma_0)$ correspondant à $\theta = 0$.
3. a) Écrire une équation cartésienne de la courbe $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

   b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes).

   c) Construire la courbe $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$.
4. Soit (C) le cercle de centre $O$ et de rayon 10.

   a) Écrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{5}$.

   b) Préciser les foyers de (E).
   En déduire que les tangentes à $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

## Problème 693

./1985/groupeIVE/pb/texte

A- On considère a fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x - 1}\right|.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les variations de $f$ :

   a) ensemble de définition de $f$ ;

   b) continuité et dériabilité de $f$ sur son ensemble de définition ;

   c) sens de variation de $f$ ;

   d) limites de $f$ aux bornes des intervalles de définition :

   - on précisera les droites asymptotes parallèles aux axes de coordonnées,
   - on montrera que la droite d'équation $y = -x$ set asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ et on étudiera la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote.
     Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
2. On désigne par $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   a) Montrer que $g$ est une bijection de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

   b) On désigne par $\Phi$ l'application réciproque de $g$ : $\Phi = g^{-1}$ et par $(\Gamma)$ la courbe représentative de $\Phi$. Expliciter $\Phi(x)$ en fonction de $x$.
3. $a$ étant un nombre réel non nul, on considère la fonction $f_a$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f_a(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x - a}\right|,$$

   on désigne par $(\mathscr{C}_a)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   a) Démontrer que l'image la courbe $(\Gamma)$ par la symétrie de centre $O$ est la courbe $(\mathscr{C}_{-1})$.

   b) $a$ et $b$ étant deux nombres réels non nuls de même signe, montrer qu'il existe une transformation de plan qui transforme la courbe $(\mathscr{C}_a)$ en la courbe $(\mathscr{C}_b)$.

B- On considère la fonction numérique $\Phi$ de la variable réelle définie par :

$$Phi(x) = \ln(e^{-x} + 1)\ ;$$

on désigne par $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Retour page 1

1 Étudier les variations de $\Phi$ et tracer la courbe $(\Gamma)$.
Démontrer que la courbe $(\Gamma)$ coupe la droite d'équation $y = x$ en un point dont on déterminera les coordonnées.

2 $\lambda$ étant un réel positif ou nul, on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\Gamma)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) En utilisant, sans le justifier, le résultat : pour tout $u$ élément de $[0\,;+\infty[$,

$$u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u,$$

déterminer un encadrement de $\mathscr{A}(\lambda)$ et en déduire que $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant 1$.

b) Montrer que $\mathscr{A}(\lambda)$ admet une limite lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$ et déterminer un encadrement de cette limite.

3 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de premier terme $u_O$ et telle que, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \Phi(u_n)$.

a) Montrer que si $u_n$ tend vers $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, alors $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) • Montrer que, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$.

• Montrer que pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}_+$ : $\left|\Phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

• En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^\star$ :

$$\left|u_{n+1} - \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|.$$

• En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

🛈 : La partie B peut être traitée indépendamment de la partie A.
$\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

## IX. Lille, série C

**Ex. 1862.** ./1985/lilleC/exo-1/texte.tex

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

**1.** Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.
Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

**2.** Montrer que, pour tout entier $k$ au moins égal à 2, on a

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire une minoration de $u_n$ par une intégrale.

**3.** Calculer $\displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = I_n$ en fonction de $n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$) puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. La suite $(u_n)$ a-t-elle une limite quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

Ex. 1863. ./1985/lilleC/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2-4z+5)-\mathbf{i}(z+1)=0.$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0.$$

**3.** En déduire qu'il existe des réels $A,\ B,\ C,\ D$ qu'on déterminera tels que
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad (x^2+4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D).$$

## Problème 694

./1985/lilleC/pb/texte

*Le but de ce problème est d'étudier les images de quelques figures simples par des applications complexes.*
Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On note $A,\ B,\ C$ les points de P de coordonnées respectives
$$\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\right),\quad (1\ ;\ 0).$$

A- 1. Montrer qu'il existe une application affine de P, $s$ et une seule, qui laisse invariant les deux points $A$ et $B$ et qui transforme $O$ en $C$.
Préciser la nature et les caractéristiques de $s$.
2. Pour tout point $M$ du plan, exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $s(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$, puis l'affixe $z'$ de $s(M)$ en fonction de l'affixe $z$ de $M$.
3. Déterminer l'image par $s$ du cercle de centre $O$ et de rayon 1.

B- On considère l'application $F$ de P dans P qui à tout point $m$ d'affixe $z$ associe le point $M$ d'affixe $Z=z^2+1$.
1. a) Déterminer les images par $F$ des points $A,\ B$ et $O$.
b) Déterminer les points invariants par $F$.
2. a) Démontrer que tout point $M$ de P, à l'exception d'un seul que l'on précisera, admet par $F$ deux antécédents distincts $m_1$ et $m_2$ symétriques par rapport à $O$.
b) On note $Z$ l'affixe de $M$, distinct de $C$, et $z_1$ et $z_2$ les affixes respectives de $m_1$ et $m_2$.
Démontrer que
$$Om_1=Om_2=\sqrt{CM}$$
$$\arg z_1=\frac{1}{2}\alpha+2k\ \pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\arg z_2=\frac{1}{2}\alpha+\pi+2k\ \pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
où $\alpha$ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath},\overrightarrow{CM})$.
c) On es propose de construire géométriquement $m_1$ et $m_2$.
Soit (D) la droite passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\dfrac{\alpha}{2}$ soit une mesure de $(\vec{\imath}),\ \vec{u})$
Soit (D') la perpendiculaire à (D) passant par $O$. Sur (D'), de part et d'autre de $O$, on place les points $N$ et $P$ tels que
$$OP=1etON=CM.$$
Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[PN]$.
Démontrer que $(\Gamma)$ coupe (D) en $m_1$ et $m_2$.
3. Déterminer l'image par $F$ du cercle de centre $O$ et de rayon 1.
4. a) Pour tout point $m$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on note $(X\ ;\ Y)$ les coordonnées du point $M=F(m)$. Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.
b) Déterminer l'image par $F$ de l'axe des abscisses puis de l'axe des ordonnées.



Retour page 1

c) Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'image par $F$ appartient à l'axe des abscisses.

5. $(\Delta)$ désigne la droite d'équation $y=2$.

a) Démontrer que l'image de $(\Delta)$ par $F$ est la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation

$$y^2=16(x+3).$$

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe, sommet foyer, directrice. Construire $(\mathscr{C})$.

b) Soit $\mathscr{S}$ l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $-3\leqslant x\leqslant 0$ et $y^2\leqslant 16(x+3)$.
Établir que

$$\mathscr{S}=8\int_{-3}^{0}\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer $\mathscr{S}$.

# X. Lille, série E

**Ex. 1864.** ./1985/lilleE/exo-1/texte.tex

Dans cet exercice, les résultats numériques devront êtres justifiés par le rappel de formules utilisées.
Le tableau suivant donne l'âge $X$ et la tension artérielle $Y$ de 10 hommes :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 58 | 40 | 74 | 34 | 65 | 49 | 53 | 51 | 36 | 40 |
| $Y$ | 16,7 | 13,1 | 17,2 | 11,6 | 15,5 | 15,1 | 14,2 | 14,4 | 13,0 | 14,2 |

**1.** Déterminer la moyenne et la variance de chacune de ces variables.

**2.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire des variables $X$e t $Y$.

**3.** Déterminer une équation de le droite de régression linéaire des variables $X$ et $Y$.

**4.** Estimer la tension artérielle d'un homme âgé de 45 ans.

**Ex. 1865.** ./1985/lilleE/exo-2/texte.tex

On donne dans le plan orienté, un triangle isocèle $OO'A$ avec mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AO'}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ passant par $A$ et de centres respectifs $O$ et $O'$ se recoupent en $B$.

A tout point $M$ de $(\mathscr{C})$, on associe le point $M'$ de $(\mathscr{C}')$ tel qu'une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{O'M'}}\right)$ soit $-\dfrac{\pi}{2}$.

**1.** Montrer qu'il existe une rotation $r$, que l'on caractérisera, transformant $O$ en $O'$ et $M$ en $M'$.

**2.** $M$ étant distinct de $B$, les droites $(BM)$ et $(BM')$ recoupent respectivement $(\mathscr{C}$ en $N$ et $(C')$ en $N'$.
Montrer que $N'$ est l'image de $N$ par la rotation $r$.

**3.** On construit les carrés $MBM'P$ et $NBN'Q$.
Montrer que les points $P$ et $Q$ sont respectivement les images des points $M$ et $N$ par une similitude $\mathscr{S}$ dont on précisera centre, rapport et angle.
En déduire les ensembles des points $P$ et $Q$ lorsque $M$ varie.
(Les différents éléments de cet exercice paraîtront sur une figure soignée.)

**Problème 695** ./1985/lilleE/pb/texte

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} f_n(x)=x(\ln x)^n & \text{pourx} \neq 0\\ f_n(0)=0. \end{cases}$$

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe de $f_n$ dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 5 cm).



Retour page 1

A- 1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_n$ en $0$.
2. Étudier les variations de $f_1$ et construire la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
3. Étudier les variations de $f_n$ pour $n > 1$ (on distinguera deux cas suivant la parité de $n$).
4. Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par 3 points fixes.
5. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{C}_n$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

B- Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose

$$u_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par $0$.
Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)$ ?
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $u_1$.
3. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+1}.$$

4. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

C- Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On appelle $M_0,\ M_1,\ M_2$ les points respectifs de (D), $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de même abscisse $x$ et $G$ le barycentre du système

$$\{(M_0,\ 1),\ (M_1,\ 2),\ (M_2,\ 1)\}.$$

Calculer les coordonnées du point $G$ en fonction de $x$.
Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $G$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $\varphi$ l'application affine de P dans P qui à tout point $M\,(x\ ;\ y)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\mathrm{e}} \\ y' = \dfrac{y}{4\mathrm{e}}. \end{cases}$$

a) Démontrer que $\varphi$ est la composée d'une homothétie de centre $O$ et d'une affinité orthogonale d'axe $x'x$ dont on précisera les rapports.
b) Démontrer que $(\Gamma)$ est l'image de $(\mathscr{C}_2)$ par $\varphi$.
3.
4.

## XI. Paris, série C

**Ex. 1866.** ./1985/parisC/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3 - (7+9\mathrm{i})z^2 + 7(-1+6\mathrm{i})z + 13 - 33\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

**1.** Montrer que admet une unique solution réelle et la déterminer.

**2.** a) Résoudre (E).

b) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points $A,\ B,\ C$ dont les affixes sont les solutions de (E). (On notera $A$ celui dont l'abscisse est la plus grande). Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**3.** Soit $(D)$ la droite d'équation $x = 6$, et $(P)$ la parabole de directrice $(D)$ et de foyer $A$.
Montrer que $(P)$ contient $B$ et $C$, préciser son sommet. Dessiner $(P)$.

Retour page 1

**Ex. 1867.** ./1985/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan $\mathscr{P}$ orienté, on considère trois points distincts $\Omega$, $M$, $M'$ formant un triangle isocèle, rectangle en $M$, et de sens direct.

Retour page 1

Retour page 1

**1.** Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $\mathscr{S}_\Omega$ de centre $\Omega$ telle que $\mathscr{S}_\Omega(M) = M'$.

**2.** Soit $ABC$ un triangle du plan $\mathscr{P}$, de sens direct. A l'extérieur du triangle $ABC$, on construit le triangle isocèle $ABR$ rectangle en $B$, le triangle isocèle $BCP$ rectangle en $C$ et le triangle isocèle $CAQ$, rectangle en $A$.

On note $\mathscr{S}_P$, $\mathscr{S}_Q$ et $\mathscr{S}_R$ les similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ et de centres respectifs $P$, $Q$ et $R$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f$ :

$$f = \mathscr{S}_R \circ \mathscr{S}_P \circ \mathscr{S}_Q.$$

(On pourra chercher l'image de $A$ par $f$.)

**3.** Dans cette question, on suppose donné un triangle $PQR$ du plan $\mathscr{P}$, et on cherche à construire un triangle $ABC$ tel que les constructions de la question 2) redonnent ce triangle $PQR$.

a) Montrer que si un triangle $ABC$ solution du problème existe, alors le point $A$ est déterminé de manière unique.

Par quelles rotations peut-on obtenir $C$, connaissant $P$, $Q$ et $A$, puis $B$ connaissant les autres points ?

En déduire qu'il existe un seul triangle $ABC$ répondant à la question.

b) On veut maintenant construire $ABC$, dans le cas particulier où $PQR$ est un triangle isocèle rectangle en $Q$ de sens direct.

On note $I$ le milieu de $[PR]$, $I'$ le symétrique de $R$ par rapport à $Q$ et $S$ le symétrique de $P$ par rapport à $Q$.

Déterminer $f(I)$ ; comparer les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{QI};\overrightarrow{QI'}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AI'}}\right)$ ; en déduire que $A$ appartient à un cercle que l'on précisera.

Déterminer $f(Q)$ ; comparer les angles de droites $(\widehat{(SQ), (SR)})$, et $(\widehat{(AQ), (AR)})$ ; en déduire que $A$ appartient à un autre cercle que l'on précisera.

Construire le triangle $ABC$. On fera une figure en prenant 8 cm comme longueur de $[PQ]$.

c)

## Problème 696

./1985/parisC/pb/texte

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = x$.

A- Pour tout entier $n$ strictement positif, on note $f_n$ la fonction numérique de la variable réelle définie sur $GR - \{-1\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^n}$$

et on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. Déterminer la fonction dérivée $(f_n)'$ de $f_n$ et donner l'expression de $(f_n)'$ en fonction de $f_n$ et $f_{n+1}$.
2. Étudier les variations de $f_n$, et ses limites éventuelles en $-\infty$, - 1 et $+\infty$. On distinguera les cas $n$ pair et $n$ impair.
3. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}_n$ ? Tracer, sur deux figures distinctes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
5. Pour tout entier $n$ strictement positif, on note $g_n$ la restriction de $f_n$ à $]-\infty\,; -1[$. Quelle est l'image de $g_n$ ? Montrer que $g_n$ induit une bijection de $]-\infty\,; -1[$ sur son image, dont on étudiera la fonction réciproque $h_n$ (on distinguera les cas $n$ pair et $n$ impair).

B- Pour tout entier strictement positif $n$, on note :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et qu'elle converge.
2. Montrer que, pour tout entier $n$ strictement positif,

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

   En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. Déterminer, en utilisant la relation de la question A1 une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$.
   Montrer ensuite que

$$\lim_{n\to+\infty} nI_{n+1} = 1.$$

   En déduire que la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge, et déterminer sa limite.

C- Dans cette partie $n=2$.

1. Montrer que l'équation $f_2(x)=x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

   *Le but de la suite de cette partie est de déterminer une valeur approchée de $\alpha$.*
2. Étudier les variations de $(f_2)'$ dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et en déduire qu'il existe un réel $k$ appartenant à l'intervalle $]-1\,;0[$ tel que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ on ait :

$$k \leqslant (f_2)'(x) \leqslant 0.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+1} = f_2(u_n). \end{cases}$$

   a) Montrer que, pour tout entier $n$, $u_n$ est élément de $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

   b) En remarquant que $u_{n+1}-\alpha = f_2(u_n)-f_2(\alpha)$, montrer en utilisant C2 que pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_{n+1} - ?| \leqslant |k|\,|u_n-\alpha|\,.$$

   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.
4. En utilisant le sens de variation de f2 dans · 1 2; 1 ¸ montrer que pour tout entier naturel n on a (un+1??) (un??) < 0. En déduire que? est compris entre un et un+1. Déterminer une valeur approchée de? à 10?3 près, en justi?ant la méthode employée.

3. a. b. c. 4.

## XII. Paris, série E

Ex. 1868. ./1985/parisE/exo-1/texte.tex

*L'épure demandée doit obligatoirement être accompagnée d'un commentaire.*
Il s'agit de représenter en utilisant la géométrie descriptive, une droite D passant par un point $A$ donné, parallèle à un plan $\Pi$ donné et rencontrant une droite $\Delta$ donnée.
On suppose que $A$ n'appartient ni à $\Delta$, ni à $\Pi$ et que $\Delta$ est sécante à $\Pi$.

**1.** Démontrer qu'il existe une droite D unique répondant au problème posé, parallèle à la droite d'intersection L des plans $\Pi$ et $R$ ($R$ étant le plan défini par le point $A$ et la droite D).

**2.** Construire, en géométrie descriptive la droite D (on pourra utiliser la question 1).
L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Le plan horizontal (respectivement frontal) de projection est défini par l'équation $z=0$ (respectivement $x=0$).



Retour page 1

Placer la ligne de terre à mi-hauteur de la feuille de papier, le point $O$ étant à 7 cm du bord gauche. L'unité étant le centimètre.
Soit $\Pi$ le plan d'équation :

$$6x-3y+2z-6=0.$$

On note P (respectivement Q') la droite définie comme intersection du plan $\Pi$ et du plan horizontal (respectivement frontal) de projection.

a) Construire l'épure des droites P et Q'.

b) Soit $A(3\,;\,1\,;\,2)$ et $\Delta$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=\dfrac{9}{2}+t. \end{cases}.$$

Construire l'épure de $A$ et de $\Delta$. Démontrer que le plan R est vertical.

c) Déterminer l'intersection L des plans R et $\Pi$ puis construire l'épure de D.

d) Faire apparaître en vraie grandeur le segment $[AB]$ où $B$ est le point d'intersection des droites D et $\Delta$.

**Ex. 1869.** ./1985/parisE/exo-2/texte.tex

On se propose de montrer que les relations :
$u_O=-3$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, $u_n=\dfrac{u_{n-1}-8}{2u_{n-1}-9}$
définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

**1.** Représenter graphiquement la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$$

pour tout $x$ réel distinct de $\dfrac{9}{2}$. Utiliser cette représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite $u_n$.

**2.** Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n<1$.

**3.** Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

## Problème 697

./1985/parisE/pb/texte

Á toute fonction numérique $f$ définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction $\varphi$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \varphi(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On se propose d'étudier la fonction $\varphi$ associée à une fonction $f$ donnée.
On notera $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\Gamma$ celle de $\varphi$.

A- Soit $f$ définie par $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}-\dfrac{1}{2}$.

1. Étudier la fonction $f$ et construire $\mathscr{C}$. On montrera que $f$ est une fonction impaire ; on précisera la tangente à $\mathscr{C}$ au point $O$ et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente.
2. Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x$ réel et étudier la fonction $\varphi$.
3. Construire la courbe $\Gamma$ ; on montrera que la courbe $\Gamma$ admet un centre de symétrie. (On ne demande pas d'étudier la position de $\Gamma$ par rapport à la tangente au centre de symétrie.)

B- $f$ est maintenant une fonction quelconque, définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

1. On pose, pour tout $x$ réel, $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ; exprimer $\varphi$ à l'aide de $F$. En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'à tout réel $x$ on peut associer une réel $\theta_x$ de l'intervalle $[x\,;\,x+2]$ tel que $\varphi(x)=2f(\theta_x)$.
3. Démontrer que $\varphi$ est une fonction bornée.
4. Démontrer que si $f$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, $\varphi$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et a le même sens de variation que $f$.
5. a) Démontrer que si $f$ est périodique de période 2, alors $\varphi$ est uen fonction constante.
   b) Donner un exemple de fonction périodique de période 2 et déterminer alors la fonction $\varphi$ associée à $f$.

C- Soit $f$ la fonction définie par $f(t)=\dfrac{t^2+2}{t^2+1}$.

1. Étudier la fonction $f$ et construire la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer le sens de variation de $\varphi$ (on ne cherchera pas à calculer $\varphi(x)$).
3. Montrer que $\varphi$ a pour limite $2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on pourra utiliser le résultat de la question B2).
4. Donner le tableau de variation de $\varphi$. Montrer que la courbe $\Gamma$ admet un axe de symétrie et donner l'allure de $\Gamma$.

🛈 : Toutes les courbes demandées seront faites sur des feuilles séparées.

## XIII. Paris remplacement, série C

Ex. 1870. ——— *4 points* ./1985/pariscrem/exo-1/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3+(1-8\mathrm{i})z^2-(23+4\mathrm{i})z-3+24\mathrm{i}=0. \tag{E}$$

1. a) Montrer que(E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
   b) Achever la résolution de l'équation (E).
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, représenter les points $A$,

$$Bet$$

C d'affixes respectives $1+2\mathrm{i}$, $3\mathrm{i}$, $-2+3\mathrm{i}$. Soit $G$ le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés des coefficients respectifs $2,\ -2,\ 1$.
Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.
Montrer qu'elles forment une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe. En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme $A$ en $B$ et $B$ en $C$. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

Ex. 1871. ——— *4 points* ./1985/pariscrem/exo-2/texte.tex

Soit $ABC$ un triangle (de sens direct) ayant ses trois angles aigus.

1. Construire les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ tels que :
$\mathscr{C}_a-\{C,\ B\}$ est l'ensemble des points $P$ tels que $\text{mes}(\widehat{(PC),(PB)})=\dfrac{\pi}{3}$,
$\mathscr{C}_b-\{A,\ C\}$ est l'ensemble des points $Q$ tels que $\text{mes}(\widehat{(QA),(QC)})=\dfrac{\pi}{3}$,
$\mathscr{C}_c-\{B,\ A\}$ est l'ensemble des points $R$ tels que $\text{mes}(\widehat{(RB),(RA)})=\dfrac{\pi}{3}$.
(On pourra utiliser des triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle $ABC$ et dont un côté est $[CB]$, $[AC]$ ou $[BA]$).
Démontrer que $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ ont un point commun, noté $I$.



Retour page 1

2. Soit $P$ un point de $\mathscr{C}_a$ extérieur au triangle $ABC$. La droite $(PC)$ recoupe $\mathscr{C}_b$ en un point $Q$. Soit $R$ le point d'intersection des droites $(QA)$ et $(PB)$.
   Montrer que $R$ est un point de $\mathscr{C}_c$.
   Quelle est la nature du triangle $PQR$?
3. Á chaque triangle $PQR$ on associe :
$$\ell(QR) = IP + IQ + IR.$$
   a) Déterminer $P$ pour que $IP$ soit maximum. Soit $P_0$ ce point. Construire le triangle $P_0Q_0R_0$ obtenu à partir de $P_0$.
   b) Montrer que $\ell(PQR)$ est maximum pour $P_0Q_0R_0$.

La notation $(\widehat{\Delta,\ \Delta'})$ désigne l'angle du couple de droites $(\Delta,\ \Delta')$.
On note mes$(\widehat{\Delta,\ \Delta'})$ l'image de cet angle par la mesure choisie pour cet exercice, qui a pour ensemble $[0\,;\pi[$..

# XIV. La réunion, série E

Ex. 1872. ./1985/reunionE/exo-1/texte.tex

$ABCD$ désigne un rectangle d'un plan euclidien orienté.
On donne $AD = BC = a$ et $AB = CD = 2a$.L'angle $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
$O$ est le point d'intersection des diagonales du rectangle.
Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$, et $t$ la translation de vecteur $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

**1.** Dessiner le rectangle $ABCD$ et son image $A'B'C'D'$ par l'application $f = t \circ r$. (On prendra $a = 4$ cm.)
**2.** Expliquer pourquoi $f$ est une rotation. Déterminer son angle. Donner une construction de son centre $\Omega$.

`Remarque` : *ce point $\Omega$ est utilisé par les ébénistes lorsqu'ils construisent une table rectangulaire que l'on peut faire pivoter autour de $\Omega$ puis déplier pour en doubler la surface, la table restant centrée sur son rectangle d'assiette.*

## Problème 698 ./1985/reunionE/pb/texte

A- 1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y'' + y = 0. \tag{1}$$
2. Étant donné une fonction numérique de la variable réelle, $g$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on définit la fonction $f$ de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}^\star$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$
Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et de $x$.
3. On considère l'équation différentielle :
$$y'' = -\frac{1}{x^4}y. \tag{2}$$
Démontrer que la fonction $g$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ est solution de (2) si et seulement si la fonction $f$ définie par : $f(x) = xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$, est solution de (1).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
5. Soit $g$ une solution de (2) définie sur $]0\,;+\infty[$.
Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^4}g(x)$.
Calculer l'intégrale :
$$\mathscr{I} = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$



Retour page 1

B- On note $g_1$ et $g_2$ les fonctions numériques de la variable réelle définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\star}, \quad g_1(x) = x\cos\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{\star}, \quad g_2(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$

1. a) Déterminer la fonction dérivée de $g_1$, et étudier sa limite en $+\infty$.

   b) Étudier ls signe de $g_1''$ sur l'intervalle $\left[\frac{2}{\pi}\,;+\infty\right[$ ; en déduire les variations puis le signe de $g_1'$ sur $\left[\frac{2}{\pi}\,;+\infty\right[$. En conclure que $g_1$ est strictement croissante sur $\left[\frac{2}{\pi}\,;+\infty\right[$.

   c) En utilisant un développement limité d'ordre 2 en 0 pour la fonction cosinus, montrer qu'il existe une fonction $\epsilon$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\star}, \quad g_1(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to 0}\epsilon(X) = .$$

   En déduire que la courbe représentative de $g_1$ admet une asymptote, que l'on précisera, lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2. a) Déterminer la fonction dérivée de $g_2$, et étudier sa limite en $+\infty$/

   b) Montrer que $g_2$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\pi}\,;+\infty\right[$. (On pourra appliquer une méthode analogue à celle en B(1)b.)

   c) Étudier la limite de $g_2$ en $+\infty$.

   d) Tracer sur un même graphique, la représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de $g_1$ sur $\left[\frac{2}{\pi}\,;+\infty\right[$, et la courbe représentative $\mathscr{C}_2$ de $g_2$ sur $\left[\frac{1}{\pi}\,;+\infty\right[$. On précisera en particulier les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

3. On considère le point mobile $M_t$ dont les coordonnées à l'instant $t$, dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont données par :
   $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $g_1$ et $g_2$ étant les fonctions vues ci-dessus, et on étudie son mouvement pour $t \in \left[\frac{2}{\pi}\,;\frac{4}{\pi}\right]$.

   a) On désigne par $\vec{V}_t$ le vecteur vitesse et $\vec{\Gamma}_t$ le vecteur accélération à l'instant $t$. Comparer $\vec{\Gamma}_t$ et $\overrightarrow{OM}_t$. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_t.\vec{\Gamma}_t$. Qu'en déduit-on quant à la nature du mouvement ?

   b) Construire la trajectoire de $M$. Préciser les vecteurs $\vec{V}_t$ et $\vec{\Gamma}_t$ pour $t = \frac{2}{\pi}$ et pour $t = \frac{4}{\pi}$.

## XV. Tahiti, séries C & E

**Ex. 1873.** ./1985/tahitiCE/exo-1/texte.tex

On appelle E le plan complexe privé du point $A$ d'affixe i.

**1.** Démontrer que la relation :

$$zz' - \mathrm{i}(z + z') - 2 = 0$$

définit une application $f$ de E dans E qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe l'image $M' = f(M)$ d'affixe $z'$.

**2.** Vérifier que $f$ est involutive.
Déterminer les points de E invariants par $f$.

**3.** On appelle $B$ l'image par $f$ du point $O$.
Établir les égalités suivantes :

$$OM' = \frac{MB}{MA}, \quad OM = \frac{M'B}{M'A}.$$



Retour page 1

**4.** Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ de E tels que $\dfrac{MB}{MA} = \sqrt{2}$.
Quelle est la nature de $(\Gamma)$ ? Vérifier que $(\Gamma)$ passe par les points invariants de $f$ et par le point d'affixe $\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Soit $(\Gamma')$ l'image de $(\Gamma)$ par $f$ : établir $(\Gamma') = (\Gamma)$.

Ex. 1874. ./1985/tahitiCE/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère un triangle équilatéral tel qu'une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle $(\Gamma)$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$.
La médiatrice de $[BC]$ coupe $(\Gamma)$ en $A$ et $D$ ; on appelle $A'$ le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(AC)$.

a) Démontrer que $A$ est le symétrique de $A$ par rapport à $C$.

b) On désigne par $S_{BD}$, $S_{DC}$, $S_{CA}$, $S_{AB}$ les symétries orthogonales par rapport aux droites $(BD)$, $(DC)$, $(CA)$, $(AB)$ respectivement.
   a) Quelle est la nature des applications $S_{BD} \circ S_{DC}$ et $S_{CA} \circ S_{AB}$ ? On précisera les éléments caractéristiques.
   b) Soit $\Delta$ la parallèle à $(DC)$ menée de $A$ et $S_\Delta$ la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta$. Démontrer que$S_{BD} \circ S_{DC} = S_{DC} \circ S_{DA}$ et $S_{CA} \circ S_{AB} = S_{DA} \circ S_\Delta$.
   c) Retrouver le résultat du a en utilisant l'application
$$t = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$$
   que l'on caractérisera.

### Problème 699 ./1985/tahitiCE/pb/texte

A- On considère l'application $f_b$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $b$ réel donné par
$$f_b(x) = (x+b)\mathrm{e}^{-x}.$$
1. Étudier les variations de $b$ pour $b$ fixé.
2. 
3. 
4. 

B-

C- 1.
2. On considère la suite $(u_n)$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad u_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Démontrer que la suite $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

## XVI. Étranger groupe I, série C

Ex. 1875. ./1985/etrangergroupeIC/exo-1/texte.tex

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = 2x - x\ln x \quad \text{si } x > 0$$
$$f(0) = 0$$

**1.** $f$ est-elle continue en $0$ ?
$f$ est-elle dérivable en $0$ ?

**2.** Étudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on prendra un centimètre comme unité).

Ex. 1876. ./1985/etrangergroupeIC/exo-2/texte.tex

Une suite est définie par :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 5{,}5, \qquad u_{n+2} - u_{n+1} + 0{,}25u_n = 0.$$

**1.** Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**2.** Déterminer un rang $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $u_n < 10^{-6}$.

## Problème 700

./1985/etrangergroupeIC/pb/texte

On considère dans le plan affine euclidien orienté un triangle $ABC$. On désigne suivant une habitude ancienne par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures des angles géométriques du triangle.
$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont donc trois réels positifs tels que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$.
Le triangle $ABC$ est direct, c'est à dire que les angles orientés $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB})$ ont leurs mesures principales respectivement égales à $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
On se propose d'étudier l'existence d'un point $M$, *intérieur* strictement au triangle $ABC$, tel que les droites $(MA)$, $(MB)$, $(MC)$ possède la propriété suivante :
les angles orientés des couples de droites $(AB,\ AM,)$, $(BC,\ BM)$, $(CA,\ CM)$ ont la même mesure principale notée $\alpha$, $\alpha > 0$.

**Partie A**

**1.** Montrer que si $M$ existe, alors $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que le point $M$ est sur le cercle tangent à $(BC)$ en $B$ et passant par $A$. En déduire une construction de $M$.

**2.** Déduire des relations métriques (proportionnalité des côtés et des sinus) dans les triangles $ABM$, $BMC$, $CMA$, la relation :

$$\sin^3\alpha = \sin(\widehat{A}-\alpha)\sin(\widehat{B}-\alpha)\sin(\widehat{C}-\alpha).$$

**3.** Calculer $\alpha$ lorsque le triangle $ABC$ est équilatéral. Calculer $\cot\alpha$ (ou $\tan\alpha$) lorsque la triangle $ABC$ est isocèle et rectangle, et donner une valeur approchée de $\alpha$.

**Partie B**

Étant donné un réel $\alpha$, $\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$, on cherche à quelle condition on peut lui associer un triangle $ABC$ et un point $M$ correspondant.

**1.** Démontrer que si un triangle $ABC$ et un point $M$ conviennent, alors le triangle $A'B'C'$ et tout point $M'$ déduits de la figure $ABCM$ par une similitude directe conviennent aussi.

**2.** On reprend la relation du 2) et on pose :

$$a = \widehat{A}-\alpha, \quad b = \widehat{B}-\alpha, \quad c = \widehat{C}-\alpha \quad \text{avec } a+b+c = \pi - 3\alpha.$$

La relation du 2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\sin^3\alpha &= \sin a.\sin b.\sin c\\ &= \frac{1}{2}\sin c(\cos(3\alpha+c) - \cos(2b+c+3\alpha)).\end{aligned}$$

Si $\alpha$ et $c$ sont donnés, cette relation permet de calculer $b$ et $\widehat{B}$.

Lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, montrer que $b$ est donné par :

$$\sin(2b+c) = \sin c + \frac{1}{4\sin c}.$$

Déterminer les valeurs de $c$ pour lesquelles le second membre est inférieur ou égal à 1.

Montrer qu'il n'y a qu'un seul triangle admettant un angle $\alpha$ égal à $\dfrac{\pi}{6}$ et indiquer lequel (à une similitude près).

**3.**



Retour page 1

# Chapitre XXVIII

# 1986.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

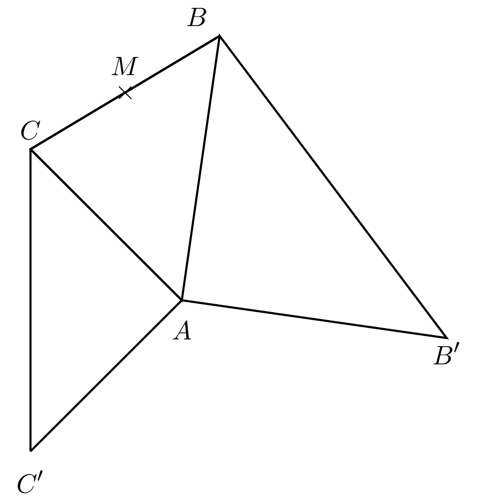
— groupe II : Amiens & Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

## I. Groupe I, série C

Ex. 1877. ———— *6 points* *./1986/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*




Le triangle $ABC$ est quelconque, $M$ est le milieu du segment $[BC]$.
Les triangles $BAB'$ et $CC'A$ sont rectangles et isocèles directs de sommet $A$.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites $(AM)$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que

$$B'C' = 2AM.$$

1. **Méthode géométrique**
   a) Soit $h$ l'homothétie de centre $B$ et de rapport 2. Déterminer les images des points $A$ et $M$ par $h$.
   Trouver une rotation $r$ telle que $r \circ h$ transforme $A$ en $B'$ et $M$ en $C'$.
   b) En déduire que les droites $(AM)$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AM$.
2. **Utilisation des nombres complexes** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine $A$ dans lesquels $B$ et $C$ ont pour affixes respectives $b$ et $c$.
   a) Calculer les affixes $m, b'$ et $c'$ des points $M, B'$ et $C'$.
   b) Retrouver alors les résultats de la question 1b.

**Ex. 1878.** ——— *4 points.* *./1986/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

On donne dans le plan deux points fixes $F$ et $A$. On considère les ellipses $E$ dont un foyer est $F$ et $A$ le sommet de l'axe focal le plus voisin de $F$.

**1.** a) Quel est l'ensemble des points $O$ centres des ellipses $E$ ?
   b) Soit $O$ un point de cet ensemble et soit $D$ la perpendiculaire en $O$ à la droite $(AF)$. Construire (au moyen du compas seulement) les sommets $B$ et $B'$ de l'ellipse $E$ appartenant à $D$.

**2.** a) Soit $B$ un sommet du petit axe d'une ellipse $E$ ; montrer que $B$ appartient à une parabole $P$ de foyer $F$ dont un déterminera la directrice $\Delta$.
   b) Déterminer la partie de $P$ qui est l'ensemble des points $B$.

## Problème 701

*./1986/aixmarseilleC/pb/texte*

I 1° Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Tracer sa courbe représentative $C$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axes $x'x$, $y'y$.

2° Pour tout $x$ réel on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de $F$.

b) Montrer que $F$ est impaire.

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Déduire de cette inégalité que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

3° $x$ étant un réel quelconque, on pose

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

a) Montrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de $G$ sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier l'affirmation suivante :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^\star \ : \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

c) Déduire de I(3)a) et I(3)b) que l'on peut affirmer :
pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ : $G(x) \leqslant \ln 2$.
(On écrira $G(x)$ à l'aide d'une seule intégrale).

d) Déduire de I(3)a) et I(3)c) que l'on peut affirmer l'existence d'un réel $L$, limite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $G(x)$.

e) Montrer que $G$ est une fonction impaire.

f) Déduire de I(3)d) et I(3)e) que $G(x)$ tend vers une limite quand $x$ tend vers $-\infty$. Exprimer cette limite en fonction de $L$.

II On considère la fonction $\varphi$ :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{cases}.$$

1° a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi$.

b) Calculer $\varphi'(x)$. Montrer alors que les fonctions $F$ et $\varphi$ sont égales.

c) Déduire de II(1)b) une nouvelle écriture de $G(x)$ (introduit au I3. ci-dessus) et la valeur du réel $L$ de la question I(3)d).

2° On s'intéresse à la courbe représentative $\Gamma$ de la fonction $F$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que, pour $x$ strictement positif, on peut écrire :

$$F(x) = \ln 2x + \ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right].$$

(On rappelle que, par II(1)b) ci-dessus, $F(x) = \varphi(x)$.)

b) Étudier les branches infinies de $\Gamma$. Reconnaître d'éventuelles asymptotes à $\Gamma$.

c) Étudier la position de $\Gamma$ par rapport à sa tangente à l'origine.
(On pourra étudier la variation de $h : x \longmapsto F(x) - x$).

d) Tracer $\Gamma$.

3° En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par $\Gamma$, l'axe $x'x$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

III Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = F(u_n). \end{cases}$

1° Montrer par récurrence que tous les termes de $(u_n)$ son strictement positifs.

2° Calculer, à $10^{-4}$ près, les termes $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ de la suite.

3° Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

Retour page 1

## II. Groupe I remplacement, série C

**Ex. 1879.** ———— *4 points* *./1986/aixmarseillecrem/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par $T$ l'application de P dans P qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}$.

**1.** Montrer que $T$ est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.
On notera $A$ le point invariant de $T$.
Donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}}\right)$, en supposant $M \neq A$.

**2.** a) Construire $M'$ pour un point $M$ donné.
b) Déterminer l'image $D'$ par $T$ de la droite $D$ d'équation $y = x$. Construire $D'$.

**3.** a) Montrer qu'il existe un point $B$ du plan, distinct de $A$, et un seul, tel que les affixes $z_0$ de $B$ et $z'_0$ de $B' = T(B)$ soient liées par le relation :

$$z_0 z'_0 = 1.$$

Mettre en place $B$ et $B'$.
b) Soit $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $O$. Montrer que les points $A,\ A,\ B$ et $B'$ sont cocycliques.

## III. Groupe I, série E

**Ex. 1880.** ———— *5 points.* *./1986/aixmarseilleE/exo-1/texte.tex*

**1.** Déterminer les réels $a,\ b,\ c$ tels que, pour tout réel $u$ différent de $\frac{1}{2}$,

$$\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}.$$

**2.** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

**3.** Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

**Ex. 1881.** ———— *5 points.* *./1986/aixmarseilleE/exo-2/texte.tex*

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation suivante :

$$z^4 - 8z^3 + (23-2\mathrm{i})z^2 + (-28+8\mathrm{i})z + 12 - 6\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

**1.** Montrer qu'elle admet deux solutions réelles. Déterminer ces solutions.

**2.** Montrer qu'elle admet deux autres solutions qui vérifient l'équation

$$z^2 + 4z + 4 - 2\mathrm{i} = 0.$$

Déterminer ces solutions.

**3.** Dessiner dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les images des quatre solutions de (E). Montrer que ce sont les sommets d'un parallélogramme.

Retour page 1

## Problème 702 *10 points.*

./1986/aixmarseilleE/pb/texte

Les parties II et III sont indépendantes.
Le plan $P$ est muni d'une repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $A$ le point de de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et $\Delta$ la droite d'équation $y = -1$.
Au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on fait correspondre, lorsqu'il existe, le point $M'$ barycentre de $(A,\ y+1)$ et $(M,\ -1)$.
$M$ se projette orthogonalement sur l'axe des abscisses en $H$ et sur $\Delta$ en $I$.

I On appelle $P^\star$ l'ensemble des points de $P$ d'ordonnée non nulle.

1. Expliquer pourquoi $M'$ n'existe que si $M$ appartient à $P^\star$.
   On appelle $f$ l'application ainsi définie sur $P^\star$, qui à tout point $M$ fait correspondre le point $M'$.
2. Montrer que l'ensemble des points invariants par $f$ est formé d'un point et d'une droite que vous préciserez.
   $f$ est-elle une application affine ?

**II** Le but de cette partie est de déterminer la construction géométrique du point $M'$ à partir de point $M$.
On considère la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation $y = m$ $(m \neq 0)$.

**1.** Pour $M$ appartenant à $\mathscr{D}_m$, déterminer en fonction de $m$ le rapport de l'homothétie de centre $A$ qui transforme $M$ en $M'$.
En déduire l'image par $f$ de la droite $\mathscr{D}_m$.
**2.** Soit $K\,(0\ ;\ m+1)$. Montrer que l'homothétie définie dans la transformation précédente transforme $K$ en $O$. En déduire que les droites $(OM')$ et $(AH)$ sont parallèles, puis que les points $O$, $I$ et $M'$ sont alignés.
**3.** Déduire des questions précédentes :
a) une construction géométrique de $M'$ lorsque $M$ n'est pas sur $(Oy)$.
b) Une construction géométrique de $M'$ lorsque $M$ est sur $(Oy)$.

**III** Le but de cette partie est d'étudier les transformées de certaines courbes par $f$.
**1.** Montrer que l'expression analytique de $f$ est :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{y} \\ y' = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

**2.** On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de rayon 1. On appelle $\mathscr{C}^\star$ l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée non nulle. Déterminer $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}^\star$ par $f$. Préciser sa nature et ses éléments géométriques (foyers, sommets, excentricité, directrices, asymptotes éventuelles).

**3.** Soit $\varphi$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}.$$

On rappelle que la notation $\ln$ désigne le logarithme népérien.
a) Étudier $\varphi$ et tracer sa courbe représentative $\Gamma$.
b) On note $\Gamma'$ l'image de $\Gamma$ par $f$.
Montrer que $\Gamma'$ est une partie, que vous préciserez, de la courbe représentative de la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Étudier cette fonction $g$. Tracer $\Gamma'$ dans le même repère que $\Gamma$.

Retour page 1

# IV. Groupe II, série C

**Ex. 1882.** ———— *4 points.* ./1986/amiensC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe, on considère les points : $A$ d'affixe $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, $B$ d'affixe $2\mathrm{i}$.

$M$ est le point d'affixe $z$, $z \neq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$$\text{Soit} \qquad z = \frac{z-2\mathrm{i}}{2z-1-\mathrm{i}}.$$

**1.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit réel.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit imaginaire pur.

**3.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que qu'un argument de $z'$ soit égal à $\dfrac{3\pi}{2}$.

**Ex. 1883.** ———— *4 points.* ./1986/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit un triangle isocèle $(OAB)$ ($OA = OB$) et un point $P$ variable du segment $[AB]$, $P \neq A$ et $P \neq B$.
La parallèle menée de $P$ à la droite $(OB)$ coupe la droite $(OA)$ en $A'$ et la parallèle menée de $P$ à la droite $(OA)$ coupe la droite $(OB)$ en $B'$.

**1.** Démontrer que $OA' = BB'$

**2.** En déduire qu'il existe une rotation $r$ telle que $r(0) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
Démontrer que $r(A) = O$ . Déterminer alors le centre $\Omega$ de cette rotation.

**3.** Démontrer que les quatre points $O$, $A'$, $B'$, $\Omega$ sont cocycliques.

## Problème 703 ./1986/amiensC/pb/texte

Le but du problème est :

— A. l'étude de la fonction $g$.

— B. La détermination d'un encadrement de $g$.

— C. L'évaluation d'une aire et de l'erreur commise.

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0\,;1]$ par

$$\begin{cases} g(t) = (1-\mathrm{e}^{-t})\ln t & \text{pour } 0 < t \leqslant 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien.

A. 1° Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = 1$.

2° Démontrer que $g$ est continue sur $[0\,;1]$. Étudier la dérivabilité de $g$ sur $[0\,;1]$ et démontrer pour tout réel $t$ de $]0\,;1]$ $g'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}(t\ln t + \mathrm{e}^{t} - 1)$.

3° Soit la fonction numérique $f$ définie sur $]0\,;1]$ par $f(t) = t\ln t + \mathrm{e}^{t} - 1$.
Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de $f'$. Montrer que $f'$ s'annule une seule fois sur $]0\,;1]$ un un point $t_0$ (on ne calculera pas $t_0$).
En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de $f$ sur $]0\,;1]$.
En déduire que $f$ ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;1]$ pour une valeur $t_1$ (on ne calculera pas $t_1$).

4° Terminer l'étude de la fonction $g$. Tracer sa courbe représentative

B. Soit $n$ un entier naturel. On définit qur $[0\,;1]$ la fonction numérique $\varphi_n$ par

$$\varphi_0(t) = 1\ ;\ \varphi_1(t) = 1-t\ ;\ \varphi_2(t) = 1-t+\frac{t^2}{2!}$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1-t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}.$$



Retour page 1

1° Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel $t$ de $[0;1]$ $\varphi_n'(t) = -varphi_{n-1}(t)$.

2° On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $t$ de $[0;1]$ : $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.

a) Soit $\phi$ et $\psi$ deux fonctions numériques définies sur $[0;1]$, dérivables sur $[0;1]$ telles que $\phi(0) = \psi(0)$. Démontrer que si pour tout réel $t$ de $[0;1]$ : $\phi'(t) \leqslant \psi'(t)$ alors pour tout réel $t$ de $[0;1]$, $\phi(t) \leqslant \psi(t)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $t$ de $[0;1]$ : $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.

3° Pour tout entier naturel $n$, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction $g$ sur $]0;1]$ faisant intervenir les fonctions $\varphi_{2n}$ et $\varphi_{2n+1}$.

C. On considère $\Delta$ l'ensemble des points $M$ du plan de coordonnées $(t\,;\,y)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $g(t) \leqslant y \leqslant 0$.
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de $\Delta$.

1° Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}$ et $\alpha$ un réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.
On pose
$$I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t.$$
Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 0 par valeurs positives.

2° En utilisant le B3, donner un encadrement de $\displaystyle\int_\alpha^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3° Donner en $\text{cm}^2$ une valeur approchée par excès de l'aire $\Delta$ à $10^{-2}$ près.

# V. Groupe III, série C

**Ex. 1884.** —————— *4 points.* *./1986/besanconC/exo-1/texte.tex*

**1.** Déterminer le solution de l'équation différentielle :
$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \text{vérifiant} \quad : \ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1.$$
Étudier les variations de cette fonction, et en tracer la courbe représentative (sur papier ordinaire) dans un repère orthonormé du plan (unité de longueur : 2 cm).

**2.** Pour $n$ entier naturel, on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x\mathrm{e}^{-2^n x}$.
Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(2x)$.
On désigne par $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ (dans le même repère). Par quelle transformation simple passe-t-on de $C_n$ à $C_{n+1}$ ?

**3.** Calculer : $A_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose plus généralement : $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Comparer $A_n$ et $A_{n+1}$.

Quelle est la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?



Retour page 1

**Ex. 1885.** ——— *4 points.* *./1986/besanconC/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ un triangle $ABC$ non aplati. $B'$ désigne le milieu de $[AC]$, $C'$ celui de $[AB]$ et $D$ le barycentre du système $\{(A,3);(B,2)\}$.
Soit I le barycentre du système $\{(A,2)(B,2)(A,1)(C,1)\}$.

1. Montrer que I est le barycentre du système $\{(B',1)(C',2)\}$ et également du système $\{(D,5)(C,1)\}$.
   En déduire que $I$ est le point d'intersection des droites $(B'C')$ et $(CD)$.
2. La droite $(AI)$ coupe le droite $(BC)$ en $E$. Déterminer la position de $E$ sur $(BC)$. (On pourra utiliser le fait que I est le barycentre de $\{(B',1)(C',2)\}$ )
3. $B$ et $C$ restent fixes. Le point $A$ se déplace dans le plan $\mathscr{P}$, le segment $[AE]$ conservant une longueur constante. Déterminer les lieux géométriques des points $I$ et $D$. (On utilisera des homothéties. )

## PROBLÈME 704 *12 points.*

*./1986/besanconC/pb/texte*

I. **Partie préliminaire.** Factoriser dans $\mathbb{R}$, le polynôme $2x^2-\sqrt{2}x-1$, et étudier, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, le signe de l'expression :

$$f(\sigma)=2\cos^2-\sqrt{2}\cos\sigma-1$$

on introduira dans cette étude l'unique réel $\sigma_0\in]0\,;\pi[$ tel que : $\cos\sigma_0=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$.

(Pour la suite du problème, on considèrera que $\sigma_0$ radians correspondent approximativement à 116 degrés).

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité de longueur est le centimètre ; on considère le point d'affixe -4 et le cercle C de centre $A$ et de rayon $4\sqrt{2}$.

**Objet du problème.** A tout réel $\sigma$ on associe le point $P(\sigma)\in C$ tel que $\sigma$ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath}\,;\overrightarrow{AP(\sigma)}}\right)$. Soit $T(\sigma)$ la tangente à $C$ au point $P(\sigma)$ ; on appelle $M(\sigma)$ le projeté orthogonal de $O$ sur $T(\sigma)$.

On se propose d'étudier le lieu $L$ des points $M(\sigma)$ lorsque $\sigma$ décrit $\mathbb{R}$.

1⋆ a) Représenter graphiquement sur papier millimétré, avec le plus grand soin, les points $P(\sigma)$ et $M(\sigma)$ obtenus pour

$$\sigma\in\{0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \sigma_0\}.$$

On disposera ainsi des premiers éléments d'une figure destinée, sous le nom de « figure 1«; à être complétée aux questions II(2)c, II(2)d et II3.

b) Démontrer que la droite $(OA)$ est un axe de symétrie de **L**.

c) $\sigma$ étant quelconque, on note $\vec{u}(\sigma)$ le vecteur unitaire tel que :
$\left(\widehat{\vec{\imath}\,;\overrightarrow{u(\sigma)}}\right)=\sigma$, et $H(\sigma)$ le projeté orthogonal de $O$ sur la droite $(AP(\sigma))$.
Représenter $O$, $A$, $C$, $P(\sigma)$, $M(\sigma)$, $\vec{u}(\sigma)$, $H(\sigma)$ sur une nouvelle figure (figure 2) devant être complétée à la question II(4)b.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP(\sigma)}$ et $\overrightarrow{AH(\sigma)}$ au moyen du vecteur $\vec{u}(\sigma)$ ; en déduire que les coordonnées $(x(\sigma,\ y(\sigma))$ du point $M(\sigma)$ sont données par :

$$\begin{cases}x(\sigma)=4(\sqrt{2}-\cos\sigma)\cos\sigma\\ y(\sigma)=4(\sqrt{2}-\cos\sigma)\sin\sigma.\end{cases}$$

d) Démontrer que l'affixe $m(\sigma)$ du point $M(\sigma)$ est donné par :

$$m(\sigma)=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma}-2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma}-2\quad(\mathrm{i}\in\mathbb{C},\ \mathrm{i}^2=-1).$$

e) De même, démontrer que l'affixe $h(\sigma)$ du point $H(\sigma)$ est donnée par :

$$h(\sigma)=-2+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma}.$$

2⋆ **Construction de L :**

a) EXpliquer pourquoi on peut, dans un premier temps, se limiter au cas où :

$$\sigma \in [0\,;\pi]\,.$$

b) Etudier les variations, sur $[0\,;\pi]$ des fonctions $\sigma \longmapsto x(\sigma)$ et $\sigma \longmapsto y(\sigma)$.
(On établira en particulier que : $y'(\sigma) = -4f(\sigma)$, avec les notations de la partie I.)

c) Représenter sur la figure 1 les tangentes à **L** aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M(\sigma_0)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (On rappelle que la tangente à **L** au point $M(\sigma)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(\sigma),\ y'(\sigma))$, noté $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(\sigma)$, si ce vecteur est non nul.)

d) Achever le tracé de **L**, en se conformant aux résultats précédents.

3⋆ **Construction de la tangente en un point quelconque de L.**

Démontrer que l'affixe du vecteur $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(\sigma)$ s'obtient en multipliant par i l'affixe du vecteur $\overrightarrow{H(\sigma)M(\sigma)}$. Interpréter géométriquement, et en déduire une construction pratique de la tangente à **L** en n'importe quel point; illustrer ce résultat (sur la figure 1) dans le cas particulier où :

$$\sigma = \frac{3\pi}{4}.$$

4⋆ a) Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, calculer l'affixe $m(\sigma+\pi)$ du point $M(\sigma+\pi)$, et démontrer que l'affixe du milieu $\mathscr{K}(\sigma)$ du segment $[M(\sigma)M(\sigma+\pi)]$ est donnée par :

$$l(\sigma) = -2\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma}\right).$$

b) Démontrer que le lieu du point $\mathscr{K}(\sigma)$, lorsque $\sigma$ décrit $\mathbb{R}$, est le cercle de diamètre $[OA]$. Illustrer ce résultat, sur la figure 2.

c) Démontrer que $H(\sigma)$ est le point de $\Gamma$ diamétralement opposé à $\mathscr{K}(\sigma)$.

# VI. Groupe III, série E

**Ex. 1886.** ./1986/groupeIIIe/exo-1/texte.tex

On désigne par $n$ un entier relatif et par $x$ un nombre réel.
On suppose $n \neq -1$ et $x \geqslant 1$.

1. a). Calculer l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x t^n(\ln t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b). En déduire le calcul de $J_n(x) = \displaystyle\int_1^x t^n(\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.

2. a). Calculer $I_n(\mathrm{e}) - J_n(\mathrm{e})$.

   b). Déterminer la limite de $\dfrac{I_n(\mathrm{e}) - J_n(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^{n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 1887.** ./1986/groupeIIIe/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère $n$ points distincts $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ ; pour tout $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $(x_i\ ;\ y_i)$ les coordonnées du point $A_i$.
Soit $\Delta_m$ la droite passant par $O$, d'équation :

$$y = mx, \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

**1.** Pour tout $i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, calculer la distance $d_i$ du point $A_i$ à la droite $\Delta_m$.

**2.** On pose $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$, $b = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $c = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^2$.

Exprimer $S(m) = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_i^2$ en fonction de $m$, $a$, $b$, $c$.

**3.** On suppose $b \neq 0$. Montrer que $S$ est une fonction de $m$ admettant un maximum et un minimum. Vérifier que les droites $\Delta_m$ correspondant au maximum et au minimum de $S$ sont orthogonales.

## Problème 705

./1986/groupeIIIe/pb/texte

Soit $P$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A- 1. On prend pour point $M_0$ l'origine du repère ; soit alors $M_1$ le point du plan $P$ tel que $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{\imath}$.
On fixe alors un réel $r > 0$ et un nombre réel $\theta$ dans $\mathbb{R} - \{k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$.
Soit $M_2$ le point tel que

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| \\ \text{et } \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } (\overrightarrow{M_0M_1}, \ \overrightarrow{M_1M_2}). \end{cases}$$

Calculer l'affixe $v_0$ du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe $v_1$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points $M_0, \ M_1, \ M_2$ ayant été définis ci-dessus, pour tout $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$, on définit le point $M_{n+1}$ à partir des points $M_{n-1}$ et $M_n$, par

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = r \left\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\right\| \\ \text{et } \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \ \overrightarrow{M_nM_{n+1}}). \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite de points $M_0, \ M_1, \ M_2, \ \ldots, \ M_n, \ \ldots$ et la figure obtenue en traçant les segments $M_0M_1, \ M_1M_2, \ \ldots, \ M_nM_{n+1}, \ \ldots$ est appelée « *jolygone* ».
On note $v_n$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} v_{n-1}$.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 0$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n, \ r$ et $\theta$.

c) Dans cette question, on suppose $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
Calculer $v_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 3$ et placer les points $M_0, \ M_1, \ M_2, \ M_3, \ M_4$, en prenant 8 cm pour unité graphique.

B- Dans toute la suite du problème, on suppose $0 < r < 1$, et, pour tout $n \geqslant 1$, on note $z_n$ l'affixe de $z_n$.

1. Calculer $z_0, \ z_1$ et $z_2$.
2. Pour tout $n \geqslant 0$,exprimer $v_n$ en fonction de $z_n$ et $z_{n+1}$ ; en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
3. On rappelle que pour tout nombre complexe $z = \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, $z_n$ en fonction de $n, \ r$ et $\theta$.

4. a) Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \dfrac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

b) On note $\Omega$ le point du plan $P$ d'affixe $\omega = \dfrac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
Interpréter géométriquement le résultat de B(4)a ci-dessus.

5. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $z'_n$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a) Calculer $z'_n$ en fonction de $n, \ r$ et $\theta$.

b) Établir qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $z'_n = a z'_{n-1}$.

c) En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe $f$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$ ; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d) Dans cette question, on suppose que $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
Calculer dans ce cas les coordonnées du point $\Omega$ et placer ce point sur la figure précédemment tracée.
Indiquer une construction géométrique simple de $M_n$ connaissant $\Omega, \ M_{n-1}$ et placer les points $M_5, \ M_6, \ M_7$ et $M_8$ sur la figure.

# VII. Groupe IV, série C

**Ex. 1888.** 5 points. ./1986/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Le plan $P$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{e_1},\ \vec{e}_2)$.

On désigne par $F$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(z)=\dfrac{z^3}{2+|z|^3}$

et par $\varphi$ l'application de $P$ dans $P$ qui associe à tout point $M$ d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $F(z)$.

**1.** Soit $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ où le couple $(r,\ \alpha)$ appartient à $\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}$.
Trouver un couple $(r',\ \alpha')$ appartenant à $\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}$ tel que $F(z)=r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}$.

**2.** On note $f$ l'application de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x^3}{2+x^3}.$$

Démontrer que $f$ applique bijectivement $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;1[$.

**3.** On considère la cercle $\Gamma$ de centre $O$ et de rayon $1$ et $T$ le point d'affixe $1-\mathrm{i}$.
Trouver l'image par $\varphi$ du cercle $\Gamma$ et de la demi-droite $[OT)$.
Quelle est l'image par $\varphi$ de $P$ ?

**Ex. 1889.** 5 points. ./1986/bordeauxC/exo-2/texte.tex

On considère un carré $(A,\ B,\ C,\ D)$ situé dans un plan $P$ de l'espace. $O$ désigne le centre de ce carré, $H$ un point distinct de $O$ de la droite perpendiculaire en $O$ au plan $P$, et $H'$ son symétrique par rapport à $O$.
On note $E$ l'ensemble $\{A,\ B,\ D\}$ et $F$ l'ensemble $\{B,\ C,\ D\}$.
L'objet de cet exercice est de décrire l'ensemble $W$ des isométries qui appliquent $E$ sur $F$.

**1.** Démontrer que l'ensemble $W$ n'est pas vide.

**2.** Soit $f$ un élément de $W$. Prouver les égalités :

$$\begin{aligned} f(A)&=C\\ f(\{B,\ D\})&=\{B,\ D\}\\ f(O)&=O\\ f(H)&=H \quad \text{ou} \quad f(H)=H'. \end{aligned}$$

**3.** Déterminer et reconnaître tous les éléments de $W$.

## Problème 706 — 10 points. ./1986/bordeauxC/pb/texte

Les parties A et B sont indépendantes.
Dans tout le problème $\ln x$ désigne le logarithme népérien de $x$.
Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

A. On désigne par $f$ l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\ln x.$$

1° Étudier la limite de $f$ en $0$ et $+\infty$.
Dresser le tableau de variation de $f$.
Dessiner la courbe $\mathscr{F}$ représentant $f$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2° Soit $n$ un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel $i$ compris entre 1 et $n$, on note $A_i$ le point de $\mathscr{F}$ d'abscisse $10^i$.
Soit $G_n$ le barycentre des $n$ points $A_1,\ \dots,\ A_n$.
Calculer en fonction de $n$ les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $G_n$.

3° a) Vérifier que l'application $\ln$ admet pour primitive sur $]0\,;+\infty[$ l'application qui à $x$ associe $x\ln x-x$.
b) Calculer l'aire en cm$^2$ de la partie du plan comprise entre les droites d'équations :

$$x=1,\quad x=\mathrm{e},\quad y=0 \text{ et la courbe } \mathscr{F}.$$



Retour page 1

B. On désigne par $P'$ l'ensemble des points de $P$ d'abscisse non nulle et par $\theta$ l'application de $P'$ dans $P'$ qui associe à tout point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ vérifiant

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ y' = -y. \end{cases}$$

1° Vérifier que $\theta$ est bijective et égale à sa bijection réciproque.

2° On désigne par $E$ le sous-ensemble de $P'$ d'équation $xy = -9$.
Trouver l'ensemble $\theta(E)$.
Est-ce que $\theta$ conserve l'alignement ?

3° Pour tout nombre réel $a$, on note $g_a$ l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_a(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4a\ln x$ et $G_a$ sa courbe représentative dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Montrer l'égalité $\theta(G_a) = G_a$.

# VIII. Groupe IV, série E

**Ex. 1890.** ——— *5 points.* *./1986/bordeauxE/exo-1/texte.tex*

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes, on considère l'équation

$$z^3 - (6+4\mathrm{i})z^2 + (8+14\mathrm{i})z - 12\mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution réelle.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
   On note $z_1$ la solution réelle, $z_2$ et $z_3$ les deux autres solutions avec $|z_2| < |z_3|$.
   On considère les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$, $z_3$.
   Déterminer la similitude directe de centre $M_2$ qui transforme $M_1$ en $M_3$.
   Donner ses éléments caractéristiques.

- Pour traiter 2, on vérifiera que $1+\mathrm{i}$ est solution de (E).

**Ex. 1891.** ——— *4 points.* *./1986/bordeauxE/exo-2/texte.tex*

On considère dans l'espace quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ tels que :

$$AC = AB = BC = BD = AD = a.$$

($a$ réel positif donné).

1. a) $I$ étant le milieu du segment $[A,\ B]$ montrer que les droites $(IC)$ et $(ID)$ sont perpendiculaires à la droite $(AB)$.
   b) Montrer que $IC = ID$, exprimer cette longueur en fonction de $a$.
2. Soit $S_1$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $(ABC)$ et $S_2$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $(ABD)$.
   a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$ ?
   b) Déterminer en fonction de $a$ la longueur $x = CD$ pour que la rotation $R$ soit une rotation d'angle plat.

# IX. Amérique du Nord, série C

Ex. 1892. ./1986/ameriquenordC/exo-1/texte.tex

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ où $z$ désigne un nombre complexe et $\lambda$ un nombre réel.

**1.** Montrer que si $P(z) = 0$ admet une racine complexe $z_0$, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution.
En déduire que l'équation $P(z)$ admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.

**2.** Déterminer $\lambda$ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine réelle de module 2. Résoudre l'équation pour la valeur de $\lambda$ trouvée.

**3.** Déterminer $\lambda$ pour que l'équation $P(z) = 0$ admette une racine complexe de module 2. Résoudre l'équation pour les valeurs de $\lambda$ trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

Ex. 1893. ./1986/ameriquenordC/exo-2/texte.tex

Dans le plan, on donne deux points distincts $A$ et $B$.
Soit $(D)$ la perpendiculaire à $(AB)$ en $B$. On considère tous les cercles $(C)$ du plan caractérisés par la propriété suivante : $T$ et $T'$ étant deux points de contact des tangentes menées en $A$ au cercle $(C)$, le triangle $ATT'$ est équilatéral.

**1.** En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle $(C)$ aux points $A$ et $B$, déterminer et préciser la nature des l'ensemble des centres des cercles $(C)$ qui passent par $B$.

**2.** Déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles $(C)$ tangents à la droite $(D)$.

N.B.– Pour faire la figure on prendra $AB = 6$ cm.

## Problème 707 *10 points.* ./1986/ameriquenordC/pb/texte

A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{E}$$

1° a) Quelles sont les solutions de (E) .

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $(C)$ admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe $(C')$ représentative de $y = \mathrm{e}^{3x}$ ? On dit que $(C)$ et $(C')$ sont tangentes.

2° Représenter dans un même repère orthonormal les courbes $(C)$ et $(C')$ dont on précisera les positions relatives.

3° $\lambda$ étant un réel strictement positif, soit $h_\lambda$ les fonctions telles que

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2\mathrm{e}^x + 2\lambda\mathrm{e}^{2x}.$$

a) Montrer que $h_\lambda$ est une solution de (E).

b) Soit $(C_\lambda)$ la courbe représentative de $h_\lambda$. Après avoir calculé en fonction de $\lambda$ les coordonnées du point commun à $(C_\lambda)$ et $(C')$ montrer que les deux courbes sont tangentes en ce point.

c) Préciser les positions relatives de $(C_\lambda)$ et $(C')$.

B) Soit (**??**) l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2. \tag{E'}$$

1° Trouver un polynôme $P$ du second degré solution de l'équation (**??**).

2° On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$. Montrer que $f$ est solution de (**??**) si, et seulement si, $g$ est solution de l'équation (E).
En déduire les fonctions $g$ solutions de (**??**).

3° Déterminer la solution de (**??**) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.



Retour page 1

# X. Amérique du Sud, série C

Ex. 1894. ./1986/ameriquesudC/exo-1/texte.tex

Dans le plan rapporté à une repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respective sont les nombres complexes $a,\ b,\ c$.

1. $M$ étant le point du plan d'affixe $z$, exprimer, en fonction de $z$ :
   a. l'affixe $z'$ du point $M'$ image de $M$ par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{3}$ (en radians) ;
   b. l'affixe $z''$ du point $M''$ image de $M$ par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radians).
2. Que peu-on dire du triangle ABC si les nombres complexes $a,\ b,\ c$ vérifient
   a. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ ;
   b. $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ ;
3. Établir que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca.$$

Ex. 1895. ./1986/ameriquesudC/exo-2/texte.tex

dans le plan, on considère le parallélogramme $KLMN$ et le point de concours $O$ de ses diagonales $(MN)$ et $(KL)$.
Soit $A$ un point de la droite $(KN)$, distinct de $K$ et de $N$ ;
soit $B$ le point d'intersection de la droite $(MA)$ et de la droite $(LN)$.
$P$ et $Q$ sont respectivement les projetés, parallèlement à la droite $(MN)$, de $A$ sur la droite $(KM)$ et de $B$ sur la droite $(LM)$.

**1.** Faire une figure.

**2.** a) On note $h$ l'homothétie de centre $K$ et de rapport $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KN}}$.
Démontrer que $h(M) = P$.
En déduire que le milieu $I$ du segment $[AP]$ appartient la droite $(KL)$.
b) Indiquer l'homothétie qui permettrait de démontrer que le milieu $J$ du segment $[BQ]$ appartient à la droite $(KL)$.

**3.** Justifier que les points $N,\ P,\ Q$ sont les images respectives des points $M,\ A,\ B$ par une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.
En déduire que les points $N,\ P,\ Q$ sont alignés.

# XI. Espagne, série C

Ex. 1896. *4 points.* ./1986/espagneC/exo-1/texte.tex

Soit $\alpha$ un nombre réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation d'inconnue complexe $z$ :

$$(1+\mathrm{i}z)^3(1-\mathrm{i}\tan\alpha) = (1-\mathrm{i}z)^3(1+\mathrm{i}\tan\alpha). \qquad \text{(E)}$$

**1.** Soit $z$ une solution de (E).
a) Montrer que $|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z|$.
b) En déduire que $z$ est réel.

**2.** a) Exprimer $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
b) Soit $z$ un nombre réel ; on pose $z = \tan\varphi$ où $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
Écrire l'équation portant sur $\varphi$ traduisant (E) et la résoudre.
c) Déterminer les solutions $z_1,\ z_2,\ z_3$ de (E).

**Ex. 1897.** ——— *5 points.* *./1986/espagneC/exo-2/texte.tex*

Soit $A$ et $A'$ deux points distincts du plan, $\Delta$ et $\Delta'$ les droites perpendiculaires à la droite $(AA')$, respectivement en $A$ et $A'$, et $O$ le milieu de $[AA']$.
On pose $OA = r$.
Pour tout point $F$ du segment $[AA']$, distinct de $A$ et de $A'$, on note $\mathscr{P}$ la parabole de foyer $F$ et de sommet $A$, $\mathscr{P}'$ la parabole de foyer $F$ et de sommet $A'$, $D$ la directrice de $\mathscr{P}$ et $D'$ la directrice de $\mathscr{P}'$.

**1.** Dans cette question $F$ est fixé et on suppose donné un point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

a) Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.

b) Soit $H$ et $H'$ les projections orthogonales de $M$ sur $D$ et $D'$.
Prouver que le cercle $\mathscr{C}$ de centre $M$ passant par $F$ est tangent à $D$ et $D'$ aux points $H$ et $H'$ et que $MF = 2r$.
Prouver que droites $(FH)$ et $(FH')$ sont orthogonales; en déduire que les tangentes à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ au point $M$ sont orthogonales.

c) Prouver que $I$ milieu de $[FM]$ appartient à la médiatrice de $[AA']$ et que $OF^2 + OI^2 = r^2$. (On pourra utiliser l'homothétie $h$ de centre $F$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.)

**2.** On suppose maintenant que $F$ parcourt le segment $[AA']$.

a) Prouver que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent en deux points $M_1$ et $M_2$ symétriques par rapport à la droite $(AA')$ et indiquer comment on peut construire ces points.

b) Á l'aide de 1c) déterminer le lieu géométrique des milieux $I_1$ et $I_2$ de $[FM_1]$ et $[FM_2]$.

c) En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique $E$ des points $M_1$ et $M_2$ et placer $E$ sur la figure.

N.B.– On admettra le théorème suivant :

**Théorème. (admis).**
Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer $F$ et de directrice $(D)$; soit $M$ un point de $\mathscr{P}$ et $H$ sa projection orthogonale sur $\mathscr{D}$; la tangente en $M$ à $\mathscr{P}$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{HMF}$.

## PROBLÈME 708 *11 points.* *./1986/espagneC/pb/texte*

Pour tout entier naturel non nul, soit $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan $P$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm).

**1.** a) Calculer la dérivée de $f_n$ et préciser la valeur de $f_n'(0)$ lorsque $n = 1$ puis lorsque $n \geqslant 2$. Dresser le tableau de variation de $f_n$ pour $n = 1$, $n$ pair, $n$ impair supérieur à 1.

b) Montrer que, pour tout $n$ et pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$,

$$f_n(x) \leqslant f_n(n) = n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

c) Représenter sur une même figure $(C_1)$ et $(C_2)$.

**2.** Pour tout réel $X \geqslant 0$, on pose

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Déterminer des nombres réels $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ tels que la fonction : $G_n \;:\; x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$ soit une primitive de la fonction $f_n$ sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire l'expression de $F_n(X)$ en fonction de $X$ et de $n$.

c) L'entier $n$ étant donné, montrer que $F_n(X)$ admet une limite $I_n$ lorsque $X$ tend vers $+\infty$ et que $I_n = n!$.

**3.** On se propose d'encadrer $I_n$ par une méthode directe, indépendante des résultats du 2.

a) Á l'aide du 1b), montrer que

$$\int_0^{2n} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2n\; n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

b) Montrer que, si $x \geqslant 2n$,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \leqslant n^n \mathrm{e}^{-n}, \quad \text{et que } f_n(x) \leqslant (2n)^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

En déduire que, si $X \geqslant 2n$,

$$\int_{2n}^{X} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2(2n)^n \mathrm{e}^{-2n}.$$

c) Á l'aide de 3a et 3b, majorer $F_n(X)$ lorsque $X \geqslant 2n$.
En déduire que

$$I_n \leqslant 2n^n \mathrm{e}^{-n}\left[n + \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n\right].$$

d) Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n \mathrm{e}^{-n-1} \leqslant \int_n^{n+1} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n.$$

**4.** Déduire de 3c et 3d un encadrement de $u_n = \dfrac{\ln I_n - n\ln n}{n}$ et déterminer la limite de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## XII. Groupe I bis, série C

Ex. 1898. ./1986/groupeIbisC/exo-1/texte.tex

Soit dans un plan, unn triangle $A_1A_2A_3$.
Á tout point $M$ du plan, distinct des sommets $A_1,\ A_2,\ A_3$, du triangle, on associe :

a) les points $M_1,\ M_2,\ M_3$, symétriques de $M$ dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)},\ s_{(A_3A_1)},\ s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs $(A_2A_3),\ (A_3A_1),\ (A_1A_2)$.

b) Les droites $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ issues des sommets $A_1,\ A_2,\ A_3$ et respectivement perpendiculaires aux droites $(M_2M_3),\ (M_3M_1),\ (M_1M_2)$.
Les symétries orthogonales d'axes $\Delta_i$, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, sont notées $s_{\Delta_i}$.
On désigne par $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}$ des vecteurs directeurs respectifs de $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$.

**1.** Démontrer que $\Delta_1$ est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

**2.** Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.

a) Quelle est la nature de $s$ ?

b) Déterminer $s(A_1)$ et $s(M)$. Caractériser $s$.

c) Démontrer que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_3};\overrightarrow{A_1M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{A_1A_2}}\right)\ [\pi] \qquad (1)$$

**3.** Établir d'une manière analogue

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1};\overrightarrow{A_2M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{A_2A_3}}\right)\ [\pi] \qquad (2)$$

et

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A_3A_2};\overrightarrow{A_3M}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u_3};\overrightarrow{A_3A_1}}\right)\ [\pi] \qquad (3)$$

**4.** Montrer que l'ensemble (C) des points $M$ du plan, distincts des sommets $A_1,\ A_2,\ A_3$, tels que les points $M_1,\ M_2,\ M_3$ soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1\ A_2\ A_3$.

**5.** On suppose, dans cette question, que le point $M$ n'appartient pas à (C).

a) Démontrer que les droites $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ sont concourantes en un point $P$ que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.
Dans la suite du problème ce point $P$ appelé l'associé du point $M$.

b) Quel est l'associé d'un point $M$ appartenant aux côtés du triangle $A_1, A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle ?

c) On suppose que le point $M$ n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$.
Démontrer, en utilisant les relations (1), (2) et (3) que si $M$ a pour associé $P$ alors le point $P$ a pour associé le point $M$.

# XIII. Japon, série C

**Ex. 1899.** ./1986/japonC/exo-1/texte.tex

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{-\frac{4}{3}}^{-1} \frac{2x+1}{(3x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de $I_2$, on pourra effectuer un changement de variable affine.

**Ex. 1900.** ./1986/japonC/exo-2/texte.tex

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = 1 + x - \ln\left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right|.$$

**1.** Montrer qu'on a pour tout $x$ :

$$f(x) = 1 - \ln\left|1 - \mathrm{e}^{1-x}\right|$$
$$f(x) = x - \ln\left|\mathrm{e}^{x-1} - 1\right|$$

**2.** Dresser la tableau de variation de $f$.

**3.** Montrer que $f$ définit une bijection $g$ de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera.
Définir $g^{-1}$ et vérifier que $g^{-1} = g$.

## Problème 709 ./1986/japonC/pb/texte

*Les diverses question sont, dans une large mesure, indépendantes.*
*Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.*

A On se propose de tracer la courbe C ensemble des points du plan dont les coordonnées son définies en fonction de la variable réelle $t$ par :

$$M(t)\ \begin{cases} x(t) = 4\cos t \sin^2 t \\ y(t) = 4\sin t \cos^2 t \end{cases}$$

$1^\circ$ Préciser la transformation ponctuelle transformant, quel que soit le réel $t$, le point $M(t)$ en :

a) Le point $M(t+2\pi)$.

b) Le point $M(-t)$.

c) Le point $M(\pi - t)$.

d) Le point $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

On appelle $C_1$ la partie de $C$ correspondant aux valeurs de $t$ comprises entre $0$ et $\frac{\pi}{4}$. Expliquer commet on peut déduire la courbe $C$ de la courbe $C_1$.



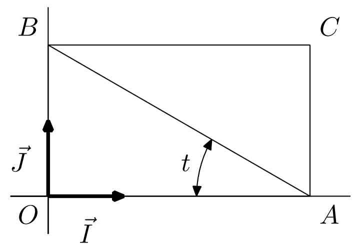
Retour page 1

2° Étudier les variations de $x$ et $y$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, (on remarquera que $y'$ s'annule pour une valeur $t_0$, que l'on ne cherchera pas à calculer, mais dont on donnera une valeur approchée).

3° Tracer la courbe $C$.
Préciser les tangentes à $C$ aux points de paramètres $t=0\,;\ t=\frac{\pi}{4}$.

4° $z(t)$ étant l'affixe du point $M(t)$ de la courbe $C_1$, calculer en fonction de $t$, le module et un argument de $z(t)$.

B Soient $A$ et $B$ deux points du plan situés respectivement sur les demi-droites $(O,\ \vec{i}\,)$, et $(O,\ \vec{j}\,)$ et tels que $d(A,\ B)=4$.
On appelle $C$ le point du plan tel que le quadrilatère $OACB$ soit un rectangle.




$t$ désigne une mesure de l'angle en $A$ du triangle $OAB$, $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1° Soient $P$ un point quelconque de la droite $(AB)$ et $Q$ le barycentre des points $C$ et $P$ affectés des coefficients $-1$ et 2.
Quel est l'ensemble $\Delta$ des points $Q$ lorsque $P$ décrit la droite $(AB)$ ?

2° La perpendiculaire en $Q$ à $\Delta$ coupe la perpendiculaire en $P$ à $(CP)$ en un point $S$.

a) Montrer que l'ensemble $\Gamma$ des points $S$ lorsque $P$ décrit la droite $(AB)$ est une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

b) Tracer $\Gamma$ avec soin dans le cas où $t=\frac{\pi}{6}$ ; montrer que les droites $(O,\ \vec{i}\,)$ et $(O,\ \vec{j}\,)$ sont tangentes à $\Gamma$.

C Dans cette partie les points $A$ et $B$ varient sur les demi-droites $(O,\ \vec{i}\,)$ et $(O,\ \vec{j}\,)$, la longueur du segment $AB$ restant constante égale à 4.

1° Quel est alors l'ensemble des points $C$ ?

2° Soit $M$ le projeté orthogonal de $O$ sur la droite $(AB)$. Calculer les coordonnées de $M$ en fonction de $t$. En déduire que l'ensemble des points $M$ est une partie de la courbe $C$ tracée en A.

## XIV. Nouvelle Calédonie, série C

**Ex. 1901.** ——— *4 points.* *./1986/nllecaledonieC/exo-1/texte.tex*

**1.** a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3-1=0$.

b) En déduire un polynôme du second degré de la forme $z^2+bz+c$, ($b$ et $c$ sont des nombres réels),ayant pour zéros les racines cubique de l'unité non réelles.

**2.** Étant donné un nombre complexe $z$, on pose $\varphi(z)=z^2+z+1$.
Soit $P$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'unité de longueur étant 3 cm.

a) Déterminer l'ensemble $E_1$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\varphi(z)$ soit réel.

b) Démontrer que l'ensemble $E_2$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur est une conique dont on précisera une équation réduite.

c) Représenter sur une même figure les ensemble $E_1$ et $E_2$ ; déterminer les affixes des points de $E_1\cap E_2$.

**Ex. 1902.** ——— *5 points.* *./1986/nllecaledonieC/exo-2/texte.tex*

On considère dans l'espace $E$, un carré $ABCD$, de centre $O$ et de côté $a$, contenu dans un plan $P$. Soient $S$ un point de $E$ n'appartenant pas au plan $P$ et $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ les milieux respectifs des segments $SA$, $SB$, $SC$, $SD$.

**1.** Démontrer que :

(i) les points $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ appartient à un même plan $P'$ parallèle à au plan $P$ et $P' \neq P$ ;

(ii) le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré ; on note $O'$ son centre ;

(iii) les points $S$, $O$, $O'$ sont alignés.

Dessiner un croquis de la figure ainsi obtenue.

**2.** Déterminer l'ensemble $\Omega$ des points $M$ du plan $P$ tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2.$$

Déterminer l'ensemble décrit par le milieu $M'$ du segment $SM$ quand le point $M$ décrit l'ensemble $\Omega$.

## Problème 710 *11 points.* *./1986/nllecaledonieC/pb/texte*

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

I. *L'objet de cette partie est l'étude de la fonction $F$ et de sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'unité graphique est 4 cm.*

1° Étudier la parité de $F$.

2° Montrer que $F$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée ; en déduire la sens de variation de $F$ sur $[0\,;+\infty[$.

3° Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}}$.

En déduire la position de C par rapport à la tangente au point d'abscisse nulle.

4° a) Prouver que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{2x} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $F$ est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

b) On admettra que les résultats acquis aux I2 et I(4)a permettent de conclure que $F$ possède une limite $\lambda$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) Tracer l'allure de la courbe C.

II. On se propose maintenant d'étudier la fonction numérique $G$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

1° Exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction $F$.

2° Démontrer que $G$ est dérivable et calculer sa dérivée $G'$.

3° Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^4+x^2} - 1.$$

a) Étudier les variations de $\varphi$.



Retour page 1

b) Démontrer l'existence de deux réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 < \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \; ; \; 1 < \alpha_2 < 2 \\ \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = 0. \end{cases}$$

c) En déduire, suivant les valeurs de $x$, le signe de $\varphi(x)$.

d) Exprimer $G'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ ; en déduire le tableau de variations de $G$.

4° *i.* Trouver deux solutions distinctes et positives, $x_1$ et $x_2$, de l'équation $G(x) = 0$.

*ii.* Soit $\Gamma$ la courbe représentative de $G$. On désigne par $M_1$ (resp. $M_2$) le point de $\Gamma$ d'abscisse $x_1$ (resp. $x_2$) ; écrire une équation de la tangente à $\Gamma$ en $M_1$ (resp. $M_2$).

*iii.* Tracer $\Gamma$ ; (rappel : l'unité graphique est 4 cm).

# XV. Nouvelle Calédonie, série E

## Problème 711

./1986/nllecaledonieE/pb/texte

Pour tout entier naturel $n$, on note $f_n$ l'application de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

pour $x$ appartenant à $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f_n(0) = 2n+2$.

Le but de ce problème est d'établir la convergence de la suite $u$ de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Partie A** *Préliminaires*

**1.** Montrer que $f_n$ est continue dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ ; en déduire que la suite $u$ est bien définie dans $\mathbb{N}$.

**2.** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. (On rappelle que $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.)

**3.** Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.

**Partie B** *Le but de cette partie est d'établir la convergence de $u$*

**1.** Montrer que :

$$u_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

**2.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x$, $k$ étant un entier naturel non nul.

En déduire que :

$$u_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**3.** Établir

$$\left| u_n - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{2}{2n+3}.$$

**4.** En déduire la convergence de la suite $u$.



Retour page 1

**Partie C** *Le but de cette partie est de calculer* $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit $F$ la primitive nulle en zéro de $\varphi$ ; soit $G$ l'application de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(v) = F(\tan v).$$

**1.** Montrer que $G$ est dérivable et admet une fonction dérivée $G'$ très simple que l'on précisera.

**2.** En déduire $G$.

**3.** En déduire la valeur de $J$. Quelle est la limite de la suite $u$ ?

# XVI. Paris, série C

**Ex. 1903.** ./1986/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; on prend comme unité graphique 1 cm. On considère l'équation

$$z^3 - (6+3\mathrm{i})z^2 + (9+12\mathrm{i})z - 9(2+3\mathrm{i}) = 0. \qquad \text{(E)}$$

**1.** a) Démontrer que E admet une solution imaginaire pure unique $z_1$ que l'on calculera.

b) Déterminer les autres solutions de E, notées $z_2$ et $z_3$.

**2.** Soit $M_1$, $M_2$, $M_3$ les points ayant respectivement pour affixes $z_1$, $z_2$, $z_3$.

a) Prouver que le triangle $M_1M_2M3$ est équilatéral.

b) Déterminer les coordonnées du milieu $I$ de $[M_2M_3]$ et de l'isobarycentre des points $M_1$, $M_2$, $M_3$.

c) Placer les points $M_1$, $I$ et $G$ sur cette figure et indiquer une construction géométrique de $M_2$ et $M_3$.

**Ex. 1904.** ./1986/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté P, on considère un triangle $ABC$ équilatéral direct, c'est à dire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par $r_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par $r_2$ la rotation de centre $B$ et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point $M$ du plan, on pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

**1.** a) Soit $D$ le symétrique de $C$ par rapport à la droite $(AB)$. Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.

b) Montrer que $r$ est la symétrie centrale par rapport au milieu $\Omega$ de $[BD]$.

**2.** a) Montrer que l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan tels que $M$, $N$ et $M'$ soient alignés est un cercle passant par les points $A$ et $\Omega$ (on pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})$).

b) Prouver que $\Gamma$ admet $[AD]$ pour diamètre et que le milieu $I$ de $[AB]$ appartient à $\Gamma$. Construire le cercle $\Gamma$.

## Problème 712

./1986/parisC/pb/texte

A- L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

et d'expliciter sa fonction réciproque $g$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.



Retour page 1

b) Déterminer la solution $\varphi$ de cette équation telle que :

$$\varphi(0)=0 \qquad \text{et} \varphi'(0)=\frac{1}{2}.$$

Comparer $\varphi$ et $f$.

2) a) Étudier les variations de $f$, donner son tableau de variations et tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en prenant 1 cm pour unité.

b) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que $2<\alpha<3$.
Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

3) a) Prouver que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque $g$ de $f$ sur la même figure que C.

b) Expliciter $g$ en résolvant l'équation $f(x)=y$ où $y$ est un nombre réel.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(y)=\int_0^y \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de $t\longmapsto \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$.)

B- 1) a) Montrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Déterminer le sens de variation de $G$.

c) Montrer que $G$ est impaire.

2) a) Prouver que pour tout nombre réel $t\geqslant 0$,

$$\frac{1}{1+2t}\leqslant \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

b) En déduire par un minoration de $G$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ que :

$$\lim_{y\to+\infty} G(y)=+\infty.$$

3) a) Montrer que $G$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $F$ la fonction réciproque de $G$. Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre réel $x$ :

$$F'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4(F(x))^2}.$$

c) En déduire que $F$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F''-F=0$.
Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.

d) Prouver que $F=f$ et que $G=g$.

e) Contrôler ce dernier résultat grâce à un calcul direct de la dérivée de $g$.

4) On se propose d'étudier le comportement asymptotique de $G$ au voisinage de $+\infty$, en comparant $\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ à $\frac{1}{t}$.
Plus précisément, pour tout nombre réel $t\geqslant 1$, on pose :

$$h(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

et pour tout nombre réel $y\geqslant 1$, on pose :

$$H(y)=\int_1^y h(t)\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{8t^3}.$$

b) En déduire que $H(y)$ admet une limite finie (qu'on ne demande pas d'expliciter) lorsque $y$ tend vers $+\infty$.

c) Prouver que $G(y) - \ln y$ admet un limite finie $\ell$ lorsque $y$ tend vers $+\infty$.

d) Calculer $\ell$ grâce à la relation $G = g$.

# XVII. Paris, série E

**Ex. 1905.** ——— *5 points.* *./1986/parisE/exo-1/texte.tex*

Dans l'espace, on considère trois points non alignés $A$, $B$, $C$ et un point $O$.
On désigne par $G$ l'isobarycentre des points $A$, $B$, $C$. Soit $A'$, $B'$, $C'$ les points définis par

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

**1.** Montrer que les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ ont le même milieu $I$ et calculer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$.

**2.** Représenter à l'aide d'une épure les triangles $ABC$ et $A'B'C'$, ainsi que les points $G$ et $I$ lorsque, l'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, (unité graphique 2 cm), les points $A$, $B$, $C$ ont pour coordonnées respectives $(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$.

**3.** On se propose de retrouver les résultats de la question (1) en utilisant des représentations convenables.

a) Soit $A_1$, $B_1$, $C_1$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrer qu'il existe une homothétie $f$ de centre $G$ et une seule qui transforme $A$ en $A_1$, $B$ en $B_1$, $C$ en $C_1$ ; préciser le rapport de $f$.

b) Monter qu'il existe une homothétie $g$ de centre $O$ et une seule transformant $A_1$ en $A'$, $B_1$ en $B'$, $C_1$ en $C'$ ; préciser le rapport de $g$.

c) Déterminer la nature de $g \circ f$ ; conclure.

**Ex. 1906.** ——— *6 points.* *./1986/parisE/exo-2/texte.tex*

L'objectif est d'étudier la fonction $f$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{t - \ln(1+t)}{t^2} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ f(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On rappelle qu'au voisinage de $t = 0$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\epsilon(t),$$

où $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$.

**1.** a) Déterminer les limites des $f$ en $+\infty$ et en $-1$.

b) Montrer que $f$ est continue et dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

**2.** a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout élément $t$ de l'un de ces intervalles,

$$f'(t) = \frac{g(t)}{t^3} \quad \text{où} \quad g(t) = \frac{t^2}{1+t} - 2t + 2\ln(1+t).$$

b) Étudier le signe de $g(t)$. (On pourra pour cela étudier la monotonie de $g$).

c) En déduire les variations de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$.

**3.** Dresser le tableau de variations de $f$ et construire sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 5 cm).

**4.** Soit $x$ un élément de $]0\,;1[$.

Retour page 1

a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

# XVIII. Paris, série D

Ex. 1907. ./1986/parisD/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$.
Pour tout nombre réel strictement positif $\alpha$, on pose :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

**1.** Montrer que $f$ est une fonction à valeurs positives. Quel est le signe de $I_\alpha$ ?

**2.** a) Déterminer des nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout nombre réel $x$,

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = a + \frac{b}{1+\mathrm{e}^x}$$

En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

b) Calculer $f + f'$, où $f'$ est la fonction dérivée de $f$.

c) Calculer $I(\alpha)$.

Ex. 1908. ./1986/parisD/exo-2/texte.tex

Il est bien connu que plus des plantes sont serrées moins elles ont de chance de grandir et de grossir. Aussi est-on amené à éclaircir les populations végétales pour permettre à chaque plante d'atteindre la taille maximale propre à son espèce.

Des chercheurs ont vérifié sur différentes espèces, des mousses aux arbres forestiers, que la masse moyenne par plante en fin de croissance $W$ est liée à la densité $d$ de la plantation par :

$$(L) \qquad W = Cd^a$$

où $a$ est une constante voisine de $-1,5$ et où $C$ est un nombre caractéristique de l'espèce (loi valable tant que $d$ varie dans certaines limites propres à l'espèce).

**1.** Dans cette question, on suppose que la loi (L) est satisfaite.
Dans une plantation de $N$ jeunes pousses, de densité $d_1$ on procède à un éclaircissage, ramenant la densité à $d_2 = kd_1$, où $k < 1$. On désigne par $W_1$ et $W_2$ les masses moyennes par plante en fin de croissance correspondant respectivement aux densité $d_1$ et $d_2$. De même, on notera $M_2$ la masse totale des plantes de la plantation en fin de croissance et $M_1$ la masse totale que l'on aurait obtenue si l'on n'avait pas procédé à l'éclaircissage.

a) Calculer $\dfrac{W_2}{W_1}$ et $\dfrac{M_2}{M_1}$ en fonction du taux d'éclaircissage $k$.

b) En adoptant la valeur $a = -1,5$, donner une valeur approchée de $\dfrac{M_2}{M_1}$ à la précision $10^{-1}$ lorsque l'on éclaircit une plantation en enlevant 9 plantes sur 10.

**2.** On se propose de vérifier la loi $(L)$, pour une espèce donnée, à partir de la série statistique double ci-dessous fournissant, pour cette espèce, les valeurs correspondantes $W_j$ de $W$ (exprimées en kilogrammes) et $d_j$ de $d$ (exprimées en nombre de plants par m$^2$) :

| $d$ | 2 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $W$ | 17,680 | 9,625 | 4,470 | 1,580 |

a) En supposant la loi $(L)$ satisfaite, exprimer $Y = \ln W$ en fonction de $X = \ln d$.

b) Recopier le tableau en ajoutant deux lignes supplémentaires, une pour les valeurs $X_i$ de $X = \ln d$ et une pour les valeurs $Y_i$ de $Y = \ln W$, valeurs données à la précision $10^{-3}$.
Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique double $(X,\ Y)$ (unité graphique : 5 cm).

c) Donner une équation de la droite de régression de $Y$ en $X$ ; les détails des calculs doivent figurer sur la copie. Tracer cette droite sur le même graphique que celui utilisé pour représenter le nuage de points associé à la série $(X,\ Y)$. Les résultats obtenus sont-ils compatibles avec la loi $(L)$ ? Si oui, donner les valeurs obtenues pour les constantes $C$ et $a$, relatives à cette espèce, à la précision $10^{-2}$.

## Problème 713

./1986/parisD/pb/texte

A- Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$ si $x \in ]0\ ;1[$
$f(0) = f(1) = 0.$

On note $C$ la courbe représentative dans un plan $P$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 10 cm).

1. Soit $g$ la fonction numérique définie sur ]0 ; 1[ par $g(x) = \ln(1-x) - \ln x$.
   a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x$.
   b) Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de $x$.
2. Montrer que la courbe $C$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ comme axe de symétrie.
3. a) Montrer que $f$ est dérivable sur ]0 ; 1[ et calculer sa dérivée.
   b) Montrer que $f$ est continue sur [0 ; 1]. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0 ; interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c) Dresser le tableau de variation de $f$ et construire la courbe C.
4. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs tels que $a + b = 1$.
   a) Utiliser les résultats de A3 pour montrer que :
   $$a\ \ln\frac{1}{a} + b\ \ln\frac{1}{b} \leqslant \ln 2 \qquad (*)$$
   b) Montrer que l'inégalité (*) est une égalité si et seulement si $a = b = \dfrac{1}{2}$

B- On se propose de généraliser l'inégalité (*) obtenue ci-dessus en A4.
Soit $p$ un nombre entier strictement supérieur à 1 et soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 1$.

On pose : $H = a_1 \ln\dfrac{1}{a_1} + a_2 \ln\dfrac{1}{a_2} + \cdots + a_p \ln\dfrac{1}{a_p}.$

1. a) Montrer que pour tout nombre réel $t > 0$ on a :

$$\ln t \leqslant t - 1. \qquad (**)$$

Pour cela, on pourra étudier les variations de la fonction $h$ définie par

$$h(t) = t - 1 - \ln t.$$

b) Montrer que, si $t$ est différent de 1, l'inégalité (**) est stricte.

c) En déduire que pour tout entier $j$ tel que $1 \leqslant j \leqslant p$ on a :

$$a_j \ln \frac{1}{pa_j} \leqslant \frac{1}{p} - a_j,$$

avec égalité si et seulement si $a_j = \dfrac{1}{p}$.

2. a) Montrer que :

$$H - \ln p = a_1 \ln \frac{1}{pa_1} + a_2 \ln \frac{1}{pa_2} + \cdots + a_p \ln \frac{1}{pa_p}$$

b) En déduire que :

$$H \leqslant \ln p. \qquad (***)$$

c) Déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pour que l'inégalité (***) soit une égalité.

## XIX. Polynésie remplacement, série E

Ex. 1909. 5 points. ./1986/polynesieerem/exo-1/texte.tex

Soit $k$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (k+1)^x + (k+2)^x + \cdots + (k+k)^x.$$

On considère un nombre réel $\lambda$ tel que $\lambda > 1$.
On note $\mathscr{E}_k$ l'équation $f_k(x) = k\lambda$, où l'inconnue est $x$.

**1.** a) Pour $k$ fixé, étudier les variations de la fonction $f_k$.

b) Démontrer qu'il existe un réel $x_k$ et un seul solution de $\mathscr{E}_k$.

**2.** a) Démontrer que : $k(k+1)^{x_k} \leqslant k\lambda \leqslant k(2k)^{x_k}$.

b) En déduire un encadrement de $x_k$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{k \to x_k} \ln k = \ln \lambda$.

## XX. Reims, série E

Ex. 1910. 5 points. ./1986/reimsE/exo-1/texte.tex

On désigne par $n$ un nombre entier relatif et par $x$ un nombre réel. On suppose que $n \neq -1$ et $x \geqslant 1$.

**1.** a) Calculer l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x t^n (\ln t)\, \mathrm{d}t$.

(On pourra effectuer une intégration par parties).

b) En déduire le calcul de $J_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n (\ln t)^2\, \mathrm{d}t$.

**2.** a) Calculer $I_n(\mathrm{e}) - J_n(\mathrm{e})$.

b) Déterminer la limite de $\dfrac{I_n(\mathrm{e}) - J_n(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^{n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

**Ex. 1911.** ———— *4 points.* *./1986/reimsE/exo-2/texte.tex*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les $n$ points $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ ; pour tout $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $(x_i,\ y_i)$ les coordonnées du point $A_i$.
Soit $\Delta_m$ la droite passant par $O$ d'équation

$$y = mx, \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

**1.** Pour tout $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, calculer la distance $d_i$ du point $A_i$ à la droite $\Delta_m$.

**2.** On pose $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Exprimer $S(m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, en fonction de $m,\ a,\ b,\ c$.

**3.** On suppose $b \neq 0$. Montrer que $S$ est une fonction de $m$ admettant un maximum et un minimum.
Vérifier que les droites $\Delta_m$ correspondant au maximum et au minimum de $S$ sont orthogonales.

## Problème 714 *11 points.* *./1986/reimsE/pb/texte*

Soit $P$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A) 1° On prend pour point $M_0$ l'origine $O$ du repère ; soit alors $M_1$ le point du plan $P$ tel que $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{\imath}$.
On fixe alors un réel $r > 0$ et un nombre réel $\theta$ dans $\mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $M_2$ le point du plan $P$ tel que :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r\,\|M_0M_1\| \\ \text{et } \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } \left(\overrightarrow{M_0M_1},\ \overrightarrow{M_1M_2}\right). \end{cases}$$

Calculer l'affixe $v_0$ du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe $v_1$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2° Les points $M_0,\ M_1,\ M_2$ ayant ainsi été définis ci-dessus, pour tout $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$, on définit le point $M_{n+1}$ à partir de des points $M_{n-1}$ et $M_n$, par

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = r\,\|M_{n-1}M_n\| \\ \text{et } \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } \left(\overrightarrow{M_{n-1}M_n},\ \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right). \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite de points

$$M_0,\ M_1,\ \dots,\ M_n,\ \dots$$

et la figure ainsi obtenue en traçant les segments $M_0M_1,\ M_1M_2,\ \dots,\ M_nM_{n+1},\ \dots$ est appelée « joly-gone » .
On note $v_n$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} v_{n-1}$.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 0$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n,\ r$ et $\theta$.

c) Dans cette question, on suppose que $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Calculer $v_n$ pour $n0 \leqslant n \leqslant 3$ et placer les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, en prenant 8 cm pour unité graphique.

B) Dans toute la suite du problème on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on note $z_n$ l'affixe du point $M_n$.

1° Calculer $z_0,\ z_1$ et $z_2$.

2° Pour tout $n \geqslant 0$, exprimer $v_n$ en fonction de $z_n$ et $z_{n+1}$ ; en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

3° On rappelle que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Calculer, pour tout $n \geqslant 0$, $z_n$ en fonction de $n,\ r$ et $\theta$.



Retour page 1

4° a) Démontrer que le module du nombre complexe $z_n - \dfrac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

b) On note $\Omega$ le point du plan $P$ d'affixe $\omega = \dfrac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Interpréter géométriquement le résultat de la question B(4)a) ci-dessus.

5° Pour tout $n \geqslant 0$, on note $z'_n$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a) Calculer $z'_n$ en fonction de $n$, $r$ et $\theta$.

b) Établir qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $z'_n = a z'_{n-1}$.

c) En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe $f$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(M_{n-1}) = M_n$ ; préciser le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d) Dans cette question, on suppose que $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ; calculer dans ce cas les coordonnées du point $\Omega$ et placer ce point sur la figure précédemment tracée.

Indiquer une construction géométrique simple de $M_n$ connaissant $\Omega$ et $M_{n-1}$ et placer les points $M_5$, $M_6$, $M_7$ et $M_8$ sur la figure.

# XXI. Sujet National remplacement, série C

**Ex. 1912.** 5 points. ./1986/nationalCrem/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans le corps des nombres complexes les équations d'inconnue $z$ :

a) $z^4 = 1$.

b) $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^4 = 1$.

**2.** Soit $n$ un entier naturel non nul, et $A$ un nombre complexe.

Soit (E) l'équation d'inconnue complexe $z$ : $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n = A$.

On appelle $P$ et $Q$ les points du plan complexe d'affixes respectives i et $-$i, et $M$ le point d'affixe $z$.

a) Montrer que si $z$ vérifie l'équation (E), alors $\dfrac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.

b) Prouver que si l'équation (E) a au moins une racine réelle alors $|A| = 1$.

c) En conclure que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors toutes ses racines sont réelles.

**Ex. 1913.** 4 points. ./1986/nationalCrem/exo-2/texte.tex

Dans le plan affine $\mathscr{P}$, on considère le cercle (C) de centre $O$ et de rayon $R$ non nul, et un point $\Omega$ tel que $O\Omega > R$.

**1.** Démontrer qu'à tout point $M$ de (C) distinct de deux points $A$ et $B$ que l'on précisera, on peut associer un point $M'$ tel que $M'$ soit le centre d'un cercle passant par $\Omega$ et tangent à (C) au point $M$.

Indiquer une construction du point $M'$.

**2.** a) Démontrer que pour tout point $M$ de (C) distinct des points $A$ et $B$, la relation : $\left|M'\Omega - M'O\right| = R$ est vérifiée.

On admettra que l'ensemble des points $M'$ tels que $\left|M'\Omega - M'O\right| = R$ est l'hyperbole (H) de foyers $O$ et $\Omega$, et dont la distance des sommets est $R$.

b) Déterminer alors l'ensemble $\mathscr{E}$ décrit par $M'$ lorsque $M$ décrit le cercle (C) privé des points $A$ et $B$.

c) Préciser les axes de symétries et les sommets de $\mathscr{E}$.



Retour page 1

## PROBLÈME 715 *11 points.*

./1986/nationalCrem/pb/texte

A- On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x+1}\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté a? un repère orthonormal.

1. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.
   b) Étudier le sens de variation de $f$.
   c) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une droite asymptote et préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport a? cette asymptote.
   d) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré (en prenant 4 cm pour une unité de longueur).
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n=\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Donner une interprétation géométrique de $u_n$. Montrer que, pour tout entiuer naturel $n$,

$$f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n).$$

   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu ?elle admet pour limite zéro.

B- On considère la fonction numérique $\Phi$ de la variable réelle $x$ définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{t+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(on ne cherchera pas à calculer $\Phi(x)$).
On désigne par $(\Gamma)$ la courbe représentative de $\Phi$ dans le plan rapporté a? un repère orthonormal.

1. Expliciter la fonction dérivée de $\Phi$.Donner le sens de variation de $\Phi$.
2. a) Démontrer que si $t\in[-1\,;+\infty[$, alors

$$\sqrt{t+1}\leqslant\frac{t+3}{2\sqrt{2}}.$$

   En déduire que : pour tout $x$ élément de l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ :

$$\Phi(x)\leqslant\int_{-1}^{x}\frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   b) Á l'aide d'une intégration par parties,calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{x}\frac{1}{2\sqrt{2}}(t+3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que : pour tout x élément de l'intervalle $[-1\,;+\infty[$

$$\Phi(x)\leqslant\frac{3\mathrm{e}}{2\sqrt{2}},$$

   et que $\Phi(x)$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à déterminer cette limite).
   c) Donner l'allure de la courbe $(\Gamma)$ et préciser sa tangente au point d'abscisse $-1$.

c.

Retour page 1

# Chapitre XXIX

# 1987.

On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier & Nice ;

— groupe II : Amiens, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

## Sommaire



## I. Aix Marseille, série C & E

Ex. 1914. *4 points.* *./1987/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

**1.** La lettre $x$ désigne un nombre réel, linéariser $\sin^6 x$.

**2.** On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^x \sin^5 t \cos t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Démontrer que $I = \dfrac{15\pi - 44}{1152}$.

Ex. 1915. *4 points.* *./1987/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

On donne dans l'espace, quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ non coplanaires.
$I$ est le milieu de $[AB]$, $J$ le milieu de $[CD]$, $G$ est le milieu de $[IJ]$.

**1.** Peut-on avoir $I = F$ ? existe-t-il des points de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \ ? \quad \text{(Justifier les réponses.)}$$

**2.** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{P}_1)$ des points $M$ de l'espace tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|.$$

**3.** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{P}_2)$ des points $M$ de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

**4.** Peur-on avoir $(\mathscr{P}_1) = (\mathscr{P}_2)$ ?

## 🏛Problème 716 *12 points.* *./1987/aixmarseilleC/pb/texte*

Dans un plan $(P)$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe $(\Gamma_m)$ d'équation :

$$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1),$$

où $m$ désigne un nombre réel donné.

**1.** Vérifier que le point $A(3 ; 0)$ appartient à la courbe $(\Gamma_m)$, quel que soit le réel $m$.

**2.** Dans cette question, on suppose $m$ non nul.

a) Montrer que la courbe $(\Gamma_m)$ est une conique à centre. Montrer que le centre $I_m$ de $(\Gamma_m)$ a pour couple de coordonnées $\left(\dfrac{(m-1)}{2m} ; 0\right)$.

Préciser suivant la valeur de $m$, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.

b) Construire les courbes $(\Gamma_{-1})$ et $(\Gamma_1)$ (figure 1).

**3.** Soit $(a ; b)$ un couple de nombres complexes. $\mathscr{T}$ est la transformation du plan $(P)$, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par $z' = az + b$.

a) Déterminer $a$ et $b$ pour que le point $A(3 ; 0)$ ait pour image par $\mathscr{T}$ le point $A'(3 ; -3)$ et que le point $B(-3 ; 0)$ ait pour image par $\mathscr{T}$ le point $B'(-3 ; 3)$.

Préciser alors la nature de $\mathscr{T}$ et ses éléments caractéristiques.

b) Justifier que $(\Gamma'_{-1})$ transformée de $(\Gamma_{-1})$ par $\mathscr{T}$, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Exprimer les coordonnées $x'$ et $y'$ de $M'$ en fonction des coordonnées $x$ et $y$ du point $M$, puis $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et $y'$.

d) En déduire une équation de $(\Gamma'_1)$ transformée de $(\Gamma_1)$ par $\mathscr{T}$. Construire la courbe $(\Gamma'_1)$ (sur la figure 1).

**4.** a) On se donne la droite $(\mathscr{D}$ d'équation $y = 5x - 21$. $(\mathscr{D}')$ est l'ensemble transformé de $(\mathscr{D})$ par $\mathscr{T}$.

Déterminer une équation de $(\mathscr{D}')$.

b) $U$ et $V$ ($U$ d'ordonnée positive) sont les points communs à $(\Gamma_1)$ et $(\mathscr{D})$, et $U'$ et $V'$ leurs images par $\mathscr{T}$.

Déterminer les couples de coordonnées des points $U$, $V$, $U'$ et $V'$.

c) Soit $S$ la surface limitée par la courbe $(\Gamma_1)$ et le segment $[UV]$. Hachurer sur la figure 1 la surface $S$ et son image $S'$.

Calculer l'aire de $S'$ donnée par :

$$\mathscr{A}(S') = \int_{\frac{3}{2}}^{9} \left[-\frac{9}{x} - \left(\frac{2}{3}x - 7\right)\right] \mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire de $S$.

**5.** Dans cette question, on étudie le cas où $m = 0$.

a) Quelle est la nature de la courbe $(\Gamma_0)$ ?

Faire une deuxième figure, représentant la courbe $(\Gamma_0)$ (figure 2).

b) On appelle $G$ le barycentre de la famille $\{(A, 2), (B, 1), (M, 1)\}$.

$M$ décrit $(\Gamma_0)$. On appelle $(\gamma_0)$ la courbe alors décrite par $G$.

Démontrer que $(\gamma_0)$ est l'ensemble transformé de $(\Gamma_0)$ par une homothétie de centre $I_{-1}(1 ; 0)$, dont on précisera le rapport.

On appelle $M_1$ et $M_2$ les points de $(\Gamma_0)$ d'abscisses respectives 4 et 7, dont les ordonnées sont positives.

Construire les barycentres $G_1$ et $G_2$ correspondants.

c) On appelle $(\Gamma'_0)$ l'image par $\mathscr{T}$ de $(\Gamma_0)$.

On appelle $(\gamma'_0)$ l'image par $\mathscr{T}$ de $(\gamma_0)$.

Démontrer que $(\gamma'_0)$ est l'image de $(\Gamma'_0)$ par une homothétie que l'on précisera.

Construire les images par $\mathscr{T}$ des points $M_1$, $M_2$, $G_1$, $G_2$, et les courbes $(\Gamma'_0)$ et $(\gamma'_0)$.

N.B.– **L'usage des instruments de calcul est interdit pour cette épreuve.**

# II. Amiens & Rouen, série C

**Ex. 1916.** *4 points.* ./1987/amiensC/exo-1/texte.tex

**1.** Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$u = \frac{\sqrt{3}+\text{i}}{4}.$$

**2.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout nombre complexe $z$ associe :

$$f(z) = uz + (1+\text{i})(1-u).$$

Montrer que $f$ est bijective, et déterminer le complexe $z$ tel que $f(w) = w$.

**3.** Soit $I$, $M$ et $M'$ les points du plan complexe ayant pour affixe $w$, $z$ et $f(z)$ respectivement. On suppose $M$ différent de $I$.

Donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}}\right)$, et calculer la distance $IM'$ en fonction de la distance $IM$.

On note $F$ l'application qui à $M$ associe $M'$.

Préciser la nature du $F$ et ses éléments caractéristiques.

**4.** Soit $A_0$ le point d'affixe $z_0 = -1+2\text{i}$. On définit, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = f(z_n)$.

On note $A_n$ le point d'affixe $z_n$ dans le plan complexe.

Calculer, en fonction de $n$, la distance $IA_n$.

Quelle est la limite de cette distance quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Ex. 1917.** *4 points.* ./1987/amiensC/exo-2/texte.tex

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, $F$ un point dont la distance à $\mathscr{D}$ est égale à 2,25 (unité : 1 cm) et $\Delta$ la droite passant par $F$ et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

**1.** Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = 0{,}8$, $H$ étant la projection orthogonale de $M$ sur $\mathscr{D}$.

Donner la nature de $(E)$. Préciser les directrices, les foyers et les sommets $A$ et $A'$ situés sur $\mathscr{D}$. Représenter $(E)$ sur un dessin.

**2.** Déterminer l'équation cartésienne de $(E)$ dans un repère orthonormal formé par $\Delta$ et la médiatrice de $[AA']$.

## Problème 717 *12 points.* ./1987/amiensC/pb/texte

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines fonctions du type $x \longmapsto x^{\alpha}\text{e}^{-x}$, $\alpha$ étant un réel strictement positif.

A) On désigne par $g_1$ et $g_2$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = x\text{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

1° Étudier les fonctions $g_1$ et $g_2$ : on donnera le sens de variation et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
Dessiner leurs courbes représentatives $(C_1)$ et $(C_2)$ dans le même repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 2 cm) ; on prendra soin de préciser leur position.

2° Déterminer une équation de la tangente à $(C_1)$ au point $M$ d'abscisse $x$ ; cette tangente coupe l'axe des ordonnées $y'y$ en un point $T$.
Déterminer, en fonction de $x$, l'ordonnée de $T$.

3° Soit $t$ un réel donné, et $T$ le point de $y'y$ tel que $\overline{OT} = t$. Utiliser la courbe $(C_2)$ pour étudier, suivant la valeur de $t$, le nombre de tangentes à $(C_1)$ passant par $T$.
En déduire une construction géométrique de la tangente en $M$ à $(C_1)$.

B) $n$ étant un entier naturel non nul, $f_n$ est la fonction de $[0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = x^n\text{e}^{-x}$, de courbe représentative $(C_n)$ dans un repère orthogonal.

On désigne par $S_n$ l'aire de la portion de plan délimitée par $(C_n)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = 1$.

Retour page 1

1° En remarquant que, pour $x$ positif, on a $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, montrer que $S_n < \dfrac{1}{n}$.
En déduire la limite de $S_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

2° Établir une relation entre $S_{n+1}$ et $S_n$.
En déduire que $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1}$ est une valeur approchée de $S_n$ à $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ près.

C) On note $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^{\frac{1}{3}}.\mathrm{e}^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On appelle $u$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.

On admet qu'il existe $m$ strictement positif tel que $|f'(x)| < m < 1$ pour tout $x$ de $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$..

1° a) Montrer que l'image par $f$ de tout élément de $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$ est aussi dans $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

b) On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que $h$ s'annule en un point $\lambda$ unique de $\left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$.

c) Rappeler l'inégalités des accroissements finis, et monter que l'on peut l'appliquer à deux points $a$ et $b$ quelconques de $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

2° a) Montrer par récurrence que, pour tout netier naturel $n$, $u_n$ appartient à $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.

b) Montrer que, si $u$ converge, sa limite est $\lambda$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leqslant m\,|u_n - \lambda| \;;$$

en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

3°

## III. Amiens & Rouen, série E

**Ex. 1918.** *4 points.* *./1987/amiensE/exo-1/texte.tex*

Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \tag{E}$$

**1.** Déterminer la solution $f$ de l'équation (E)qui vérifie :

$$f(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(-1) = 1.$$

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$ ; préciser ses limites aux bornes de son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

**3.** Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations :

$$y = 0, \quad x = -\frac{3}{2}, \quad \text{et} \quad x = -1.$$

Ex. 1919. ———— *4 points.* ./1987/amiensE/exo-2/texte.tex

Soit la suite numérique $U$ définie par $U_0 \in [0\,;1]$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

**1.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

**2.** Montrer que la suite $U$ est croissante.

**3.** En déduire qu'elle admet une limite que l'on calculera.

**4.** On pose : $U_0 = \cos\varphi$ où $\varphi \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer par récurrence que $U_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$. Retrouver les résultats du 3

## Problème 718 *12 points.* ./1987/amiensE/pb/texte

$(P)$ est le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; $A$ est le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.
$(C)$ est le cercle de centre $O$ et de rayon 1.
A tout point de $(P)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe son affixe $z$ égale à $x+\text{i}y$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
$f$ est l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par :

$$f(z) = 2z - z^2.$$

$F$ est l'application de $(P)$ dans lui-même qui à tout point $m$ d'affixe $z$ associe le point $M$ d'affixe $Z$ égale à $f(z)$.
On prendra 3 cm pour unité de longueur.
Le but du problème est d'étudier l'image $(K)$ du cercle $(C)$ par $F$.

I- Soit $m$ un point du cercle $(C)$ d'affixe $z$ et $M$ son image par $F$.

a) a) Soient $m_1$ et $m_2$ les points d'affixes $2z$ et $z^2$.
Quels sont les modules de $z$, $2z$ et $z^2$ ? Donner les arguments de $2z$ et $z^2$ en fonction de celui de $z$.

b) Montrer que le quadrilatère $Om_1m_1M$ est un parallélogramme.

c) En déduire une construction géométrique simple de $M$ à partir de $m$.

b) Montrer que $A$ et $M$ sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente $(T)$ en $m$ au cercle $(C)$.
En déduire une autre construction de $M$ à partir de $m$.
N.B.- on veillera à fair deux figures distinctes accompagnées d'une courte explication du tracé effectué.

II- Soit $\text{e}^{\text{i}t}$, $t \in [-\pi\,;\pi]$ l'affixe d'un point $m$ de $(C)$.

1° Calculer $f(\text{e}^{\text{i}t})$ et en déduire que l'image $(K)$ de $(C)$ par $F$ est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} X(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ Y(t) = 2\sin t - \sin 2t \qquad (t \in [-\pi\,;\pi]). \end{cases}$$

2° Montrer que les points d'affixes $f(\text{e}^{\text{i}t})$ et $f(\text{e}^{-\text{i}t})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Qu'en déduit-on pour $(K)$ ?
Étudier sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ les variations des fonctions $X$ et $Y$ de la variable $t$.

3° a) Montrer que si $t$ est différent de 0, la tangente à $(K)$ au point $M$ de paramètre $t$ est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$\left(\cos\frac{3t}{2},\ \sin\frac{3t}{2}\right).$$

On admettra que ce résultat reste encore valable quand $t$ est nul.

4° Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à la tangente à $(K)$ en $M$.

5° Construire les points de $(K)$ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

6° Tracer $(K)$.

On rappelle que :

$$\begin{aligned}
\sin p+\sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p-\sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\\
\cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p-\cos q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

## IV. Antilles & Guyane, séries C & E

Ex. 1920. ——— *4 points.* *./1987/antillesCE/exo-1/texte.tex*

Soit $f_1$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $\mathbb{R}^-$ par :

$$f_1(x)=x-\sqrt[3]{3x}$$

et soit $f_2$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_2(x)=x+\sqrt[3]{3x}.$$

**1.** Étudier les fonctions $f_1$ et $f_2$.
Tracer leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On précisera en particulier les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ au point $O$.

**2.** Soit $h$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_2(x)=x+\sqrt[3]{3|x|}.$$

Montrer que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
La droite d'équation $y=x+1$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en deux points $A$ et $B$. Calculer l'aire de la partie du plan limité par le segment $[AB]$ et les arcs $OA$ et $OB$ de la courbe $\mathscr{C}$.

Ex. 1921. ——— *4 points.* *./1987/antillesCE/exo-2/texte.tex*

Pour tout nombre complexe $z$, on pose :

$$f(z)=z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}.$$

**1.** Montrer que l'équation $f(z)=0$ possède une racine imaginaire pure, $a$, que l'on déterminera.

**2.** Démontrer qu'il existe deux nombres réels $p$ et $q$ tels que :

$$f(z)=(z-a)\left(z^2+pz+q\right).$$

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=0$.

**3.** On note $P$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé et $a$, $z_1$ (de partie imaginaire positive) et $z_2$ les solutions de l'équation $f(z)=0$.
Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a$, $z_1$ et $z_2$. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**4.** Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ du plan $P$ tels que :

$$-MA^2+MB^2-MC^2=20.$$

Montrer que $\mathscr{E}$ contient le point $A$ et le point $C$.

## 🏛 Problème 719 *12 points.* ./1987/antillesCE/pb/texte

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté $\Sigma$, des points de l'espace équidistants de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ non coplanaires et orthogonales.
Les parties A, B, C pourront être traitées de façon indépendante.

A) 1° a) Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan (réflexion) $s$ laisse invariante une droite donnée.
En déduire qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan seulement qui laissent simultanément invariant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ :
l'une par rapport à un plan passant par $\mathscr{D}$ et orthogonal à $\mathscr{D}'$ en $B$, l'autre par rapport à un plan passant par $\mathscr{D}'$ et orthogonal à $\mathscr{D}$ en $A$.

b) Montrer que $\Sigma$ admet, en particulier, deux plans de symétries et un axe de symétrie $(AB)$.

2° Montrer que l'intersection de $\Sigma$ avec l'un quelconque de ses plans de symétrie est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

B) Dans cette partie, ainsi que dans la partie C), l'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $A$ de coordonnées $(0 ; 0 ; 1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
La droite $\mathscr{D}'$ passe par le point $B$ de coordonnées $(0 ; 0 ; -1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1° a) Vérifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales et non coplanaires.
Montrer que le point $O$ appartient à $\Sigma$.

b) Montrer qu'un représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$

Soit $M$ un point de coordonnées $(x ; y ; z)$ et $P$ un point de $D$, exprimer $MP^2$. En considérant $MP^2$ comme une fonction de $t$, en déduire la distance de $M$ à $\mathscr{D}$.

c) Calculer de même la distance du point $M$ à la droite $\mathscr{D}'$.

d) En déduire que $M$ appartient à $\Sigma$ si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.

2° Déduire de cette relation :

a) que les intersections de $\Sigma$ avec des plans orthogonaux à la droite $(AB)$ sont en général des hyperboles. Préciser les cas d'exception.

b) La nature des intersections de $\Sigma$ avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ ou à l'axe $\left(O ; \vec{\jmath}\right)$.

C) Soit $M(t)$ le point de $\Sigma$ admettant comme abscisse $x(t) = 4\cos t$ et pour ordonnée $y(t) = \sin 2t$ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Lorsque $t$ varie dans $\mathbb{R}$, le point $M$ décrit la courbe $\Gamma$ incluse dans $\Sigma$.

1° Construire la courbe $\Gamma_z$ projection orthogonale de $\Gamma$ sur le plan d'équation $z = 0$.
On prendra 2 cm comme unité.

2° On désigne par $\Gamma_x$ la projection orthogonale de $\Gamma$ sur le plan d'équation $x = 0$ et par la projection orthogonale de $\Gamma$ sur le plan d'équation $y = 0$.
Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.
Un étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.

# V. Espagne, série C



Retour page 1

**Ex. 1922.** ———— *4 points.* ./1987/espagneC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe au point $m$ d'affixe $z$ ($z \neq 2\mathrm{i}$) le point $M$ d'affixe $Z$, défini par :

$$Z = \frac{z-3+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-z}.$$

**1.** Déterminer et construire l'ensemble des points $m$ tel que $Z$ soit réel.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble des points $m$ pour lesquels :

$$\arg(Z) = \frac{3\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi).$$

**3.** Déterminer et construire l'ensemble des points $m$ pour lesquels $|Z| = 2$.

Toutes ces questions peuvent être traitées géométriquement en utilisant les points $A$ d'affixe $2\mathrm{i}$ et $B$ d'affixe $3-\mathrm{i}$.

**Ex. 1923.** ———— *4 points.* ./1987/espagneC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on trace un triangle $ABC$ non isocèle et tel que $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo $2\pi$).
Soit $d_1$ la demi-droite d'origine $B$ contenant $A$.
Soit $d_2$ la demi-droite d'origine $C$ contenant $A$.
On place sur $d_1$ un point $P$ différent de $B$ et sur $d_2$ un point $Q$ différent de $C$ tels que $BP = CQ$.

**1.** Justifier l'existence d'une unique rotation $r$ transformant $B$ en $C$ et $P$ en $Q$. Préciser l'angle de $r$. Construire le centre $O$ de $r$ et prouver que ce point est indépendant de $P$ et $Q$.

**2.** Quelle est la nature du triangle $OPQ$ ?

**3.** Construire les points $P$ sur $d_1$ et $Q$ sur $d_2$ sachant que $BP = CQ = PQ$.

## PROBLÈME 720 *12 points* ./1987/espagneC/pb/texte

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}$, d'autre par de donner une expression de $\mathrm{e}^a$ comme limite d'un suite.
Pour tout entier $n > 0$, note $f_n$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

On appelle $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = 2$ cm et $\|j\| = 10$ cm.

A) 1° Déterminer le tableau de variation de $f_n$ sur $[0\,; +\infty[$.

2° Pour tout entier $n \geqslant 2$, étudier la position relative de $C_n$ et de $C_{n-1}$ et vérifier que le point $A_n$ de coordonnées $(n\ f_n(n))$ appartient à $C_{n-1}$.

3° Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes $C_1$, $C_2$ et $C_3$ ; on placera les tangentes en $O$ à ces trois courbes.

B) Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = f_n(n)$.

1° a) En utilisant les résultats du A, démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

b) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifier. On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.

2° a) Soit $g$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$, par

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de $g$, démontrer que, pour tout $t \in [0, 1]$ :

$$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$



Retour page 1

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{1-\frac{1}{4n}}.$$

3° a) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)}.$$

4° a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{4}\ln n}.$$

c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

C) Pour tout entier $n > 0$ et tout réel $a$ positif ou nul, fixé, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

1° Calculer $I_1(a)$.

2° Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel $t$ positif ou nul, on a :

$$0 \leqslant I_n(a) \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3° a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{1}{n!} < \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n.$$

(On pourra utiliser B(1)a.)

b) Déterminer alors un nouvelle majoration de $I_n(a)$, puis la limite de $I_n(a)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

4° a) Établir pour tout entier $n \geqslant 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$I_n(a) = 1-\mathrm{e}^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right).$$

Cette égalité reste-telle valable pour $n = 1$ ?

5° Démontrer que pour tout $a$ de $[0\,;+\infty[$ on a :

$$\mathrm{e}^a = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\right).$$

Retour page 1

## VI. Groupement III, série C & E

**Ex. 1924.** ——— *4 points.* *./1987/dijonce/exo-1/texte.tex*

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les points $A\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ et $F(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

**1.** Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace.
Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$.
Déterminer le point $M_0$ tel que $\overrightarrow{M_0A}\wedge\overrightarrow{M_0B}=\overrightarrow{M_0F}$.

**2.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|.$$

En interprétant $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|$ comme une aire, montrer que ces points $M$ sont à égale distance du point $F$ et de la droite $(AB)$. En déduire une solution géométrique.

**3.** Résoudre les mêmes questions qu'en 2 en remplaçant le plan $\left(O;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ par le plan $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

## VII. Groupement IV, série C & E

**Ex. 1925.** ——— *5 points.* *./1987/bordeauxce/exo-1/texte.tex*

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit $A$ un point de $\mathscr{P}$ d'affixe $a$ non nulle et soit $ABC$ le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre $O$, de rayon $OA$ et tel que $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ soit de mesure $\frac{\pi}{3}$.

**1.** Déterminer, en fonction de $a$, les affixes $b$ et $c$ des points $B$ et $C$ respective- ment.

**2.** Soit $M$ le point d'affixe $z=a^3$.
Déterminer $a$ pour que $M$ soit le milieu de $[BC]$.

**3.** Dans cette question, le point $A$ décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
Déterminer l'ensemble des points $N$ tels que le quadrilatère $ABNC$ soit un losange.

**Ex. 1926.** ——— *5 points.* *./1987/bordeauxce/exo-2/texte.tex*

Soit $n$ un nombre entier supérieur à 1.
On considère une urne dans laquelle se trouvent :

— une boule portant le numéro 1,

— deux boules portant le numéro 2,

— trois boules portant le numéro 3,

— ...

— $n$ boules portant le numéro $n$.

A- Combien l'urne contient-elle de boules ?

B- On tire au hasard une boule dans l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. On suppose dans cette question que $n$ est pair.
   Exprimer en fonction de $n$ la probabilité pour que la boule tirée porte :
   a) un numéro pair ;
   b) un numéro impair.
2. Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l"urne est 21.
   Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?



Retour page 1

## 🏛Problème 721 *10 points* ./1987/bordeauxce/pb/texte

A- Dans cette partie, on étudie la fonction numérique $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$g(x)=\frac{e^x-1}{xe^{2x}}.$$

1. a) Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction $h$ telle que

$$h(x)=e^x-x-1.$$

   b) En déduire que, pour tout réel $\alpha$,

$$e^\alpha \geqslant \alpha+1. \qquad (1)$$

2. a) En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout $x>0$ :

$$e^{-2x}\leqslant g(x).$$

   b) Justifier l'écriture : $g(x)=e^{-x}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$.
   En déduire, à l'aide de l'inégalité (1), que pour tout $x>0$, $g(x)\leqslant e^{-x}$.
3. Déduire des questions précédentes que la fonction $g$ est prolongeable par continuité au point $x=0$.
4. a) Calculer la dérivée $g'$ de la fonction $g$.
   b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que, pour tout $x>0$, $g'(x)\leqslant -e^{-2x}$.
   En déduire le esns de variation de la fonction $g$.

B- Dans cette partie, on étudie la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=g(x), \quad \text{pour } x>0. \end{cases}$$

1. a) Justifier l'écriture, pour $x>0$ :

$$g(x)=e^{-\frac{3x}{2}}\times\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{x}.$$

   b) Soit $u$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}.$$

   Étudier le sens de variation de $u$.

   c) Soit $a$ un réel strictement positif.
   Démontrer que, pour tout réel $t$, tel que $0\leqslant t\leqslant a$ :

$$2\leqslant e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\leqslant e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}.$$

   En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $u$ sur l'intervalle $[0\,;a]$, démontrer que :

$$1\leqslant\frac{e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{a}\leqslant\frac{e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{a} \qquad (2)$$

   d) En déduire, à l'aide des inégalités (2), que, pour tout $x>0$ :

$$e^{-\frac{3x}{2}}\leqslant g(x)\leqslant\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{2} \qquad (3)$$

   En utilisant les inégalités (3), étudier la limite de $\dfrac{g(x)-1}{x}$ quand $x$ tend vers 0. En déduire que la fonction $f$ est dérivable au point $x=0$.
2. a) Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.



Retour page 1

b) Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $f$ dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 5 cm).

3. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, les axes du repère et la droite $D$ d'équation $x = 1$. On se propose de déterminer les encadrements de l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$, exprimée en cm$^2$.

   a) Donner un encadrement de $\mathscr{A}$ à l'aide de rectangles en partageant l'intervalle $[0;1]$ en cinq intervalles de même longueur.

   b) En utilisant les inégalités (3), donner un encadrement de $\mathscr{A}$.

## VIII. Lille, série C & E

**Ex. 1927.** ——— *5 points.* *./1987/lilleCE/exo-1/texte.tex*

1. Trouver la fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 2$.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^3 - 5X - 2 = 0$. (On cherchera une solution particulière dans $\mathbb{Z}$.)

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -2$.

3. a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;1]$.
   On précisera les valeurs d'annulation de $f$.

   b) Dresser un tableau des valeurs numériques à $10^{-2}$ près par défaut, données par la calculatrice, de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de $x$ : $0{,}4$ ; $0{,}5$ ; $0{,}6$ ; $0{,}7$ ; $0{,}9$ ; $1$.

   c) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $\left\|\vec{i}\right\| = 10$ cm et $\left\|\vec{j}\right\| = 1$ cm, tracer avec précision sur papier millimétré la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[0;1]$. On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse $0$.

**Ex. 1928.** ——— *4 points.* *./1987/lilleCE/exo-2/texte.tex*

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2. On dispose de $n$ boules numérotées de $1$ à $n$. On les place toutes au hasard dans $n$ boîtes (chaque boîtes pouvant contenir de $0$ à $n$ boules).
   On désigne par $P_n$ la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   Montrer que $P_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

3. En utilisant le 1, montrer que pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} \geqslant 2.$$

   En déduire que $P_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Quelle est la limite de $P_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Problème 722** *11 points.* *./1987/lilleCE/pb/texte*

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On nomme $D$ la droite de repère $(O\,;\vec{i})$ et $\Delta$ la droite de repère $(O\,;\vec{j})$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels qu'une mesure des angles $(\vec{i},\ \vec{u})$ et $(\vec{j},\ \vec{v})$ soit $+\dfrac{\pi}{6}$.
Par tout point $M$ du plan on fait passer les droites $D_M$ et $\Delta_M$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$D_M$ coupe $D$ en $m$ et $\Delta$ en $p$. On désigne par $M'$ le point dont les projections orthogonales sur $D$ et $\Delta$ sont respectivement $m$ et $p$.
Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui à $M$ associe $M'$.



Retour page 1

A) 1° Construire l'image d'un point non situé sur $D$ et $\Delta$, puis celle d'un point de $D$ distinct de $O$, puis celle d'un point de $\Delta$ distinct de $O$.

2° Quelle est l'image du point $O$ ?

3° $M$ étant un point quelconque du plan, distinct de $O$, démontrer :

*i.* que les points $O$, $m$, $p$, $M$ et $M'$ sont sur un même cercle ;

*ii.* que le triangle $OMM'$ est rectangle en $M$ et que :

$$(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

4° En déduire que $f$ est une similitude directe que l'on précisera.

B) Le baut de cette partie est de déterminer la nature de l'application $f$ par une méthode différente de celle de la partie A

Elle doit donc être résolue sans utiliser les résultats du A.

$M$ étant un point quelconque du plan, on note $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Déterminer les coordonnées des points $m$ et $p$ en fonction de $x$ et $y$.

En déduire que les coordonnées $x'$ et $y'$ du point $M'$ sont :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y. \end{cases}$$

2° Soit $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe du point $M$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ celle du point $M'$.

Démontrer que $z'$ s'écrit $\alpha z$, où $\alpha$ est un nombre complexe que l'on calculera.

En déduire que $f$ est une similitude directe et donner sa forme réduite.

C) Pour cette partie on fera une figure distincte de celles des parties précédentes et on prendra 2 cm comme unité de longueur.

On pourra se servir de l'expression analytique de $f$ donnée au B.

1° Soit $H$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer ses asymptotes, son foyer d'abscisse positive et la directrice associée.

Calculer son excentricité. Construire $H$.

2° Soit $H'$ la courbe image de $H$ par l'application $f$.

Prouver que $H'$ est une hyperbole dont on précisera l'excentricité.

Déterminer un foyer de $H'$ et la directrice associée. Construire $H'$. (On admettra que les asymptotes de $H'$ sont les images par $f$ des asymptotes de $H$).

Démontrer que $H'$ est la représentation graphique de la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \dfrac{6}{x}\right)$.

3° Soit $L$ la droite d'équation $x = 2$ et $L'$ son image par $f$.

Déterminer les points d'intersection de $L'$ et $H'$. Calculer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $H'$ et la droite $L'$.

4° Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\,\mathrm{d}x$, et en déduire sa valeur du résultat précédent.

## IX. National remplacement, série C & E

**Ex. 1929.** *4 points.* *./1987/nationalCErem/exo-1/texte.tex*

**1.** Soit $h$ la fonction définie par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On pose

$$K = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $K = 2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties ou chercher une primitive $H$ de $h$ sous la forme

$$h(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x},$$

où $a,\ b,\ c$ sont des réels à déterminer).

**2.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2\mathrm{e}^{-x}}$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On ne cherchera pas à calculer $I$).

a) Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$0 \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1.$$

Vérifier que pour tout $u$ de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$1 - u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 - \frac{u}{2}.$$

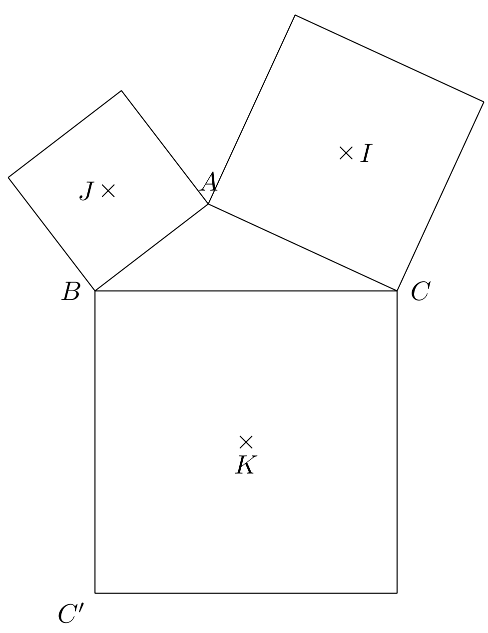
b) En déduire que $1 - K \leqslant I \leqslant 1 - \dfrac{K}{2}$ ; donner un encadrement de $I$ d'amplitude égale à $0{,}1$.

**Ex. 1930.** ——— *4 points.* *./1987/nationalCErem/exo-2/texte.tex*

Le plan est orienté. On construit un triangle $ABC$ tel que l'angle $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ est un nombre compris entre $0$ et $\pi$.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs $CA$, $AB$ et $BC$ et on désigne par $I,\ J,\ K$ leurs centres, conformément à la figure. On a

$$(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{JA},\ \overrightarrow{JB}) = (\overrightarrow{KB},\ \overrightarrow{KC}) = -\frac{\pi}{2}.$$




On veut montrer que les segments $IB$ et $JK$ sont orthogonaux et ont même longueur.

On considère la similitude directe $S_1$ de centre $C$ qui transforme $I$ en $A$ et le similitude directe $S_2$ de centre $B$ qui transforme $A$ en $J$.

**1.** Donner les rapports et les angles de $S_1$ et $S_2$. Quelle est la nature de la transformation $S_2 \circ S_1$ ?

**2.** Préciser les images de $I$ et de $B$ par $S_2 \circ S_1$.

**3.** Conclure.

# X. Paris, série C

**Ex. 1931.** 5 points. ./1987/parisC/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ distincts deux à deux. On note $I$ le milieu de $[BD]$, $J$ le milieu de $[AC]$ et $O$ l'isobarycentre de $(A, B, C, D)$.

On construit les triangles rectangles isocèles $ABM$, $BCN$, $CDP$, $DAQ$ tels que les angles $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{P$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$ admettent pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

On note $K$ le milieu de $[MP]$ et $L$ le milieu de $[NQ]$.

On se propose d'étudier la configuration $(I, J, K, L)$. A cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine $O$ et introduire les affixes $a$, $b$, $c$, $d$ de $A$, $B$, $C$, $D$, les affixes $m$, $n$, $p$, $q$ de $M$, $N$, $P$, $Q$ et les affixes $f$, $g$, $k$, $l$ de $I$, $J$, $K$, $L$.

1. Déterminer le milieu de $[IJ]$.
2. Prouver que $m(1-\mathrm{i}) = a - \mathrm{i}b$. Calculer de manière analogue $n$, $p$ et $q$.
3. Déterminer l'isobarycentre de $(M, N, P, Q)$. En déduire le milieu de $[KL]$.
4. Effectuer une figure soignée en prenant $a = -2+2\mathrm{i}$, $b = -2-\mathrm{i}$, $c = -2\mathrm{i}$ et $d = 4+\mathrm{i}$.
5. Soit $r$ la quart de tour direct de centre $O$. Montrer que $r(J) = K$.
6. Caractériser les configurations $(A, B, C, D)$ telles que $I = J$. Indiquer alors la position de $K$ et de $L$ et la nature de $(M, N, P, Q$.

   Ce cas étant écarté, prouver que $(I, J, K, L)$ est un carré de centre $O$.

**Ex. 1932.** 4 points. ./1987/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère le triangle rectangle isocèle $ABC$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$. On note $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. On désigne par $\Gamma_A$, $\Gamma_B$ et $\Gamma_C$ les cercles de diamètres respectifs $[AI]$, $[BI]$ et $[CI]$.
   a) Effectuer une figure : on dirigera $(BC)$ suivant l'axe des abscisses et on prendra 8 cm pour longueur de $[BC]$.
   b) Soit $r$ la rotation de centre $I$ et d'angle ayant pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer les images par $r$ de $\Gamma_C$ et $\Gamma_A$.

      Par quelle transformation simple passe-t-on de $\Gamma_C$ à $\Gamma_B$ ?
2. Pour tout point $M$ de $\Gamma_A$ distinct de $I$, $J$ et $K$, on note $N$ le point où la droite $(MK)$ recoupe $\Gamma_B$ et $P$ le point où la droite $(MJ)$ recoupe $\Gamma_C$.
   a) Établir que les droites $(IM)$ et $(IP)$ sont orthogonales. (On pourra utiliser la cocyclicité des points $A$, $M$, $I$, $J$ et des points $C$, $P$, $I$, $J$.)
   b) Déterminer les images par $r$ de $P$ et de $M$. En déduire que $I$ est le milieu de $[NP]$ et que le triangle $MNP$ est rectangle et isocèle. Préciser ce triangle sur la figure.
   c) Déterminer une similitude directe transformant $ABC$ en $MNP$.

## Problème 723 — 11 points. ./1987/parisC/pb/texte

Dans ce problème, on étudie la fonction $f$ définie sut $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x > 0)$ et $f(0) = 1$, ce qui fait l'objet de la partie I.

Dans la partie **??**, on décrit une méthode de calcul d'un valeur approchée de l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

I-
1. *Dérivation de $f$*

   Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer la dérivée de $f$ sur cet intervalle.
2. *Signe de $f$*

   a) Déterminer les nombres réels $x \geqslant 0$ tels que $f(x) = 0$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$.

   b) Étudier le signe de $f$.



Retour page 1

3. *Encadrement de $f$*

a) Prouver que pour tout nombre $x>0$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels $x>0$ tels que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et ceux tels que $f(x)=-\dfrac{1}{x}$. On rangera ces nombres en des suites strictement croissantes $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k,\ \ldots)$ et $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ \ldots)$.

c) En déduire la position relative de la courbe représentative $C$ de $f$ et des courbes représentatives $H_+$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $H_-$ de $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$.
Comparer les tangentes à $C$ et $H_+$ au point d'abscisse $b_k$, ainsi que les tangentes à $C$ et $H_-$ au point d'abscisse $c_k$.

4. *Variations de $f$*

a) Étudier le signe de $x \longmapsto \tan x - x$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire le signe de $f'$ sur cet intervalle.

b) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un élément $x_k$ et un seul de $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $\tan x_k = x_k$ ; montrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de $f'$ sur $]0\,;\,x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k\,;\,x_{k+1}[$, où $k=1,\ 2,\ \ldots$.

5. *Étude de $f$ en $0$*

a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

(Pour cela, on introduira la fonction $\varphi$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x)=\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, on calculera les dérivées $\varphi'$, $\varphi''$ et $\varphi'''$ et on en déduira le signe de $\varphi$.)

b) Prouver que $f$ est dérivable au point $0$ et calculer $f'(0)$.

6. *Courbe représentative de $f$*

a) Dresser le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,3\pi]$.

b) Tracer sur une même figure les courbes $H_+$, $H_-$ et $C$ en se limitant à l'intervalle $[0\,;\,3\pi]$ et placer les points $a_k$, $b_k$ et $c_k$.
On utilisera les valeurs approchées $x_1 \simeq 4{,}49$ et $x_2 \simeq 7{,}73$.
(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 3 cm sur l'axe des ordonnées.)

## II- Approximation de l'intégrale $J$

1. *Transformation de $J$*

Pour tout élément $u$ de $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, on pose $F(u)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout élément $x$ de $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on pose $G(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Prouver que pour tout élément $x$ de $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ :

$$G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x)).$$

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)



Retour page 1

b) En déduire que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

2. *Approximation de $J$*
Soit $(u_n)$ la suite définie par :
$u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi t\,\mathrm{d}t$, et si $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t\,\mathrm{d}t$.

a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$J = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n$$
où
$$r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
.

b) Établir que, pour tout élément $t$ de $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$,
$$\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leqslant 2t^n.$$
En déduire une majoration simple de $r_n$.

c) Montrer que $J = \lim[n]+\infty(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n_1})$.

3. *Calcul des intégrales $u_n$*

a) Calculer $u_0$ et $u_1$.

b) Établir que pour entier $n \geqslant 2$,
$$u_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right].$$

4. **Conclusion**
A partir des résultats obtenus en II2 et II3, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de $J$ à la précision $10^{-2}$. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)

## XI. Paris, série E

**Ex. 1933.** ——— *6 points.* *./1987/parisE/exo-1/texte.tex*

La plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** A toute valeur réelle de la variable $x$, on associe les points $M_1$ et $M_2$ d'abscisse $x$ et d'ordonnées respectives :
$$y_1 = f_1(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad y_2 = f_2(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}.$$
On appelle $I$ le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Étudier les variations des fonctions $f_1$ et $f_2$ et représenter sur le même graphique l'ensemble $(\mathscr{C}_1)$ des points $M_1$, l'ensemble $(\mathscr{C}_2)$ des points $M_2$ et l'ensemble $(\Gamma)$ des points $I$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$.

b) Soit $a$ un nombre réel strictement positif. Calculer l'aire $S(a)$ du domaine du plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
Étudier la limite de cette aire lorsque $a$ tend vers $+\infty$.

**2.** On appelle $M$ le point de coordonnées $x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$ et $y = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}$ et $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points $M$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}$.
On peut considérer que $(\mathscr{C})$ est la trajectoire d'un point mobile, situé en $M$ à l'instant $t$.

a) Montrer que la courbe est incluse dans une conique $(\mathscr{H})$. Construire $(\mathscr{C})$.

b) Déterminer, en fonction de $t$, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et celles du vecteur $(\vec{V} + \overrightarrow{OM})$.
En déduire que la tangente en $M$ à $(\mathscr{C})$ et la droite $(OM)$ forment un angle dont les bissectrices ont une direction fixe que l'on précisera.

c) Placer, sur la courbe $(\mathscr{C})$, le point $M$ associé à $t = 1$ et la tangente à $(\mathscr{C})$ en ce point.

Ex. 1934. ———— *5 points.* ./1987/parisE/exo-2/texte.tex

On considère la suite des intégrales :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}, \qquad I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x, \ldots, I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** a) Calculer $I_1$ et $I_0+I_1$ ; en déduire $I_0$.

b) Pour tout entier naturel $n$, calculer $I_{n+1}+I_n$.

**2.** a) Montrer, sans calcul, que la suite $(I_n)$ est croissante.

b) Prouver que, pour tout élément $x$ de $[0\,;1]$ :

$$\frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}+1} \leqslant frac\mathrm{e}^{nx}\mathrm{e}+1 \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{nx}.$$

En déduire un encadrement de $I_n$.

**3.** A partir de cet encadrement, déterminer la limite de $I_n$ et celle de $\dfrac{I_n}{\mathrm{e}^n}$.

**Problème 724** *9 points.* ./1987/parisE/pb/texte

On se propose de déterminer la section d'un cube par le plan médiateur d'une de ses diagonales et d'étudier l'effet sur cette section de transformations laissant le cube invariant.

On considère un cube de centre $O$

## XII. Polynésie, série E

Ex. 1935. ———— *4 points.* ./1987/polynesiee/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A tout point $M$ d'affixe $z$, on associe le point $P$ d'affixe $z-1$ et le point $Q$ d'affixe $z^2$.

**1.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ tels que $M$, $P$ et $Q$ soient alignés.

**2.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points $M$ tels que $\overrightarrow{PM}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$.

**3.** Représenter $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sur une même figure (unité graphique : 2 cm). Placer sur cette figure les points $M$, $P$ et $Q$ lorsque $z=-\mathrm{i}$, puis lorsque $z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

## XIII. La Réunion, série C

Ex. 1936. ———— *4 points* ./1987/reunionC/exo-1/texte.tex

Pour chaque entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)$, dont chaque terme est positif ou nul.

**2.** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.
En déduire qu'elle converge.

**3.** Déterminer un réel $a$ vérifiant :

$$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leqslant a$$

pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Ex. 1937.** ——— *4 points.* ./1987/reunionC/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

**1.** On désigne par $A$, $B$ et $C$ des points distincts du plan, ayant pour affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

Montrer que $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ a une partie réelle nulle.

**2.** A chaque point $M$ d'affixe $z$ non nulle, on associe les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{z^2}$ et $\dfrac{1}{z^3}$, et on désigne par $F$ l'ensemble des points $M$ du plan pour lesquels les points $A$, $B$ et $C$ sont distincts deux à deux, et $ABC$ est un triangle rectangle.

a) Pour quelles valeurs de $z$, les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils distincts deux à deux?

b) Déterminer $F$ puis le représenter. (On notera que le triangle $ABC$ peut être rectangle en $A$, $B$, ou $C$.)

## Problème 725 *12 points.*

./1987/reunionC/pb/texte

*Les questions ne sont pas indépendantes, mais la formulation de chacune d'elles permettra au candidat d'utiliser tout résultat utile à la résolution de la suite du problème, même s'il ne l'a pas démontré.* On désigne par $E$ l'ensemble des triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels non nuls vérifiant $x+y+z=0$.

### Première Partie.

Dans le plan $P$, on donne des points $A$, $B$ et $C$ non alignés, et on désigne par $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

A. Soit $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un élément de $E$.

1. Montrer que chacun des ensembles de points pondérés $\{(B,\ y),\ (C,\ z)\}$, $\{(A,\ x),\ (C,\ z)\}$, et $\{(A,\ x),\ (B,\ y)\}$ possède un barycentre. Dans la suite, ces trois points seront respectivement notés $I$, $J$ et $K$.
2. a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul, tel que pour tout point $M$ du plan $P$, on ait :

$$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{v}.$$

(On exprimera $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.)

b) Montrer que $\vec{v}$ n'est colinéaire à aucun des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c) Montrer que chacun des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ est non nul, et colinéaire à $\vec{v}$.

3. a) Montrer que pour tout point $M$ du plan $P$, on a

$$xMA^2+yMB^2+zMC^2=2\overrightarrow{MO}.\vec{v}.$$

b) En déduire que le lieu géométrique des points $M$ du plan $P$ vérifiant $xMA^2+yMB^2+zMC^2=0$ est la droite $D$ passant par $O$, perpendiculaire à chacune des droites $(AI)$, $(BJ)$ et $(CK)$.

Dans la suite, on dira que la droite $D$ est associée au triplet :

$$\{(A,\ x),\ (B,\ y),\ (C,\ z)\}.$$

c) *Application* : construire la droite $D$ associée à : $\{(A,\ -3),\ (B,\ 1),(C,\ 2)\}$. 4.

4. Soit $d$ une droite passant par $O$, distincte de chacune des médiatrices du triangle $ABC$. Montrer que l'on peut trouver un triplet $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ de $E$, tel que $d$ soit la droite associée à $\{(A,\ x_0),\ (B,\ y_0),\ (C,\ z_0)\}$.

B. Dans cette partie, on suppose que le triangle $ABC$ n'est pas isocèle, et on désigne par $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs de $(B,C)$, $(C,A)$ et $(A,B)$, par $O'$ le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$, par $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$, et par $H$ l'orthocentre du triangle ABC.

a) Montrer que $O$ et $H$ sont distincts.

b) Montrer que l'on peut trouver un triplet $(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ de $E$, tel que la droite $D_1$ associée à $\{(A,\ x_1),\ (B,\ y_1),\ (C,\ z_1)\}$ soit la droite $(OH)$. (On ne demande pas de calculer les réels $x_1$, $y_1$ et $z_1$).

c) On désigne par $D_1'$ la droite associée à $\{(A,\ x_1),\ (B,\ y_1),\ (C,\ z_1)\}$. Montrer que $DI$ et $D$ sont des droites parallèles. (On pourra utiliser une homothétie de centre $G$).

d) En déduire que $D_1=D_1'$, et que les points $O$, $O'$, $G$ et $H$ sont alignés. On précisera les abscisses de chacun de ces points dans le repère $(O,\ \overrightarrow{OG})$ de la droite $D_1$.

### Deuxième partie

Dans le plan $P$, on donne une droite $D$, et un point $B$ n'appartenant pas à $D$.

Montrer qu'il existe une infinité de couples de points $(A,\ C)$ vérifiant : $D$ est la droite associée à $\{(A,\ -3),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et $ABC$ est rectangle en $A$.

On donnera une construction de chaque couple $(A,\ C)$ solution du problème.

Chapitre XXX

# 1988.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Lille, Paris, Amiens & Rouen ;

— groupe II : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours, Nantes ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse.

## I. Groupe I, série C

Ex. 1938. ——— *4 points* *./1988/lilleC/exo-1/texte.tex*

On donne dans le plan un point $O$ et une droite $(\Delta)$ ne passant par $O$.
On se propose de donner une construction de l'intersection d'une droite $(D)$ passant par $O$ et non perpendiculaire à $(\Delta)$ avec l'ellipse $(E)$ d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer $O$ et de directrice associée $(\Delta)$.
On note $\vec{i}$ un vecteur unitaire orthogonal à $(\Delta)$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de $(D)$.

**1.** Pour tout point $M$ de $(D)$, on définit deux points $H$ et $H'$ tels que $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ soient orthogonaux à $(\Delta)$ et de norme égale à $2.MO$.
Montrer que lorsque $M$ décrit $(D)$, $H$ et $H'$ décrivent deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ passant par $O$, dont on précisera un vecteur directeur en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

**2.** L'une des deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ peut-elle être parallèle à $(\Delta)$ ?

**3.** Utiliser les questions précédentes pour construire l'intersection de l'ellipse $(E)$ et de la droite $(D)$.
Faire une figure soignée dans laquelle on prendra $4$ cm pour la distance de $O$ à $(\Delta)$ et $\frac{\pi}{2}$ pour mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i}\,;\vec{j}}\right)$. Il n'est pas demandé de construire l'ellipse $(E)$.

Ex. 1939. ———— *4 points* ./1988/lilleC/exo-2/texte.tex

On considère dans le plan $(P)$ orienté le losange $AIBI'$.
Soit $r$ la rotation de centre $A$ qui transforme $I$ en $I'$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $M$, $B$ et l'image $M'$ de $M$ par $r$ soient sur une même droite.

**1.** Soit $C$ le point dont l'image par $r$ est $B$. Démontrer que $C$ est sur le cercle de centre $I$ et de rayon $IA$.

**2.** En supposant $M$ distinct de $B$ et de $C$, démontrer que $M$, $B$ et $M'$ sont alignés si, et seulement si,

$$(\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BA}) \mod \pi.$$

**3.** En déduire que l'ensemble des points $M$ tels que $M$, $B$ et $M'$ soient sur une même droite.

## Problème 726

./1988/lilleC/pb/texte

On désigne par $f_\lambda$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

où $\lambda$ est un réel strictement positif donné.
On note $(C_\lambda)$ la courbe représentative de la fonction $f_\lambda$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On définit enfin la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f_\lambda(u_n).$$

A) Dans cette partie on se propose d'étudier la famille des fonctions $f_\lambda$ et la famille de courbes $(C_\lambda)$.

1° Étudier le sens de variations de la fonction $f_\lambda$ et préciser les limites de $f_\lambda$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2° a) Vérifier que la courbe $(C_\lambda)$ passe par l'origine $O$ et écrire une équation de la tangente en $O$ à $(C_\lambda)$.

b) Soit $M$ un point quelconque du plan, $H$ son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées $(y'y)$ et $M'$ le point défini par la relation $\overrightarrow{HM} = \lambda\overrightarrow{HM'}$.
Démontrer que $M$ appartient à la courbe $(C_1)$ si et seulement si $M'$ appartient à $(C_\lambda)$.

c) Construire avec soin la courbe $(C_1)$, en prenant 2 cm comme unité, puis la courbe $(C_2)$ en appliquant le résultat du A(2)b.

3° On envisage ici l'étude de l'intersection de la courbe $(C_\lambda)$ et de la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$.
Pour cela, on pose $g_\lambda$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x.$$

a) Dresser le tableau de variations de $g_\lambda$, en précisant les limites aux bornes.
Démontrer que $g_\lambda$ admet un maximum absolu $m(\lambda)$ ; exprimer en fonction de $\lambda$ la valeur de $x$ telle que $g_\lambda(x) = m(\lambda)$ et démontrer que

$$m(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}.$$

b) En remarquant que $g_\lambda(0) = 0$, établir que $m(\lambda)$ est strictement positif si $\lambda$ est différent de 1.

c) Déduire des questions précédentes le nombre de solutions réelles de l'équation $g_\lambda(x) = 0$ et leur signe (on discute suivant la position de $\lambda$ par rapport au A1).
Conclure quant à l'intersection de $(C_\lambda)$ et de $(\Delta)$.

B) Dans cette partie, on fixe $\lambda = 2$ et on note $x_2$ l'unique solution strictement positive de l'équation $g_2(x) = 0$ étudiée dans la partie A.
On se propose la recherche des valeurs approchées de $x_2$ à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule avec $\lambda = 2$.

1° Déterminer le signe de $g_2(1)$ et celui de $g_2(\ln 2)$. En déduire l'encadrement :

$$\ln 2 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$

2° Démontrer par récurrence sur $n$, en utilisant les variations de $f_2$, que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$x_2 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3° Calculer $f_2'(\ln 2)$ et démontrer que, si $x$ est supérieur ou égal à $\ln 2$, alors :

$$0 \leqslant f_2'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} - x_2 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - x_2).$$

Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, l'inégalité :

$$u_n - x_2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Prouver alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_2$.
Application numérique : déduire de l'étude précédente une valeur approchée décimale à $10^{-2}$ près de $x_2$.

C) Dans cette partie, on fixe $\lambda = 1$ et on se propose d'étudier dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule.
On pourra utiliser le résultat suivant : $g_1(x)$ est strictement négatif pour tout réel $x$ non nul.

1° Prouver que, pour tout entier naturel $n$, tous les termes de $u_n$ sont strictement positifs et étudier le sens des variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que cette suite est convergente et calculer sa limite.

2° a) Pour tout réel $x$ positif, démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ et en déduire que :

$$f_1(x) \geqslant \frac{x}{x+1}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{u_n + 1} \qquad \text{et que} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

c) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

## II. Groupe II, série C

**Ex. 1940.** *5 points.* *./1988/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat répond au hasard.

**1.** Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.

**2.** a) Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.

b) Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à 6 questions.

**3.** Quelle est la probabilité que la candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?



Retour page 1

Ex. 1941. 5 points. ./1988/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $A$ un point de $P$ d'affixe $a$ non nulle et soit $ABC$ le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre $O$, de rayon $OA$ et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right)$ soit de mesure $\frac{\pi}{3}$.

**1.** Déterminer, en fonction de $a$, les affixes $b$ et $c$ des points $B$ et $C$ respectivement.

**2.** On désigne par $M$ le point d'affixe $z = a^3$.
Déterminer $A$ pour que $M$ soit le milieu de $[BC]$.

**3.** Dans cette question, le point $A$ décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
Déterminer l'ensemble des points $N$ tels que le quadrilatère $ABNC$ soit un losange.

## Problème 727 *10 points.* ./1988/bordeauxC/pb/texte

A) Dans cette partie, on étudie la fonction numérique $g$ définie $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{2x}}.$$

1° a) Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction $h$ telle que :

$$h(x) = e^x - x - 1.$$

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha$,

$$e^\alpha \geqslant \alpha + 1 \qquad (1)$$

2° a) En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$e^{-2x} \leqslant g(x).$$

b) Justifier l'écriture : $g(x) = e^{-x}\dfrac{1 - e^{-x}}{x}$.
En déduire à l'aide de l'inégalité (1), $g(x) \leqslant e^{-x}$.

c) Déduire des questions précédentes que la fonction $g$ est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

3° a) Calculer la dérivée $g'$ de $g$.

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour tout $x > 0$,

$$g'(x) \leqslant -e^{-2x}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction $g$.

B) Dans cette partie, on étudie la fonction $f$ définie que $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = g(x), & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

1° a) Justifier l'écriture, pour $x > 0$,

$$g(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}.$$

b) Soit $u$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $u(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$. Étudier le sens de variation de $u$.

c) Soit $a$ un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout réel $t$, tel que $0 \leqslant t \leqslant a$ :

$$2 \leqslant e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \leqslant e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}.$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $u$ sur l'intervalle $[0\,;a]$, démontrer que

$$1 \leqslant \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{a} \leqslant \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{2}. \qquad (2)$$



Retour page 1

d) En déduire, à l'aide des inégalités (2), que pour tout $x > 0$ :

$$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}. \tag{3}$$

En utilisant les inégalités (**??**), étudier la limite de $\dfrac{g(x)-1}{x}$ quand $x$ tend vers $0$. En déduire que la fonction $f$ est dérivable au point $x=0$.

2° a) Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.

b) Tracer la courbe représentative $(C)$ de la fonction $f$ dans le plan $P$ muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 5 cm).

3° Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan $P$ délimitée par $(C)$, les axes du repère et la droite $D$ d'équation $x=1$.
On se propose de déterminer les encadrements de l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$, exprimée en $\mathrm{cm}^2$.

a) Donner un encadrement de $\mathscr{A}$ à l'aide de rectangles en partageant l'intervalle $[0\,;1]$ en cinq intervalles de même longueur.

b) En utilisant les inégalités (3), donner un encadrement de $\mathscr{A}$.

c)

C)

# III. Groupe III, série C & E

**Ex. 1942.** ——— *4 points.* *./1988/dijonCE/exo-1/texte.tex*

**1.** Dans le plan orienté, on considère un carré $PQRS$ de centre $O$ pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $+\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $A$, $B$, $C$, $D$ un parallélogramme tel que $P$, $Q$, $R$, $S$ appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

a) Montrer que les droites $(AD)$ et $(DC)$ sont les images des droites $(BC)$ et $(AB)$ par la symétrie $s$ de centre $O$.
Montrer que $O$ est le centre du parallélogramme $ABCD$.

b) Soit $\Delta$ l'image de la droite $(AB)$ par la rotation $r$ de centre $O$, d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
Établir que $Q$ est commun aux droites $(BC)$ et $\Delta$.

**2.** Soient $A$, $B$, $C$, $D$ les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ -2)$, $(3\ ;\ 2)$, $(-1\ ;\ 2)$, $(-3\ ;\ -2)$, dans le plan orienté rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme $ABCD$. (On donnera les coordonnées des sommets de ce carré.)

**Ex. 1943.** ——— *5 points.* *./1988/dijonCE/exo-2/texte.tex*

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que pour tout $x$ réel,

$$f''(x) - f(-x) = x.$$

On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$.

**1.** a) Calculer à l'aide de $f$ et de ses dérivées $f'$ et $f''$ les dérivées premières et secondes de $g$ et $h$.

b) En déduire que les fonctions $h$ et $g$ vérifient les équations différentielles :

$$g'' = g \tag{1}$$

$$h'' = -h. \tag{2}$$

**2.** Déterminer l'ensemble des fonctions paires solutions de (1) et l'ensemble des fonctions impaires solutions de (2).

**3.** Exprimer $f$ en fonction de $g$ et $h$. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes réelles $\lambda$ et $\mu$ telles que pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \lambda(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) + \mu \sin x + x.$$

Inversement, une telle fonction est-elle solution du problème posé ?

## 🏛Problème 728 *11 points.*

*./1988/dijonCE/pb/texte*

I) On munit le plan $P$ d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où l'unité graphique est 5 cm.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x.$$

1° Étudier les variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative $\Gamma$ de $f$ sur cet intervalle. (On précisera les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisses $x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$).

2° Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (a \cos x + b \sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

soit une primitive de $f$.
Calculer l'aire limitée par $\Gamma$, les droites $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, et l'axe des abscisses. Exprimer cette aire en cm$^2$.

3°

II) On se propose d'étudier l'intersection de la courbe $\Gamma$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

1° Existe-t-il des points d'intersection de la courbe $\Gamma$ et de $\Delta$ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ ?

2° Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x - x.$$

a) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Étudier les variations de $\varphi$.

c) En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha$ de $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\mathrm{e}^{-\alpha} \cos \alpha = \alpha \quad \text{c'est à dire tel que } f(\alpha) = \alpha.$$

d) On pose $\beta = f(1) = \mathrm{e}^{-1} \cos 1$. En prouvant d'abord que $\alpha < 1$, puis en utilisant le sens de variation de $f$ sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, montrer l'encadrement :

$$\beta < \alpha < 1.$$

3° On considère la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 1$, et par la relation de récurrence, vérifiée pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$,

$$\beta \leqslant u_n \leqslant 1.$$

b) on pose $k = \left|f'(\beta)\right|$.
En étudiant le signe de $f''$ sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ prouver sur cet intervalle

$$f'(0) < f'(x) \leqslant f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire que $k < 1$. Prouver que, pour tout réel $x$ de $[\beta ; 1]$,

$$\left|f'(x)\right| \leqslant k.$$

c) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel $n$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|.$$

d) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

# IV. Groupe IV, série C & E

Ex. 1944. ./1988/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex

$\theta$ étant un nombre réel de l'intervalle $]0\,;2\pi[$, on considère les deux nombres complexes :

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad (\text{ou encore } z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad \text{et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

et on note $|Z|$ le module de $Z$.

**1.** Montrer que $Z = \mathrm{i}\cotan\dfrac{\theta}{2}$ (où $\cotan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$).

**2.** Pour quelles valeurs de $\theta$ l'argument de $Z$ est-il défini ?
A quoi est-il alors égal ? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de $\theta$.)

**3.** A quoi est égal $|Z|$ ?

**4.** On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |Z|\,\mathrm{d}\theta$. Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer (on pourra mettre $|Z|$ sous la forme $k\dfrac{u'(\theta)}{u(\theta)}$ où $k$ est un nombre réel et $u$ une fonction de $\theta$).

Ex. 1945. ./1988/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex

On considère dans le plan orienté deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même rayon $r$, de centre respectifs $O_1$ et $O_2$ et tangents extérieurement en $A$.
On appelle $f$ la transformation obtenue en effectuant d'abord la translation $T$ de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ puis la rotation $R$ de centre $O_2$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$ (modulo $2\pi$). (On donne donc $f = R\circ T$).

**1.** Dessiner la figure $\mathscr{F}$ formée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en prenant $r = 4$ cm.

**2.** Soit $M_1$ un point quelconque de $\mathscr{C}_1$. Montrer que $M_2 = f(M_1)$ est un point de $\mathscr{C}_2$. Faire apparaître $M_1$ et $M_2$ sur la figure $\mathscr{F}$.

**3.** Déterminer l'image de $O_1$ par $f$.

**4.** On pose $A' = f(A)$ et on appelle $B$ le symétrique de $A$ par rapport à $O_2$. Que peut-on dire du triangle $O_2A'B$ ? Placer le point $A'$ sur la figure $\mathscr{F}$.

**5.** Montrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle $\alpha$ et le centre $I$. Placer $I$ sur la figure $\mathscr{F}$.
Que peut-on dire du triangle $O_1O_2I$ ? Exprimer $AI$ en fonction de $r$.

## Problème 729 ./1988/aixmarseilleC/pb/texte

A) Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1° a) Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ ( pour déterminer l'une des asymptotes, on étudiera $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$) .

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2° a) Soit $m$ un nombre réel et soit $\Delta$ la droite d'équation $y = m$.
Discuter, suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$.

b) Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle $A$ et $B$ les points d'intersection de $\Delta$ et de $\mathscr{C}$.
Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand $m$ décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, $I$ décrit une partie, que l'on précisera, de le droite $D$ d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$.

3° On construit une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

— $A_0$ est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2,

— pour tout $n \geqslant 0$, à partir du point $A_n$ de $\mathscr{C}$, on détermine $B_n$, deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la parallèle à $x'x$ passant par $A_n$,

— puis $I_n$ milieu du segment $[A_nB_n]$,

— $A_{n+1}$ est alors le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que $I_n$.

(On admet, et il n'est pas demandé de le démontrer, que le procédé décrit ci-dessus définit bien la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
Placer sur la figure les points $A_0,\ B_0,\ I_0,\ A_1,\ B_1,\ I_1$.
On appelle $x_n$ l'abscisse de $A_n$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{2x_n}\right)\ ; \qquad x_0 = 2$$

(on utilisera la question A(2)b.)

B) *Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la fin de la partie précédente.*

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_n$ est défini et strictement positif.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2x_n}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $x_n \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}}$ et ensuite que

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

d) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \geqslant 0$

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{2^n}.$$

(Pour démontrer la deuxième inégalité de cette double inégalité, on procédera par récurrence et l'on pourra poser, pour simplifier, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}$.)

e) En utilisant l'égalité $\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{2^n} = \mathrm{e}^{(2^n)\ln\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite $\ell$.

f) *Calcul sur machine*
En utilisant toute la précision de la calculatrice, présenter dans un tableau les valeurs décimales approchées des six premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les six premiers termes de la suite $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.
(La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie à la fin de la partie A du problème et l'on a posé $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.)

# V. Amiens, série C & E

**Ex. 1946.** ——— *5 points.* *./1988/amiensCE/exo-1/texte.tex*

Soit $\theta$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation E d'inconnue complexe $z$ :

$$\cos^2\theta z^2 64\cos\theta z + 5 - \cos^2\theta = 0. \tag{E}$$

**1.** Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser pour quelle valeur de $\theta$, l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.

**2.** Soit $P$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle $M'$ et $M''$ les points de $P$ dont les affixes respectives sont les nombres $z'$ et $z''$ solutions de l'équation (E).
Montrer que lorsque $\theta$ varie, $M'$ et $M''$ se déplacent sur une hyperbole $(H)$.
Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de $(H)$. Tracer $(H)$.

**3.** Montrer que, lorsque $\theta$ varie dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ décrit par les points $M'$ et $M''$ est une branche de $(H)$.

**Ex. 1947.** ——— *5 points.* *./1988/amiensCE/exo-2/texte.tex*

Soit dans le plan $P$ orienté un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AC = 2AB$ et $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Soit $\mathscr{C}(B)$ le cercle de centre $B$ et de rayon $AB$ et $\mathscr{C}(C)$ le cercle de centre $C$ et de rayon $AC$. Ces deux cercles passent par $A$. On appelle $E$ leur second point d'intersection.

**1.** Soit $S$ la similitude directe transformant $\mathscr{C}(B)$ et $\mathscr{C}(C)$. Quelle est la valeur du rapport de la similitude $S$ ?
On désigne par $I$ le centre de $S$. Quelle est la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$ ?
Quel est l'ensemble $(\Gamma)$ des centres $I$ des similitudes directes transformant $\mathscr{C}(B)$ en $\mathscr{C}(C)$. Représenter cet ensemble.

**2.** Soit $S_A$ la similitude directe de centre $A$ transformant $B$ en $C$. Soit $F$ le point de $\mathscr{C}(C)$ diamétralement opposé à $E$.
Démontrer que l'image de $E$ par $S_A$ est le point $F$.

**3.**

## Problème 730 *10 points.* *./1988/amiensCE/pb/texte*

Le problème propose l'étude d'une famille de fonctions (partie A), d'une suite (partie B) et d'une courbe (partie C) définies à partir de ces fonctions.

A) Dans cette partie, on met en place des résultats qui seront utilisés dans les parties B et C.
On désigne par $\ln$ le logarithme népérien et par $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
On considère, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, la fonction $f_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

1° Déterminer les limites de $f_n$ aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Étudier les variations de $f_n$.

2° Construire la courbe représentative $(C_1)$ de la fonction $f_1$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes.

3° Pour tout réel $X$ supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(X) = \int_1^X f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(La justification de l'existence de $I_n$, propriété connue, n'est pas demandée.)

a) Calculer $I_1(X)$.



Retour page 1

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_n(X)$ en fonction de $n$ et de $X$, pour $n$ supérieur ou égal à 2.
Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale

$$\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) Soit $n$ un entier naturel non nul fixé. Calculer la limite de $I_n(X)$ quand $X$ tend vers $+\infty$. (On distinguera deux cas $n=1$ et $n \geqslant 2$.)
Calculer la limite quand $X$ tend vers $+\infty$ de :

$$\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

B) Étude d'une suite définie à partir de $f_2$.
On considère la fonction $f_2$ définie en A par :

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1° Montrer pour tout entier naturel $k$, $k \geqslant 2$ :

$$f_2(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_2(k).$$

(On peut utiliser le sens de variation de $f_2$.)

2° On considère la suite $S$ définie par son terme général

$$S_p = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \frac{\ln p}{p^2}$$

où $p$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que la suite $S$ est croissante.

b) En utilisant B1, montrer que :

$$S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leqslant \int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_p - \frac{\ln p}{p^2}$$

en déduire un encadrement de $S_p$.

c) En utilisant la valeur de $\displaystyle\int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t$ trouvée au A, montrer que la suite $S$ est majorée.

d) Montrer que la suite $S$ est convergente et que sa limite $L$ vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leqslant L \leqslant \frac{1}{2} + 3\frac{\ln 2}{4}.$$

C) Étude d'une courbe définie paramétriquement à partir des fonctions $f_n$.
On considère la courbe $(\Gamma_1)$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

où $t$ est un réel appartenant à l'intervalle $[1\,;10]$.

1° Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à $t$ associent $x(t)$ et $y(t)$.

2° Représenter la courbe $(\Gamma_1)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 20cm).
Préciser les points de $(\Gamma_1)$ en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

3°

# VI. Paris, série A1

**Ex. 1948.** *5 points.* *./1988/parisA1/exo-1/texte.tex*

Archimède (Syracuse 287-212 av. J.-C) a demontré que :
« *L'aire d'un segment de parabole vaut quatre fois le tiers de l'aire d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.* »

`Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars.`

On se propose d'illustrer cet énoncé par un exemple.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ ; unité graphique : 1 cm.

1. On considère la parabole (P) d'équation $y=-(x-2)^2+9$ et le point S de coordonnées $(2\ ;\ 9)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de (P) avec l'axe des abscisses. Représenter l'arc AB de la parabole passant par S.
2. L'ensemble E des points du plan limité par cet arc de parabole et le segment AB est appelé « segment de parabole ». Calculer son aire.
3. Calculer l'aire du triangle SAB.
4. Préciser comment est illustrée, à l'aide de cet exemple, la proposition d'Archimède.

**Ex. 1949.** *4 points.* *./1988/parisA1/exo-2/texte.tex*

On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note $p_i$ la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est $i$ ».

1. Calculer $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5$ et $p_6$ sachant que :

$$p_2=p_1 \qquad p_3=3p_1 \qquad p4=2p_1 \qquad p-5=2p_2 \qquad p_6=2p_3.$$

2. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un numéro pair ».
3. On lance cinq fois de suite le dé.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins quatre fois un numéro pair ?

: On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

## Problème 731 *11 points.* *./1988/parisA1/pb/texte*

Leonhart Euler, dans *l'Introduction à l'analyse des infiniment petits*, montre que le nombre e peut-être caractérisé par la relation :

$$\mathrm{e}\lim_{n\to+\infty}\left(1\frac{1}{n}\right)^n.$$

Le but du problème est d'établir cette relation et d'obtenir des valeurs approchées de e.
Á cet effet on étudie la fonction $f$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x+1).$$

On note (C) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 3 cm.

A- Étude de $f$.

1. Dresser le tableau de variation de $f$. On précisera l'équation de la tangente $(\Delta)$ à (C) au point $O$. Tracer $(\Delta)$ et (C).
2. On se propose de montrer que, pour $x>-1$,

$$\ln(x+1)\leqslant x. \qquad (1)$$

   Pour cela, on considère la fonction $g$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-\ln(x+1).$$

   a) Calculer la dérivée $g'$ de $g$ ; étudier le signe de $g'(x)$.

Retour page 1

b) En déduire les variations de $g$ et prouver l'inégalite (1) ; on n edemande pas de construire la courbe représentative de $g$.

c) Déduire de (1) la poistion de (C) par rapport à $(\Delta)$.

3. On se propose de montrer que, pour $x > -1$,

$$\frac{x}{x+1} \leqslant ln(x+1). \tag{2}$$

Pour cela, on considère la fonction $h$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x}{x+1}.$$

a) Dresser le tableau de variations de $h$.

b) En déduire que, si $x > -1$, $h(x) < 1$.
Prouver que $\ln(1-h(x)) \leqslant -h(x)$.

c) En déduire l'inégalité (2).

d) Tracer la courbe représentative (H) de $h$ ; préciser la position (C) par rapport à (H).

B- On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

1. Á l'aide le l'inégalité (2), montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 \leqslant (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

en déduire que $v_n \leqslant \mathrm{e}$.

2. a) Établir que pour tout $n \geqslant 1$, $v-n-u_n = \dfrac{u_n}{n}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$ ; montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers $\mathrm{e}$.

3. On admet que la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ est décroissante. En utilisant la calculatrice, détreminer le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $\dfrac{u_k}{k} \leqslant \dfrac{1}{10}$.
Expliciter l'encadrement de $\mathrm{e}$ ainsi obtenu.

# VII. Paris, série C

Ex. 1950. 4 points. ./1988/parisC/exo-1/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère le cercle C de centre $O$ et de rayon $a$ et le cercle C' de centre $O$ et de rayon $b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels tels que $0 < b < a$.
On note $D$ et $D'$ les droites passant par $O$ et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Pour tout nombre réel $\theta$, on note $P$ le point du cercle C tel que $\theta$ soit une mesure (en radians) de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OP})$ et $P'$ le point d'intersection de C' avec la demi-droite d'origine $O$ passant par $P$.
Soit enfin $M$ le point d'intersection de la droite passant par $P$ et parallèle à $D'$ et de la droite passant par $P'$ parallèle à $D$.

**1.** Calculer les coordonnées $x$ et $y$ de $M$ en fonction de $\theta$. En déduire la nature de l'ensemble $E$ décrit par $M$ lorsque $\theta$ parcourt $\mathbb{R}$.

**2.** a) Déterminer un vecteur directeur de la tangente $T$ à la courbe $E$ au point $M$.

b) Soit $N$ le point d'intersection de la droite passant par $P$ et parallèle à $D$ et de la droite passant par $P'$ parallèle à $D'$.
Prouver que $T$ est orthogonale à la droite $(ON)$. En déduire une construction géométrique de $T$.

**3.** On prend $a = 6$ et $b = 3$. Construire sur une même figure les cercles C et C', les droites $D$ et $D'$ et l'ensemble $E$. On placera sur cette figure les points $P$, $P'$, $M$ et $N$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, et la tangente $T$ en $M$ à $E$ (on prendra 1 cm comme unité graphique).

Retour page 1

**Ex. 1951.** ——— *5 points.* *./1988/parisC/exo-2/texte.tex*

Dans un plan $P$ de l'espace, on considère un cercle C de diamètre $[AB]$. Soit $\Delta$ la droite passant par $A$ et orthogonale à $P$ et $S$ un point de $\Delta$ distinct de $A$.
On note $I$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(MS)$.
Pour tout point $M$ de C on note $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(MS)$.

**1.** Placer les données précédentes sur une figure, $\Delta$ étant placée verticalement.

**2.** Prouver que $H$ appartient à la sphère $\Sigma$ de diamètre $[AS]$. Dans cette question on suppose que $M$ est distinct de $A$ et de $B$.

**3.** Prouver que la droite $(MB)$ est orthogonale au plan $(AMS)$. En déduire que la droite $(AH)$ est orthogonale au plan $(BMS)$.

Montrer que $H$ appartient au plan $\pi$ passant par $I$ orthogonal à la droite $(BS)$.

**4.** a) Déterminer l'intersection $\Gamma$ de la sphère $\Sigma$ et du plan $\pi$.

b) Prouver que l'ensemble décrit par $H$ lorsque $M$ parcourt C est égal à $\Gamma$. A cet effet, étant donné un point $N'$ de $\Gamma$ distinct de $A$, on pourra montrer que le plan $(AN'S)$ coupe le cercle C en $A$ et en un autre point $M$.

c)

## **Problème 732** *11 points.* *./1988/parisC/pb/texte*

A) L'objet de cette partie est d'étudier la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x\neq 0 \quad \text{et} \quad f(0)=1.$$

On note $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2 cm.

1° Encadrement de $\ln(1+x)$.

a) Prouver que, pour tout réel $t\geqslant 0$ :

$$1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1.$$

b) En intégrant ces inégalités, établir que, pour tout nombre réel $x\geqslant 0$,

$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x. \qquad (1)$$

2° Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}.$$

a) Montrer que $g$ est dérivable et calculer $g'$.

b) Prouver que, pour tout nombre réel $x\geqslant 0$ :

$$0\leqslant g'(x)\leqslant\frac{x^2}{4}$$

(pour majorer $g'(x)$, on minorera $(1+x)(2+x)^2$).

c) En déduire que, pour tout nombre réel $x\geqslant 0$ :

$$0\leqslant g(x)\leqslant\frac{x^3}{12} \qquad (2)$$

3° Variations de la fonction $f$

a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.



Retour page 1

b) Établir que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$ :

$$g(x) \leqslant \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Grâce à ((2)), en déduire le sens de variation de $f$.

4° Étude de $f$ aux bornes de l'intervalle de définition.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) Prouver que :

$$\lim 0 \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Á cet effet, on notera que ((2)) fournit un encadrement de $\ln(1+x)$ et on en déduira un encadrement de $x - \ln(1+x)$.

c) En déduire que $f$ est dérivable en $0$ et calculer $f'(0)$. Donner une équation de la tangente $T$ à $C$ au point d'abscisse $0$ et, grâce à ((1)), préciser la position de $C$ par rapport à $T$.

5° Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer la courbe $C$ et la droite $T$.

B) L'objet de cette partie est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels définie par les relations :

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_0 = c,$$

où $c$ est un nombre réel strictement positif donné.

1° Convergence de la suite $(u_n)$.

a) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et que la suite $(u_n)$ est décroissante.

b) Montrer que cette suite converge. Établir que sa limite $l$ est nulle (on pourra utiliser les variations de $f$).

c) On prend $c = 1$. Á l'aide de la calculatrice, obtenir des valeurs approchées de $u_{10}$, $u_{50}$ et $u_{100}$. Que peut-on conjecturer pour la limite de $nu_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

2° Encadrement de $(u_n)$. Á partir de cette question, on prend $c = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $u_n$. En déduire à l'aide de ((3)), la limite de $v_{n+1} - v_n$.

b) Prouver que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $]0\,;1[$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leqslant \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Á cet effet, on pourra utiliser ((2)) en établissant d'abord que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leqslant \frac{(2+x)^2}{4x^2}g(x).$$

c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

puis que

$$\frac{1}{4} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5}$$

d) En éffectuant la somme des inégalités ((5)), encadrer $v_n - v_0$. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$$\frac{2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n+4}. \tag{6}$$

Déterminer enfin la limite de $nu_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Á cet effet, on établira la majoration :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+3} \leqslant \ln(n+3)$$

et on encadrera $v_n - v_0$ grâce à ((**??**)).



Retour page 1

# VIII. Paris, série E

**Ex. 1952.** ———— *4 points.* *./1988/parisE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère deux cercles C et C', de centres respectifs $O$ et $O'$, de rayons respectifs $r$ et $r'$, sécants en deux points $A$ et $B$.

**1.** a) Placer sur une figure les cercles C et C' et les points $O$, $O'$, $A$ et $B$.

b) Montrer qu'il existe une similitude directe $s$ de centre $A$ et une seule transformant C en C'; préciser son angle et son rapport.

**2.** Soit $M$ un point de C.

a) Construire son image $M'$ par $s$.

b) Comparer les angles orientés $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{O'A},\ \overrightarrow{O'M'})$.

c) Prouver que les points $M$, $B$ et $M'$ sont alignés.

**3.**

**Ex. 1953.** ———— *5 points.* *./1988/parisE/exo-2/texte.tex*

Soient $ABCD$ un tétraèdre régulier, $G$ son isobarycentre et $H$ l'isobarycentre du triangle $ABD$.
On note $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[BD]$.

**1.** a) Démontrer que les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont concourantes en $G$.

b) Démontrer que la droite $(CG)$ coupe le plan $(ABD)$ en $H$.

c) Placer sur une figure les données précédentes.

**2.** Soient $s_1$ la réflexion par rapport au plan $(BIC)$ ey $s_2$ la réflexion par rapport au plan $(ALC)$. On pose $r = s_2 \circ s_1$.

a) Montrer que $(BIC)$ est le plan médiateur du segment $[AD]$ ; en déduire les images de $A$ et de $D$ par $s_1$. Déterminer de même les images de $B$ et de $D$ par $s_2$.

b) Déterminer les images de $A$, $B$, $C$, $D$ et $G$ par $r$.

c) Démontrer que $r$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

## Problème 733 *11 points.* *./1988/parisE/pb/texte*

Le but du problème est d'étudier la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$ et de déterminer des valeurs approchées de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$ qui appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I) 1° a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et étudier le sens de variation de $f'$ sur $[0\,;\pi]$.

b) Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;\pi]$ et construire l'arc de courbe $\Gamma$ correspondant, en prenant 3 cm pour unité graphique (fugure 1).

c) Étudier la parité de $f$. En déduire comment la courbe représentative $\mathscr{C}_0$ de $f$ sur $[-\pi\,;\pi]$ se déduit de $\Gamma$.

2° Pour tout nombre réel $x$, exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ se déduit de $\mathscr{C}_0$ par des translations successives que l'on précisera.

II) 1° a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et une seule appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\pi\right]$.

b) Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$.

2° Soient $c$ un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\Delta_c$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A_c$ d'abscisse $c$.

a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c).$$

Étudier les variations de $\varphi$ et déterminer le signe de $\varphi(x)$.

Retour page 1

b) En déduire que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de $\Delta_c$.

c) Tracer $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, en prenant 30 cm pour unité graphique (figure 2).

3° On suppose maintenant que $c$ appartient à l'intervalle $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$. Exprimer l'abscisse du point d'intersection de $\Delta_c$ et de l'axe $x'Ox$ en fonction de $c$, $f(c)$ et $f'(c)$.

4° Soit $g$ la fonction définie sur $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

a) Démontrer que, pour tout élément de $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, $g(x) \leqslant x$.

Prouver que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ appartenant à $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$.

b) Donner le tableau de variation de $g$ sur $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ et montrer que, si $\alpha \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$, alors $\alpha \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{3}$.

III) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0.$$

1° Placer, sur la figure 2, les points $A_1$ et $A_2$ de $\mathscr{C}$, d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$.

2° a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $x_n$ appartient à l'intervalle $\left[\alpha\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$.

b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduire des questions précédentes que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

3° a) En utilisant votre calculatrice, donner des valeurs approchées $\overline{x_n}$ de $x_n$ pour $n$ élément de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

b) Calculer $f(\overline{x_4} + 5 \times 10^{-9})$. Calculer $f(\overline{x_4} - 5 \times 10^{-9})$. En déduire une valeur décimale approchée de $\alpha$ à $10^{-8}$ près.

# IX. Paris remplacement, série C

Ex. 1954. *5 points* *./1988/parisCrem/exo-1/texte.tex*

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit $\Theta$ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Pour tout $\Theta$ de cet intervalle, on définit le nombre complexe :

$$z(\Theta) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\Theta})^2.$$

**1.** Calculer $(1 + e^{i\Theta})e^{-i\frac{\Theta}{2}}$ ; en déduire que le nombre complexe $(1 + e^{i\Theta})$ a pour argument $\dfrac{\Theta}{2}$.
Calculer le module et un argument de $z(\Theta)$.
Représenter dans le plan complexe, $z(\dfrac{\pi}{6})$.

**2.** Soit $M$ le point d'affixe $z(\Theta)$ et $A$ le point d'affixe 1. On projette orthogonalement $A$ en $P$ sur la droite $(OM)$.
Quel est l'ensemble des points $P$ quand $\Theta$ varie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Calculer la distance $PM$. Pour cela on séparera les cas $\Theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\Theta \in ]-\pi, \frac{-\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

**3.** Donner une construction géométrique de l'ensemble des points $M$ (point par point), quand $\theta$ varie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

**Ex. 1955.** 5 points ./1988/parisCrem/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. L'unité graphique est 4 cm.
Soit $T$ l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = z.|z|.$$

**1.** Construire les images $A'$, $B'$, $C'$ et $D'$ des points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $\frac{1}{2}$, $1+\mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble $E$ des points du plan invariants par $T$.

**3.** $a$ étant un nombre complexe donné, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z.|z| = a$$

(on pourra utiliser la forme trigonométrique des complexes non nuls).
En déduire que $T$ est bijective.

**4.** Déterminer l'image par $T$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de rayon $r$.

**5.** Déterminer l'image par $T$ de la droite $\mathscr{D}$ passant par $O$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \cos\alpha.\vec{e}_1 + \sin\alpha.\vec{e}_2$, où $\alpha$ est un élément de $[0\,;2\pi[$.

## Problème 734 — 10 points ./1988/parisCrem/pb/texte

Soit $E = ]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$.
On se propose d'étudier la fonction $f$, définie sur $E$, par

$$f(x) = x^2 - 8\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

A) 1° Étudier les variations de $f$ (on pourra remarquer que $f'(-2) = 0$), ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $[0\,;pf[$.

2° On pose $\varphi(x) = x^2$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty}(f-\varphi) = 0$ et que $\lim\limits_{-\infty}(f-\varphi) = 0$.
On note $C$ et $\Gamma$ les courbes respectives de $f$ et $\varphi$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Étudier la position de $C$ par rapport à $\Gamma$.

3° a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée $\alpha$, dans $]0\,;+\infty[$.
b) Montrer que $\alpha$ est élément de $]1{,}8\,;1{,}9[$.
c) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

4° Construire $C$ et $\Gamma$ sur une même figure (unité graphique 1cm).

B) Pour tout $x$ supérieur ou égal à 1, on pose

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I(x) = \int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

1° Justifier l'existence de ces intégrales. Interpréter $I(x)$ comme aire d'un domaine plan limité par $C$, $\Gamma$ est deux droites convenablement choisies.

2° Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$I(x) = F(x+1) - F(x) - F(2).$$

3° Calculer $F(x)$ en utilisant une intégration par parties. En déduire $I(x)$.

4° a) Montrer que, pour tout réel $u$ de $[0\,;1]$,

$$0 \leqslant u - \ln(1+u) \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

b) En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \ln x - I(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

c) Déterminer la limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$ de $\frac{I(x)}{\ln x}$.



Retour page 1

# X. Rouen, séries C & E

**Ex. 1956.** 5 points. ./1988/rouenCE/exo-1/texte.tex

Soit $\theta$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

On considère l'équation (E) d'inconnue complexe $z$

$$\cos^2\theta z^2 - 4\cos\theta z + 5 - \cos^2\theta = 0. \tag{E}$$

**1.** Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser pour quelle valeur de $\theta$ l'équation admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.

**2.** Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle $M'$ et $M''$ les points de $P$ dont les affixes respectives sont les nombres $z'$ et $z''$ solutions de l'équation (E).
Montrer que lorsque $\theta$ varie, $M'$ et $M''$ se déplacent sur une hyperbole $(\mathscr{H})$.
Déterminer le centre, les sommets et les asymptotes de $(\mathscr{H})$. Tracer $(\mathscr{H})$.

**Ex. 1957.** 5 points. ./1988/rouenCE/exo-2/texte.tex

Soit dans le plan $P$ orienté un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AC = 2AB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Soit $\mathscr{C}(B)$ le cercle de centre $B$ et de rayon $AB$ et $\mathscr{C}(C)$ le cercle de centre $C$ et de rayon $AC$. Ces deux cercles passent par $A$. On appelle $E$ leur second point d'intersection.

**1.** Soit $S$ une similitude directe transformant $\mathscr{C}(B)$ en $\mathscr{C}(C)$.
Quelle est la valeur du rapport de la similitude $S$ ?
On désigne par $I$ le centre de $S$. Quelle est la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$ ?
Quel est l'ensemble $(\Gamma)$ des centres $I$ des similitudes directes transformant $\mathscr{C}(B)$ en $\mathscr{C}(C)$ ? Représenter cet ensemble.

**2.** Soit $S_A$ la similitude directe de centre $A$ transformant $B$ en $C$. Soit $F$ le point de $\mathscr{C}(C)$ diamétralement opposé à $E$.
Démontrer que l'image de $E$ par $S_A$ est le point $F$.

## PROBLÈME 735 — 10 points ./1988/rouenCE/pb/texte

Le problème prose l'étude d'une famille de fonctions (partie A), d'une suite (partie B) et d'une courbe (partie C) définies à partir de ces fonctions.

A- Dans cette partie, on met en place des résultats qui seront utilisés dans les parties B et C.
On désigne par $\ln$ le logarithme népérien et par $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
On considère, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$, la fonction $f_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

1. Déterminer les limites de $f_n$ aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Étudier les variations de $f_n$.
2. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ de la fonction $f_1$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes.
3. Pour tout réel $X$ supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(X) = \int_1^X f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(La justification de l'existence de $I_n$, propriété connue, n'est pas demandée.)

a) Calculer $I_1(X)$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_n(X)$ en fonction de $n$ et de $X$, pour $n$ supérieur ou égal à 2.
Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale

$$\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Retour page 1

c) Soit $n$ un entier naturel non nul fixé.
Calculer la limite de $I_n(X)$ quand $X$ tend vers $+\infty$. (On distinguera deux cas $n=1$ et $n \geqslant 2$.)
Calculer la limite quand $X$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_2^X f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

B- Étude d'une suite définie à partir de $f_2$.
On considère la fonction $f_2$ définie en A par :

$$f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $k$, $k \geqslant 2$ :

$$f_2(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_2(k).$$

(On pourra utiliser le sens de variation de $f_2$.)

2. On considère la suite $S$ définie par son terme général $S_p = \dfrac{\ln 2}{2^2} + \dfrac{\ln 3}{3^2} + \cdots + \dfrac{\ln p}{p^2}$, où $p$ est un entier supérieur ou égal à 2.
a) Montrer que la suite $S$ est croissante.
b) En utilisant B1, montrer que :

$$S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leqslant \int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_p - \frac{\ln p}{p^2}$$

et en déduire un encadrement de $S_p$.
c) En utilisant la valeur de $\displaystyle\int_2^p f_2(t)\,\mathrm{d}t$ trouvée en A, montrer que la suite $S$ est majorée.
d) Montrer que la suite $S$ est convergente et que sa limite $L$ vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leqslant L \leqslant \frac{1}{2} + 3\frac{\ln 2}{4}.$$

C- Étude d'une courbe définie paramétriquement à partir des fonctions $f_n$.
On considère la courbe $(\Gamma_1)$‘ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

où $t$ est un réel appartenant à l'intervalle $[1\,;10]$.
1. Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à $t$ associent respectivement $x(t)$ et $y(t)$.
2. Représenter la courbe $(\Gamma_1)$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 20 cm). Préciser les points de $(\Gamma_1)$ en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

## XI. Amérique du Nord, série C

**Ex. 1958.** ——— *4 points.* *./1988/ameriquedunordC/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application $f$ de P dans P qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = 2z + \mathrm{i}z.\overline{z}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'ordonnée nulle.

b) Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'abscisse nulle.

c) Déterminer et construire l'ensemble des images des points du cercle de centre $O$ et de rayon 1.



Retour page 1

**Ex. 1959.** ———— *4 points.* ./1988/ameriquedunordC/exo-2/texte.tex

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soient $P_1$ le plan d'équation $-y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ et $P_2$ le plan d'équation $x\sqrt{3}-y+1=0$.
Désignant par $\mathscr{S}_{P_1}$ (resp. $\mathscr{S}_{P_2}$) la symétrie orthogonale par rapport au plan $P_1$ (resp. $P_2$), on se propose de déterminer $f=\mathscr{S}_{P_2}\circ\mathscr{S}_{P_1}$.

**1.** Déterminer :

$$D_1 = P_1\cap(xOy)$$

$$D_2 = P_2\cap xOy.$$

(On pourra faire une figure dans le plan $xOy$.)

**2.** Déterminer, dans le plan $xOy$, muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2})$ où $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$) est un vecteur directeur de $D_1$ (resp. $D_2$).
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de :

$$f=\mathscr{S}_{P_2}\circ\mathscr{S}_{P_1}.$$

## Problème 736 *12 points.* ./1988/ameriquedunordC/pb/texte

Les parties **??** et **??** sont indépendantes.
On se propose, dans ce problème, de résoudre des équations du troisième degré, de la forme :

$$x^3+ax^2+bx+1=0.$$

A) On donne $a=5{,}45$ et $b=-4{,}84$. L'équation correspondante est notée $E_1$.

1°) Étudier les variations de $f:\mathbb{R}\longleftrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto x^3+5{,}45x^2-4{,}84x+1.$$

En déduire que $E_1$ admet une solution négative notée $x_1$, et une solution double positive notée $x_2$.

2°) Donner les valeurs exactes de $x_1$ et de $x_2$.

3°) La plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ avec pour unité de longueur le centimètre et $\left\|\vec{i}\right\|=1,\ \left\|\vec{j}\right\|=0{,}25$.

a) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de $f$.

b) Calculer l'aire en cm$^2$ du domaine plan, ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\begin{cases} x_1\leqslant x\leqslant x_2\\ 0\leqslant y\leqslant f(x).\end{cases}$$

On donnera le résultat en cm$^2$, au mm$^2$ près par défaut.

B) On donne $a=-1$, $b=3$. L'équation correspondante est notée $(E_2)$.

1°) Démontrer que $(E_2)$ a une solution réelle unique notée $\alpha$.

2°) On pose $g(x)=x^3-x^2+3x-1$.
Á l'aide de la calculatrice, déterminer l'entier relatif $k$ tel que

$$\frac{k}{10}<\alpha<\frac{k+1}{10}.$$

3°) Démontrer que $g(x)=0$ équivaut à $x=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$.

Étudier la fonction $\begin{array}{rl} h:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+3}\end{array}$.

Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

4°) On définir pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $(u_n)$ par :

$$u_0=0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}=h(u_n).$$

Retour page 1

a) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$ et classer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$ dans l'ordre croissant.

b) Démontrer que si $(u_n)$ converge, sa limite est solution de $(E_2)$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $-\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 0$.

d) Pour tout $p$ élément de $\mathbb{N}$, on pose $v_p = u_{2p}$ ; $w_p = u_{2p+1}$.

Sachant que $h$ est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;0\right]$, donner le sens de variation de $h \circ h$ sur cet intervalle.

En déduire que $(v_p)$ est décroissante et $(w_p)$ croissante.

e) Prouver que pour $-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $\left|h'(x)\right| \leqslant \dfrac{8}{27}$.

En déduire que $|w_{p+1} - v_{p+1}| \leqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^2 |w_p - v_p|$.

En conclure que la suite $(u_n)$ converge.

f) Calculer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près (on mettra en évidence la méthode choisie).

C)

## XII. Amérique du Sud, séries C & E

**Ex. 1960.** ———— *4 points.* *./1988/ameriquedusudCE/exo-1/texte.tex*

Le plan $P$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout réels $x$ et $y$, $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, c'est aussi celle du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
$A$ est le point d'affixe $2\mathrm{i}$, $D$ la droite d'équation $y = 0$.
$f$ est la fonction complexe de la variable complexe $z$ qui à $z$ non réel associe :

$$z' = \frac{z - 2\mathrm{i}}{z - \overline{z}}.$$

$F$ associe à tout point $M$ de $P - \{D\}$ d'affixe $z$, le point $M'$ d'affixe $z'$.

**1.** Exprimer les parties réelle et imaginaire de $z'$ en fonction de celles de $z$ et déduire que $f$ définit une bijection de $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à déterminer.

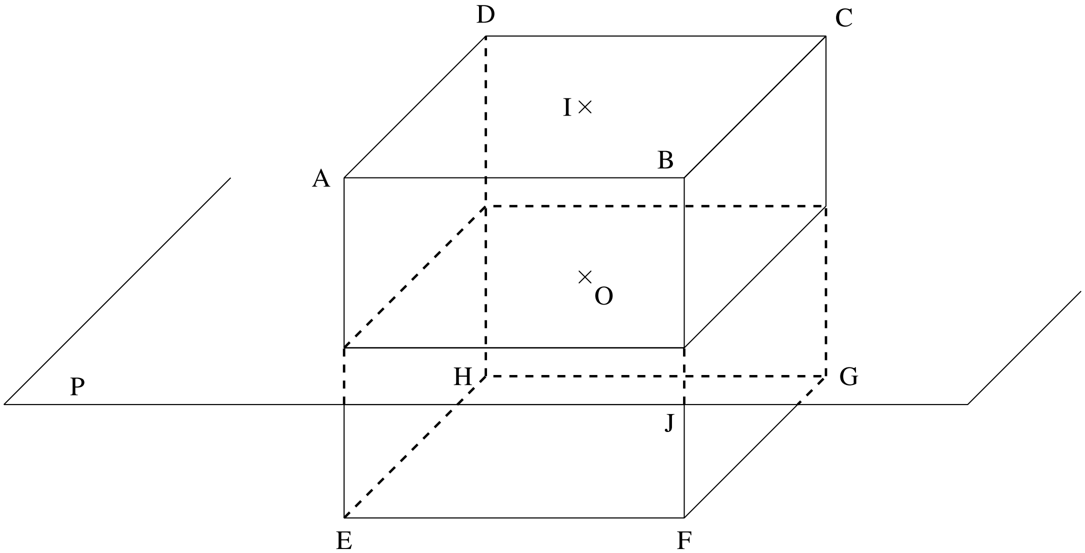
**2.** $B$ est le point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives par $F$ des demi-droites ouvertes d'origine $O$ portées par l'axe imaginaire, l'axe imaginaire étant l'ensemble des points d'abscisse nulle.

**3.** Quelle est l'affixe du projeté orthogonal $H$ sur $D$ du point $M$ d'affixe $z$ ?

Quelle est celle de $\overrightarrow{HM}$ ?

Montrer que l'ensemble des points d'affixe $z$ tels que $|f(z)| = \dfrac{1}{2}$ est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

**Ex. 1961.** ———— *6 points.* *./1988/ameriquedusudCE/exo-2/texte.tex*




$A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ sont les sommets d'un cube tel que $ABCD$ soit une face horizontale, $EFGH$ l'autre, et que la translation de vecteur vertical $\overrightarrow{AE}$ transforme $B$ en $F$, $C$ en $G$ et $D$ en $H$.
$P$ désigne la plan horizontal passant par le centre $O$ du cube, $(ABC)$ celui passant par $A$, $B$ et $C$, $s_P$ la réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport à $P$.
$I$ et $J$ sont les centres respectifs des carrés $ABCD$ et $EFGH$.
Il s'agit de déterminer les rotations de l'espace qui transforment tout sommet de l'une des faces horizontales en un sommet de l'autre.

**1.** a) On suppose que $s$ est une réflexion transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{E, F, G, H\}$.
Déterminer $s(I)$ et $s(J)$.

b) Déduire qu'il existe une seule réflexion transformant $\{A, B, C, D\}$ en $\{E, F, G, H\}$.

**2.** Pour toute rotation $r$ échangeant $\{A, B, C, D\}$ en $\{E, F, G, H\}$, déterminer $r(I)$, $r(J)$ et $r(O)$.
Déduire que l'axe de $r$ passe par $O$, qu'il est horizontal et que $r$ est un demi-tour.

**3.** Soit $r$ un demi-tour d'axe horizontal $L$ passant par $O$.

a) Déterminer $r \circ r_P(I)$ et $r \circ s_P(M)$ pour tout point $M$ de $L$.
Déduire que $r \circ s_P$ est la réflexion $s_Q$ par rapport au plan vertical contenant $L$.

b) On note $\Delta$ la droite intersection des plans $Q$ et $(ABC)$.
Montrer que $(ABC)$ est stable par $s_Q$. Quelle est la restriction de $s_Q$ à ce plan $(ABC)$.

c) Montrer que $r$ est solution si et seulement si la symétrie orthogonale $s_\Delta$ par rapport à $\Delta$, isométrie du plan $(ABC)$, laisse invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

**4.** Déduire les quatre demi-tours solutions.

## Problème 737 *10 points.*

*./1988/ameriquedusudCE/pb/texte*

I) Pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, on note $f_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\text{si } n = 0 \qquad f_0(x) = \mathrm{e}^{1-x},$$

$$\text{si } \ n \in \mathbb{N}^\star \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé.

1° Étudier $f_0$. Tracer $(\mathscr{C}_0)$ en précisant la droite asymptote quand $x$ tend vers $+\infty$ et les tangentes à $(\mathscr{C}_0)$ aux points d'abscisses 0 et 1.

2° On se propose d'étudier $f_n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

a) Étudier les variations de $f_n$ (on distinguera plusieurs cas).

b) Montrer que $(\mathscr{C}_n)$ admet une droite asymptote quand $x$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

3° a) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ dans un même repère. L'étude des branches infinies en $-\infty$ n'est pas demandée.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. (On pourra remarquer une relation simple entre $f_1$, $f_2$ et $f_2'$.)

II) Soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ et $\alpha$ un réel strictement positif fixé.
On considère l'intégrale $I_n$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\alpha} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1° a) Calculer $I_0$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\alpha^n}{n!} I_0$.

c) On admettra que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.
En déduire la limite de $I_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

2° a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = I_n - \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{1-\alpha}$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \mathrm{e} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{1-\alpha}$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## XIII. Antilles & Guyane, série C & E

**Ex. 1962.** *4 points.* *./1988/antillesC/exo-1/texte.tex*

Le plan $(P)$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan $(P)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation :

$$25(x^2+y^2) = (3x-16)^2. \tag{1}$$

**1.** En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que $(E)$ est une conique de foyer $O$ et de directrice la droite $(\Delta)$ d'équation $x = \dfrac{16}{3}$.
Donner la nature et l'excentricité de $(E)$.
Dans la suite de l'exercice, $M$ désigne un point de $(E)$ et $\theta$ est un détermination de l'angle de vecteur $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$.

**2.** a) Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre $OM$ et l'abscisse $x$ de $M$.

b) Démontrer que

$$OM = \frac{16}{5+3\cos\theta}.$$

**3.** On suppose ici que $\theta$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
La droite $(OM)$ coupe $(\Delta)$ en $I$ et recoupe $(E)$ en un point $M'$.

a) Démontrer que $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'}$ est indépendante de $M$.

b) Démontrer que $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$.

Retour page 1

**Ex. 1963.** *4 points.* ./1988/antillesC/exo-2/texte.tex

On considère dans le plan orienté $(P)$, deux points distincts $A$ et $B$.
Pour tout point $M$ de $(P)$, on appelle $M'$ l'image de $M$ dans la rotation $r_A$ de centre $A$, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et $M''$ l'image de $M$ dans la rotation $r_B$ de centre $B$, d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

**1.** De l'étude de $r_B \circ r_A^{-1}$, déduire que pour tout point $M$ de $(P)$, le milieu de $[M'M'']$ est un point fixe $J$ dont on démontrera qu'il appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

**2.** Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points $M$ pour lesquels $M$, $M'$ et $M''$ sont alignés.

a) Pour tout point $M$ de $(P)$ distinct de $A$ et $B$, démontrer que :

$$(\overrightarrow{MM'},\ \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } 2\pi.$$

b) En déduire l'ensemble des points $M$ du plan tels que $M$, $M'$, $M''$ soient alignés.

## Problème 738 *12 points.*

./1988/antillesC/pb/texte

A) On considère la fonction numérique $g$ définie sur $I = \left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

1° a) Démontrer que, pour tout $t$ de $I$, on a :

$$g'(t) = -\frac{t^3}{1+t}.$$

b) En déduire que, pour tout $t$ de $I$, on a : $\left|g'(t)\right| \leqslant 2\,|t|^3$.

2° Par application de l'inégalité des accroissements finis, déduire de ce qui précède que pour tout $x$ de $I$ on a $|g(x)| \leqslant 2x^4$ (on pourra distinguer deux cas suivant le signe de $x$).

B) Soit $f$ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° En utilisant les encadrements obtenus au A, démontrer que la fonction $f$ est dérivable en zéro et préciser une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse $0$ à la courbe $(C)$.

2° Soit $h$ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x).$$

a) Étudier le sens de variation de $h$. (On ne demande pas d'étude aux bornes).

b) Préciser $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$.

3° Calculer $f'(x)$ pour $x$ appartenant à $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et l'exprimer à l'aide de $h(x)$.
En déduire le sens de variation de $f$.

4° Étudier les limites de $f$ en $-1$ et $+\infty$.

5° Construire avec soin $(C)$ en précisant ses asymptotes (on prendra 2 cm comme unité).

C) 1° a) Démontrer que, pour tout $t$ positif ou nul, on a $-t^2 \leqslant h'(t) \leqslant 0$.

b) Pour tout réel $x$ positif ou nul, en déduire par intégration, un encadrement de $h(x)$ et démontrer que $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$.



Retour page 1

2° Soit $\Phi$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\Phi(x) = f(x) - x$. De l'étude des variations de $\Phi$, déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution réelle strictement positive notée $\alpha$.
Vérifier que $\alpha < 1$.

D) 1° On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.
Montrer par récurrence sur $n$, en utilisant le sens de variation de $f$, que cette suite est bien définie et que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

2° a) Démontrer, en appliquant à $f$ l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|.$$

En déduire que :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

c) En déduire, en justifiant, une valeur de $n$ pour laquelle $u_n$ constitue une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près. Préciser cette valeur approchée.

## XIV. Antilles & Guyane remplacement ? ? ? ?, série C & E

**Problème 739** *12 points.* *./1988/antillesCrem/pb/texte*

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel supérieur où égal à 2.

A. 1° Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{n}y = 0. \tag{1}$$

2° On considère l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}. \tag{2}$$

Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction affine $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution ((2)).

3° a) Montrer que, pour que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de ((2)), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de ((1)).

b) En déduire toutes les solutions de ((2)).

c) Déterminer celle des solutions, $f$, vérifiant $f(0) = 0$.

B. On considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - \mathrm{e}^{\frac{x}{n}}.$$

1° Étudier le signe de $f_n'$. En déduire le tableau de variation de $f_n$.
On montrera en particulier que $f_n$ admet un maximum strictement positif que l'on calculera.

2° Montrer que la courbe $C_n$ représentant $f_n$ admet une asymptote dont on précisera l'équation.
Tracer $C_2$.

3° Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera $x_n$.

C. On se propose dans cette partie de montrer que la suite $(x_n)$ avec $n \geqslant 2$ admet une limite $\ell$ et de calculer $\ell$.
A cett effet on cherche à réaliser un encadrement de $x_n$.

1° On considère la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{2}{x}+\ln\frac{x-1}{x+1}.$$

a) Déterminer le signe de $\varphi'$. En déduire le signe de $\varphi$.

b) Montrer que $\varphi(n)<0$ puis que $f_n(-2)<0$.

c) En déduire que $x_n>-2$.

2° a) Établir l'égalité :

$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}+\ln\frac{n}{n+1}\right].$$

b) on considère la fonction $\psi$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\psi(x)=\frac{2x+1}{2x(x+1)}+\ln\frac{x}{x+1}.$$

Établir le signe de $\psi'$. En déduire le signe de $\psi$, puis celui de

$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right).$$

c) Montrer que : $x_n<2n\ln\dfrac{n}{n+1}$.

3° a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)$. On pourra poser $u=\dfrac{1}{n}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\ell$.

## XV. Nouvelle Calédonie, série C

**Ex. 1964.** ——— *4 points.* *./1988/nllecaledonieC/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(I,\ \vec{i},\ \vec{j})$. Soit $\alpha$ un réel non nul.
On désogne par $O_1$ le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$, et par $O_2$ le point de coordonnées $(-\alpha\ ;\ 0)$.

— $P_1(\alpha)$ est la parabole de sommet $I$ et de foyer $O_1$.

— $P_2(\alpha)$ est la parabole de sommet $O_1$ et de foyer $O_2$.

**1.** Montrer que les équations des paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ dans le repère $(I,\ \vec{i},\ \vec{j})$ sont respectivement $y^2=4\alpha x$ et $y^2=-8\alpha x+8\alpha^2$.

**2.** a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection $M_\alpha$ et $N_\alpha$ des deux paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$. On désignera par $M_\alpha$ le point d'intersection dont l'ordonnée est du signe de $\alpha$.

b) En déduire l'ensemble des points $M_\alpha$ et $N_\alpha$ lorsque $\alpha$ décrit $\mathbb{R}^\star$.

**3.** Montrer que $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ sont respectivement les images de $P_1(1)$ et $P_2(1)$ par l'homothétie de centre $I$ et de rapport $\alpha$. En déduire que $\overrightarrow{IM_\alpha}=\alpha\overrightarrow{IM_1}$ et $\overrightarrow{IN_\alpha}=\alpha\overrightarrow{IN_1}$ et retrouver le résultat obtenu au 2b).

**Ex. 1965.** ——— *4 points.* *./1988/nllecaledonieC/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace orienté on considère un carré de sommets $A,\ B,\ C,\ D$ et de centre $O$.
On désigne par $E$ le point défini par $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$.
Soit $f$ une isométrie laissant globalement invariant l'ensemble $\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$.

**1.** a) Montrer que les images par toute isométrie des points $A,\ B,\ C,\ D$ sont coplanaires.
En déduire que l'ensemble $\{A,\ B,\ C,\ D\}$ est globalement invariant par $f$ et montrer que $E$ est invariant.

b) En remarquant que $O$ est l'isobarycentre des points $A,\ B,\ C,\ D$, démontrer que $O$ est invariant par $f$.

**2.** Si $f$ est une rotation, quel est son axe ?
En déduire toutes lse rotations laissant l'ensemble $\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$ globalement invariant.

**3.** Montrer que si $f$ est une réflexion, son plan contient la droite $(OE)$.
En déduire toutes les réflexions laissant l'ensemble $\{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}$ globalement invariant.

**PROBLÈME 740** *12 points.* ./1988/nllecaledonieC/pb/texte

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A) Distance du point $A(1\ ;\ 1)$ à la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

1° Construire, sur la feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathscr{C})$ en précisant les points d'abscisses 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 (unité : 5 cm ; le point $A$ étant approximativement au centre de la feuille).

2° Exprimer en fonction de l'abscisse $x$ d'un point $M$ de $(\mathscr{C})$ la distance $d(x)$ de $A$ à $M$.
Calculer la dérivée $d'$ de la fonction $d$ et montrer que pour tout réel $x$, $d'(x)$ est du signe de $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} + x - 1$.

3° Montrer que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et préciser le comportement de $g(x)$ quand $x$ tend vers plus l'infini et quand $x$ tend vers moins l'infini. On pourra remarquer que $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})$.
La représentation graphique de $g$ n'est pas demandée.

4° Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $x_0$ dans $\mathbb{R}$ et que $x_0$ appartient à $]\ln 2\,;\,1[$.

5° Montrer que la fonction $d$ admet un minimum absolu en $x_0$.
Dans la suite du problème on notera $M_0$ le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $x_0$. Par définition la distance de $A$ à $(\mathscr{C})$ est $d_0 = AM_0 = d(x_0)$.

6° Montrer que la tangente en $M_0$ à la courbe $(\mathscr{C})$ est perpendiculaire à la droite $(AM_0)$.

B) Évaluation de la distance $d_0$.

On considère l'application $h$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On désigne par $(\Gamma)$ la courbe représentative de $h$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1° Évaluation graphique.

a) Dresser le tableau de variation de $h$ (on précisera le comportement de $h(x)$ quand $x$ tend vers plus l'infini et quand $x$ tend vers moins l'infini).

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $(\Gamma)$.

c) Construire $(\Gamma)$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$ en précisant les points d'abscisses 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1.

d) Montrer que $(\Gamma)$ coupe la droite d'équation $y = x$ en un point $H_0$ de même abscisse que $M_0$ ; utiliser les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\Gamma)$ pour construire $M_0$ et mesurer la distance $d_0$ en utilisant une règle graduée.

2° Approximation de $d_0$.
On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = h(U_n) \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $x$ de $[\ln 2\,;\,1]$, $h(x)$ appartient à $[\ln 2\,;\,1]$.
En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $U_n$ appartient à $[\ln 2\,;\,1]$.

b) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante. (on utilisera un raisonnement par l'absurde).
En déduire que $(U_n)$ est convergente et montrer que sa limite est $x_0$.

c) Donner une valeur approchée de $U_4$ à $10^{-4}$ près, puis une valeur approchée de $d(U_4)$.

# XVI. Polynésie, série C

**Ex. 1966.** 5 points. ./1988/polynesieC/exo-1/texte.tex

Dans un plan $P$, on considère trois points $A$, $B$, $C$ non alignés. On note $I$, $J$, $K$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et $G$ l'isobarycentre de $(A,\ B,\ C)$.
Pour tout point $M$ du plan, on note $P$, $Q$ et $R$ les symétriques de $M$ par rapport à $I$, $J$ et $K$. On se propose de prouver que les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont le même milieu, noté $O$, et que les points $M$, $G$ et $O$ sont alignés.

**1.** Placer les points et les segments précédents sur une figure.

Retour page 1

**2.** Montrer qu'il existe une homothétie $h_1$ et une seule transformant $A$, $B$, $C$ en $I$, $J$, $K$ respectivement et déterminer cette homothétie.

**3.** Déterminer l'homothétie $h_2$ transformant $(I, J, K)$ en $(P, Q, R)$.

**4.** Préciser la nature de $f = h_2 \circ h_1$. Conclure.

Ex. 1967. ——— *4 points.* *./1988/polynesieC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts $A$ et $B$.
Sur la figure, on prendra 6 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Étudier et construire l'ensemble $E$ des points $M$ du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$.
2. Étudier et construire l'ensemble $E'$ des points $M$ du plan tels que

$$(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

3. Soit $C$ l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et dont l'angle admet pour mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ et $D$ le point tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
   On désigne par $s$ la similitude directe transformant $A$ en $B$ et $C$ en $D$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de $s$.
   b) On note $I$ le centre de la similitude $s$. Exprimer $IB$ en fonction de $IA$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IB})$.
   En déduire la position du point $I$ et le placer sur la figure.
   c) Démontrer que $I$ appartient au cercle circonscrit au triangle $ACD$. (On ne demande pas de tracer ce cercle.)

**PROBLÈME 741** *11 points.* *./1988/polynesieC/pb/texte*

Le problème a pour objectif d'étudier le comportement des primitives successives de la fonction logarithme.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

A- **Étude d'un exemple.**

1. Soit $f_0$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_0(x) = \ln x$.
   a) Rappeler brièvement l'allure de la courbe représentative de cette fonction.
   b) En effectuant une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.
   c) Soit $f_1$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_1(x) = x(\ln x - 1)$. Montrer que $f_1$ est l'unique primitive de $f_0$ admettant $0$ pour limite en $0$.
2. Soit $f_2$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)$.
   a) Calculer la dérivée de $f_2$.
   b) Déterminer les limites de $f_2$ en $0$ et en $+\infty$.
   c) On prolonge $f_2$ par continuité en $0$ ; montrer que la fonction $g$ ainsi obtenue est dérivable en $0$.
   d) Dresser le tableau de variations de $g$.
   e) Préciser la tangente $T$ à la courbe représentative $C$ de $g$ au point $A$ d'abscisse $1$.
   Étudier la position relative de $C$ et de $T$. À cet effet, on précisera le signe de la fonction $h$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = g(x) + x - \dfrac{1}{4}$ en étudiant sa dérivée $h'$ et sa dérivée seconde $h''$.
   f) Construire la courbe $C$, la tangente $T$ ainsi que les tangentes aux points où $C$ rencontre $(Ox)$.

B- **Étude du cas général.** Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de nombres réels, et, pour tout entier naturel $n$, la fonction $\varphi_n$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x^n\left[a_n \ln x - b_n\right].$$

1. On suppose que $\varphi_0(x) = \ln x$ (c'est-à-dire que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$) et que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\varphi'_{n+1} = \varphi_n$.
   a) Expliciter les relations de récurrence reliant $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ à $a_n$ et $b_n$.
   b) Calculer $a_n$.
   c) On pose $\alpha_n = n!b_n$ ; calculer $\alpha_{n+1} - \alpha_n$, en déduire $\alpha_n$.
   d) Prouver finalement que, nécessairement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\varphi_n = \frac{1}{n!}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (1)$$

2. On définit désormais $\varphi_n$ par la relation (1), pour $n \geqslant 1$.
   1. Contrôler que $\varphi_n$ satisfait aux conditions de la question B1.
   2. Expliquer pourquoi $\varphi_1 = f_1$ et $\varphi_2 = f_2$.
   3. Prouver que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}.$$

   En déduire que

$$\ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n + 1.$$

   4. Montrer enfin que, sur $]0\,;+\infty[$, $\varphi_n$ s'annule en un point $x_n$ et un seul, et que $n \leqslant x_n \leqslant ne$.
3.

# XVII. Réunion, série C

**Ex. 1968.** ——— *4 points.* *./1988/reunionC/exo-1/texte.tex*

Soit $\theta$ un réel tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
La suite $(u_n)$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

**1.** Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de $\theta$. (On rappelle que, pour tout réel $x$, on a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.)

**2.** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

**3.** Soit $(v_n)$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = \dfrac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

**4.** En déduire que $(u_n)$ est convergente ; quelle est sa limite ?

1. 2. . 3. 4.

**Ex. 1969.** ——— *4 points.* *./1988/reunionC/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A$, $B$ et $C$ de coordonnées respectives $(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $(3\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $(2\ ;\ 8\ ;\ -4)$. Aucune figure n'est demandée.

**1.** Un point $M$ étant de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, exprimer en fonction de $x$, $y$ et $z$ les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

**2.** Résoudre le système :

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$$

On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.



Retour page 1

**3.** Montrer qu'il existe un unique point $N$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN}$et donner les coordonnées du point $N$.

**4.** On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ représente l'aire d'une base et $h$ la hauteur correspondante. Le point $N$ étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\dfrac{1}{6}CN^2$.

# CHAPITRE XXXI

# 1989.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

— groupe II : Amiens, Lille & Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers & Orléans-Tours.

## I. Groupe I, série C & E

**Ex. 1970.** ———— *4 points.* *./1989/groupeICE/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points :

$$A(4\ ;\ -1)\ ;\qquad B\left(1+\sqrt{3}\ ;\ 2+\sqrt{3}\right)\ ;\qquad C\left(2-2\sqrt{2}\ ;\ 1\right)\ ;\qquad D(0\ ;\ -1).$$

Placer ces points en prenant 1,7 comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ et 1,4 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.
On désigne par $a$, $b$, $c$, $d$ les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$, $D$.

**1.** Montrer que

$$\frac{a-c}{d-c} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)(1+\mathrm{i}).$$

On admettra que $\dfrac{a-b}{d-b} = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

**2.** Déduire de ces résultats les mesures respectives des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}\right)$.
Montrer que les points $A$, $B$, $C$, $D$ sont sur un cercle $(\mathscr{C})$.
Construire son centre $\Omega$ puis dessiner $(\mathscr{C})$.

**3.** On considère la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Quelle est l'image de $D$ par cette rotation.
En écrivant l'expression complexe de cette rotation trouver l'affixe de $\Omega$.

**Ex. 1971.** ——— *4 points* ./1989/groupeICE/exo-2/texte.tex

$FGH$ est un triangle équilatéral de côté de longueur $\ell$.
Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole de foyer $F$, de directrice $(GH)$ et d'excentricité 2.

**1.** Déterminer les sommets $S$ et $S'$ de cette hyperbole (on remarquera que $S$ et $S'$ sont sur la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FGH$), son centre $O$ et le deuxième foyer $F'$.
Calculer, en fonction de $\ell$, la distance des sommets $2a$ et la distance des deux foyers $2c$.

**2.** On choisit le repère orthonormal $(O\ ;\ \overrightarrow{i},$
$vecteurj)$ où $O$ est le centre de l'hyperbole et $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de la demi-droite $[OF)$. Ecrire une équation de $(\mathscr{H})$. Donner l'allure de $(\mathscr{H})$.

# II. Groupe II, série C & E

**Ex. 1972.** ——— *4 points.* ./1989/groupeIICE/exo-1/texte.tex

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On notera $A$ le point d'affixe $-1+2\mathrm{i}$ et $B$ le point d'affixe $2-\mathrm{i}$.

**1.** Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble $(E_1)$ des points $M$ de (P) d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que :

$$z^2 - (1-2\mathrm{i})^2 = \overline{z}^2 - (1+2\mathrm{i})^2$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.
Vérifier que $A$ et $B$ appartiennent à $(E_1)$.

**2.** Déterminer et représenter dans le plan (P) l'ensemble $(E_2)$ des points $M$ de (P) d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que :

$$(z - (1+\mathrm{i}))(\overline{z} - (1-\mathrm{i})) = 5.$$

Vérifier que $A$ et $B$ appartiennent à $(E_2)$.

**Ex. 1973.** ——— *4 points.* ./1989/groupeIICE/exo-2/texte.tex

Soit $ABC$ un triangle isocèle du plan tel que $AB = AC$. On note $I$ le milieu de $[BC]$ et on donne $AI = 4a$ et $BC = 2a$, où $a$ est un réel strictement positif ; l'unité de longueur dans le plan étant le centimètre ; on prendra $a = 2$ pour la figure demandée au 1.
On note $G$ le barycentre du système $\{(A,\ 2),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$.

**1.** En utilisant $G$, déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|.$$

faire une figure où l'on représentera le triangle $ABC$ et l'ensemble $(E)$.

**2.** $k$ étant un nombre réel, déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = ka^2.$$

On discutera suivant les valeurs de $k$.

# III. Groupe III, série C & E

**Ex. 1974.** ——— *4 points.* ./1989/groupeIIICE/exo-1/texte.tex

On se propose d'étudier la suite $(u_n)$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $n$ par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ de } \mathbb{N}$$

puis la convergence de la suite $(S_n)$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$, pour tout entier $n$.

**1.** a) Montrer que pour tout entier $n$, $u_n$ est positif.

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c) En déduire qu'elle converge et trouver sa limite ;

**2.** Montrer que, pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$$

et ne déduire que $S_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers l'infini.

Ex. 1975. ———— *4 points.* *./1989/groupeIIICE/exo-2/texte.tex*

**1.** Soient $A$, $B$ et $C$ quatre points distincts de l'espace.
Démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont orthogonales si et seulement si :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

(On pourra par exemple exprimer $AC^2 - AD^2$ ainsi que $BC^2 - BD^2$ sous forme de produits scalaires.)

**2.** On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que $(AB)$ est perpendiculaire à $(CD)$, et $(BC)$ perpendiculaire à $(AD)$.
Montrer que $(BD)$ est perpendiculaire à $(AC)$.

# IV. Groupe IV, séries C & E

Ex. 1976. ———— *4 poinst.* *./1989/groupeIVC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté on donne un point $O$ et une droite orienté $D$ passant par $O$.
Soit $D'$ la droite orientée se déduisant de $D$ par le quart de tour direct de centre $O$.
Soit $I$ un point du plan n'appartenant ni à $D$ ni à $D'$, $H$ et $H'$ les projections orthogonales de $I$ respectivement sur $D$ et $D'$.
On supposera $I$ choisi de telle sorte que $\overline{OH} > 0$ et $\overline{OH'} > 0$.
Les figures demandées seront réalisées en choisissant $OH = 4$ cm et $OH'$=2 cm.
A chaque point $M$ de $D$ distinct de $O$, on associe le cercle $C_M$ passant par $O$, $I$ et $M$.

**1.** a) Si $M$ est en $O$, on convient que $C_O$ est le cercle tangent en $O$ à $D$ passant par $I$.
Préciser le centre de $C_O$ et placer ce cercle sur la figure.

b) Montrer qu'il existe un point $A$ de $D$ et un seul tel que le cercle $C_A$ soit tangent à $D'$.
Présicer le centre de $C_A$ et placer ce cercle sur la figure.
Le cercle $C_M$ s'il n'est pas tangent à $D'$, recoupe cette droite en un point $M'$ autre que $O$ (en particulier $C_O$ recoupe $D'$ en un point $O'$).
Si $M$ est en $A$, on convient que $A' = O$.
On se propose d'étudier la transformation qui à tout point $M$ de $D$ associe $M'$.

**2.** Soit $s$ l'unique similitude directe du plan associant $O$ à $O'$ et $A$ à $A' = O$. On précise que $O$ a pour image $O'$ et que $A$ a pour image $O$.

a) Montrer que l'angle de $s$ admet pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) Déterminer le centre de cette similitude (on établira qu'il appartient à $C_O$ et $C_A$).

c) Déterminer l'image de $H$ par $s$ et en déduire le rapport de $s$.

**3.** Prouver que pour tout point $M$ de $D$,

$$s(M) = M'.$$

Retour page 1

Ex. 1977. ———— *4 points.* ./1989/groupeIVC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle $ABC$ tel que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Soit $I$ le milieu du segment $[BC]$.
On note $r_B$ la rotation de centre $B$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$,
$r_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$,
$t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
On se propose de trouver *par deux méthodes* la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s = r_C \circ t \circ r_B$.

**1.** *Première méthode : utilisation des nombres complexes.*
On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$

a) Donner l'écriture complexe des transformations $r_B$, $r_C$, $t$ puis $s$.

b) Caractériser alors $s$.

**2.** *Deuxième méthode : utilisation des propriétés des transformations.*

a) Déterminer, sans calcul, la nature de $s$.

b) Préciser l'image de $B$ par $s$.

c) Caractériser $s$.

## Problème 742 *12 points.* ./1989/groupeIVC/pb/texte

Le but du problème est d'étudier la fonction $f$ dé finie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$$

et de construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$, ce qui fait l'objet de la partie **??** puis de décrire un procédé d'approximation du nombre $\alpha$ pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie 742

A- **Étude de $f$ et construction de $\mathscr{C}$**

1. *Étude d'une fonction auxiliaire*
Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

a) Étudier le sens de variation de $g$ et ses limites en $0$ et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de $g$.)

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ et une seule et que $1{,}30 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}35$.

c) Étudier le signe de $g(x)$.

2. *Étude de $f$*

a) Étudier les limites de $f$ en $0$ et $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$.En déduire le sens de variation de $f$.

3. *Construction de la courbe $\mathscr{C}$*
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On choisit pour unité graphique 2 cm.

a) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Déterminer le point d'intersection $B$ de $\mathscr{C}$ et $\Delta$ ; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta$, en précisant la tangente en $B$ à $\mathscr{C}$.

4. *Calcul d'une aire*
Pour tout nombre réel $t \geqslant \mathrm{e}$, calculer l'aire $\mathscr{A}(t)$ de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$ et $\Delta$ et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = t$.

B- **Approximation de $\alpha$**

1. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où $h$ est la fonction définie sur $I = [1{,}30\,; 1{,}35]$ par : $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

b) Justifier la décroissance de $h$ sur $I$ et montrer que pour tout élément $x$ de $I$, $h(x)$ appartient à $I$.

c) Prouver que, pour tout élément $x$ de $I$,

$$-\frac{1}{3} \leqslant h'(x) \leqslant 0.$$

d) En déduire que pour tout élément $x$ de $I$,

$$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x - \alpha|.$$

2. Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $I$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1{,}30$.

a) Montrer que pour tout entier $n$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|.$$

b) Montrer que pour tout entier $n$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

d) Préciser un entier $n_0$ tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$ et donner la valeur de $u_{n_0}$.

## V. National remplacement, séries C & E

**Ex. 1978.** ——— *4 points.* *./1989/nationalCErem/exo-1/texte.tex*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $A$ et $B$ distincts d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.
Soient $A'$ l'image de $A$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $B'$ l'image de $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer les affixes $z_1'$ et $z_2'$ des points $A'$ et $B'$ en fonction de $z_1$ et $z_2$.
2. Quelle est l'affixe du milieu $I$ de $[A'B']$ ?
3. Quelle est l'affixe du point $H$ défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB}$ ?
4. Déduire des questions précédentes que la médiane $(OI)$ du triangle $OA'B'$ est une hauteur du triangle $OAB$ telle que $OI = \frac{1}{2}AB$.

**Ex. 1979.** ——— *4 points.* *./1989/nationalCErem/exo-2/texte.tex*

On considère dans le plan orienté un triangle $ABC$.
Soit :

— $G$ le barycentre du système $\{(A,\ 3),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$

— $Q$ le barycentre du système $\{(A,\ 3),\ (C,\ 1)\}$ et

— $R$ le barycentre du système $\{(A,\ 3),\ (B,\ 1)\}$.

1. Montrer que les droites $(BQ)$ et $(CR)$ passant par $G$.
2. Soit $P$ le milieu de $[BC]$, démontrer que les points $A,\ P,\ G$ sont alignés. Exprimer $\overrightarrow{PG}$ en fonction de $\overrightarrow{PA}$.
3. On suppose $B$ et $C$ fixes et que le point $A$ décrit l'ensemble E des points $M$ du plan tels que $(\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo $\pi$.
Déterminer l'ensemble E' décrit par le point $G$.

Retour page 1

## PROBLÈME 743 *12 points.*

*./1989/nationalCErem/pb/texte*

Dans tout le problème $n$ désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel positif $x$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 3 cm).

A- 1. É ?tudier les variations de la fonction $f_1$ et déterminer sa limite en $+\infty$.. Tracer $\mathscr{C}_1$ en précisant la tangente a ? l'origine.

2. Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, étudier les variations de la fonction $f_n$ et déterminer sa limite en $+\infty$. Tracer $\mathscr{C}_3$ sur une nouvelle feuille, en précisant la tangente a ? l'origine.

3. On note $s_n$ la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = n$ et $\mathscr{C}'_n$ l'image de $\mathscr{C}_n$ par $s_n$.

a) $M$ étant le point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$, calculer les coordonnées de son image par $s_n$.

b) Montrer que $\mathscr{C}'_n$ est l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient : $x \leqslant 2n$ et $y = f_n(2n - x)$.

c) Tracer $\mathscr{C}'_3$ sur la même feuille que $\mathscr{C}_3$. Pour $x \leqslant 2n$, on pose $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

d) En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$$\int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Pour $x$ élément de $[0\,;n]$, on pose $h_n(x) = \ln[g_n(x)] - \ln[f_n(x)]$.

a) De l'étude des variations de $h_n$, déduire le signe de $h_n(x)$.

b) Montrer que pour tout $x$ appartenant àl'intervalle $[[0\,;n]$ on a : $f_n(x) \leqslant g_n(x)$.

c) Déduire de ce qui précède l'inégalité : $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

B- Pour tout réel positif $x$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que la fonction $F_n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Á l'aide d'intégrations par parties :

a) Calculer $F_1(x)$.

b) Démontrer que, pour tout réel positif $x$ et pour tout entier $n$ supérieur ou égal a ? 1, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

3. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif $x$ et tout entier $n$ supérieur ou égal à 1,

$$F_n(x) = n!\left[1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right].$$

4. a) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = n!$.

b) Démontrer que pour tout réel $x$ positif ou nul on a : $F_n(x) \leqslant n!$.

C- 1. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant n!.$$

2. Déduire des résultats des parties A et B que, pour tout entier $n$ supérieur ou 1, on a

$$0 \leqslant F_n(n) \leqslant \frac{n!}{2}$$

puis $$\frac{1}{2}\mathrm{e}^n \leqslant 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} \leqslant \mathrm{e}^n.$$



Retour page 1

# VI. Japon, série C & E

Ex. 1980. ./1989/japonC/exo-1/texte.tex

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

**1.** Pour tout point $M$ du plan, on note $z$ son affixe.

a) Vérifier que l'ensemble des points $M$ tels que $\overline{z} + z + 4 = 0$ est une droite $\mathscr{D}$. Tracer $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que, pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, la distance de $M$ à $\mathscr{D}$ est :

$$\frac{1}{2}\left|z + \overline{z} + 4\right|.$$

**2.** On note $F$ le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et $\mathscr{P}'$ la plan $\mathscr{P}$ privé de la droite $\mathscr{D}$.
Soit $E$ l'ensemble des points $M$, d'affixe $z$, de $\mathscr{P}'$ tels que :

$$\left|\frac{z - 1 - \mathrm{i}}{z + \overline{z} + 4}\right| = \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Démontrer que $E$ est une conique à centre dont on précisera l'excentricité et la nature. Vérifier que $E$ passe par $O$.

# VII. Paris, série C

Ex. 1981. *5 points.* ./1989/parisC/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par

$$z' = -jz + \mathrm{i}, \quad \text{où} \quad j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

**1.** Montrer que $f$ admet exactement un point invariant $\Omega$, dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement $f$.

**2.** On définit dans P la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} M_0 = O \\ \text{Pour tout } n,\ M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$$

a) Construire $\Omega,\ M_0,\ M_1,\ M_2$.

b) Pour tout entier $n$, on note $z_n$ l'affixe de $M_n$ et on pose

$$Z_n = z_n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

Déterminer un nombre complexe $a$ tel que, pour tout entier $n$,

$$Z_{n+1} = aZ_n.$$

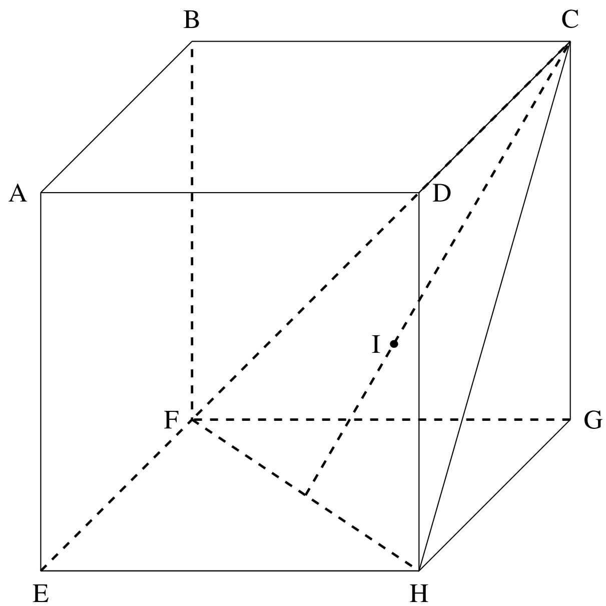
Mettre $a$ sous forme trigonométrique et déterminer un entier $p$ strictement positif tel que $a^p = 1$.

c) Calculer $Z_n$ puis $z_n$ en fonction de $n$. Calculer $z_{1989}$ et placer $M_{1989}$ sur le dessin.

Ex. 1982. *5 points.* ./1989/parisC/exo-2/texte.tex

On considère un cube ABCDEFGH d'arête $a$.
On note I l'isobarycentre du triangle CFH.

Retour page 1




**1.** a) Prouver que le triangle CFH est équilatéral.

b) Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et au plan médiateur de [CF].

c) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

**2.** On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P' le plan contenant les droites (AD) et (FG). On désigne par $s$ et $s'$ les réflexions par rapport aux plans P et P'.

a) Déterminer l'intersection des plans P et P'.

b) Déterminer les images des points C, F et H par $s$ puis $s'$, puis par $s' \circ s$.

c) Indiquer la nature de $s' \circ s$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

## Problème 744 *10 points.*

*./1989/parisC/pb/texte*

A) L'objet de cette partie est d'étudier la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \text{ si } t>0, \text{ et } g(0)=1.$$

1° a) Établir que $g$ est continue en 0.

b) Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.

2° a) Pour tout $t>0$, calculer $g'(t)$.

b) Prouver que pour tout $t \geqslant 0$, $1+t \leqslant \mathrm{e}^t$.

c) En déduire le signe de $g'$ et le sens de variation de $g$ (on ne demande pas de construire la courbe représentative de $g$).

3° On se propose d'étudier la dérivabilité de $g$ en 0.
A cet effet on introduit la fonction $h$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(t) = 1-t+\frac{t^2}{2}-\mathrm{e}^{-t}.$$

a) Calculer $h'$ et $h''$, ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.

b) Prouver que pour tout $t \geqslant 0$ :

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{t^3}{6}\ ; \qquad (1)$$

pour cela, on établira d'abord que $0 \leqslant h''(t) \leqslant t$, et on en déduira un encadrement de $h'$ puis de $h$.

Retour page 1

c) Déduire de la relation (1) un encadrement de $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}-t}{t^2}$.

Prouver finalement que $g$ est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

B) On se propose d'étudier la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right) \text{ si } x > 0, \text{ et } f(0) = 1$$

1° a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

b) Prouver que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-2x}\left(2x+1-\mathrm{e}^{x}(x+1)\right).$$

c) A partir de l'inégalité $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$, établie au A(2)b., montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) \leqslant 0$

2° Vérifier que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = 2g(2x) - g(x) \tag{2}$$

où $g$ est la fonction étudiée dans la partie A.
En déduire que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3° Construire la courbe représentative (C) de $f$, le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 4 cm.

C) On étudie maintenant la fonction $F$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

a) *i.* Etudier le sens de variation de $F$.

*ii.* Etablir que pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$
En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$.

b) Soit $G$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(x)\ \mathrm{d}x.$$

*i.* En utilisant la relation (2), prouver que pour tout $t \geqslant 0$ :

$$F(t) = G(2t) - G(t).$$

*ii.* En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ :

$$F(t) = \int_0^{2t} g(x)dx. \tag{3}$$

*iii.* Etablir que pour tout $x \geqslant 1$ :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire que pour tout $t \geqslant 1$ :

$$0 \leqslant \ln 2 - F(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

*iv.* Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque $t$ tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.



Retour page 1

# VIII. Paris, série E

Ex. 1983. 4 points. ./1989/parisE/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O~;~\overrightarrow{OA},~\overrightarrow{OB})$. Unité graphique : 8 cm.
On note $C$ le milieu du segment $[AB]$.
Soit $r$ la rotation de centre $C$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$. Pour tout point $M$ du plan d'affixe $u$, on note $M'$ le transformé de $M$ par $r$.

**1.** a) Placer sur une figure les points $O,~A,~B,~M$ et $M'$ lorsque $u=\dfrac{3}{4}$.

b) Déterminer l'image du segment $[OA]$ par $r$.

c) Calculer l'affixe $u'$ de $M'$ en fonction de l'affixe $u$ de $M$.

**2.** On note $P$ le milieu du segment $[OC]$.
Soit $N$ le milieu du segment $[BM]$ et $N'$ le milieu du segment $[AM']$.

a) Exprimer en fonction de $u$ les affixes $Z$ et $Z'$ des vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PN'}$.

b) Prouver que le triangle $PNN'$ est rectangle et isocèle.

c) Dans le cas où $u=\dfrac{3}{4}$, placer le triangle $PNN'$ sur la figure précédente.

# IX. Paris, série A1

Ex. 1984. 5 points. ./1989/parisA1/exo-1/texte.tex

Archimède (Syracuse 287-212 av. J.C.) a démontré que :
« L'aire d'un segment de parabole vaut quatre fois le tiers de l'aire d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment. »

*Mathématiques au fil des âges.* Gauthier-Villars.

On se propose d'illustrer cet énoncé par un exemple.
Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; unité graphique : 1cm.

1. On considère la parabole $(P)$ d'équation $y=-(x-2)^2+9$ et le point $S$ de coordonnées $(2~;~9)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection $A$ et $B$ de $(P)$ avec l'axe des abscisses. Représenter l'arc $AB$ de la parabole passant par $S$.
2. L'ensemble $E$ des points limité par cet arc de parabole et le segment $[AB]$ est appelé « segment de parabole ». Calculer son aire.
3. Calculer l'aire du triangle $SAB$.
4. Préciser comment est illustré, à l'aide de cet exemple, la proposition d'Archimède.

# X. Tunisie Grèce, série C & E

Ex. 1985. ./1989/tunisieC/exo-1/texte.tex

1. Déterminer deux réels $p$ et $q$ tels que, pour tout $t \in ]-\infty~;3[$,
$$\frac{t}{t-3}=p+\frac{q}{t-3}.$$
2. Soit $a<3$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{t-3}\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^a \ln\left(1-\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t$. On pourra utiliser une intégration par parties.



Retour page 1

CHAPITRE XXXII

# 1990.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

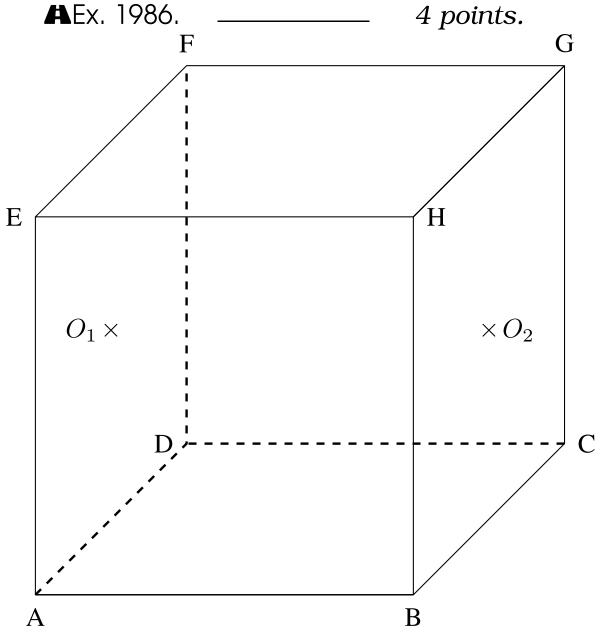
— groupe II : Amiens, Lille & Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Orléans-Tours & Rennes.

## I. Groupe I, série C & E

Ex. 1986. *4 points.* *./1990/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*




On considère un cube ABCDEFGH, on appelle $O_1$ et $O_2$ les centres respectifs des faces ADHE et BCGF. Soit N un point du segment [HF] et P un point du segment [AC] définis par $\overrightarrow{\text{HN}} = k\overrightarrow{\text{HF}}$ et $\overrightarrow{\text{AP}} = k\overrightarrow{\text{AC}}$ où $k \in [0\,;1]$.

**1.** Montrer que N est barycentre du système des points pondérés $\{(\text{H},\ 1-k),\ (\text{F},\ k)\}$ et que $P$ est barycentre du système des points pondérés $\{(\text{A},\ 1-k),\ (\text{C},\ k)\}$

**2.** Soit $d$ le demi-tour d'axe $(O_1O_2)$.
Quelles sont les images par $d$ des points A, C et P ?

**3.** I étant le milieu du segment [NP], montrer que $\overrightarrow{\text{HN}}+\overrightarrow{\text{AP}}=2\overrightarrow{O_1\text{I}}$ puis que $\overrightarrow{\text{HF}}+\overrightarrow{\text{AC}}=2\overrightarrow{O_1O_2}$.
En déduire que $\overrightarrow{O_1\text{I}}+=k\overrightarrow{O_1O_2}$, $k\in[0\,;1]$.
Quel est l'ensemble des points I lorsque $k$ décrit l'intervalle $[0\,;1]$ ?

**Ex. 1987.** *4 points.* *./1990/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Soit $P$ la plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 1 cm. On donne les points $A$ et $B$ d'affixes respectives 12 et 9i et l'application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $Z$ définie par $Z=-\dfrac{3}{4}\text{i}z+9\text{i}$.

**1.** Démontrer que $f$ admet un point invariant $\Omega$ de coordonnées $\left(\dfrac{108}{25}\ ;\ \dfrac{144}{25}\right)$.
Démontrer que $f$ est une similitude plan directe d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, de rapport $\dfrac{3}{4}$. Quel est son centre ?

**2.** Quelles sont les images par $f$ des points $A$ et $O$ ?
Montrer que $\Omega$ est commun aux deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$.
Établir que $\Omega$ est le pied de la hauteur issue de $O$ dans le triangle $OAB$ et montrer que $\Omega A\times\Omega B=\Omega O^2$.
Faire une figure comportant les points $\Omega,\ A,\ B$ ainsi que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(C_2)$.

## PROBLÈME 745 *12 points.* *./1990/aixmarseilleC/pb/texte*

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions $f_n$, $n\in\mathbb{N}^\star$, définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=x-n-\frac{n\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de $f_n$ dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelée $C_n$. On prendre 2 cm pour unité graphique.

A. **Étude des variations de $f_n$, ($n\in\mathbb{N}^\star$).**

1° Soit, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $g_n$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_n(x)=x^2-n+n\ln x.$$

Étudier le sens de variation de $g_n$, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une solution unique notée $\alpha_n$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[1\,;3]$.

2° Établir, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f_n'(x)=\dfrac{g_n(x)}{x^2}$ ; étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de $f_n$.

3° Étudier les limites de $f_n$ en 0 et en $+\infty$. Montrer que la droite $D_n$ d'équation $y=x-n$ est asymptote à la courbe $C_n$. Étudier la position de $C_n$ par rapport à $D_n$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

B. **Étude des cas particuliers $n=1$ et $n=2$.**

1° $\alpha_n$ étant le nombre défini en A1, montrer que pour $n=1$, $\alpha_1=1$ et que, pour $n=2$, $1{,}2<\alpha_2<1{,}3$.

2° En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de $\alpha_2$ ci-dessus, montrer que l'on a $f_2(\alpha_2)\geqslant -1{,}24$.
En utilisant le sens de variation de $f_2$ montrer que $f_2(\alpha_2)\leqslant -1{,}10$.

3° Former les tableaux de variations de $f_1$ et $f_2$.

4° Représenter dans le même repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les droites $D_1$ et $D_2$, puis les courbes $C_1$ et $C_2$.

5° Calculer en cm$^2$ la valeur exacte de l'aire $S_1$ de la partie du plan comprise entre $C_1$ et les droites d'équations $x=1$, $x=\text{e}$, $y=0$.

C. **Étude des positions relatives des courbes $C_n$.**

1° Pour tout entier naturel non nul et pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, calculer la différence $f_n(x)-f_{n+1}(x)$.Calculer la limite de cette différence lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2° Soit $d$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$d(x)=1+\frac{\ln x}{x}.$$

a) Étudier les variations de $d$, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ et que $\beta$ appartient à l'intervalle $]0\,;1[$.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a $f_n(\beta) = \beta$.

3° A l'aide des résultats obtenus dans la question C1 et C2 de cette partie C, établir que les courbes $C_n$ se coupent en un point $A$ que l'on placera sur la figure.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ préciser les positions relatives de $C_n$ et $C_{n+1}$.

## II. Groupe II, série C & E

**Ex. 1988.** *4 points.* *./1990/amiensC/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

**1.** Trouver les deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout nombre complexe $z$ on ait

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

**2.** En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

**3.** Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les images $A$, $B$, $C$, $D$ des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

**Ex. 1989.** *5 points.* *./1990/amiensC/exo-2/texte.tex*

On considère, dans le plan (P) rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'unité est 6 cm, les points $M_\theta$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ définies par :

$$x = \frac{\cos\theta)}{2+\cos\theta} \quad , \quad y = \frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}.$$

**1.** Calculer en fonction de $\theta$ la distance $OM_\theta$ et la distance de $M_\theta$ à la droite $(D)$ d'équation $x = 1$.

**2.** En déduire que pour tout réel $\theta$ élément de $[0\,;2\pi]$, les points $M_\theta$ appartiennent à une même ellipse $(E)$ dont on précisera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

**3.** Tracer l'ellipse $(E)$.

### Problème 746 *11 points.* *./1990/amiensC/pb/texte*

A. Pour tout réel $k$ strictement positif, on considère la fonction numérique $f_k$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f_k(x) = k^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On appelle $(C_k)$ la courbe représentative de $f_k$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'unité de longueur est 5 cm.

1. Étudier les variations de $f_k$ et dresser son tableau de variation. (on précisera les limites de $f_k$ aux bornes de l'ensemble de définition.)
2. Soit $M_k$ le point de $(\mathscr{C}_k)$ correspondant au minimum de $f_k$.
Déterminer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une équation cartésienne de l'ensemble $(\Lambda)$ des points $M_k$ quand $k$ décrit $]0\,;+\infty[$.
3. Tracer sur une même figure les courbes $(\Lambda)$ et $(\mathscr{C}_1)$ après avoir étudier leur position relative.

B. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

1. Tracer sur une nouvelle feuille, la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'unité de longueur est 5 cm. (On pourra utiliser le A1).
2. Soit $(\Gamma)$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1 et $A$ le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
   Á tout point $M$ de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $a$, on associe le point $H$ projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des abscisses. La droite $(AH)$ recoupe $(\Gamma)$ en $K$.
   a) Déterminer les coordonnées de $K$ en fonction de $a$.
   b) Démontrer que la droite $(OK)$ est parallèle à la tangente en $M$ à $(\mathscr{C})$.
   c) En déduire un procédé géométrique pour construire la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en un point $M$ *donné* de cette courbe.

C. Dans cette partie, $f$ désigne toujours la fonction définie au B.

1. On note $\lambda$ un réel strictement positif.
   a) Á l'aide d'une intégration par parties calculer

$$\int_{\lambda}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{en déduire la valeur de} \quad I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   b) Déterminer la limite $I$ de $I(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers zéro par valeurs supérieures.
2. Pour $n$ entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

   a) En utilisant le sens de variation de $f$ sur $]0\,;1]$, démontrer que pour $p$ entier naturel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

   b) En déduire que

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right) \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n,$$

   puis que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

   c) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

## III. Groupe III, série C & E

**Ex. 1990.** *4 points.* *./1990/dijonC/exo-1/texte.tex*

Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0.$$

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

**2.** Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0.$$



Retour page 1

**Ex. 1991.** ———— *5 points.* *./1990/dijonC/exo-2/texte.tex*

Soient $\Gamma$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$, $[AA']$ un diamètre fixé de $\Gamma$, $P$ le milieu de $[OA']$.
Une droite distincte de la droite $(AA')$ et de la perpendiculaire en $P$ à $(AA')$ pivote autour de $P$ et coupe $\Gamma$ en $B$ et $C$.

**1.** Déterminer l'ensemble $E_1$ des milieux $M$ de $[BC]$ lorsque $\Delta$ varie.

**2.** a) Soit $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ dans le traingle $ABC$.
La droite $(A'M)$ coupe $(AH)$ en $D$.
Déterminer l'ensemble $E_2$ des points $D$ lorsque $M$ décrit $E_1$.

b) Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme.
En déduire que $D$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

**3.** La droite $(AM)$ coupe $(OD)$ en $I$. Montrer que $2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$.
Que représente $I$ pour le triangle $ABC$ ?
Déterminer l'ensemble $E_3$ des points $I$ lorsque $M$ décrit $E_1$.

## **Problème 747** *11 points.*

*./1990/dijonC/pb/texte*

I. 1° Soit $g$ l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$.

Étudier les variations de $g$, déterminer sa limite en $+\infty$.

En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Prouver que $\dfrac{7}{4}<\alpha<2$.

2° On note $\Gamma$ la courbe représentative de $g$. (On ne demande pas la construction de $\Gamma$.)

a) Écrire une équation de la tangente $T$ à $\Gamma$ au point d'abscisse 2 ; déterminer la valeur exacte de l'abscisse $x_0$ du point d'intersection de $T$ et de $x'Ox$.
On note $v_1$ et $v_2$ respectivement les valeurs approchées par défaut et excès de $x_0$ à $10^{-3}$ près.
Des signes de $g(v_1)$ et $g(v_2)$ déduire un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

b) Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité 2 cm.
Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \text{si } x\neq 0. \end{cases}$$

On appelle $C$ sa courbe représentative.

1° Montrer que $f$ est dérivable en 0. Étudier les variations de $f$ et sa limite en $+\infty$.

2° Montrer que pour tout réel $x>-1$, on a $\ln(x+1)\leqslant x$.
En déduire la position relative de $C$ et de sa tangente en $O$.
Tracer la courbe $C$.

3°

III. On note $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1° Soit $r$ un réel strictement positif fixé. Montrer que $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan.
En déduire la parité de $F$.
Déterminer les variations de $F$ sur $\mathbb{R}^+$.

Retour page 1

2° a) Montrer que $0 \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1}{2}$ en utilisant la position de $C$ par rapport à sa tangente en $O$.

b) Montrer qur pour tout réel $t$ supérieur ou égal à 1,

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leqslant \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leqslant \frac{\ln(2t^2)}{t}.$$

c) Soit $x$ un réel, $x \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire les limites de $F(x)$ et de $\dfrac{F(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

3° Donner l'allure de la courbe représentative de $F$ en prenant 0,4 pour valeur approchée de $F(1)$.

## IV. Groupe IV, série C

**Ex. 1992.** *4 points.* *./1990/bordeauxC/exo-1/texte.tex*

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan orienté. Soit :

— $S_A$ la similitude directe de centre $A$ transformant $B$ en $C$.

— $S_B$ la similitude directe de centre $B$ transformant $C$ en $A$.

— $S_C$ la similitude directe de centre $C$ transformant $A$ en $B$.

On se propose d'étudier $S = S_C \circ S_B \circ S_A$.

**1.** a) Déterminer l'image de $B$ par $S$.

b) Démontrer que $S$ est la symétrie centrale de centre $B$. (On pourra utiliser les transformations vectorielles associées à $S_A$, $S_B$ et $S_C$).

**2.** Soit $C' = S_B \circ S_A(C)$ et $C'' = S_C(C')$. Quelle est la position relative des points $B$, $C$ et $C''$ ?
En déduire que $A$ est le milieu du segment $[CC']$.
Placer les points $A$, $B$, $C$, $C'$ et $C''$ sur une figure.

**Ex. 1993.** *4 points.* *./1990/bordeauxC/exo-2/texte.tex*

**1.** Dans le plan, rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'hyperbole $(H)$ d'équation :

$$y^2 - x^2 = 1.$$

a) Déterminer ses sommets et ses asymptotes.

b) Tracer cette hyperbole.

**2.** Soit $\alpha$ un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2\cos^2\alpha - z\sin 2\alpha + 2 - \cos^2\alpha = 0. \qquad \text{(E)}$$

**3.** Soit $M$ l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

a) Démontrer que $M$ appartient à l'hyperbole $(H)$ définie au 1).

b) Déterminer le sous-ensemble de $(H)$ décrit par $M$ lorsque $\alpha$ décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

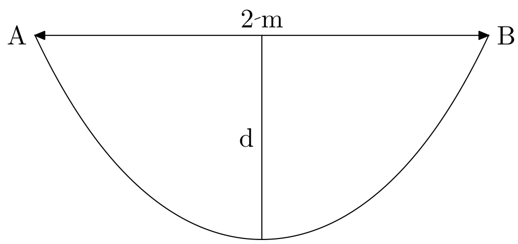
Retour page 1

**PROBLÈME 748** *12 points.* *./1990/bordeauxC/pb/texte*

La chaînette [**?**] est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (déf. Petit Larousse).
On montre et on admettra dans ce problème que, rapporté à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

On laisse pendre un tel fil de longueur 4 m entre deux points $A$ et $B$ à une même hauteur et distants de 2 m.
Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est à dire la distance $d$ indiquée sur le schéma ci-dessous.




Á cet effet, pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction $f_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de la fonction $f_\lambda$ dans un repère orthonormé.

I. **Étude de la chaînette.**

1° a) Étudier la parité de $f_1$ ; préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ (unité graphique 1 cm).

c) Prouver que, pour tout $\lambda$, la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ se déduit de $\mathscr{C}_1$ par une homothétie dont on précisera le centre et la rapport.

2° *Calcul de la longueur de la chaînette.*

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points $x = -1$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[f'_\lambda(x)\right]^2}\,dx$$

(l'unité de longueur étant le mètre).

a) Vérifier que $1 + \left[f'_\lambda(x)\right]^2 = \left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)^2$.

b) En déduire que :

$$L(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}. \qquad (1)$$

3° *Calcul de le flèche.*
Exprimer en fonction de $\lambda$ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette $\mathscr{C}_\lambda$ (l'unité de longueur étant le mètre).

II. **Étude de l'équation** $L(\lambda) = 4$**.**
Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

1° a) Résoudre l'équation d'inconnue $X$ réelle $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

b) En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $e^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

c) Prouver enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$$\lambda = \ln\left(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right).$$

2° Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}).$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $u : x \longmapsto 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.
Calculer $g'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de $g$.

3° Soit $h$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = x - g(x)$.

a) Calculer $h'(x)$. Étudier le signe de $h'(x)$.

b) Prouver que pour tout $x > 0$ :

$$g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

En déduire la limite de $h(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variations de $h$.
En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution $\alpha$ et une seule dans $]0\,;+\infty[$.

d) Prouver que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

4° On note $I = [2\,;+\infty[$.

a) Démontrer que pour tout élément $x$ de $I$, $g(x)$ appartient à $I$. (On pourra utiliser **??**.)

b) Prouver pour tout élément $x$ de $I$ :

$$0 < g'(x) \leqslant 0{,}5.$$

En déduire que pour tout élément $x$ de $I$ :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant 0{,}5\,|x - \alpha|\,.$$

c)

5° a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'éléments de $I$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$|u_n - \alpha| \leqslant (0{,}5)^n\,|u_0 - \alpha|\,.$$

b) Conclure quant à la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Déterminer un entier $n_0$ tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à la précision $10^{-3}$ et calculer $u_{n_0}$.

6° On seplace dans la situation décrite au début du problème. En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci, calculer une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.

Retour page 1

# V. Groupe IV, série E

Ex. 1994. 5 points. ./1990/bordeauxE/exo-1/texte.tex

Ne connaissant pas de primitive de la fonction $f$ définie sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** En étudiant les variations de la fonction $f$, démontrer que pour tout nombre réel $x$ de $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ l'encadrement :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}. \qquad (1)$$

**2.** a) Démontrer que, pour tout $x$ de $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

b) En déduire que : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

d) Déduire de ((**??**)) que : $\displaystyle\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12\sqrt{\mathrm{e}}}$.

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de $I$ à la précision $0{,}01$.

Ex. 1995. 4 points. ./1990/bordeauxE/exo-2/texte.tex

**1.** Dans l'espace, on donne deux points $A$ et $B$ distincts.

a) Montrer que toute rotation $R$ de l'espace transformant $A$ en $B$ a son axe $D$ inclus dans le plan médiateur de $[A,\ B]$.

b) Réciproquement, soit $D$ une droite du plan médiateur de $[A,\ B]$.
Montrer qu'il existe une rotation $R$ et une seule d'axe $D$ transformant $A$ en $B$. On pourra introduire le projeté orthogonal $K$ de $A$ sur $D$.

**2.** Soit $OABC$ un tétraèdre régulier.

a) Montrer qu'il existe une rotation $R_1$ et une seule d'axe $(OC)$ transformant $A$ en $B$.

b) Montrer que le projeté orthogonal $K$ de $A$ sur $(OC)$ est le milieu de $[OC]$.

c) Déterminer le cosinus de l'angle de la rotation $R_1$.

Retour page 1

## PROBLÈME 749 *11 points.*

./1990/bordeauxE/pb/texte

Dans la partie I de ce problème, on étudie la courbe $\mathscr{C}$ définie par une représentation paramétrique. Dans la partie II, on utilise une transformation du plan pour trouver la nature de $\mathscr{C}$ et calculer l'aire de domaine délimité par $\mathscr{C}$ et les axes de coordonnées.

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. $\overrightarrow{OI}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{v}$. Pour tout les graphiques on prendra 12 cm comme unité.

I. **Étude de $\mathscr{C}$**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane définie par la représentation paramétrique :

$$t \longmapsto \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u} + y(t)\vec{v}$$

$$t \in [0\,;1]\ ; \qquad x(t)=t^2 \qquad y(t)=(1-t)^2.$$

a) Définir la transformation du plan qui transforme $M(t)$ en $M(1-t)$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$ ?

b) Étudier les variations de $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;1]$.

c) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente en chacun des ces points. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(t)$.

En particulier quelles sont les tangentes pour $t=0$, $t=\dfrac{1}{2}$, $t=1$ ?

d) a) Pour $t \in ]0\,;1[$, la tangente en $M(t)$ à $\mathscr{C}$coupe l'axe des abscisses en $R(t)$ et l'axe des ordonnées en $S(t)$.

Exprimer $\overrightarrow{OR(t)}$ et $\overrightarrow{OS(t)}$ en fonction de $t$, et vérifier que :

$$\overline{OR(t)} + \overline{OS(t)} = 1.$$

b) Exprimer $\left\|\overrightarrow{R(t)S(t)}\right\|$ en fonction de $t$.

e) Tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

II. **Nature de $\mathscr{C}$ et calcul d'aire**

On admet que l'image de la parabole de foyer $F$ et de directrice $D$ par une similitude $s$ est la parabole de foyer $s(F)$ et de directrice $s(D)$.

Dans le plan complexe soit $f$ la transformation plane, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $P$ d'affixe $Z$ définie par :

$$Z=(1+\mathrm{i})z.$$

1. Donner la nature de $f$ et ses éléments caractéristiques.
2. Soit $M(t)$ le point de le courbe $\mathscr{C}$ définie au I. Calculer, en fonction de $t$, les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de son image $P(t)$ par $f$.
3. Montrer que l'image de $\mathscr{C}$ par $f$ est la courbe $\mathscr{P}$, ensemble des points dont les coordonnées $X$ et $Y$ vérifient :

$$-1 \leqslant X \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad Y=\frac{1}{2}(X^2+1).$$

Tracer $\mathscr{P}$ sur le même graphique que $\mathscr{C}$.

4. En déduire que $\mathscr{C}$ est incluse dans une parabole, dont on déterminera les coordonnées du foyer $F$ et une équation de la directrice $D$.
5. Soit $\mathscr{D}$ le domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et les segments $[OI]$ et $[OJ]$ et $\mathscr{D}'$ le domaine défini par :

$$-1 \leqslant X \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |X| \leqslant Y \leqslant \frac{1}{2}(X^2+1).$$

a) Représenter ces deux domaines sur le graphique précédent. Déterminer les images

b) Calculer l'aire $A'$ de $\mathscr{D}'$ et en déduire l'aire $A$ de $\mathscr{D}$.

Retour page 1

# VI. Paris, série C

**Ex. 1996.** ———— *5 points.* ./1990/parisC/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points $I$ et $O$.
On note $r$ le quart de tour direct de centre $O$ et $s$ la symétrie centrale de centre $I$.

**1.** a) Soit $OJO'G$ le carré direct de centre $I$. Faire une figure avec $IO = 4$ $cm$.

b) Prouver que $s \circ r$ est la rotation de centre $J$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

c) En déduire que $J$ est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.

Désormais, pour tout couple $(M, N)$ de points du plan, on pose $r(M) = A, s(M) = B, r(N) = C$ et $s(N) = D$.

**2.** Soit $M$ un point donné distinct de $J$. On suppose que $J$ est le milieu de $[MN]$.

a) Démontrer que $ABCD$ est un carré de centre $G$.

b) Placer les points $M$ et $N$ sur la figure ainsi que le carré $ABCD$.

**3.** Le point $M$ étant toujours distinct de $J$, on suppose inversement, que $N$ est tel que $ABCD$ soit un carré.
Démontrer qu'alors $J$ est la milieu du segment $[MN]$ et que $G$ est le centre du carré $ABCD$.
*(On pourra introduire $J'$ le milieu de $[MN]$ et $G'$ le centre du carré $ABCD$, et on comparera $r(J')$ et $s(J')$. )*

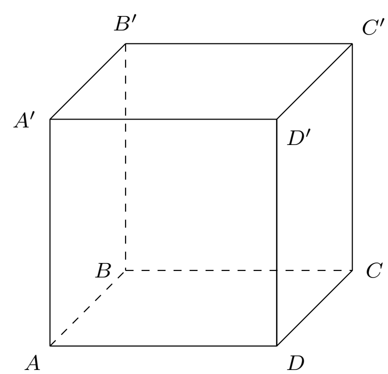
**4.** Soit $r'$ le quart de tour direct de centre $G$.

a) Démontrer que $r' \circ r = s$.

b) En déduire que sous les hypothèses de la question 2, le carré $ABCD$ est direct, c'est à dire que $r'(A) = B$.

**Ex. 1997.** ———— *4 points.* ./1990/parisC/exo-2/texte.tex

$ABCDA'B'C'D'$ est un cube.




On note :

- $s_1$ la réflexion de plan $(AA'BB')$ ;
- $s_2$ la réflexion de plan $(BB'CC')$ ;
- $s_3$ la réflexion de plan $(CC'DD')$ ;
- $s_4$ la réflexion de plan $(DD'AA')$.

**1.** a) Montrer que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

b) Déterminer de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

**2.** On note $s$ la réflexion de plan $(BB'DD')$.
Déterminer les réflexions $s'$ et $s''$ telles que :

$$r' = s \circ s' \qquad \text{et} \qquad r'' = s'' \circ s.$$

**3.** En déduire que $t = r'' \circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$.



Retour page 1

## 🏛Problème 750 *11 points.*

*./1990/parisC/pb/texte*

A. Le but de cette partie est d'étudier la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}\quad \text{si}\quad x>0 \qquad \text{et} \qquad f(0)=0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.
2. a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\varphi(x)=\ln x+x+1.$$

   Étudier les variations de $\varphi$. Établir que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution $\beta$ et une seule, et que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$. (On ne demande pas de construire la courbe représentative de $\varphi$.)

   b) Pour $x>0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de $f$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$, puis la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Construire les courbes représentatives $\mathscr{C}$ de $f$ et $\Gamma$ de $x \longmapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, (unité graphique 4 cm).

B. On se propose d'étudier l'équation $f(x)=1$.
Á cet effet, on introduit la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}.\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que l'e?quation$f(x)=1$ admet une solution $\alpha$ et une seule, et que $3{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 3{,}7$. Placer le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\alpha$.
2. a) Prouver que l'équation $f(x)=1$ équivaut à l'équation $g(x)=x$.

   b) Étudier la monotonie de $g$.

   c) Prouver que pour tout élément $x$ de $[3{,}5\,;3{,}7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3{,}5\,;3{,}7]$.

   d) Établir que pour tout élément $x$ de $[3{,}5\,;3{,}7]$

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \left|g'(3{,}5)\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

   En déduire que

$$|g(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x-\alpha|.$$

3. Soit $(u_n)$ la suite d'élements de $[3{,}5\,;3{,}7]$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=g(u_n)$ et la condition initiale $u_0=3{,}5$.

   a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$

$$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{5}.\frac{1}{3^n}.$$

   En déduire la liimite de $(u_n)$.

   b) Donner une valeur décimale approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

C. On se propose d'étudier l'équation $f(x)=n$, où $n$ est un entier naturel non nul.

1. Montrer que, pour tout $n$, cette équation admet une unique solution $\alpha_n$ et une seule (en particulier, $\alpha_1=\alpha$).
2. *Comparaison de* $\alpha_n$ *à* $\mathrm{e}^n$

   a) Établir que $f(\mathrm{e}^n) \leqslant n$. En déduire que $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^n$.

   b) Prouver que la relation $f(\alpha_n)=n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}. \tag{1}$$

   c) En déduire, à l'aide de C(2)a, la limite de $\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

3. *Comparaison de* $\alpha_n$ *à* $\mathrm{e}^n + n$
   On écrit $\alpha_n$ sous la forme :
$$\alpha_n = \mathrm{e}^n(1+\epsilon_n), \qquad \text{où} \quad \epsilon_n \geqslant 0. \tag{2}$$
   a) Í'aide de (1), exprimer $(1+\epsilon_n)\ln(1+\epsilon_n)$ en fonction de $n$.
   b) Établir que pour tout $t \geqslant 0$ :
$$0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \frac{t^2}{2}.$$
   c) Déduire du C(3)a et C(3)b que pour tout $n \geqslant 1$ :
$$\epsilon_n \leqslant n\mathrm{e}^{-n} \leqslant \epsilon_n + \frac{\epsilon_n^2}{2},$$
   puis que :
$$0 \leqslant n\mathrm{e}^{-n} - \epsilon_n \leqslant \frac{n^2}{2}\mathrm{e}^{-2n}. \tag{3}$$
   d) Á l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $\mathrm{e}^n + n - \alpha_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# VII. Paris, série E

Ex. 1998. ——— *5 points.* *./1990/parisE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté, on suppose donné deux points distincts $O$ et $A$. On note $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle ayant pour mesure $\alpha$, $0 < \alpha < \pi$.
Soit $A'$ l'image de $A$ par $r$ et $I$ l'isobarycentre de $(O,\ A,\ A')$. Soit enfin $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A$ et de rayon $R > 0$.

1. a) Déterminer l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par la rotation $r$.
   b) Placer les points $O,\ A,\ A'$ et les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur une figure (pour cette figure, on prendra $OA$ =8 cm, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $R = 2$ cm).
2. Á tout point $M$ de $\mathscr{C}$, on associe son image $M'$ par la rotation $r$, et l'isobarycentre $G$ de $(O,\ M,\ M')$.
   a) Placer $M,\ M'$ et $G$ sur la figure.
   b) On suppose $M \neq O$. Soit $\sigma$ la similitude directe de centre $O$ telle que $\sigma(A) = M$.
   Établir que $\sigma \circ r = r \circ \sigma$ ; en déduire que $\sigma(A') = M'$, puis que $\sigma(I) = G$.
3. Soit $s$ la similitude directe de centre $O$ telle que $s(A) = I$.
   a) Établir que $s \circ \sigma = \sigma \circ s$ ; en déduire que $s(M) = G$.
   b) Déterminer l'ensemble $\Gamma$ décrit par $G$ lorsque $M$ parcourt $\mathscr{C}$. Placer $\Gamma$ sur la figure.
4. Prouver que les droites $(AM)$ et $(A'M')$ sont sécantes en un point $N$ et que $N$ appartient au cercle circonscrit à $OAA'$ et au cercle circonscrit à $OMM'$.

# VIII. Antilles Guyane, séries C & E

Ex. 1999. ——— *4 points.* *./1990/antillesCErem/exo-1/texte.tex*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application $f$ qui associe, au point $M$ d'affixe $z$, le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :
$$z' = \mathrm{i}\overline{z}.$$

**1.** Montrer que $f = R \circ S$ où $S$ est la réflexion d'axe $(O\ ;\ \vec{u})$ et $R$ est une rotation dont on précisera les éléments.

**2.** En utilisant une décomposition de $R$ en composée de deux réflexions, montrer que $f$ est une réflexion dont on précisera l'axe.



Retour page 1

**3.** Soit $g$ l'application du plan dans lui-même qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M''$ d'affixe $z''$ tel que :

$$z'' = \mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}.$$

a) Caractériser l'application $T$ telle que :

$$g = T \circ f.$$

b) En déduire une construction géométrique, pour tout point $M$ du plan, du point $M''$, image de $M$ par $g$.

c) Montrer que, pour tout point $M$ du plan, le milieu du segment $[MM"]$ appartient à une droite fixe.

# IX. Asie, séries C & E

**Ex. 2000.** ——— *4 points.* *./1990/asiece/exo-1/texte.tex*

On prend six cartons identiques. Sur chaque carton on écrit une, et une seule, des six lettres du mot FRANCE ; chacune des lettres de ce mot est utilisée.
On place ces cartons dans une urne.
On les en extrait au hasard un à un, chaque carton ayant la même probabilité d'être tiré, et on note les lettres obtenues dans leur ordre d'apparition.

**1.** Calculer, dans l'hypothèse où ces six tirages se font sans remise, les probabilités des événements suivants :

a) On obtient les lettres du mot FRANCE dans l'ordre ;

b) on obtient dans l'ordre de leur apparition, les trois premières lettres FRA du mot FRANCE et les trois autres lettres dans le désordre.

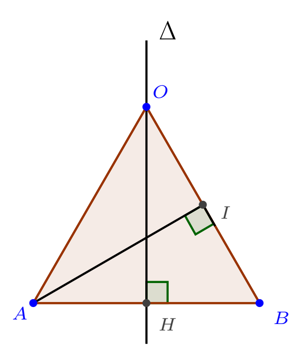
**2.** Reprendre les questions ci-dessus lorsque les six tirages s'effectuent en remettant à chaque fois dans l'urne le carton obtenu.

**Ex. 2001.** ——— *4 points.* *./1990/asiece/exo-2/texte.tex*

Soit $ABO$ un triangle équilatéral du plan orienté tel que :

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{à } 2\pi \text{ près.}$$

On note $H$ le milieu de $[AB]$, $I$ celui de $[OB]$ et $\Delta$ la médiatrice de $(AB)$.
On note $s$ la similitude plane directe de centre $O$ transformant le point $A$ en $I$. $M$ désigne un point quelconque du plan et $M'$ son image par $s$.




1. a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe $s$.

b) Construire le point $C$ du plan tel que :

$$s(C) = A.$$

On justifiera soigneusement cette construction.

c) Exprimer $AM'$ en fonction de $CM$.



Retour page 1

2. On note $M''$ l'image du point $M$ par la réflexion d'axe $\Delta$. On se propose de déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels que $A$ soit équidistant de $M'$ et $M''$.

a) Montrer que $AM'' = BM$.

b) Montrer que $M$ appartient à $(\Gamma)$ si, et seulement si :

$$CM = 2BM.$$

c) Déterminer la nature de $(\Gamma)$, puis construire $(\Gamma)$.

## X. Centres étrangers groupe III, série C & E

Ex. 2002. 4 points. ./1990/centreetg3/exo-1/texte.tex

On considère la suite $u$ définie par :

$$n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right] - \ln n$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien de base $\mathrm{e}$).

**1.** Démontrer que $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$.

**2.** a) Pour $k$ entier, compris entre $0$ et $n-1$, démontrer que :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

b) En déduire que :

$$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leqslant \int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$

**3.** Déduire de ce qui précède un encadrement de $u_n$ et la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## XI. Polynésie, série C & E

Ex. 2003. 5 points. ./1990/polynesieCE/exo-1/texte.tex

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \sin \pi x.$$

**1.** a) Tracer la courbe représentative $C$ de $f$ (unité graphique 8 cm).

b) Calculer :

$$I = \int_0^1 \sin \pi x\,\mathrm{d}x.$$

c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

**2.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$



Retour page 1

a) Interpréter graphiquement $S_n$, en introduisant les rectangles $R_k$ de base $\left[\frac{k}{n}\,;\,\frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Faire la figure lorsque $n = 8$.

b) Prouver que :

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{(n-1)\mathrm{i}\pi}{n}} = \frac{2}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}}.$$

c) En déduire que :

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

d) Prouver finalement que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{\pi}.$$

**3.** Comparer les résultats des questions 1 et 2 et interpréter graphiquement.

# XII. Sujet national remplacement, séries C & E

**Ex. 2004.** *4 points.* *./1990/nationalremC/exo-1/texte.tex*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R > 0$ et le point $A$ de $\mathscr{C}$ d'affixe $R$.

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note $r$ la rotation de centre $O$ d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On considère la suite des points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathscr{C}$ défini par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note $z_k$ l'affixe de $M_k$.

**1.** a) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer $z_{k+1}$ en fonction de $z_k$.

b) En déduire l'expression de $z_k$ en fonction de $k$ et $n$.

c) Comparer $M_n$ et $M_0$.

d) Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).

**2.** a) Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_k M_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.

b) On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n)$.

Déterminer la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

**Ex. 2005.** *5 points.* *./1990/nationalremC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral $ACB$ tel que $(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On note $\Delta$ la droite orthogonale à $(AB)$ passant par $C$ et $I$ le point de $\Delta$ tel que $(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AI})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

Enfin, on note $s$ la similitude directe de centre $A$ telle que $s(C) = I$ et $s'$ la similitude directe de centre $B$ telle que $s'(I) = C$.

**1.** a) Placer les points $A,\ B,\ C$ et $I$ sur une figure.

b) Prouver que $r = s \circ s'$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer le centre de cette rotation.

**2.** Á tout point $M$ du plan, distinct des points $A,\ B$ et $C$, on associe le point $N = s(M)$ et le point $P$ tel que $s'(P) = M$.

a) Déterminer les angles $(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN})$ et $(\overrightarrow{BP},\ \overrightarrow{BM})$.

b) On note $\sigma$ la similitude directe de centre $A$ telle que $\sigma(C) = M$. Comparer $\sigma \circ s$ et $s \circ \sigma$, puis déterminer l'angle $(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MN})$ ; en déduire une construction géométrique de $N$.
Placer $M$ et $N$ sur la figure.

c) Construire de même $P$ (on pourra utiliser la similitude directe $\sigma'$ de centre $B$ telle que $\sigma'(I) = P$).

**3.** Prouver que $IP = IN$ et que $(\overrightarrow{IP},\ \overrightarrow{IN})$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

## Problème 751 *9 points.*

*./1990/nationalremC/pb/texte*

A- On se propose d'étudier la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \qquad \text{et } f(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ('Unité graphique : 4cm.)

1. Variations de $f$. a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

   b) Déterminer la limite de $(1+u)\mathrm{e}^{-u}$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$. En déduire que $f$ est dérivable en $0$ et déterminer $f'(0)$.

   c) Étudier le sens de variation de $f$.

   d) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Étude d'une fonction auxiliaire. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(u) = 1-(1+u)\mathrm{e}^{-u}.$$

a) Calculer la dérivée de $\varphi$.

b) Prouver que, pour tout $u \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u.$$

c) En déduire que, pour tout $u \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2}. \tag{1}$$

Étude de $f$ au voisinage de $+\infty$. a) Á l'aide de (1), établir que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x}.$$

b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\Delta$ en $+\infty$ ; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.

Étude de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point. Soient $x$ un élément de $]0\,;+\infty[$ et $T_x$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $T_x$.

b) Montrer que $T_x$ coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{\imath})$ au point d'abscisse $\dfrac{x}{1+x+x^2}$.

Construction de $\mathscr{C}$. Construire $\mathscr{C}$ et $\Delta$. On précisera les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisse 1, $\dfrac{1}{3}$ et 3.

B- Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1$.

Convergence de $(u_n)$. a) Établir que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant x$ ; résoudre l'équation $g(x) = x$.

b) Prouver que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c) Montrer que $(u_n)$ converge, puis que sa limite $a$ est nulle.

Comportement asymptotique de $(u_n)$. a) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $g\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;1]$.

c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

d) Pour tout entier $p \geqslant 0$, exprimer $\dfrac{1}{u_{p+1}} - \dfrac{1}{u_p}$ en fonction de $u_p$.

Établir que :

$$1 \leqslant \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leqslant 1 + \frac{1}{p+1}.$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$n \leqslant \frac{1}{u_n} - 1 \leqslant n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e) Pour tout entier $p \geqslant 2$, comparer $\dfrac{1}{p}$ et $\displaystyle\int_{(p-1)}^{p} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n.$$

f) Déterminer la limite de $nu_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Retour page 1

CHAPITRE XXXIII

# 1991.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

— groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours & Rennes.

## I. Groupe I, série C

Ex. 2006. *4 points.* *./1991/aixmarseilleC/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $(C)$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

où le réel $t$ décrit $\mathbb{R}$.

**1.** Soit $M(a\ ;\ b)$ un point de $(C)$.

a) Donner, en fonction de $a$ et $b$ les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente en $M$ à $(C)$.

b) Soit $N$ le point de coordonnées $(b\ ;\ a)$ et $T$ le point défini par :

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OT}.$$

Montrer que la droite $(MT)$ est la tangente en $M$ à $(C)$.

**2.** a) Montrer que la courbe $(C)$ est contenue dans l'hyperbole $(H)$ d'équation : $x^2 - y^2 = 8$.

b) Tracer l'hyperbole $(H)$ et préciser ses éléments caractéristiques suivants : centre, sommets, foyers, asymptotes.

**Ex. 2007.** ——— *4 points.* *./1991/aixmarseilleC/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note $A$ le point d'affixe 2. Soit $\varphi$ l'application de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe $Z$ associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe $Z'$ défini par :

$$Z' = \frac{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}Z + \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

**1.** Déterminer :

a) l'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point $A$,

b) l'affixe du point $P$ tel que $\varphi(P) = O$.

**2.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi$ (on pourra utiliser les résultats de la question 1.).

**3.** Lorsque le point $M$ est distinct du point $A$ :

a) démontrer que le triangle $AMM'$, où $M' = \varphi(M)$, est rectangle en $M'$.

b) Le point $M$ et le milieu du segment $[AM]$ étant donné, en déduire une construction au compas du point $M'$.

## Problème 752 *12 points.* *./1991/aixmarseilleC/pb/texte*

I. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

1° a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Étudier le sens de variation de $f$ (on ne demande pas de représentation graphique).

2° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^\star$ une solution unique $\ell$ et que $\ell \in ]1\,;2[$.

b) Étudier la signe de $f(x)$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}_+^\star$.

II. On se propose, dans cette partie, de calculer une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-2}$ près.

1° Soit $\varphi$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par :

$$\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x.$$

a) Étudier les variations de $\varphi$. Prouver que l'image par $\varphi$ de l'intervalle $[1\,;2]$ est un intervalle contenu dans l'intervalle $[1\,;2]$.

b) Montrer que $\ell$ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

2° On considère alors la suite $U$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout entier $n$, on a $1 \leqslant U_n \leqslant 2$.

b) Montrer que, pour tout réel $x$ de $[1\,;2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier $n$,

$$|U_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \ell|.$$

d) Démontrer que la suite $U$ converge vers $\ell$.

e) Déterminer un entier $n_0$ tel que $U_{n_0}$ soit une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $\ell$. Donner un encadrement de $U_{n_0}$ d'amplitude $10^{-2}$.

III. La fonction $g$ est définie sur $[0\,;1]$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x, \qquad \text{pour tout réel } x \text{ tel que } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



Retour page 1

1° Étudier la dérivabilité de $g$ en $0$.

2° Soit $g'$ la dérivée de $g$. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis vérifier que :

$$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{pour tout réel } x \text{ tel que } 0 < x \leqslant 1.$$

3° En déduire le signe de $g'(x)$ lorsque $x$ décrit $]0\,;1]$.
Dresser la tableau de variation de la fonction $g$.

IV. Dans cette partie, l'objectif est le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $g$, dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ : unité graphique 10 cm.

1° a) Montrer qu'une équation de la tangente $(\mathscr{D})$ à la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction $g$ en son point d'abscisse $0$ est $y = x$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de $(\mathscr{D})$.

d) Soit $\alpha$ la fonction définie sur $\left[0\,;\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$ par :

$$\alpha(x) = g(x) - x.$$

Étudier la sens de variation de la fonction $\alpha$ et en déduire que pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0\,;\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$, on a :

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 5.10^{-5}.$$

Sachant que l'épaisseur du trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $\left[0\,;\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}}\right]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est la droite $(\mathscr{D})$ ?

2° Soit $(\Gamma)$ la courbe représentative de la fonction $\beta$ définie sur $[0\,;1]$ par :

$$\beta(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x.$$

a) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ est la tangente à la courbe $(\Gamma)$ en son point d'abscisse $0$.

b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de $(\Gamma)$.

c) Tracer, sur un même graphique, la droite $(\mathscr{D})$ et les courbes $(\Gamma)$ et $(\mathscr{C})$.

## II. Groupe II, serie C & E

**A**Ex. 2008. ———— *4 points.* *./1991/amiensC/exo-1/texte.tex*

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Au point $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, pù $x$ et $y$ sont réels, on fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z' = z^2 + 2z$.

**1.** a) Calculer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ du point $M'$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point $M$.

b) Montrer que l'ensemble $(H)$ des points $M$ du plan tels que $z'$ soit imaginaire pur est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.
Tracer $(H)$.

**2.** Soit $\Omega$ le point d'affixe $-1$.
Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que le quadrilatère $OMM'\Omega$ soit un parallélogramme.

**A**Ex. 2009. ———— *4 points.* *./1991/amiensC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts $A$ et $B$.
On note $R_A$ et $R_B$ les rotations de centre respectifs $A$ et $B$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Pour tout point $M$ du plan, on note $M_1$ et $M_2$ les images respectives de $M$ par $R_A$ et $R_B$.

**1.** On considère la transformation $T = R_B \circ R_A^{-1}$.

a) Construire le point $C$ image du point $A$ par $T$.



Retour page 1

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $M_1M_2CA$.

**2.** On suppose que $M$ décrit le cercle $(\Gamma)$ de diamètre $[AB]$.

a) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma_2)$ décrit par le point $M_2$ quand $M$ décrit $(\Gamma)$.

b) Soit $\omega$ et $\omega_2$ les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer l'ensemble décrit par le point $I$, milieu de $[M_1M_2]$ quand $M$ décrit $(\Gamma)$.

## Problème 753 *12 points.*

*./1991/amiensC/pb/texte*

Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

A. 1° Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-x}$$

et soit $C$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Établir le tableau de variations de $f$.

2° Soit $T$ l'application de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ associe le point $N$ de coordonnées $(x'\,;\,y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et que le milieu $P$ de $[MN]$ appartient à l'axe $(O\,;\,\vec{\jmath})$.

b) Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;0]$ par :

$$g(x) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{x}$$

et soit $C_1$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Montrer que l'image de la courbe $C$ par $T$ est la courbe $C_1$.

3° Établir le tableau de variations de $g$.

4° Montrer que $C$ et $C_1$ admettent pour asymptote la droite $\Delta$ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ et préciser leur position par rapport à $\Delta$.

5° Soit $h$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-|x|}$$

et soit $\Gamma$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Montrer que $\Gamma$ est la réunion de $C$ et de $C_1$.

6° En adoptant une unité de 4 cm sur chaque axe, construire $\Delta$ et la courbe $\Gamma$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$en précisant les demi-tangentes à $\Gamma$ au point $A$ d'abscisse 0.

B. Soit $D_k$ la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{k}$ où $k$ est un réel strictement supérieur à 1.

1° a) Étudier la position relative de $C$ et $D_k$ et donner l'abscisse de leur point commun $M_k$.

b) Étudier la position relative de $C_1$ et $D_k$ et donner l'abscisse de leur point commun $N_k$.

c) Vérifier que $N_k = T(M_k)$ ($T$ étant l'application définie au A2) et que le milieu $P_k$ de $[M_kN_k]$ appartient à l'axe $(O\,;\,\vec{\jmath})$.

2° Démontrer que les parties du plan limitées, l'une par $C$, $D_k$ et $(O\,;\,\vec{\jmath})$, l'autre par $C_1$, $D_k$ et $(O\,;\,\vec{\jmath})$ ont la même aire $a(k)$.
Étudier la limite de $a(k)$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$.

3° Montrer que l'aire du triangle $AP_kM_k$ est $S(k) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\ln k$.

4° On se propose d'étudier s'il existe une valeur de $k$ telle que

$$S(k) = 2a(k). \tag{1}$$

a) $\psi$ étant la fonction numérique définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$\psi(k) = \ln k - 4\frac{k-1}{k+3},$$

montrer que l'égalité (1) équivaut à : $\psi(k) = 0$.

b) Établir le tableau de variation de $\psi$.

c) En déduire l'existence et l'unicité de la valeur $k$ vérifiant l'égalité (1) et encadrer cette valeur par deux entiers consécutifs.

# III. Groupe III, série C

**Ex. 2010.** *4 points.* *./1991/BesanconC/exo-1/texte.tex*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Á tout point $M$ d'affixe $z$, $z \neq 0$, on associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

**1.** On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où $x$ et $y$ sont des réels.

a) Exprimer en fonction de $x$ et $y$ la partie réelle $x'$ et la partie imaginaire $y'$ de $z'$.

b) Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ tels que $M'$ appartienne à l'axe réel.

**2.** On suppose que $M$ décrit le cercle de centre $O$ et de rayon 2. On écrit alors $z$ sous la forme $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \int [0\,; 2\pi[$.

a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $t$.

b) En déduire que $M'$ décrit une conique $C$ dont on déterminera la centre et les sommets.

**Ex. 2011.** *5 points.* *./1991/BesanconC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère une carré $ABCD$ tel que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

On désigne par $I$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$.

Représenter ces points sur une figure.

(On choisira $AB = AD = 4$ cm.)

On se propose d'étudier la similitude directe $S$ telle que :

$$S(A) = I \qquad \text{et} \qquad S(C) = K.$$

1. Recherche géométrique des éléments de $S$ a) Donner le rapport et l'angle de $S$.

   b) Démontrer que le centre $\Omega$ de $S$ est le point d'intersection autre que $I$ des cercles de diamètres $[AD]$ et $[CI]$.

   Placer ces cercles et $\Omega$ sur la figure.

2. Recherche du centre de $S$ à l'aide des nombres complexes le plan est rapporté au repère orthonormal $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

   a) Déterminer les affixes des points $A$, $C$, $I$ et $K$.

   b) Donner l'écriture complexe de $S$.

   c) En déduire les coordonnées du point $\Omega$.



Retour page 1

## 🏛PROBLÈME 754 *11 points.*



*Première partie.*

1. Déterminer les solutions $h$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 4 = 0. \qquad \text{(E)}$$

2. On considère l'équation différentielle (F)

$$y'' + 4y' + 4 = -4x. \qquad \text{(F)}$$

   a) Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que la fonction $\varphi : x \longmapsto ax + b$ soit solution de (F).
   b) Montrer qu'une fonction $f$ est solution de (F) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).
   c) En déduire toutes les solutions de (F).
   d) Donner la solution $f$ de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

*Deuxième partie.*

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 - x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ . On se propose d'étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1. a) Calculer la fonction $f'$ dérivée de $f$. Dresser le tableau de variations de $f'$ sur $[0\,;+\infty[$.
   Indiquer la limite de $f'$ en $+\infty$.
   En déduire le signe de $f'$ sur $[0\,;+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$. Indiquer la limite de $f$ en $+\infty$.
   c) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $d$ que l'on déterminera. Construire $d$ et $\mathscr{C}$, sur un même graphique.
2. a) Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une solution et une seule. On note $\alpha$ cette solution.
   b) Justifier l'encadrement : $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

*Troisième partie.*

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de $\alpha$.
On observe pour cela que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ où $g$ est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1.$$

1. Étudier les variations de $g$ sur $J$. On ne demande pas de construire sa courbe représentative. En déduire que pour tout élément $x$ de $J$, $g(x)$ appartient encore à $J$.
2. Montrer que pour tout $x$ de $J$, on a :

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}.$$

   En déduire que pour tout $x$ de $J$, on a :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}|x - \alpha|.$$

3. Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de $J$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout entier $n$, positif ou nul.
   a) Montrer que pour tout entier $n$ positif ou nul on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{\mathrm{e}^2}|u_n - \alpha|.$$

   b) En déduire que pour tout entier $n$, positif ou nul, on a :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{\mathrm{e}^2}\right)^n.$$

   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
   d) Déterminer un indice $p$ pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leqslant 10^{-3}$. Calculer $u_p$ à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimales).



Retour page 1

# IV. Groupe IV, série C

**Ex. 2012.** *4 points.* ./1991/bordeauxC/exo-1/texte.tex

Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

**1.** Mettre sous forme trigonométrique $z_1$, $z_2$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

**2.** En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**3.** On considère l'équation d'inconnue réelle $x$ :

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2.$$

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

b) Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

**Ex. 2013.** *5 points.* ./1991/bordeauxC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre $O$ c'est-à-dire tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit $P$ un point du segment $[BC]$ distinct de $B$. On note $Q$ l'intersection de $(AP)$ avec $(CD)$.
La perpendiculaire $\Delta$ à $(AP)$ passant par $A$ coupe $(BC)$ en $R$ et $(CD)$ en $S$.

**1.** Faire une figure (prendre $BC$= 3 cm et $BP$=1 cm et placer $(BC)$ horizontalement sur la feuille).

**2.** Soit $r$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Préciser l'image de la droite $(BC)$ par $r$.

b) Préciser les images de $R$ et $P$ par $r$.

c) Quelle est la nature des triangles $RAQ$ et $PAS$ ?

**3.** On note $N$ le milieu du segment $[PS]$ et $M$ celui du segment $[QR]$.
Soit $s$ la similitude directe de centre $A$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Préciser les images de $R$ et de $P$ par $s$.

b) Quel est le lieu géométrique du point $N$ quand $P$ décrit le segment $[BC]$ privé de $B$ ?

c) De ce qui précède, déduire que les points $M$, $B$, $N$ et $D$ sont alignés.

## Problème 755 *11 points.* ./1991/bordeauxC/pb/texte

Le problème a pour objet :
• Dans la partie A, d'étudier la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2\ln x}{1+x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

• Dans la partie B, de calculer une valeur approchée de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

A. **Étude et représentation graphique de f**

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 10 cm sur $x'x$ et 20 cm sur $y'y$)

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$.

**I-Étude d'une fonction auxiliaire.**

Soit $u$ la fonction définie sur $]0\,;1]$ par

$$u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x.$$



Retour page 1

1. Montrer que la fonction $u$ est strictement croissante. Donner son tableau de variations en précisant la limite en $0$ et la valeur en $1$.
2. En déduire que la fonction $u$ s'annule pour un unique nombre réel $\beta$ compris entre $0$ et $1$. Montrer que :
$$0{,}54 < \beta < 0{,}55.$$

**II - Étude et représentation graphique de $f$.**

1. a) Étudier la limite de $f$ en $0$.
   b) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $[0\,;1]$.
2. a) Étudier la dérivabilité de $f$ en $0$.
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et vérifier que $f'(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe.
3. Donner le tableau de variations de $f$.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ en précisant les tangentes aux points d'abscisses respectives $0$ et $1$.

B. La continuité de $f$ assure l'existence de l'intégrale
$$J = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer une primitive de $f$.

**I - Étude d'une intégrale auxiliaire**

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.On désigne par $g_n$ la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par :
$$g_n(t) = -t^n \ln t \quad \text{si } t > 0 \qquad \text{et} \qquad g_n(0) = 0.$$

1. Démontrer que $g_n$ est continue sur $[0\,;1]$.
2. Soit $G_n$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :
$$\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} & \text{si } t > 0,\\ G_n(0) = 0. \end{cases}$$
   a) Montrer que $G_n$ est une primitive de $g_n$ sur $[0\,;1]$.
   b) En déduire la valeur de l'intégrale :
$$J_n = \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**II - Étude de $J$.**

1. Soit $t$ un nombre réel et $n$ un entier naturel supérieur ou égal à $1$.
   a) Calculer le produit
$$P_n(t) = (1+t)(1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n+1}t^n).$$
   b) En déduire que pour tout nombre réel $t \neq -1$,
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n+1}t^n + (-1)^n\frac{t^n}{1+t}.$$
   c) Montrer que pour tout nombre réel $t \in [0\,;1]$,
$$f(t) = g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) - \cdots + (-1)^{n-1}g_{n+1}(t) + (-1)^n\frac{g_{n+2}(t)}{t+1}.$$
   puis que
$$J = J_2 - J_3 + J_4 - \cdots + (-1)^{n-1}J_{n+1} + (-1)^n\int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

d) En s'aidant une majoration de $\dfrac{gn+2(t)}{1+t}$, démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+3)^2}.$$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. On pose :

$$S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)^2}.$$

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = J$.

b) Montrer que $S_8 \leqslant J \leqslant S_9$.

c) En déduire une valeur approchée de $J$ à $5.10^{-3}$ près, exprimée avec trois décimales.

## V. Amérique du Nord, série C

**Ex. 2014.** ——— *4 points.* *./1991/ameriquedunordC/exo-1/texte.tex*

Le plan $P$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 3cm).

**1.** Soit $(\mathscr{H})$ l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation :

$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les asymptotes.

**2.** Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ d'affixe $Z$ tels que les points $A$, $M$ et $M'$ d'affixes respectives $1$, $Z$ et $Z^4$ soient alignés. (On pourra poser $Z = x + \mathrm{i}y$ et exprimer le nombre complexe $1 + Z + Z^2 + Z^4$ en fonction de $x$ et $y$.)

Construire l'ensemble $E$.

**Ex. 2015.** ——— *5 points.* *./1991/ameriquedunordC/exo-2/texte.tex*

Soient $A$, $B$, $C$ trois points du plan non alignés tels que le triangle $ABC$ ne soit pas équilatéral.
On désigne par $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

**1.** On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC}^2 + b^2\overrightarrow{CA}^2 + c^2\overrightarrow{AB}^2$.

Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC}^2 + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}^2$.

En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

**2.** Pour tout point $M$ du plan, on pose :

$$f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}.$$

a) Soit $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$, calculer $f(O)$.

b) Soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$.

Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \dfrac{1}{6}(b^2 - c^2)$.

En déduire la valeur de $f(G)$.

c) Déterminer l'ensemble $D$ des points $M$ du plan tels que $f(M) = 0$.

## 🏛Problème 756 *11 points.* 

*./1991/ameriquedunordC/pb/texte*

A- Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1° a) Étudier la parité de $f$ et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 5 cm).

2° Calculer,en $cm^2$, l'aire du domaine plan $\Delta$ compris entre la courbe $(C)$ l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. *On pourra faire une intégration par parties.*

3° Pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$$g(x) = f(\sin x).$$

Montrer que la fonction $g$ est une primitive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $h$ telle que $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

B- Dans la suite du problème, $a$ désigne un nombre réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

1° Montrer que $0 \leqslant I_n(a) \leqslant a\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

2° En déduire le limite de $I_n(a)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

C- Pour tout entier $n$ entier supérieur ou égal à 1, on définit sur $[0\,;a]$ la fonction $F_n$ par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5}{5} + \cdots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

a) Montrer que $F_n$ est dérivable sur $[0\,;a]$ et que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\,;a]$ :

$$F_n'(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t}.$$

Calculer $F_n(0)$.

b) En intégrant le relation précédente entre 0 et $a$, montrer que :

$$F_n(a) = g(a) - I_n(a).$$

En déduire la limite de $F_n(a)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

c) On considère alors la suite $u$ définie pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 par

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}.$$

*i.* Montrer, en utilisant Cb et B1, que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, $u_n$ est une valeur approchée de

$$\ln\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{près par défaut.}$$

*ii.* En déduire, sous forme de fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln\sqrt{3}$ à $10^{-2}$ près par défaut.



Retour page 1

# VI. Amérique du sud, série C

**Ex. 2016.** *4 points.* *./1991/ameriquedusudC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan $P$ orienté, on considère un carré $ABCD$ tel que l'angle $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
On désigne par $I$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$.
Représenter ces points sur une figure. (On choisira $AB = AD = 4$cm.)
On se propose d'étudier la similitude directe $S$ telle que :

$$S(A) = I \qquad \text{et} \qquad S(C) = K.$$

**1. Recherche géométrique des éléments de $S$.**

a) Donner le rapport et l'angle de $S$.

b) Démontrer que le centre $\Omega$ de $S$ est point d'intersection autre que $I$ des cercles de diamètres $[AD]$ et $[IC]$. Placer ces cercles et $\Omega$ sur la figure.

**2. Recherche du centre de $S$ à l'aide des nombres complexes.**

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$.

a) Donner les affixes des points $A$, $C$, $I$ et $K$.

b) Donner l'écriture complexe de $S$.

c) En déduire les coordonnées de $\Omega$.

**Ex. 2017.** *4points.* *./1991/ameriquedusudC/exo-2/texte.tex*

Soit $\Delta_1$ et $\Delta_2$ deux droites distinctes de l'espace.
On note $R_1$ et $R_2$ les demis-tours d'axes respectifs $\Delta_1$ et $\Delta_2$.
Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Delta_1$ et $\Delta_2$ pour que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

**1.** On suppose que $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont sécantes en un point noté $O$ et sont orthogonales. On note $\Delta$ la droite orthogonale en $O$ au plan $P$ contenant $\Delta_1$ et $\Delta_2$.
On note $P_1$ et $P_2$ les plans passant par $\Delta$ et contenant respectivement $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

a) Faire une figure.

b) On note $S_P$, $S_{P_1}$ et $S_{P_2}$ les réflexions par rapport aux plans $P$, $P_1$ et $P_2$.
Déterminer $S_P \circ S_{P_1}$ et $S_{P_2} \circ S_P$.

c) En déduire que $R_2 \circ R_1$ est le demi-tour $R_\Delta$ d'axe $\Delta$.

d) Prouver que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

**2.** Réciproquement, on suppose que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.
Soient $A$ un point de $\Delta_1$ qui n'appartient pas à $\Delta_2$ et $B$ l'image de $A$ par $R_2$.

a) Montrer que la droite $(AB)$ et la droite $\Delta_2$ sont sécantes et orthogonales.

b) En utilisant la relation $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$, prouver que $B = R_1(B)$.

c) En déduire que $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont sécantes et orthogonales.

## Problème 757 *12 points.* *./1991/ameriquedusudC/pb/texte*

On propose :

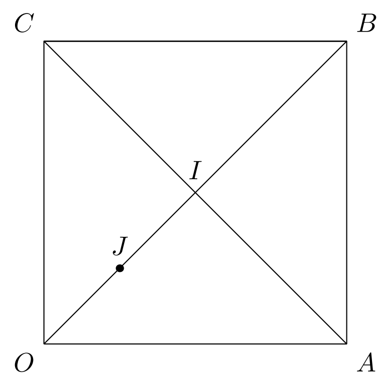
# VII. Antilles Guyane, séries C & E

**Ex. 2018.** ——— *4 points.* *./1991/antillesce/exo-1/texte.tex*

Soit $d$ un réel strictement positif. Dans le plan orienté, on considère le carré $OABC$ de centre $I$ tel que :

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{2}\\ OA = d.\end{cases}$$

Soit $J$ le milieu de $(O,\ I)$.




1. Soit $f$ la similitude plane directe telle que $f(O) = I$ et $f(A) = J$.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de $f$.
   b) Construire $C' = f(C)$. Déterminer $f(B)$.
   c) Soit $\Omega$ le centre de la similitude $f$.
   Montrer que les points $(\Omega,\ O,\ I,\ C)$ d'une part, et $(\Omega,\ O,\ A,\ J)$ d'autre part sont cocycliques.
   En déduire une construction de $\Omega$.
   d) Montrer que les droites $(O\Omega)$ et $(\Omega C)$ sont orthogonales.
2. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que $A$ ait pour affixe $d$. Déterminer la forme complexe de $f$.

**Ex. 2019.** ——— *4 points.* *./1991/antillesce/exo-2/texte.tex*

Soit $D$ une droite du plan et $F$ un point dont la distance à $D$ est égale à 3, l'unité étant le centimètre.
Soit $\Delta$ la droite passant par $F$ et orthogonale à $D$.
On considère $\theta$ un réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit $\Gamma_\theta$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = \cos\theta$, $H$ étant le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $D$.
   Donner suivant les valeurs de $\theta$ la nature de $\Gamma_\theta$.
2. Tracer $\Gamma_0$, cas où $\theta = 0$.
3. a) Soit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Déterminer les sommets $A$ et $A'$ de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ situés sur $\Delta$, le centre $O$ et le deuxième foyer $F'$ de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$. Tracer $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.
   b) Déterminer l'équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ où $O$ est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite $\Delta$.

**Problème 758** *12 points.* *./1991/antillesce//pb/texte*

$K$ étant

# VIII. Antilles Guyane remplacement, séries C & E

Ex. 2020. 4 points. ./1991/antillesCErem/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on associe au point $M$ d'affixe $z$, $z \neq -3\mathrm{i}$, le point d'affixe $M'$ tel que :

$$z' = \frac{z-1+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}z}.$$

**1.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tel que $z'$ soit un nombre réel.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tel que $|z'| = 2$.

Ex. 2021. 6 points. ./1991/antillesCErem/exo-2/texte.tex

Soit un losange $ABCD$ de centre $O$, et tel que $OB = 2OA$.

**1.** Montrer que le barycentre $I$ des points $B$, $C$, $D$ affectés respectivement des coefficients $2$, $-1$, $1$ est le milieu du segment $[AB]$.

**2.** Soit $k$ un nombre réel.

a) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des barycentres $G$ des points $A$, $B$, $C$ et $D$ affectés respectivement des coefficients $k$, $2$, $k-1$ et $1-2k$.

b) Préciser la valeur de $k$ pour laquelle $G$ est un point de la droite $(AC)$.

**3.** déterminer et représenter :

a) l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points $M$ du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD})\dot{(}2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0.$$

b) l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points $M$ du plan tels que :

$$MA^2 + MC^2 - 2MD^2 = -6OA^2.$$

## Problème 759 10 points. ./1991/antillesCErem//pb/texte

I- 1. Soit la fonction numérique $g$ définie pour tout nombre $x$ par :

$$g(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}.$$

a) Étudier la variations de $g$ sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas de construire sa représentation graphique.

b) Prouver que $g(x)$ est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

c) Étudier la fonction $g'$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
En déduire que, pour tout $x$ appartenant à $[1\,;+\infty[$, on a :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. Soit la fonction numérique $f$ définie pour tout $x$ réel positif par :

$$f(x) = 1 + \ln\left[\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\right].$$

a) Étudier les variations de $f$.
Tracer avec précision la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, ayant pour unité graphique 5 cm.

b) Prouver que, pour tout $x$ réel positif, on a :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \ln 2 < 2.$$

c) En utilisant le I1, prouver que pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;2]$, on a :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$



Retour page 1

d) Soit $m$ un réel quelconque.
Déterminer graphiquement, en discutant suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions positives de l'équation $f(x) = m$.
Pour $m = 1{,}5$, déterminer graphiquement les valeurs approchées des solutions à $10^{-1}$ près.

II- On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$U_0 = \dfrac{1}{5}$ et pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f$ est la fonction définie dans la partie I.

1. Placer $U_0$ sur l'axe des abscisses du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, puis par un procédé géométrique, représenter sur ce même axe, $U_1$, $U_2$ et $U_3$.
2. Prouver que, quel que soit l'entier naturel non nul $n$, on a
$$1 < U_n < 2.$$
3. Soit $h$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par :
$$h(x) = f(x) - x.$$
Montrer que $h$ est une fonction décroissante. En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution $\lambda$ comprise entre 1 et 2. Donner une valeur approchée de $\lambda$ à $10^{-2}$ près.
4. Prouver que pour tout entier naturel non nul $n$, on a :
$$|U_{n+1} - \lambda| \leqslant \frac{1}{4}\,|U_n - \lambda|.$$
En déduire que $|U_n - \lambda| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ et que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda$.

# IX. Japon, série C

**Ex. 2022.** ______ *4 points.* *./1991/japonC/exo-1/texte.tex*

Soit l'équation différentielle :
$$y'' + 4y = 0. \qquad \text{(E)}$$

**1.** Déterminer les solutions $f$ et $g$ de l'équation (E), telles que :
$$f(0) = 5 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$
$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'(0) = 8.$$

**2.** Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on désigne par $(C)$ la courbe d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
où le réel $t$ décrit $\mathbb{R}$. Quelle est la nature de la courbe $(C)$ ? La construire après avoir préciser ses éléments caractéristiques : sommets, foyers, excentricité.

**Ex. 2023.** ______ *4 points.* *./1991/japonC/exo-2/texte.tex*

L'unité est le cm.
On donne dans le plan, un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AB = 8$ et $AC = 4$.

**1.** Construire la barycentre $G$ des points $A$, $B$, $C$ respectivement affectés des coefficients $3$, $-1$ et 2.

**2.** Déterminer et construire l'ensemble $E$ des points $M$ du plan vérifiant :
$$3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32.$$

**3.** Déterminer et construire l'ensemble $F$ des points $M$ du plan vérifiant :
$$\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

Retour page 1

## PROBLÈME 760 *12 points.*

*./1991/japonC/pb/texte*

I- **Étude d'une fonction numérique. Tracé de courbes.**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=1+\ln(1+x).$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique : 3 cm.

1° a) Étudier le sens de variation de $f$.

b) Donner une équation de la tangente $(\mathscr{D})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente $(\mathscr{D})$.

2° En étudiant la fonction numérique $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-f(x)$$

montrer que l'équation $f(x)=x$ a une solution unique $\alpha$, et que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[1\,;3]$.

II- **Résolution approchée d'une équation. Calcul d'aire.**

1° On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0=1 \text{ et pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+1}=f(u_n),$$

où $f$ est la fonction définie dans la partie I).
Démontrer les résultats suivants :

a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et croissante ;

b) pour tout entier naturel $n$, $u_n\geqslant 1$ ;

c) pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on a $0\leqslant f'(x)\leqslant \dfrac{1}{2}$ ;

d) pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_{n+1}-\alpha|\leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

($\alpha$ est le réel défini à la question I2) ;
Pour tout entier $n$, on a :

$$|u_n-\alpha|\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n\times|u_0-\alpha|\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\ ;$$

e) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ ;

f) $u_{11}$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

2° Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée $\beta$ de $u_{11}$ à $10^{-3}$.

3° Calculer, l'aire en cm$^2$ de l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant \alpha\\ 0\leqslant y\leqslant f(x).\end{cases}$$

(On utilisera vu une intégration par parties.)
On donnera pour cette aire la valeur exacte en faisant intervenir $\alpha$, puis une valeur approchée obtenue en remplaçant $\alpha$ par le nombre $\beta$ trouvé en II2).

III- **Étude d'une famille de courbes et d'une suite de réels.**

Pour tout entier naturel $p$ supérieur ou égal à 1, on considère la fonction $f_p$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_p : x\longmapsto f_p(x)=1+\ln(x+p).$$

On appelle $(\mathscr{C}_p)$ la courbe représentative de $f_p$.



Retour page 1

1° Dresser le tableau de variation de $f_p$.
Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_p)$ et $(\mathscr{C}_{p+1})$.

2° Le graphique ci-dessous, à rendre avec la copie, représente les courbes $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_{10})$, $(\mathscr{C}_{20})$ et $(\mathscr{C}_{50})$. Le compléter par le tracé de $(\mathscr{C}_1)$ et celui de la droite $(\Delta)$ d'équation cartésienne $y = x$.

3° Étudier pour tout entier $p$ supérieur ou égal à 1, le sens de variation de la fonction $g_p$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

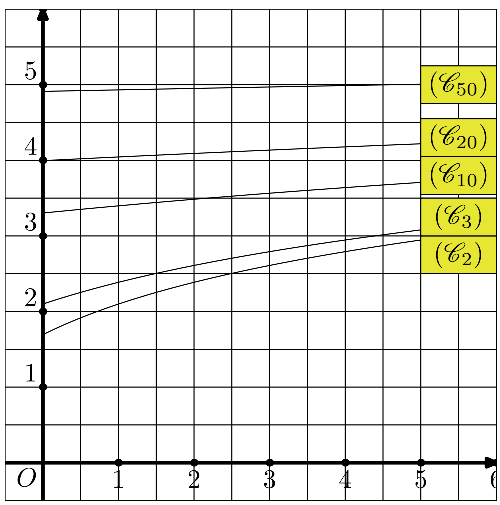
$$g_p : x \longmapsto g_p(x) = x - f_p(x).$$

Déduire de cette étude l'existence d'une solution unique $\alpha_p$ pour l'équation $x = f_p(x)$, et le signe de $g_p$.

4° On désigne par $P$ le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'abscisse $\alpha_1$
par $Q$ le point de $(\mathscr{C}_2)$ d'abscisse $\alpha_1$
par $R$ le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'abscisse $\alpha_2$.

Placer ces points sur le graphique complété à la question III2).
Comparer les ordonnées de $P$ et $Q$.
Quel est le signe de $g_2(\alpha_1)$ ? en déduire, en utilisant III3), que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.
Prouver de la même manière la croissance de la suite $(\alpha_p)_{p\geqslant 1}$.

5° Établir l'inégalité $\alpha_p \geqslant 1 + \ln p$.
Quelle est la limite de la suite $(\alpha_p)_{p\geqslant 1}$ ?




## X. Maroc, Sénégal, Gabon & Djibouti, série C

Ex. 2024. ____________ *4 points.* *./1991/marocC/exo-1/texte.tex*

Dans le plan on considère deux cercles $C$ et $C'$ de centres respectifs $O$ et $O'$, de même rayon, tangents extérieurement en un point $A$.
Á tout point $M$ de $C$ on associe le point $M'$ de $C'$ tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \text{ entier.}$$

**1.** Montrer qu'il existe une rotation de mesure $\frac{\pi}{2}$, dont on construira géométriquement le centre $\Omega$, qui envoie $C$ sur $C'$.
Quelle est l'image de $M$ par cette rotation ?

**2.** Montrer que $I$, milieu de $MM'$ est l'image de $M$ par une similitude $f$ directe de centre $\Omega$.
Déterminer les élément caractéristiques de cette similitude. En déduire le lieu de $I$ quand $M$ décrit $C$.

**3.** Donner l'image de $O$ par la similitude $f$ et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AI}}\right)$.



Retour page 1

**Ex. 2025.** ———— *6 points.* *./1991/marocC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -\mathrm{i}$. Soit M le points d'affixe $z$.

**1.** Exprimer en fonction de $z$ le nombre réel :

$$p = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB} \times \mathrm{MC} \times \mathrm{MD}.$$

**2.** On suppose que $r = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Donner une relation entre $r$ et $\theta$ nécessaire et suffisante pour que $p = 1$.

**3.** Chercher les affixes des points M de l'axe des réels solutions de $p = 1$.
Donner sous forme trigonométrique les affixes des points M du cercle trigonométrique tels que $p = 1$.

## Problème 761 *10 points.*

*./1991/marocC/pb/texte*

On rapporte le plan à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité de longueur est de 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit $n$ un entier naturel supérieur où égal à 2. Pour $x \in ]1 ; +\infty[$, on définit deux fonctions $P_n$ et $f_n$ par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

$$f_n(x) = \ln(x-1) + P_n(x).$$

A- 1. a) Donner une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

b) En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, trouver pour $x \neq 1$ une forme équivalente à l'expression :

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

c) Étudier le sens de variation des fonctions $P_n$ et $f_n$ et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On notera $\alpha_n$ cette solution.

a) Donner et justifier un encadrement de $\alpha_n$ à $10^{-2}$ près.

b) Tracer $\mathscr{C}_3$ courbe représentative de $f_3$.

c) On placera les points de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2} ; f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$ ; $(2 ; f(2))$.

3. Donner une expression simple et le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)$. Étudier la convergence de la suite $(\alpha_n)$.

4. Soit $p$ un entier positif non nul. Montrer que $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}$. En déduire :

a) que $\ln(n+1) \leqslant P_n(1)$ ;

b) que $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) > 0$ ;

c) et enfin que $1 < \alpha_n < 1 + \dfrac{1}{n+1}$
En déduire la limite de la suite $(\alpha_n)$.

B- 1. Étudier le sens de variation de $f'_{n+1}$ sur l'intervalle $\left]1 ; 1 + \dfrac{1}{n+1}\right[$.

2. Écrire l'inégalité des accroissements finis pour $f_{n+1}$ sur $[\alpha_{n+1} ; \alpha_n]$.
Montrer en utilisant A3 que :

$$\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leqslant \alpha_n - 1.$$

3. En déduire un encadrement de $\alpha_4$ à partir de celui de $\alpha_3$.



Retour page 1

# XI. Orléans Tours, série D

## Problème 762

./1991/orleansD/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{i}\| = 4$ et $\|\vec{j}\| = 1$ avec comme unité le centimètre.

**Partie I.**

On considère la fonction numérique $f$ définie pour tout nombre réel $x$ non nul par

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

**1.** a) Déterminer le sens de variation de $f$.

b) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, on notera $\alpha$ la solution.

**2.** Donner alors le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.

**3.** a) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 4x^2$.

b) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

**4.** a) Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point $M$ d'abscisse $a$ où $a$ est un nombre réel non nul.

b) Soit $M$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $a$ avec $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, et soit $(T)$ la tangente en ce point à $\mathscr{C}$.
On note $K$ le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées, et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des abscisses.
Montrer que l'aire du trapèze $OHMK$ est indépendante de la position du point $M$.

**Partie II.**

On considère la fonction numérique $g$ définie pour tout nombre réel non nul par

$$g(x) = \frac{4}{3}x^3 + \ln|x|.$$

On désigne par $\Gamma$ la courbe représentative de $g$.

**1.** a) Déterminer le sens de variation de $g$.

b) Déterminer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer la valeur **exacte** $g(\alpha)$ où $x_0$ est la valeur définie dans la partie I.

**2.** Montrer que pour tout $x \in ]-\infty, 0[$, $g(x) < 0$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution notée $\beta$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
Donner, en la justifiant, une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

**3.** Construire $\Gamma$.

**4.** On s'aidant d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^{\frac{3}{2}} g(x)\ \mathrm{dx}.$$

En déduire l'aire (en cm$^2$) de la partie du plan comprise entre la courbe $\Gamma$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.



Retour page 1

# XII. Polynésie, séries C & E

**Ex. 2026.** ——— *4 points* *./1991/polynesiece/exo-1/texte.tex*

Dans cet exercice, on se propose d'encadrer l'intégrale :

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. En étudiant les variations de $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x - 1$ et de $h : x \mapsto 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}$ sur l'intervalle $[0,1]$, montrer que :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

2. Déduire de l'encadrement 1, un encadrement de $\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \in [0,1]$, puis montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\quad 1 - x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x} \leqslant 1 - x - \frac{x^4}{2(1+x)}. \tag{2}$$

3. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

   b) Déduire alors de la relation 2 que :

$$\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}.$$

   Donner alors une valeur approchée de $K$ à $3 \times 10^{-2}$ près.

**Ex. 2027.** ——— *4 points* *./1991/polynesiece/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle $ABC$ tel que l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ mesure $+\dfrac{\pi}{2}$.
La hauteur issue de $C$ coupe $(BA)$ en $H$ et coupe la parallèle à $(BC)$ menée par $A$ en $D$.
On pose $CA = b$ et $BC = a$.

1. Soit $s$ la similitude directe transformant $C$ en $A$ et $B$ en $C$.
   a) Déterminer son rapport en fonction de $a$ et $b$ et son angle.
   b) En utilisant cet angle, démontrer que le centre de $s$ est le point $H$.
   c) Quelle est l'image de $A$ par $s$ ?
2. En utilisant $s$, démontrer l'égalité $HC^2 = HA \times HB$.
3. Soit $I$ le milieu de $[BC]$, $J$ le milieu de $[CA]$ et $K$ celui de $[AD]$.
   Démontrer que le triangle $IJK$ est rectangle en $J$ et que dans ce triangle, le point $H$ est le pied de la hauteur issue de $J$.

## Problème 763 *12 points* *./1991/polynesiece/pb/texte*

On se propose de construire une courbe appelée **cardioïde** et d'en étudier quelque propriétés géométriques.

A- Une représentation paramétrique de la cardioïde Dans un plan rapporté à un repère orthonormal d'origine $O$, on se propose d'étudier la courbe $\Gamma$ décrite par le point $P$ d'affixe :

$$z = (1+\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ pour } \theta \text{ dans } [-\pi\,;\pi].$$

1. Déterminer la partie réelle $f(\theta)$ et la partie imaginaire $g(\theta)$ de $z$.
   Étudier la parité des fonctions $f$ et $g$, en déduire que la courbe $\Gamma$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
   On appellera $\Gamma_1$ la partie de $\Gamma$ qui correspond à $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

2. $f'$ et $g'$ étant les dérivées de $f$ et $g$, montrer que :

$$f'(\theta) = -\sin\theta(1+2\cos\theta)\ ;$$

$$g'(\theta) = \cos 2\theta + \cos\theta.$$

3. Soit $\vec{t}$ le vecteur de coordonnées $\left(f'(\theta)\ ;\ g'(\theta)\right)$.
   a) Montrer que $\vec{t}$ est un vecteur directeur de la tangente en $P$ à $\Gamma_1$, sauf pour une valeur de $\theta$ que l'on précisera.
   b) L'arc $\Gamma_1$ coupe l'axe des ordonnées en un point $I$ autre que $O$.
   Calculer l'ordonnée de $I$ et déterminer la tangente à $\Gamma$ en $I$.
   c) Déterminer les points de l'arc $\Gamma_1$ pour lesquels le vecteur $\vec{t}$ dirige un des axes de coordonnées.
4. On suppose ici que $\theta$ vérifie : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
   Soit $\alpha$ le coefficient directeur de la droite $(OP)$.
   Montrer que $\alpha = \tan\theta$.
   En déduire la tangente en $O$ à $\Gamma$.
5. Déduire des questions précédentes le tableau de variations coordonnées des fonctions $f$ et $g$ ($\theta \in [0\,;\pi]$).
   En prenant 4 cm pour unité, construire $\Gamma_1$ puis $\Gamma$.
   On prendra avec soin les points et les tangentes étudiées ci-dessus.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$, où est est le point d'affixe 1.

B- Cercle et cardioïde 1. Soit $M$ le point d'affixe $\cos\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   Montrer que $M$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ quelle que soit la valeur de $\theta$ réel.
2. On suppose maintenant que $M$ a pour affixe :

$$z_M = \cos\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{avec} \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

   et on lui associe le point $P$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ ait pour affixe :

$$z_{\overrightarrow{MP}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

   Vérifier que le point $P$ est sur la courbe $\Gamma$ définie au début du problème.
   Montrer que les points $O$, $M$ et $P$ sont alignés.
   Calculer la longueur $MP$.
   En déduire une construction point par point de $\Gamma$. (On distinguera les cas $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta < 0$.)
3. Les points $M$ et $P$ étant ceux de la question précédente, on considère la translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{MP}$.
   Montrer que l'image par $t$ du cercle $\mathscr{C}$ est un cercle $\mathscr{C}'$.
   Déterminer son centre et son rayon et montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents au point $T$ d'affixe :

$$z_T = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}.$$

4. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $s$ qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
   On suppose $M \neq O$, et soit $s_1$ la symétrie orthogonale transformant $O$ en $M$.
   Justifier que l'on a : $P = t \circ s_1(O)$, et en déduire que $P$ est l'image de $O$ par $s$.
5. On suppose que $\theta \neq \pi$, montrer que le vecteur $\vec{t}$ défini dans la première partie est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{TP}$.
   Déduire de cette étude une nouvelle construction de $\Gamma$ et de ses tangentes.
   Effectuer cette construction dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Retour page 1

# XIII. La réunion, séries C & E

**Ex. 2028.** *4 points* ./1991/reunionCE/exo-1/texte.tex

$A$, $B$, $C$ et $D$ sont quatre points du plan orienté. Sur les côtés du quadrilatère $ABCD$, on construit les triangles rectangles isocèles $APB$, $CQB$, $CRD$ et $ASD$ tels que les angles $(\overrightarrow{PB},\ vecteur PA)$, $(\overrightarrow{QB},\ \overrightarrow{QC})$, $(\overrightarrow{RD},\ \overrightarrow{RC})$ et $(\overrightarrow{SD},\ \overrightarrow{SA})$ aient pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Le but de l''exercice est de montrer que $PQRS$ est un parallélogramme en utilisant les nombres complexes.

**1.** Faire une figure.

**2.** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.

On note respectivement $a$, $b$, $c$ et $d$ les affixes des points $A$, $B$, $C$ et $D$ et $p$, $q$, $r$ et $s$ celles des points $P$, $Q$, $R$ et $S$.

a) Établir la relation

$$p = \frac{1}{2}\left[(1+\mathrm{i})a + (1-\mathrm{i})b\right].$$

Écrire les relations semblables donnant $q$, $r$ et $s$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

b) Conclure.

**Ex. 2029.** *4 points* ./1991/reunionCE/exo-2/texte.tex

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On note $(u_n)$ la suite définie par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

1. Donner un tableau de valeurs approchées à $10^{-2}$ près des termes de la suite d'indices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 10.
2. Tracer dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de $f$ et de la droite d'équation $(y = x)$ ; construire à l'aide de ce tracé les points de $(O; \vec{\imath})$ d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$, et $u_4$ en laissant les traits de construction apparents.
3. Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite ?
4. Á l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est positif.
5. Étudier le sens de variation de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

   $$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   En déduire que, pour tout réel strictement positif $x$, on a :

   $$0 < \ln(1+x) < x,$$

   montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
6. Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)$ converge et que sa limite est 0.

## Problème 764 *12 points* ./1991/reunionCE/pb/texte

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(\mathscr{H})$ la courbe plane dont une équation dans le repère $\mathscr{R}$ est :

$$y^2 - x^2 = 1.$$

On introduit également les fonctions $f$ et $F$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose d'étudier la fonction $F$ et de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.



Retour page 1

A- 1. Quelle est la nature de le courbe $(\mathscr{H})$ ? Préciser ses axes et ses sommets.

2. Étudier le sens de variation de $f$. On note $G_f$ la représentation graphique de $f$ dans le repère $\mathscr{R}$.

3. Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Vérifier que pour tout réel $x$ on a :

$$f(x) - x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}. \tag{1}$$

En déduire que la courbe $G_f$ admet une droite asymptote $D$ en $+\infty$ ; préciser la position relative de $G_f$ et de $D$.

4. Tracer $(\mathscr{H})$ ; montrer que $G_f$ est une partie de $(\mathscr{H})$ que l'on précisera.
On pourra prendre 2 cm comme unité graphique.

B- 1. Étudier le sens de variation de $F$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel $x$ positif on a : $x \leqslant f(x)$.

3. En déduire que pour tout réel positif $t$, on a :

$$\frac{t^2}{2} \leqslant \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire la limite de $F$ en $+\infty$.

C- On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}).$$

et $\mathscr{R}'$ désigne le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Si $M$ est un point quelconque du plan, on note $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et $(X\ ;\ Y)$ ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$.

1. Vérifier que $\mathscr{R}'$ est orthonormal.

2. Quelles sont les formules de changement de repère de $\mathscr{R}'$ et $\mathscr{R}$ ? On exprimera $x$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.

3. En déduire que $(\mathscr{H})$ a pour équation : $XY = \dfrac{1}{2}$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

4. On travaille maintenant dans le repère $\mathscr{R}'$. Soit $X_1$, et $X_2$ deux réels strictement positifs tels que $X_1 < X_2$.

a) Soit $g$une fonction continue, strictement positive, et décroissante sur $[X_1\,; X_2]$. On appelle $G_g$, la représentation graphique de $g$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
Soit $M$ et $N$ les points de $G_g$ d'abscisses $X_1$ et $X_2$. Soit $Q$ et $P$ les points de $(O; \vec{u})$ d'abscisses $X_1$ et $X_2$, et $S$ la partie bornée limitée par les segments $[OM]$, $[ON]$ et l'arc $MN$ de $G_g$. Montrer que l'aire de $S$ vaut

$$\int_{X_1}^{X_2} g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}X_1 g(X_1) - \frac{1}{2}X_2 g(X_2).$$

On pourra décomposer la partie limitée par $[OM]$, $MN$, $[NP]$ et $[PO]$ de deux façons, en faisant intervenir les deux triangles $OMQ$ et $ONP$.

b) En déduire, dans le cas où $G_g$ est l'ensemble des points de $(\mathscr{H})$, d'abscisse $X$ vérifiant, $X_1 < X < X_2$ et que l'aire $S$ est :

$$A(S) = \frac{1}{2}\ln\frac{X_1}{X_2}.$$

5. Soit $t$ un réel positif, déduire de l'expression de $A(S)$ où $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et en interprétant $F(t)$ en terme d'aire, l'expression de $F$ :

$$F(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1}).$$



Retour page 1

# XIV. Sujet National remplacement, séries C & E

Ex. 2030. 5 points ./1991/nationalcerem/exo-1/texte.tex

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On choisira 2 cm comme unité graphique.)
Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation :

$$3(x+1)^2+4y^2=12.$$

1. a) Quelle est la nature de cette conique ?
   b) Construire $\mathscr{C}$.
   c) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de $\mathscr{C}$.
2. Á chaque point $M$ de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ affixe de $M$.
   a) Démontrer que $|z|=x-3$.
   b) En déduire que $\|z\| = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$, $\theta$ étant un argument de $z$.
3. Soit $M'$ et $M''$ les points de $\mathscr{C}$ ayant pour affixes respectives $z'$ et $z''$ d'arguments respectifs $\theta$ et $\theta+\pi$.
   a) Calculer $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ en fonction de $\theta$.
   b) Déterminer $\theta$ pour que $\left\|\overrightarrow{M'M''}\right\|$ soit maximum puis minimum.

Ex. 2031. 5 points ./1991/nationalcerem/exo-2/texte.tex

Dans l'espace, on considère une pyramide $ABCDE$ telle que :
- la base $ABCD$ est un carré de centre $O$,
- la droite $(OE)$ est perpendiculaire au plan $(ABCD)$,
- $OE=OA=a$.

On se propose de déterminer toutes les réflexions et rotations laissant invariante cette pyramide.

**1.** Démontrer que la pyramide est invariante par la réflexion de plan $(ACE)$.
Est-elle invariante par le demi-tour d'axe $(OE)$ ?

**2.** a) Déterminer l'isobarycentre, $G$, des points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$.
b) Démontrer que les distances $GA$ et $GE$ sont différentes.

**3.** Soit $f$ un rotation ou une réflexion laissant invariante la pyramide.
a) Démontrer que le point $G$ est invariant par $f$.
b) Démontrer que l'image de $E$ par $f$ ne peut pas être le point $A$.
c) Démontrer que le point $E$ est nécessairement invariant par $f$.

**4.** a) Déterminer les réflexions laissant invariante la pyramide.
b) Déterminer les rotations laissant invariante la pyramide.

## Problème 765 *10 points* ./1991/nationalcerem/pb/texte

Soit $n$ un entier naturel et $f_n$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x)=x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

L'objet du problème est d'étudier :
- dans la partie I, la fonction $f_n$ et sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_n$ dans un repère orthonormal,
- dans la partie II l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

I Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 10 cm).

Retour page 1

1. Montrer que $\mathscr{C}_0$ est un demi-cercle, de rayon $\frac{1}{2}$, dont on précisera le centre.
2. Soit $n \geqslant 1$.
   a) Calculer $f_n'(x)$ pour $0 < x < 1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x$ ont le même signe.
   b) Étudier la dérivabilité de $f_n$ en $0$ et $1$.
   c) Donner le tableau de variation de $f_n$. (On ne demande pas le calcul du maximum de $f_n$.)
3. a) Soit $x \in [0\,;1]$ et $n \geqslant 0$.
   Étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.
   b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
   c) Tracer $C_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le même repère.

Pour tout entier naturel $n$ on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

II 1. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

et $G$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$G(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Vérifier que $G$ est la primitive de $g$ qui s'annule pour $x=1$.

2. Soit $n > 0$.
   a) En procédant à une intégration par parties utilisant $G$, démontrer que :

$$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)(I_{n-1}-I_n).$$

   En déduire la relation :

$$I_n = \frac{2n+1}{2n+4}I_{n-1}. \qquad (1)$$

   b) Du résultat obtenu en I1 déduire la valeur de $I_0$.
   c) Montrer que pour tout entier $n > 0$ :

$$I_n = \frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)}{6\times8\times10\times\cdots\times(2n+4)}\times\frac{\pi}{8}.$$

3. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(I_n)_{n\geqslant0}$.
   a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant0}$ est décroissante. Que peut-on en déduire ?
   b) Montrer, à l'aide d'une majoration de $f_n(x)$ sur $[0\,;1]$, que

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

# Chapitre XXXIV

# 1992.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

— groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims, Rennes & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

## I. Groupe I, série C & E

Ex. 2032. *4 points.* *./1992/groupeICE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle $ABC$ tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\quad\text{et}\quad AB<AC.$$

. On note $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $O$ son centre. Soit $E$ le milieu du segment $[BC]$ et $P$ le point du segment $[AC]$ tel que $AB=CP$.

La droite $(OE)$ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en $I$ et $J$, tels que $J$ et $A$ soient sur le même arc $BC$ du cercle $(\mathscr{C})$.

**1.** a) Faire une figure.

b) Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\ ?$$

c) Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\text{ et }MB<MC?$$

**2.** a) Justifier qu'il existe une unique rotation $R$ telle que $R(A)=P$ et $R(B)=C$, et déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point du cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

c) . Quelle est la nature du triangle $JAP$ ?

**3.** Déterminer l'image de $B$ par la composée $R\circ S_B$, où $S_B$ désigne la symétrie de centre $B$. Donner, en la justifiant, la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

Ex. 2033. ―――――― *4 points.* ./1992/groupeICE/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**1.** On considère les points $A$ de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$ et $I$ de coordonnées $(4\ ;\ 0)$.
Soit $(E)$ l'ellipse de centre $I$, dont un sommet est $A$ et un foyer $O$.

a) Déterminer les trois autres sommets de $(E)$.

b) Calculer l'excentricité de $(E)$, et donner une équation de sa directrice associée au foyer $O$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Former une équation de $(E)$ dans le repère $(I\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ d'origine le centre $I$ de l'ellipse.

d) Tracer $(E)$.

**2.** Dans cette question, à tout réel $\theta$ de l'intervalle $[0\,;\pi]$ on associe l'équation :

$$z^2-2(4+5\cos\theta)z+(4\cos\theta+5)^2=0.$$

a) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

b) Lorsque $\theta$ appartient à l'intervalle $]0\,;\pi[$, on note $z_1$ la solution de l'équation dont la partie imaginaire est strictement positive, et $z_2$ l'autre solution.
Soit $M_1$ le point d'affixe $z_1$ et $M_2$ le point d'affixe $z_2$.
Déterminer les coordonnées de $M_1$ en fonction de $\theta$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ puis dans le repère $(I\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.
En déduire l'ensemble des points $M_1$, puis celui des points $M_2$ lorsque $\theta$ varie dans l'intervalle $]0\,;\pi[$.

c)

**3.**

## Problème 766 *12 points.* ./1992/groupeICE/pb/texte

Les parties B et C sont indépendantes.
Pour les représentations graphiques de ce problème l'unité choisie est 2 cm ; et il convient de placer l'axe des ordonnées suffisamment à gauche de la feuille afin de réserver 16 cm pour le demi-axe des abscisses positives.

A) Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x(1-\ln x)\qquad \text{si}\qquad x>0,\quad \text{et } f(0)=0.$$

On appelle $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans la plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1° Justifier que $f$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2° Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $0$. En déduire que $f$ n'est pas dérivable en $0$.

3° a) Étudier la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier les variations de $f$. Faire un tableau de variations.

4° a) Écrire une équation de la tangente $(T)$à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $\mathrm{e}$.

b) Tracer $(T)$ et $(C)$. Préciser la tangente à $(C)$ au point $O$.

B) 1. On désigne par $\alpha$ et $x$ des nombres réels strictement positifs ; calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$, à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif et $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm$^2$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(C)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\mathrm{e}$.

a) Montrer que $\mathscr{A}(\alpha)=4\displaystyle\int_\alpha^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(On distinguera les deux cas $\alpha\leqslant\mathrm{e}$ et $\alpha\geqslant\mathrm{e}$.)
Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.

b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $0$.

Retour page 1

c) Déterminer $\alpha$ tel que : $\alpha > \mathrm{e}$ et $\mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{e}^2$.

3. Soit $x$ un réel de $[0\,;+\infty[$.

   Prouver l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Soit $F$ la fonction dé ?nie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $F$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.
   Quelle est la limite de $F$ en $0$ ?

5. a) Déduire du B1 que pour $x > 0$ :

$$F(x) - F(1) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) - \frac{3}{4}.$$

   b) Calculer la limite de $\dfrac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) - \dfrac{3}{4}$ quand $x$ tend vers $0$.
   En déduire la valeur de $F(1)$. En conclure que si $x > 0$ :

$$F(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x).$$

C) Á tout réel $k$ on associe la fonction $f_k$ , définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_k(0) = 0, \qquad \text{et} \qquad \text{et} \quad \text{si } x > 0 \quad f_k(x) = x(k - \ln x).$$

On appelle $(C_k)$ la courbe représentative de $f_k$, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $a$ un réel strictement positif, $A_k$ le point d'abscisse $a$ de $(C_k)$ et $(T_k)$ la tangente à $(C_k)$ au point $A_k$.
   Déterminer l'ordonnée du point d'intersection de $(T_k)$ avec l'axe des ordonnées.
   En déduire que, lorsque $k$ varie dans $\mathbb{R}$, les tangentes $(T_k)$ sont concourantes en un même point de l'axe $(O\ ;\ \vec{\jmath})$.
2. a) Montrer que l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\mathrm{e}^k$ transforme la courbe $(C_0)$ en la courbe $(C_k)$.
   b) Remarquer que la courbe $(C_1)$ est la courbe $(C)$ tracée au A(4)b Par quelle transformation ponctuelle, la courbe $(C_0)$ se déduit-elle de $(C_1)$ ? Construire $(C_0)$ sur la même figure que $(C_1)$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. Déduire, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le tracé de $(C_2)$ de celui de $(C_0)$ sur la même figure que $(C_0)$ et $(C_1)$.
   Construire les tangentes à $(C_2)$ aux points d'abscisses $\mathrm{e}$, $\mathrm{e}^2$ et $1$.
   Faire apparaître sur le graphique le point d'intersection des tangentes aux courbes $(C_k)$, $(C_1)$ et $(C_2)$ aux points de ces courbes d'abscisse $1$.

## II. Groupe II, série C & E

**Ex. 2034.** ____________ *4 points.* *./1992/parisC/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$$

sachant que l'une de ses solutions est un nombre entier.

**2.** Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $\Omega$ d'affixes respectives $+1$, $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1$.

Soit (E) l'ellipse de centre $\Omega$ passant par les points $M_1$ et $M_2$ ; son axe focal est l'axe des abscisses.

a) Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E).

b) Déterminer une équation cartésienne de (E) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) et de l'axe des ordonnées. Tracer (E).

Retour page 1

**Ex. 2035.** 4 Points. ./1992/parisC/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad\text{modulo } 2\pi\ \text{ et }\ \left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BA}}\right)=\frac{\pi}{3}\ \text{modulo } 2\pi.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

**1.** Soit $S_1$ la similitude directe de centre A qui transforme H en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de $S_1$.

b) Montrer que $S_1$(C) = I. En déduire l'image de la droite (BC) par $S_1$.

**2.** Soit $S_2$ la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par $S_2$.

b) Soient $M$ un point de (BI), $M'$ son image par $S_2$. On suppose que $M$ et $M'$ sont distincts de I.
Montrer que les quatre points (A, $M$, I, $M'$) sont cocycliques.

## Problème 767

./1992/parisC/pb/texte

Dans tout le problème $n$ désigne *un entier naturel non nul.*
À tout entier naturel $n$ non nul, on associe la fonction $f_n$ définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x)=x^n\ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions $f_n$ et à celle d'une suite liée à ces fonctions $f_n$.
On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans le repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

**I.** : Étude des fonctions $f_n$

**1.** Soit $h_n$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$h_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de $h_n$. En utilisant la valeur de $h_n(0)$,déterminer le signe de $h_n$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

**2.** a) Pour tout $x$ appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$ vérifier que :

$$f_1'(x)=h_1(x),$$

et que pour tout $n$ strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x)=x^{n-1}h_n(x).$$

b) On suppose $n$ impair. Pour tout $x$ appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$ justifier que $f_n'(x)x$ et $h_n(x)$ sont de même signe.
Dresser alors le tableau de variations de la fonction $f_n$, lorsque $n$ est impair, en précisant ses limites en $-1$ et $+\infty$.

c) On suppose $n$ pair. Dressez de même le tableau de variations de $f_n$ lorsque $n$ est pair, en précisant ses limites en $-1$ et $+\infty$.

**3.** a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

b) Tracer ces deux courbes.

**II.** : Étude d'une suite

Dans cette partie, $U$ désigne la suite de terme général $U_n$ définie pour tout $n$ entier naturel non nul par :

$$U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Retour page 1

**1.** Étude de la convergence

a) Démontrer que :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

b) En déduire que la suite $U$ est convergente et donner sa limite.

c) À l'aide de l'encadrement obtenu au **a.**, déterminer un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{100}.$$

**2.** Calcul de $U_1$

a) En remarquant que pour tout $x$ appartenant à [0 ; 1] on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x.$$

b) Calculer $U_1$ au moyen d'une intégration par parties.

**3.** Calcul de $U_n$

k=n Pour tout $x$ de [0 ; 1] et pour tout $n \geqslant 2$,on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n \quad (1)$$

a) Démontrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad [2].$$

b) En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$,montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

**4.** *Application*

Soit E l'ensemble des points $M$ du plan, de coordonnées $(x \ ; \ y)$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

Calculer $U_2$ et en déduire l'aire de E en cm$^2$.

## III. Groupe III, série C & E

**Ex. 2036.** ———— *5 points.* *./1992/groupeIIICE/exo-1/texte.tex*

Dans le plan orienté, $ABC$ désigne un triangle rectangle isocèle en $A$, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.
Le point $I$ est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle $ABC$.
On désigne par :

— $r_A$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

— $r_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

**1.** a) Construire le point $A'$ image de $A$ par $r_C$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application composée $r_C \circ r_A$ (on pourra écrire chaque rotation comme composée de réflexions convenablement choisies).

c) Montrer que $IA' = IA$ et que les droites $(IA')$ et $(AB)$ sont parallèles.

**2.** La droite $(CI)$ coupe $(AB)$ en $E$ ; les droites $(A'E)$ et $(BI)$ se coupent en $K$.

On désigne par :

— $h_C$ l'homothétie de centre $C$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

— $h_K$ l'homothétie de centre $K$ et de rapport $-\sqrt{2}$.

a) Déterminer $h_C(B)$ et $h_C(E)$. En déduire que $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2}\overrightarrow{IA'}$.

b) Quelle est l'image de $B$ par $h_K \circ h_C$ ?

c) Reconnaître l'application $h_K \circ h_C$ et en déduire que les points $C$ et $K$ sont alignés avec le milieu $M$ du segment $[BE]$.

**Ex. 2037.** ———— *4 points.* *./1992/groupeIIICE/exo-2/texte.tex*

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
L'unité graphique est 2 cm.
On considère la parabole $(P)$ de foyer $O$ et de directrice la droite $(D)$ d'équation $x = 1$.

**1.** Écrire une équation de $(P)$ et dessiner $P$.

**2.** Soit $M$ un point de $(P)$, $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(D)$, $I$ le milieu du segment $[OH]$, $A$ le point d'affixe $1$ et $B$ le point d'affixe $2$.

Montrer que
$$(\overrightarrow{MI},\ \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO},\ \overrightarrow{HA}) + k\pi, \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En déduire que
$$(\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO},\ \overrightarrow{HB}) + k\pi, \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**3.** On choisit $\theta \in [0\,;2\pi[$, tel que $(\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MH} = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On désigne par $z$ et $h$ les affixes respectives de $M$ et $H$.

Montrer que $\dfrac{z-h}{z} = \dfrac{h-2}{h} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et que $\theta$ est différent de zéro.

En déduire que $z = \dfrac{2}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}$.

## Problème 768 *11 points.* *./1992/groupeIIICE/pb/texte*

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) = -1. \end{cases}$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien).
On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est de 2 cm.

A) **Étude d'une fonction auxiliaire (pour la partie C)**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de $g$ .
2. En déduire que $g(x) \geqslant 0$, pour tout x de l'intervalle $]]0\,;+\infty[$.

B) **Étude de** $f$

1. Montrer que la fonction $f$ est continue en $0$.
   Montrer que $f$ est dérivable en $0$ : on précisera la valeur de sa dérivée en $0$.



Retour page 1

2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ et dresser son tableau de varia- tions.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

C) **Étude d'une primitive de** $f$

On pose, pour tout $x \geqslant 0$ :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction $F$, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer, en introduisant la fonction $g$ de la partie **??**, que, pour tout $t$ de l'intervalle $]0\,;1]$, on a :

$$-1 \leqslant f(t) \leqslant t-1.$$

   Véri ?er que cette double inégalité est encore vraie pour $t=0$.

   En déduire que $\frac{1}{2} \leqslant F(0) \leqslant 1$.

3. a) Prouver que pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$\frac{\ln t}{t} \leqslant f(t).$$

   b) Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. On note $(u_n)$ la suite dé ?nie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   (On pourra utiliser le sens de variation de f .)

   b) Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers zéro.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ :

   p=n ?1

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n-1} u_p = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}.$$

   a) Exprimer $S_n$ à l'aide de $F$.

   b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Retour page 1

# IV. Groupe IV, série C & E

**Ex. 2038.** 5 points. ./1992/groupeIVCE/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB=1,\quad BC=2 \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}\ (\text{modulo } 2\pi).$$

On appelle $M$ le milieu du segment $[BC]$.

1. Soit $s$ la similitude directe telle que : $s(A)=M$ et $s(B)=D$. Déterminer le rapport et l'angle de $s$.
2. On se propose dans cette question de préciser la position du centre $O$ de la similitude $s$.
   a) Les droites $(AB)$ et $(DM)$ se coupent en $I$. Démontrer que les points $A$, $O$, $M$ et $I$ sont cocycliques. En déduire que : $BM=BO=BA$.
   b) Démontrer que $DM=DO$.
   c) En déduire que $O$ est le symétrique de $M$ par rapport à la droite $(BD)$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct tel que les affixes des points $A$, $B$ et $D$ sont respectivement $0$, $1$ et $2\text{i}$.
   a) Déterminer l'expression complexe de $s$ et l'affixe de $O$.
   b) Vérifier que $O$ est bien le symétrique de $M$ par rapport à la droite $(BD)$ en montrant que $BM=BO$ et que les droites $(OM)$ et $(BD)$ sont orthogonales.

**Ex. 2039.** 4 points. ./1992/groupeIVCE/exo-2/texte.tex

On considère dans le plan P un triangle $AFB$ rectangle en $A$ et on note $\theta$ la mesure en radians de l'angle $B$ avec :

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Soit $M$ un point quelconque du plan, On trace par $M$ les parallèles aux droites $(AF)$ et $(FB)$ qui rencontrent la droite $(AB)$ respectivement en $H$ et $M'$. On appelle $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MM'=MF$.

1. Montrer que $M$appartient à $(\Gamma)$ si et seulement si :
$$\frac{MF}{MH}=\frac{1}{\sin\theta}.$$
En déduire que $(\Gamma)$ est une conique dont on précisera la nature.
2. Dans cette question on prend $FA$ = 6 avec le centimètre pour unité et $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Après avoir construit le triangle $AFB$, représenter les sommets, les foyers et le centre de la conique $(\Gamma)$.
Achever ensuite la construction de $(\Gamma)$.

## Problème 769 — 11 points. ./1992/groupeIVCE/pb/texte

$n$ étant un entier naturel non nul, on se propose d'étudier la famille des fonctions $f_n$ , définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=x^n(1-\ln x) & \text{si} \quad x>0\\ \text{et} \qquad f_n(0)=0. \end{cases}$$

On désigne par $(C_n)$ la représentation graphique de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 4 cm).

I- **Étude générale des fonctions $f_n$ ($n\in\mathbb{N}^\star$)**

1. a) Montrer que toute fonction $f_n$ est continue en $0$.
   b) Discuter selon les valeurs de $n$ la dérivabilité de $fn$ en $0$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   c) Déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$.
2. a) Étudier suivant les valeurs de $x$ le signe de l'expression : $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ et préciser les valeurs de $x$ pour lesquelles elle s'annule.

b) En déduire la position relative des courbes $(C_n)$ et $(C_{n+1})$ et montrer que toutes les courbes $(C_n)$ passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.

3. a) Étudier les variations de $f_n$ et dresser son tableau de variations.
   b) Pour $n \geqslant 1$, déterminer en fonction de $n$, une équation de la tangente à $(C_n)$ en chacun des points d'abscisses $1$ et $\mathrm{e}$.
   c) En utilisant les résultats précédents, construire sur un même graphique les courbes $(C_1)$ , $(C_2)$ et $(C_n)$.
4. Soit $a$ un réel positif différent de $0$ et de $\mathrm{e}$. On considère les deux points $M \in (C_n)$ et $M' \in (C_{n+1})$ de même abscisse $a$.
   a) On trace : la droite $(OM)$, puis la droite passant par $M$ et parallèle à l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
   Montrer que ces droites sont concourantes.
   b) Construire, en expliquant la construction, le point $M'$ à partir du point $M$.

II- **Étude de la suite des intégrales** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$**.**

Pour tout $n$entier naturel non nul on pose :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Sans calculer cette intégrale étudier le sens des variations de la suite $(I_n)$.
2. En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de $n$ l'expres- sion de $I_n$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

III- **Étude des solutions des équations** $f_n(x) = 1$**.**

1. On désigne par $x_n$ le réel non nul tel que $f_n'(x_n) = 0$.
   Montrer que $x_n \in ]1\,;\mathrm{e}[$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[x_n\,;\mathrm{e}[$ l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique. On désignera par $a_n$ cette solution.
3. Montrer que : $f_{n+1}(a_n) > 1$. En déduire que la suite $(a_n)$ est croissante.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

# V. Sujet National remplacement, séries C & E

**Ex. 2040.** ——— *4 points* *./1992/francecerem/exo-1/texte.tex*

Soit $f$ la fonction définie pour $x > \dfrac{1}{2}$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.
   On peut donc définir la suite $u = (u_n)$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), & \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

   On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2. On considère les suites $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ telles que, pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(v_n).$$

   ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

Retour page 1

a) Vérifier que $v_n$ et $w_n$ sont bien définies pour tout entier naturel $n$.

b) Démontrer que la suite $w$ est une suite géométrique.

c) Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $w_n$ puis $v_n$ en fonction de $n$ et en déduire que

$$u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

En déduire la limite de la suite $u$.

**Ex. 2041.** 5 points ./1992/francecerem/exo-2/texte.tex

On donne, dans le plan orienté, un triangle isocèle $OAO'$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AO'}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ passant par $A$ et de centres respectifs $O$ et $O'$ se recoupent en $B$. On note $I$ le centre du carré $AOBO'$. On présentera les données sur une figure que l?on complètera progressivement.

1. $D$ et $D'$ étant les points diamétralement opposés aà $A$ sur les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement, démontrer, à l'aide d ?une homothétie de centre $A$, que les points $D$, $B$ et $D'$ sont alignés.
2. Soit $M$ un point du cercle $\mathscr{C}$ ($M \neq A$, $M \neq B$) et $M'$ l?intersection de la droite$(MB)$ avec le cercle $\mathscr{C}'$.

   a) Vérifier que $M'$ est distinct de $A$, puis démontrer que :

   $$\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD'}}\right) + k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

   b) En déduire que la rotation $r$ de centre $A$ qui transforme $O$ en $O'$ transforme la droite $(AM)$ en la droite $(AM'$.

   c) Prouver que $r$ transforme $M$ en $M'$.
3. Soit $N$ le point d ?intersection de la droite $(M'A)$ avec le cercle $\mathscr{C}$. Soit $N'$ le point d ?intersection de la droite $(MA)$ avec le cercle $\mathscr{C}'$. Démontrer que $N'$ est l'image de $N$ par la rotation $r$.
4. On suppose que $M$ est distinct de $D$.

   a) Prouver que $N$ est distinct de $A$. On construit alors le carré $NAN'F$

   b) Montrer que les points $B$ et $F$ sont les images respectives des points $O$ et $N$ par une similitude directe $s$ bdont on précisera le centre, le rapport et l'angle.

   c) Construire l'image du cercle $C$ par $s$.

## PROBLÈME 770 *11 points* ./1992/francecerem/pb/texte

*Dans la première partie du problème on étudie une fonction $f$, dont on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal.*

*Dans les deuxième et troisième parties on construit l'image de $\mathscr{C}$ par des transformations du plan. La dernière partie a pour objet l'étude de l'effet de ces transformations sur les aires.*

A- Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x(1-\ln x), & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien.)

1. a) Calculer la dérivée $f'$, de $f$ sur $]0\,; +\infty[$. En déduire les variations de $f$.

   b) Déterminer la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

   c) Montrer que la fonction $f$ est continue en zéro. La fonction $f$ est-elle dérivable en zéro ?

   d) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$.

   a) On note $N$ le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, $R$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses, $Q$ le point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Calculer les coordonnées des points $N$, $R$, $Q$ et donner les coefficients directeurs des tangentes à $\mathscr{C}$, en chacun de ces points.

b) En adoptant 4 cm pour l'unité et en plaçant l'axe des ordonnées à 6 cm du bord gauche de la feuille, construire $\mathscr{C}$, ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ en $N$, $R$ et $Q$.

B- 1. Soit $T_1$ l'application de P dans P qui au point $M(x\ ;\ y)$ d'affixe $z$, $z = x+\text{i}y$, associe le point $M_1$ d'affixe $z_1 = \overline{z}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.

a) Quelle est la nature géométrique de $T_1$ ?

b) On appelle $\mathscr{C}_1$ l'image de $\mathscr{C}$ par $T_1$. Représenter $\mathscr{C}_1$ sur le même dessin que $\mathscr{C}$.

2. Soit $T_2$ l'application de P dans P qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M_2$ d'affixe $z_2 = -\dfrac{1}{\text{e}^2}\overline{z}$.

a) Montrer que $T_2$ est la composée de $T_1$ et d'une homothétie que l'on précisera.

b) Déterminer les coordonnées $N_2$ et $R_2$ images de $N$ et $R$ par $T_2$. Placer $N_2$ et $R_2$ sur la figure.

c) Calculer en fonction de $x$ et $y$, les coordonnées $(x_2\ ;\ y_2)$ du point $M_2$ image de $M$ par $T_2$ puis exprimer $x$et $y$ en fonction de $x_2$ et $y_2$.

d) Soit $\mathscr{C}_2 = T_2(\mathscr{C})$. Montrer que $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction $f_2$ définie sur $]-\infty\,;0]$ par :

$$\begin{cases} f_2(x) = 2x(1+\ln(-x)), & \text{si } x < 0 \\ f_2(0) = 0. \end{cases}$$

e) Représenter la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le même dessin que $\mathscr{C}$.

C- 1. Soit $a$ un nombre de l'intervalle $]0\,;\text{e}[$. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale

$$I = \int_a^{\text{e}} x \ln x \,\text{d}x.$$

2. En déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$. Que représente $A$ ?

3. Montrer que $A$ admet pour limite $\dfrac{\text{e}^2}{2}$ quand $a$ tend vers zéro. On admettra que cette limite représente l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \text{e}$.

4. Déduire des questions précédentes l'aire en $\text{cm}^2$ du domaine limité par $\mathscr{C}_1$ et l'axe des abscisses, puis celle du domaine limité par $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses. Donner une valeur approchée au $\text{cm}^2$ près de chacune de ces aires.

# VI. Amérique du Nord, série C

Ex. 2042. *4 points.* *./1992/ameriquenordC/exo-1/texte.tex*

Soit dans un plan orienté les trois points $A$, $B$ et $C$ non alignés tels que $AB < AC$. On pose $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \alpha \mod (2\pi)$.

Soit $d_1$ la demi-droite de support $(AB)$, d'origine $B$, ne contenant pas le point $A$. Soit $d_2$ la demi-droite d'origine $C$ contenant $A$. On place sur $d_1$ un point $M$ différent de $B$ et sur $d_2$ un point $N$ tel que $CN = BM$.

1. Justi ?er l'existence d'une unique rotation $r$ transformant $B$ en $C$ et $M$ en $N$. Préciser l'angle de $r$ en fonction de ?.

2. a) Démontrer que le centre $O$ de $r$ est situé sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$.

b) Déterminer la position du point $O$.

3. Soit $f$ la similitude directe de centre $O$ transformant $B$ en $M$.

a) Démontrer que $f \circ r = r \circ f$.

b) En déduire que $f(C) = N$, puis que

$$\frac{MN}{BC} = \frac{OM}{OB}.$$

4. Construire les points $M$ sur $d_1$ et $N$ sur $d_2$ sachant que $BM = CN$ et $MN = BC$.

Ex. 2043. ____________ *4 points.* ./1992/ameriquenordC/exo-2/texte.tex

Une unité de longueur étant choisie, on considère dans un plan un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, où $a$ est un réel positif donné.

1. Déterminer et construire l'ensemble $E_1$ des points $M$ du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

2. On désigne par $H$ le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

 a) Démontrer que $H$ est le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés de coefficients que l'on déterminera.

 b) On considère l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k.$$

 Pour quelle valeur du nombre réel $k$, cet ensemble contient-il le point $A$ ?

 Pour cette valeur préciser l'ensemble obtenu, noté $E_2$ et le construire.

## Problème 771 *12 points.* ./1992/ameriquenordC/pb/texte

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions.

Pour $n$ entier naturel non nul, on définit sur $[0\,;+\infty[$ la fonction numérique $f_n$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(2\ln x - 1) & \text{si } x \in ]0\,;+\infty[, \\ fn(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$(l'unité graphique est 4 cm).

A- Dans toute cette partie, $n = 1$.

1. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_1$ sur $]0\,;+\infty[$.

 b) Étudier le sens de variation de $f_1$.

 c) Étudier la limite de $f_1$ en $+\infty$.

 d) Préciser la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point $O$.

2. Soit le point $M_0$ d'abscisse $x_0$ strictement positive de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

 a) Montrer que la tangente en $M_0$ à $(\mathscr{C}_1)$ coupe l'axe des ordonnées en un point $T_0$ dont on donnera les coordonnées.

 b) En déduire une construction simple de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point $M_0$.

3. On désigne par $A$ le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'ordonnée nulle, autre que $O$.

 Tracer la tangente en $A$ à $(\mathscr{C}_1)$ puis la courbe $(\mathscr{C}_1)$·

4. Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0\,;\mathrm{e}]$ ; à l'aide d'une intégration par parties, cal culer l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t.$$

5. a) Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et de la droite ($\Delta$) d'équation $x - y = 0$. On précisera les points d'intersection.

 b) Calculer, en cm$^2$, l'aire $S(\alpha)$ de la portion de plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, la droite $(\Delta)$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

 c) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0} S(\alpha)$.

B- Dans cette partie on étudie $f_n$ pour $n \geqslant 2$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_n$ sur $[0\,;+\infty[$.



Retour page 1

2. Déterminer la fonction dérivée $f'_n$.
3. On désigne par $x_n$ la valeur, autre que $0$, pour laquelle $f'_n$ s'annule.
   a) Montrer que pour tout entier $n$ ($n \geqslant 2$), on a : $1 \leqslant x_n < \sqrt{\text{e}}$.
   b) Étudier la variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
   c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et trouver sa limite.
4. a) Étudier la limite de $f_n$ en $+\infty$.
   b) Dresser pour $n \geqslant 2$, le tableau de variation de $f_n$ ; en déduire que pour $n \geqslant 2$, $f_n(x) \leqslant -1$.
   c) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$.
5. Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit sur $[0\,;+\infty[$ la fonction $g_n$ par :
$$g_n(x) = f_n(x) - fn + 1(x).$$
   Étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.
6. Tracer soigneusement la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ en mentionnant sa tangente en $O$.

# VII. Amérique du Sud, série C

**Ex. 2044.** *4 points.* *./1992/ameriquesudC/exo-1/texte.tex*

Soit $O$ un point fixe du plan orienté.
L'exercice propose d'étudier une famille $\mathscr{F}$ de cercles de rayons non nuls du plan tels qu'on puisse leur mener, depuis $O$, deux tangentes orthogonales.
Si $C$ est un cercle de la famille $\mathscr{F}$, on note $U_C$ et $T_C$ les points de contact des tan- gentes à $C$ issues de $O$.
`Question préliminaire` : pour un cercle $C$ de $\mathscr{F}$, de centre $I$, indiquer la nature du quadrilatère $OU_CIT_C$.

1. **Étude d'une propriété caractéristique de la famille $\mathscr{F}$**
   Soit $C$ un cercle du plan de rayon $r$ ($r \neq 0$) et de centre $I$. On pose $OI = d$. Démontrer que :
   $C$ appartient à la famille $\mathscr{F}$ si et seulement si $d = r\sqrt{2}$.
2. **Étude de la famille $\mathscr{F}_A$ des cercles de la famille $\mathscr{F}$ passant par un point $A$ du plan**
   Soit $A \neq O$ un point du plan.
   a) Démontrer qu'un cercle $C$ de centre $I$ appartient à la famille $\mathscr{F}_A$ si et seulement si $C$ passe par $A$ et $OI = AI\sqrt{2}$.
   b) Déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des centres des cercles de la famille $\mathscr{F}_A$. Préciser les points $E$ et $F$d'intersection de $\mathscr{L}$ avec la droite $(OA)$.
   c) Représenter sur une figure deux cercles de la famille $\mathscr{F}_A$ ainsi que $\mathscr{L}$.
   d)
3. **Étude de la famille $\mathscr{F}_\Delta$ des cercles de la famille $\mathscr{F}$ centrés sur une droite $\Delta$ donnée ne passant pas par $O$**
   Soit $\Delta$ une droite donnée du plan ne passant pas par $O$.
   a) Démontrer que les points de contact $U_C$ et $T_C$ des tangentes issues de $O$ aux cercles $C$ de la famille $\mathscr{F}_\Delta$ décrivent deux droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$.
   b) Représenter sur une figure deux cercles de la famille $\mathscr{F}_\Delta$ ainsi que les droites $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$.

**Ex. 2045.** *Ensignement obligatoire 5 points.* *./1992/ameriquesudC/exo-2/texte.tex*

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On rappelle que l'affixe d'un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.
On donne des réels $r$ et $\alpha$ avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$. et on note $u$ le nombre complexe de module $r$, d'argument $\alpha$.

1. On construit les points $A_n$ de P répondant aux conditions :
   - $A_0$ est l'origine du repère ;

- $A_1$ est le point d'affixe i ;
- pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, le point $A_n$ est l'image de $A_{n-2}$ par la similitude directe de centre $A_{n-1}$ , de rapport $r$, dont une mesure de l'angle est $\alpha$.
  On note $z_n$ l'affixe du point $A_n$.

a) Écrire pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 une relation entre $z_n$, $z_{n-1}$ et $z_{n-2}$.

b) Montrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a

$$z_n - z_{n-1} = (u)^{n-1}\mathrm{i}.$$

c) Déterminer l'expression de l'affixe $z_n$ de $A_n$ en fonction de $n$ et $u$.

2. a) Montrer qu'il existe une similitude directe $S$, et une seule, telle que

$$A_1 = S(A_0) \qquad \text{et} \qquad A_2 = S(A_1).$$

Préciser les éléments caractéristiques de $S$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $A_{n+1} = S(A_n)$. On note $S_0$ l'application identique de P, et pour tout entier naturel $n$, on pose $S_{n+1} = S \circ S_n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$ ; montrer que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad A_{n+p} = S_n(A_p).$$

c) Montrer que $S_4$ est une homothétie.

d) En déduire que les points $A_n$ sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose désormais que $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle $\Omega$ le centre de la similitude $S$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Représenter graphiquement les points $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_9$ dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 4 cm).

c) Calculer $\left\|\overrightarrow{\omega A_{n+1}}\right\|$ en fonction de $n$ et de $\left\|\overrightarrow{\omega A_0}\right\|$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\omega A_{n+1}}\right\|$.

d) Pour tout entier naturel $n$, calculer

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} \left\|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\right\|.$$

Étudier la limite de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 2046.** ——— *Ensignement de spécialité 5 points.* *./1992/ameriquesudC/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre $I$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$..
On note $\mathscr{C}$ le cercle passant par $A$, $B$, $C$ et $D$. Faire une figure. (On choisira $AB$ = 4 cm). On note :
$t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$,
$r_D$ la rotation de centre $D$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$,
$r_1$ la rotation de centre $A$ d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$,
$r_2$ la rotation de centre $A$ d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
On désire caractériser les transformations :

$$f = t \circ r_D, \qquad g_1 = r_1 \circ f \qquad \text{et} \qquad g_2 = r_2 \circ f.$$

1. Démontrer que $f$, $g_1$ et $g_2$ sont des rotations dont on précisera l'angle. (On ne demande pas les centres).
2. a) Déterminer $f(D)$ et $f(A)$. Quel est le centre de $f$ ?
   b) Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.
3. Soit $A'_1 = g_1(A)$ et $A'_2 = g_2(A)$.

a) Montrer, en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$, que $A$ est le milieu du segment $[A_1'A_2']$.

b) Montrer, en calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AN}}\right)$, que $A_1'$ est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en $A$.

4. a) Soit $J$ le centre de $g_1$ et $K$ celui de $g_2$.
   Montrer que $J$ et $K$ appartiennent à $\mathscr{C}$ et qu'ils sont diamétralement opposés. Placer $J$ et $K$ sur la figure.

   b) Montrer que $A_1'$ est sur la droite $(JB)$.
   Placer les points $A_1'$ et $A_2'$ sur la figure.

## Problème 772 *11 points.*

*./1992/ameriquesudC/pb/texte*

À tout entier naturel $n \geqslant 1$, on associe la fonction numérique $f_n$ définie sur l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur $x'x$ et 10 cm sur $y'y$)
La première partie propose l'étude de $f_1$ Dans les parties II et III on précise certains comportements des fonctions $f_n$ et des primitives de ces fonctions.

I. **Étude de $f_1$.**

a) Déterminer la limite de $f_1$ en $+\infty$. Étudier les variations de $f_1$.

b) Tracer la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour $x$ élément de $I$ :

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. **Comportement des fonctions $f_n$ pour $n \geqslant 1$.**

1. En remarquant que $\frac{\ln x)^n}{x^2} = \left[\frac{\ln x}{x^{2/n}}\right]^n$,déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$.

2. a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(\mathrm{e}^{2/n}) = 0$. Donner le tableau de variations de $f_n$.

   b) Vérfier que la valeur maximale de $f_n$ sur $I$ est :

$$y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n.$$

3. a) Soit $x \in I$.Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

   b) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 1.
   Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

4. On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $n$ un entier strictement positif.

   a) Calculer, pour $x \geqslant 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

   b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}y_n$.

   c) En déduire que $y_n \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ ?

III. **Étude de primitives de $f_n$ sur $I$.** À tout entier $n \geqslant 1$ et à tout nombre réel $x$ de $I$, on associe l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

1. a) Soit $k \geqslant 1$ un entier.
   Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}.$$

   b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \cdots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}.$$

2. Soit $\alpha \geqslant 1$ un nombre réel fixé.
   a) Montrer que $0 \leqslant I_n(\alpha) \leqslant (\alpha-1)y_n$ ($y_n$ a été défini dans II(2)b).
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera II(4)c
3. Pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$, on pose :

$$W_n(x) = 1 + \frac{(\ln x)}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{n!}.$$

   a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
   b) $\alpha \geqslant 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.
   c) En déduire la limite $\gamma$ de la suite ($(U_n)_{\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

   En s'aidant de la calculatrice donner une valeur décimale approchée de $U_6$ à $10^{-4}$ près. Comparer cette valeur à $\gamma$.

## VIII. Antilles Guyane, série C & E

**Ex. 2047.** *4 points.* *./1992/antillesCE/exo-1/texte.tex*

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0.$$

**2.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \qquad (1)$$

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}. \qquad (2)$$

**3.** Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe $z$ tel que :

$$P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1.$$

a) Vérifier que pour tout $z$ non nul :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}.$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Retour page 1

**Ex. 2048.** ——— *4 points.* *./1992/antillesCE/exo-2/texte.tex*

$ABCD$ est un rectangle du plan, de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de longueur $a$.

1. Soit $m$ un réel non nul. On note $G_m$ le barycentre du système : $\{(A,\ m)\ ;\ (B,\ -1)\ ;\ (C,1)\}$.
   a) Préciser la position de $G_1$.
   b) Déterminer l'ensemble $E_1$ des points $G_m$ lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}$.
2. Quel est l'ensemble $E_2$ des points $M$ du plan tels que :
$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = a\ ?$$
3. Quel est l'ensemble $E_3$ des points $M$ du plan tels que :
$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{4}\ ?$$
4. Faire une ?gure où l'on représentera le rectangle $ABCD$ et les ensembles $E_1$, $E_2$ et $E_3$.

## Problème 773 *12 points.* *./1992/antillesCE/pb/texte*

I- Soit $f$ la fonction numérique définie pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x\ln x - x, \quad \text{pour } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. a) . Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.
   b) Pour x strictement positif, calculer $f'$ la fonction dérivée de $f$ et déterminer son signe.
   Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de $f$.
2. Soit $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 1 cm), et soit $(D)$ la droite d'équation : $y = x - 1$.
   Soit $u$ la fonction numérique définie pour tout $x$ de $[0\,;+\infty[$ par :
$$u(x) = x\ln(x) - 2x + 1$$
   .
   a) Calculer $u'$ la fonction dérivée de $u$ et déterminer son signe. Calculer les limites de $u$ en 0 et $+\infty$.
   Dresser le tableau de variations de $u$.
   b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions que l'on notera $a$ et $b$, ($a < b$).
   En déduire que $(D)$ et $(C)$ se coupent en deux points $A$ et $B$ d'abscisses respectives $a$ et $b$.
   c) Déterminer le signe de $u(x)$.
   d) Montrer que $a$ appartient à $]0\,;1[$ et que $b$ appartient à $]6\,;7[$.
3. Tracer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe $(C)$ et la droite $(D)$.
   On se limitera à l'intervalle $[0\,;8]$.
4. Soit $\Delta$ le domaine du plan limité par la courbe $(C)$, la droite $(D)$ et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$ ($a$ et $b$ définis dans le I(2)b).
   a) Montrer que $S$, l'aire en cm$^2$ de $\Delta$, s'exprime sous la forme :
$$\int_a^b (2x - 1 - x\ln x)\,\mathrm{d}x.$$
   b) En intégrant par parties, calculer
$$\int_a^b x\ln x\,\mathrm{d}x.$$
   en fonction de $a$ et $b$.
   En déduire l'expression de $S$ en fonction de $a$ et $b$.

Retour page 1

II- On se propose de déterminer une valeur approchée de $b$. Pour cela, on considère la fonction numérique $h$ définie sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{x-1}{\ln x-1}.$$

1. a) Montrer que, pour tout $x$ élément de $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, $h'$ désignant la fonction dérivée de $h$, on a :

$$h'(x)=\frac{u(x)}{x(\ln(x)-1)^2}$$

où $u$ est la fonction définie dans la question **??**.
En déduire le signe de $h$ sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$

b) Déterminer les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition.
Véri?er que $h(b)=b$. Dresser le tableau de variations de $h$.

2. Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[6\,;7]$, on a :

$$x(\ln(x)-1)^2 \geqslant 6(\ln(6)-1))^2.$$

En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $[6\,;7]$, on a :

$$\left|h'(x)\right| \leqslant \frac{u(7)}{6(\ln(6)-1)^2} \leqslant 0{,}17.$$

3. a) Déterminer l'image de l'intervalle $[b\,;7]$ par $h$ et démontrer qu'elle est incluse dans l'intervalle $[b\,;7]$.

b) Soit $(U_n)$ la suite numérique définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$U_0=7 \qquad \text{et} \qquad U_{n+1}=h(U_n).$$

Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_n$ appartient à l'intervalle $[b\,;7]$.

c) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|U_{n+1}-b| \leqslant 0{,}17\,|U_n-b|\,.$$

En déduire que pour tout entier naturel $n$, $|U_n-b| \leqslant (0{,}17)^n$.

d) Montrer que la suite $(U_n)$ converge vers $b$.
Déterminer un entier $n$ tel que $U_n$ soit une valeur approcheée de $b$ à $10^{-4}$ près.
Calculer cette valeur approcheée.

# IX. Antilles Guyane remplacement, série C

Ex. 2049. ____________ *4 points.* *./1992/antillesCrem/exo-1/texte.tex*

On considère dans le plan un triangle $ABC$ tel que : $AB=7$, $BC=4$ et $AC=5$ (unité graphique = 1 cm). Soit $I$ le milieu de $[BC]$.

**1.** Montrer que $AI=\sqrt{33}$.

**2.** a) Soit $M$ un point du plan. Pour quelle valeur du réel $m$ le vecteur $m\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\overrightarrow{U}$ indépendant du point $M$ ? Déterminer alors le vecteur $\overrightarrow{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E$ des points $M$ du plan tels que :

$$-2MA^2+MB^2+MC^2=-58.$$

**3.** Soit D le barycentre du système : $\{(A,\ -1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ 1)\}$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$ ? Justifier la réponse.

b) Déterminer et construire l'ensemble $F$ des points $M$ du plan tels que :

$$-MA^2+MB^2+MC^2=-25.$$

Retour page 1

Ex. 2050. 4 points. ./1992/antillesCrem/exo-2/texte.tex

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher : $m$ boules blanches et $n$ boules noires.

1. On tire successivement deux boules de l'urne, la boule tirée n'étant pas remise dans l'urne après le premier tirage. Déterminer les couples $(m,\ n)$, pour que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes soit égale à $\dfrac{16}{33}$.
2. On prend désormais $m = 8$ et $n = 4$. On tire successivement $3$ boules de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

   a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.

   b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

   (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

## Problème 774 12 points. ./1992/antillesCrem/pb/texte

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$\text{pour } n = 0 : f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$
$$\text{pour } n > 1 : f_n(x) = \frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}.$$

On désignera par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ ayant comme unité graphique 4 cm.

A- 1. Déterminer les limites de $f_0$ aux bornes de son ensemble de définition. Étudier le sens de variation de $f_0$ et construire $(\mathscr{C}_0)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$

2. Soit $n$ un entier naturel non nul.

   a) $f'_n$ désignant la fonction dérivée de $f_n$, montrer que :

$$f'_n(x) = \frac{x^{3n-1}\left[(6n-3)x^3 + 6n\right]}{2(1+x^3)\left(\sqrt{1+x^3}\right)}.$$

   b) Étudier le sens de variation de $f_1$ et $f_2$ puis dresser leur tableau de variations.

   c) Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

B- Soit $(I_n)$ la suite réelle définie pour tout entier naturel par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout $x$ de l'intervalle On partage le segment [0 ; 1] en dix segments de même longueur 0,1, par les points : a0 = 0 ; a1 = 0,1 ; a2 = 0,2 ; a3 = 0,3 ;... ; a10 = 1., on a : $f_n(x) \leqslant x^{3n}$. En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $I_n \leqslant \dfrac{1}{3n-1}$.
3. Quelle est la limite de la suite $(I_n)$ ?

C- 1. On partage le segment $[0\,;1]$ en dix segments de même longueur $0{,}1$, par les points :

$$a_0 = 0\ ;\ a_1 = 0{,}1\ ;\ a_2 = 0{,}2\ ;\ a3 = 0{,}3\ ;\ \dots\ ;\ a_{10} = 1.$$

   a) Montrer que l'on a, pour tout entier naturel $i$ de $0$ à $9$ :

$$0{,}1 f_0(a_i) \geqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0{,}1 f0(a_{i+1}).$$



Retour page 1

b) En déduire que :

$$0{,}1\sum_{0}^{9} f_0(a_i) \geqslant 0{,}1\sum_{0}^{9} f_0(a_{i+1})I_0 \geqslant 0{,}1.$$

c) Montrer, à l'aide de la calculatrice, que : $0{,}93 \geqslant I_0 \geqslant 0{,}89$.

2. a) En écrivant $f_1(x)$ sous la forme :

$$f1(x) = x\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$$

montrer en intégrant $I_1$ par parties que :

$$5I_1 = 2\sqrt{2} - 2I_0.$$

On remarquera que, pour tout $x$ appartenant à $[0\,;1]$ :

$$\sqrt{1+x^3} = \frac{1+x^3}{\sqrt{1+x^3}}.$$

b) En déduire un encadrement de $I_1$.

c) Montrer de même que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(6n+5)I_{n+1} = 2\sqrt{2} - (6n+2)I_n.$$

# X. Centres étrangers groupe II remplacement, série C

Ex. 2051. ________ *4 points.* *./1992/centresetrangersIIrem/exo-1/texte.tex*

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 9,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + 6.$$

1. a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique à termes positifs.

 b) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de $n$ et en déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S'_n$.

2. On définit la suite $(w_n)$ par $w_n = \ln v_n$ pour tout entier $n$.

 Montrer que $(w_n)$ est une suite arithmétique. Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de $n$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

3. Calculer le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$ en fonction de $n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Ex. 2052. ________ *4 points.* *./1992/centresetrangersIIrem/exo-2/texte.tex*

Dans un plan euclidien orienté, on considère quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ ne formant pas un trapèze. Les droites $(AD)$ et $(BC)$ se coupent en $I$. les droites $(AB)$ et $(DC)$ se coupent en $J$.

**1.** Soit $O$ le centre de la similitude plane directe $S$ telle que $S(A) = B$ et $S(D) = C$.

 a) Démontrer que

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

 b) Démontrer que :

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA}.$$

 En déduire que $O$ est le centre de la similitude directe $S'$ telle que $S'(A) = D$ et $S'(B) = C$.

**2.** En utilisant les similitudes $S$ et $S'$, démontrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles $IAB$, $IDC$, $JAD$ et $JBC$ ont le point $O$ en commun.

# XI. Égypte, Éthiope & Israël, série C & E

**Ex. 2053.** ———— *4 points.* ./1992/centresetrangersCE/exo-1/texte.tex

I. La fonction numérique $g$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6.$$

En utilisant le sens de variation de $g$, déterminer, suivant les valeurs de $x$, le signe de $g(x)$.

II. La fonction numérique $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

1. Déterminer les limites de $f$ en $0$, en $+\infty$.
2. Utiliser I pour déterminer le sens de variation de $f$.
3. a) Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = x - 1$ et $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal du plan.
   Montrer que $\Delta$ est asymptote à $\mathscr{C}$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\Delta$.
   b) Construire $\mathscr{C}$ et $\Delta$.

**Ex. 2054.** ———— *4 points.* ./1992/centresetrangersCE/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, soit $ABC$ un triangle équilatéral tel que :

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

$I$ est le milieu de $[BC]$ et $J$ le point tel que $B$ soit le milieu de $[JC]$.
$r_1$ est la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $r_2$ la rotation de centre $B$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

1. Soit $A'$ et $B'$ les images respectives des points $A$ et $B$ par l'application $r_2 \circ r_1$. Démontrer que $I$ est le milieu de $[AA']$ et $B$ le milieu de $[AB']$ ; faire une figure.
2. En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$, démontrer que pour tout point $M$ du plan, $I$ est le milieu de $[M_1M_2]$, $M_1$ étant l'image de $M$ par $r_1$ et $M_2$ l'image de $M$ par $r_2$.
3. Démontrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

## Problème 775 *12 points.* ./1992/centresetrangersCE/pb/texte

I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme $u_0$ et par la condition :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n. =$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Démontrer que si $u_0 + u_0^2 > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
4. Démontrer par récurrence que :
   si $u_0 + u_0^2 < 0$ alors pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on a $-1 < u_n < 0$.
   Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et $F$ l'application de P dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z^2 + z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par $F$, puis l'ensemble des points invariants par $F \circ F$.
2. Soit $A$, $B$ et $I$ les trois points de P d'affixes respectivesi, $-1-\mathrm{i}$, $-\frac{1}{2}$. Déterminer $F(A)$ et $F(B)$.
   Soit $M_0$ un point du plan. Démontrer que :
   $F(M) = F(M_0)$ si et seulement si : $M = M_0$ ou $M = S(M_0)$ où $S$ est une transformation simple du plan que l'on précisera.

Retour page 1

III. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
(Pour les figures, on prendra $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 4$ cm.)

1. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient $y^2 + x = 0$.
   Donner la nature des coniques $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ et préciser leurs éléments de symétrie et les asymptotes éventuelles.
   Représenter ces coniques sur une même figure. (On admettra qu'elles sont tangentes aux points d'abscisse $x = -1$.)
2. Soit $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{P}_1$ les ensembles de points du plan dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient respectivement :

$$\mathscr{H}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \qquad \mathscr{P}_1 \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ y^2 + x < 0 \end{cases}$$

   a) Hachurer $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{P}_1$ sur la figure précédente. (On ne cherchera pas à le justifier par le calcul.)
   b) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est inclus dans $\mathscr{H}_1$ puis que $\mathscr{P}_1$ est inclus dans $D(K,\ 1)$ avec $D(K,\ 1)$ ensemble des points $M$ tels que $\left\|\overrightarrow{KM}\right\| < 1$, $K$ étant le point d'affixe $-1$.
   c) Démontrer que si $M$ appartient à $\mathscr{H}_1$ alors $F(M)$ appartient à $\mathscr{P}_1$.
3. Soit $M_0$ un point de $\mathscr{H}_1$= . On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = F(M_n)$.
   En utilisant III(2)b et III(2)c, montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $z_n$ étant l'affixe de $M_n$ et |$|zn|$ le module de $z_n$.

## XII. Japon, série C

**Ex. 2055.** ——— *5 points.* *./1992/japonC/exo-1/texte.tex*

On considère dans l'ensemble $GC$ des nombres complexes l'équation d'inconnue $z$ :

$$(1 + \mathrm{i}z)^n = (1 - \mathrm{i}z)^n \tag{E}$$

$n$ désignant un entier naturel supérieur où égal à 2.

1. a) Montrer que pour toute solution $z$ de l'équation E on a :

$$|1 + \mathrm{i}z| = |1 - \mathrm{i}z|.$$

   b) En déduire que si $z$ est une solution de E, $z$ est un nombre réel.
2. On rappelle que pour tout réel $z$, il existe un unique réel $\varphi$ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = \tan\varphi$.
   Exprimer en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ le complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$.
3. a) Montrer que $z$ est solution de E si et seulement si $\varphi$ est solution de :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\varphi} = 1 \quad \text{avec} \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[. \tag{E'}$$

   b) On suppose désormais $n = 6$. Résoudre l'équation E'. En déduire les solutions de l'équation E.

**Ex. 2056.** ——— *5 points.* *./1992/japonC/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle $OAB$ rectangle en $O$ tel que $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Soit $\Delta$ une droite variable passant par $O$ ; on appelle $A'$ et $B'$ les projetés orthogonaux respectifs de $A$ et $B$ sur $\Delta$.
Le but de l'exercice est de démontrer que lorsque $\Delta$ varie, le cercle de diamètre $[A'B']$ passe par un point fixe.

1. a) Justifier l'existence d'une similitude plane directe $S$ qui transforme $O$ en $A$ et $B$ en $O$. Pourquoi $S$ n'est-elle pas une translation ?
   b) Déterminer l'angle de $S$.



Retour page 1

c) Soit $\Omega$ le centre de $S$. Démontrer que $\Omega$ appartient aux cercles de diamètres $[OA]$ et $[OB]$. En déduire que il est le pied de la hauteur du triangle $(OAB)$ issue de $O$.

2. On appelle $D$ la droite passant par $B$, orthogonale à $\Delta$.

a) Déterminer les images par $S$ des droites $D$ et $\Delta$ ; en déduire l'image de $B'$ par $S$.

b) Déduire de ce qui précède, que le cercle de diamètre $[A'B']$ passe par un point ?xe quand $\Delta$ varie.

## Problème 776 *10 points.*

*./1992/japonC/pb/texte*

A- On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. a) Étudier les variations de $f$ . Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

   b) Construire la courbe $(C)$.

2. On dé ?nit la fonction $h$ sur $[0\,;+\infty]$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

   a) Résoudre l'équation $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$)

   b) Étudier les variations de $h$.

   c) Montrer que $h$ admet une minimum $m$, qui est strictement positif. Calculer $m$ ; en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

3. On définit une suite $(u_n)$ de la façon suivante :
   $u_0 = 1$ et, pour $n$ entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ peut être minoré par $m$ (calculé en A(2)c), puis que $u_n ?u_0 \geqslant n.m$.

   b) En déduire la limite de $(u_n)$.

4. Soit $a$ un réel quelconque.

   a) Discuter graphiquement, en utilisant le A, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

   b) Résoudre, lorsque c'est possible, cette équation.

B- On dé ?nit la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On désigne par $(\Gamma)$ la courbe représentative de $\varphi$ dans le même repère que celui de $(C)$.

1. a) Soit $x$ et $y$ deux réels, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$. Montrer que l'égalité $y = f(x)$ équivaut à l'égalité $x = \varphi(y)$.

   b) Soit $M$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$ et $M'$ de coordonnées $(b\ ;\ a)$ ; montrer que $M$ se transforme en $M'$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite $(D)$ d'équation $y = x$.

   c) En déduire que la courbe $(\Gamma)$ est symétrique de $(C)$ par la symétrie orthogonale d'axe $(D)$.

   d) Tracer la courbe $(\Gamma)$.

2. On pose $\alpha = \varphi(2)$ et on note $\Delta$ la partie du plan que délimitent d'une part les droites d'équations $y = 0$ et $y = \alpha$, d'autre part la courbe $(\Gamma)$ et la droite $(D)$.

   a) Hachurer $\Delta$ sur le graphique.

   b) En utilisant la symétrie de la question A(1)b, calculer l'aire en cm$^2$ de $\Delta$.

# XIII. Nouvelle Calédonie Novembre 1992, série C

# XIV. Polynésie, série C

**Ex. 2057.** _____ *4 points.* ./1992/polynesieC/exo-1/texte.tex

Le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit E l'ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation :

$$21x^2+31y^2-10\sqrt{3}xy-576=0.$$

1. Soit $f$ la similitude de centre $O$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
   Soit $M'$ l'image de $M$ par $f$.
   Caractériser $f^{-1}$ et calculer les coordonnées $x$ et $y$ de $M$ en fonction des coordonnées $x'$ et $y'$de $M$.
2. Donner une équation de E' image de E par $f$ et montrer que E est une conique dont on précisera la nature, les sommets, l'excentricité, les foyers et les directrices.
3. En déduire que E est une conique dont on précisera la nature, les sommets et l'excentricité. Construire E et E' sur un même dessin en prenant 1 cm pour unité sur chaque axe.

**Ex. 2058.** _____ *4 points.* ./1992/polynesieC/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit C la courbe plane définie par la représentation paramétrique :
On donne

$$t \longmapsto \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{u}+y(t)\vec{v} \qquad \text{avec} t \in \mathbb{R}^+,$$

$$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos t \qquad \text{et} \qquad y(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin t$$

On donne

$$\cos t-\sin t=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

1. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;\pi]$.
   Montrer que C admet une tangente en chacun de ses points. Tracer la partie de C pour $t$ appartenant à $[0\,;\pi]$ (on prendra comme unité 10 cm sur chaque axe).
   Préciser en particulier les tangentes à C pour $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ et $t=\pi$.
2. Montrer que $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ est l'image de $M(t)$ par une similitude plane directe de centre $O$ que l'on précisera. (On pourra exprimer l'affixe $z'$ de $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ fonction de l'affixe $z$de $M(t)$.)
3. On admet que la longueur de l'arc exprimée en centimètres de la courbe C entre les points $M(0)$ et $M(t)$ est :
   $$L(t)=10\int_0^t\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$
4. Calculer $L(t)$. Donner une valeur approchée de $L(\pi)$ à $10^{-2}$ près. La longueur $L(t)$ a-t-elle une limite quand $t$ tend vers $+\infty$ ?

**Problème 777** *12 points.* ./1992/polynesieC/pb/texte

On désigne par $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On se propose d'étudier la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

–I– 1. a) Étudier la fonction $f$.
b) Tracer la courbe $C$ représentative de $f$ dans un repère orthonormal (unité 4 cm).

Retour page 1

2. a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x$ réel.

   b) Montrer par des considérations d'aires relatives à $C$ que $F$ est une fonction impaire.

   c) Déterminer le sens de variation de F .

   d) Vérifier que pour tout réel $t$ on a :

   $$t^2 \geqslant 2t-1.$$

   En déduire que pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^+$ on a :

   $$F(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

   On admettra que toute fonction croissante et majorée sur $[0\,;+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$. On pose $\lim F = L$. Quel encadrement peut-on déjà donner de $L$ ?

–II– On se propose dans cette partie d'obtenir un encadrement de $F(1)$.

1. $k$ désigne un réel strictement positif. Soit la fonction $\varphi_k$ définie sur $[0\,;1]$ par :

   $$\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{-x} - \left(1-x+kx^2\right).$$

   Calculer $\varphi_k'$ et $\varphi_k''$.

2. a) Montrer à l'aide des variations de $\varphi_{\frac{1}{2}}'$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$ que $\varphi_{\frac{1}{2}}$ est négative sur $[0\,;1]$.

   b) Étudier les variations de $\varphi_{\frac{1}{\mathrm{e}}}'$ ; Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha$ de $[0\,;1]$ tel que $\varphi_{\frac{1}{\mathrm{e}}}'(\alpha) = 0$.
   Montrer alors à l'aide de ses variations que $\varphi_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ est positive sur $[0\,;1]$.

   c) En déduire que pour tout $x$ de $[0\,;1]$ on a

   $$1-x^2+\frac{x^4}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1-x^2+\frac{x^4}{2}$$

   et donner un encadrement de $F(1)$.

–III– On se propose maintenant de donner une valeur approchée de $L$.

1. On pose

   $$\lambda(x) = \mathrm{e}^x - \frac{9}{10}(2x+1).$$

   Déterminer le sens de variation de $\lambda$ sur $[1\,;+\infty[$.
   En déduire le signe de $\lambda$ sur $[1\,;+\infty[$.

2. Prouver que pour tout réel $x \geqslant 1$ on a

   $$\frac{9}{10}(2x+1)\mathrm{e}^{-x^2-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

3. a) Á l'aide du I(2)d et III2 déterminer un encadrement de $f(t)$ sur $[1\,;+\infty[$ puis un encadrement de $F(x)-F(1)$ pour tout $x$ de $[1\,;+\infty[$.

   b) En déduire une valeur approchée de $L$ à $5.10^{-2}$ près.

4. Donner l'allure de la courbe représentative de $F$ dans un repère orthonormal (unité 4 cm sur chaque axe). On placera la tangente au point d'abscisse $0$, les asymptotes et les points d'abscisses 1 et ?1.

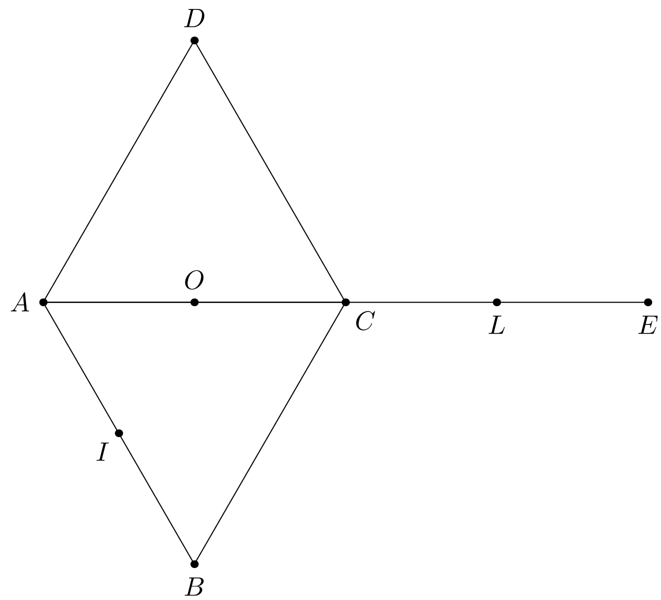


Retour page 1

# XV. Pondichéry, série C & E

**Ex. 2059.** 4 points. ./1992/pondicheryCE/exo-1/texte.tex

Dans le plan orienté P on considère la figure ci-dessous. Les triangles $ABC$ et $ACD$ sont deux triangles équilatéraux directs
tels que $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}$.
Les points $O$ et $I$ sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$et les points $L$ et $E$ sont tel que $OC = CL = LE$
.




Soit $r$ la rotation de centre $A$ dont l'angle $a$ pour mesure $\frac{\pi}{3}$ , et $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On note $r' = r?t$(composée de $t$ et de $r$).

1. a) Quelle est l'image de $O$ par $r$ ?
   b) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO},\ \overrightarrow{IA})$ ?
   c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r'$.
2. $M$ est un point quelconque du plan, on note $N = r(M)$, $J$ le milieu du segment $[EM]$ et $K$ le milieu du segment $[ND]$.
   a) Soit $P$ l'antécédent de $M$ par $t$. Quel est le milieu du segment $[LP]$ ?
   b) Montrer, lorsque $I$, $J$ et $K$ sont distincts, que le triangle $IJK$ est équilatéral. On pourra utiliser $r'(L)$ et $r'(P)$.

**Ex. 2060.** 4 points. ./1992/pondicheryCE/exo-2/texte.tex

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par $m$ un nombre réel et par $(E_m)$ l'ensemble des points $M$ du plan (P), de coordonnées '$(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation :

$$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0.$$

1. Déterminer $(E_m)$ pour les valeurs particulières $m = 0$ et $m = 1$.
2. Pour quelle valeur de $m$ l'ensemble $(E_m)$ est-il un cercle ? Préciser dans ce cas son centre et son rayon.
3. Dans cette question $m$ est un réel non nul et différent de 1. Soit $O'$ le point de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$. On notera$(X\ ;\ Y)$ les coordonnées de $M$ dans le repère $(O',\ \vec{i},\ \vec{j})$.
   a) Montrer que l'équation de $(E_m)$ dans ce repère est :
   $$(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0.$$
   b) En déduire en fonction de $m$ la nature de $(E_m)$.



Retour page 1

## Problème 778 *12 points.*

*./1992/pondicheryCE/pb/texte*

A- L'objet de cette partie est d'étudier la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont l'unité vaut 2 cm.

1. a) Étudier sur $]0\,;+\infty[$ le sens de variation de la fonction $g$ définie par

$$g(x) = x^3 - 2\ln x + 1.$$

   b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$.
2. a) Calculer $f'(x)$, et démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

   b) Déterminer les limites de $f$aux bornes de son domaine de définition, puis construire son tableau de variations.

   c) Démontrer que la droite $D$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Étudier la position de $D$ par rapport à $\mathscr{C}$.

   d) Écrire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. Placer les droites $T$ et $D$ et construire la courbe $\mathscr{C}$.

B- Soit $\lambda$un réel supérieur ou égal à 1.

1. On appelle $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$, $D$ et les droites d'équations $x = 1$ et x = $\lambda$. Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$. (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Déterminer la limite $L$ de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'équation :

$$\mathscr{A}(\lambda) = \frac{L}{2}$$

   est équivalente à l'équation (E) définie par

$$2\ln\lambda - \lambda + 2 = 0. \tag{E}$$

4. Prouver que l'équation (E) admet une unique solution $a$ sur $[1\,;+\infty[$. Vérifier que $5 < a < 6$.

C- Cette partie va permettre de déterminer une approximation de $a$. Pour cela, on introduit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi$ est la fonction définie sur ]0]$0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = 2\ln x + 2$.

1. a) Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n$ appartient à $[5\,;6]$.

   b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

   c) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et que sa limite est égale à $a$.
2. a) Prouver que pour tout $x$ de l'intervalle $[5\,;6]$ on a :

$$\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \frac{2}{5}.$$

   b) En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{2}{5}\,|u_n - a|.$$

   c) Démontrer alors que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

3. Déterminer un entier $n$ tel que $u_n$ soit une valeur approchée de $a$ à $10^{-3}$ près. En déduire alors une approximation de $a$ à $10^{-3}$ près.

Retour page 1

# Chapitre XXXV

# 1993.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

— groupe II : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

## I. Groupe I, série C

**Ex. 2061.** ———— *4 points.* *./1993/groupe1C/exo-1/texte.tex*

1. a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique réelle de premier terme $r_0$ strictement positif et de raison $\dfrac{2}{3}$. Exprimer $r_n$ en fonction de $r_0$ et de $n$.
   b) Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite arithmétique réelle de premier terme $\theta_0$ appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ et de raison $\dfrac{2}{3}\pi$. Exprimer $\theta_n$ en fonction de $\theta_0$ et de $n$.
   c) Pour tout entier naturel $n$, on pose $z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$. Sachant que $z_0$, $z_1$ et $z_2$ sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de $z_0$, $z_1$ et $z_2$.
2. Dans le plan complexe $P$ muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n$.
   a) Placer les points $M_0$, $M_1$, $M_2$ et $M_3$ dans le plan $P$.
   b) Pour tout entier naturel $n$, calculer $\|M_n M_{n+1}\|$ en fonction de $n$.
   c) On pose
   $$\ell_n = \sum_{k=0}^{n} \|M_k M_{k+1}\|.$$
   Calculer $\ell_n$ en fonction de $n$, et déterminer la limite de $\ell_n$ qaund $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 2062.** ———— *4 points.* *./1993/groupe1C/exo-2/texte.tex*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit (E) la conique d'équation $16x^2 + 25y^2 = 400$.

**1.** Préciser la nature de (E), son centre, ses foyers et ses sommets, puis tracer la conique (E).

**2.** Le réel $\theta$ décrit l'intervalle $[0\,;2\pi[$, soit $M$ le point du cercle de centre $O$ et de rayon 5, de coordonnées $(5\cos\theta\ ;\ 5\sin\theta)$.

$N$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Au point $M$ on associe le point $R$ de la conique (E) qui a même abscisse que $M$ et dont l'ordonnée a même signe que celle de $M$.

Puis au point $N$ on associe le point $S$ de la conique (E) qui a même abscisse que $N$ et dont l'ordonnée a même signe que celle de $N$.

a) Donner les coordonnées de $N$, $R$ et $S$.

b) Vérifier que $OR^2 + OS^2 = 41$.

c) Calculer l'aire du triangle $ORS$.

## II. Groupe II, séries C & E

Ex. 2063. ——— *4 points.* *./1993/groupe2C/exo-1/texte.tex*

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes et deux boules jaunes.

**1.** On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules vertes tirées.
Déterminer la loi de probabilité de $X$ et calculer son espérance.

**2.** On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, l**es boules n'étant pas remise dans l'urne**.
On note $A$, $B$, $C$, $D$ les événements suivants :

— $A$ : aucune boule verte n'est tirée au cours du **premier** tirage de deux boules.

— $B$ : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du **premier** tirage de deux boules.

— $C$ : deux boules vertes sont tirées au cours du **premier** tirage de deux boules.

— $D$ : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du **deuxième** tirage de deux boules.

a) Calculer :
$p(D|A)$ (Probabilité conditionnelle de $D$ sachant que $A$ est réalisé)
$p(D|B)$ (Probabilité conditionnelle de $D$ sachant que $B$ est réalisé)
$p(D|C)$ (Probabilité conditionnelle de $D$ sachant que $C$ est réalisé).

b) En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.

c) Calculer la probabilité de l'événement $D$.

Ex. 2064. ——— *4 points.* *./1993/groupe2C/exo-2/texte.tex*

Une unité de longueur a été choisie. On demande de faire une figure.
Soit $ABC$ un triangle équilatéral de côté 3, $B'$ est le milieu de $[AC]$ et $D$ est le point défini par la relation

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

**1.** Démontrer que $D$ est le barycentre du système

$$\{(A,\ 3); (B,\ -2); (C,\ 3)\}.$$

En déduire que $D$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.

**2.** Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.

**3.** Calculer $DA^2$ et $DB^2$.

**4.** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M$ vérifiant la relation

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

Vérifier que le centre de gravité $G$ du triangle $ABC$ appartient à $(\mathscr{E})$.
Tracer $(\mathscr{E})$.

## PROBLÈME 779 *12 points.* ./1993/groupe2C/pb-1/texte

La partie C est indépendante de la partie B du problème.

**Partie A.**

**1.** Étudier sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ le sens de variation de la fonction $h_1$ définie par

$$h_1(x) = x - \ln x.$$

Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a

$$h_1(x) > 0.$$

On définit alors sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction $f_1$ par

$$f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

**2.** Étudier le sens de variation de la fonction $f_1$.
Déterminer les limites de $f_1$ aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variations.

**3.** On considère la fonction $\varphi_1$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 & \\ \varphi_1(x) = f_1(x) & \text{pour } x \in ]0\,;+\infty[ \end{cases}.$$

Montrer que $\varphi_1$ prolonge $f_1$ par continuité.
Étudier la dérivabilité de $\varphi_1$ en $0$.

**Partie B.**

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur où égal à 2.

**1.** Étudier sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ le sens de variation de la fonction $h_n$ définie par

$$h_n(x) = x^n - \ln x.$$

En déduire que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a : $h_n(x) > 0$.
On définit alors sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction $f_n$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}.$$

**2.** On définit sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction $g_n$ par

$$g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x.$$

Montrer que $g_n$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire l'existence d'un réel unique $a_n$ tel que : $g_n(a_n) = 0$.
Comparer $a_n$ et 1. Quelle est la valeur de $a_2$ ?

**3.** a) Démontrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a

$$f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}.$$

En déduire le sens de variation de $f_n$.

b) Préciser les limites de $f_n$ aux bornes de $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de $f_n$.

**4.** a) En vous aidant la la question (3) de la partie A., montrer que $f_n$ admet un prolongement par continuité $\varphi_n$ dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

b) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_2$ de $\varphi_2$ dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

Retour page 1

**Partie C**

Calcul approché de l'intégrale $\int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles.

**1.** En utilisant la question A.1, déterminer lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[1\,;3]$, un encadrement de $x - \ln x$. En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;3]$, on a

$$\left|f_1'(x)\right| \leqslant 1. \tag{1}$$

**2.** On considère deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et on pose

$$A = \int_\alpha^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_\alpha^\beta f_1(\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

a) En utilisant la relation (1) et l'inégalité des accroissements finis, démontrer, que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$, on a

$$\alpha - x \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant x - \alpha.$$

b) En déduire que

$$\int_\alpha^\beta (\alpha - x)\,\mathrm{d}x \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

c) Montrer que

$$|A - J| \leqslant \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2.$$

**3.** On partage l'intervalle $[1\,;3]$ en $n$ intervalles de même longueur en utilisant les réels $x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n$ tels que

$$1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3.$$

On a donc
$x_{k+1-x_k} = \dfrac{2}{n}$ pour $k$ appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.
On pose

$$A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que

$$\left|\int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x - (J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1})\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

En déduire une valeur approchée de $\int_1^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ à $10^{-1}$ près. On légitimera le choix de $n$.

# III. Groupe III, série C

Ex. 2065. 4 points. ./1993/groupe3C/exo-2/texte.tex

*Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.*
Un urne contient six boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement trois boules de l'urne, sans remise.

a) Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?

b) Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte un numéro pair ?

2. Une boîte comporte six compartiments numérotés de 1 à 6.
   On place les 6 six boules au hasard, une par compartiment.
   Quelle est la probabilité pour que 4 boules au moins soient dans un compartiment ayant le même numéro que la boule ?
3. On effectue $k$ tirages successifs d'une boule avec remise ($k$ étant un entier positif).
   Les tirages sont supposés équiprobables.
   a) Calculer la probabilité de tirer au moins une fois la boule qui porte le numéro 6.
   b) Pour quelles valeurs de $k$ cette probabilité dépasse-t-elle $0{,}9$ ?

# IV. Amérique du Nord, série C

Ex. 2066. ——— *4 points.* *./1993/ameriquedunordc/exo-2/texte.tex*

Soit, dans un plan orienté, un triangle équilatéral direct $ABC$, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. On note $O$ son centre de gravité.

On considère des points $M$, $N$, $P$ respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$, tels que $AM = BN = CP$. (On suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$.)

1. a) Justifier qu'il existe une rotation unique $r$ telle que $r(A) = B$ et $r(M) = N$. (On énoncera le théorème utilisé.) Déterminer son centre.
   b) Soit $\rho$ la rotation vectorielle associée à $r$.
   Montrer que $\rho(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$. En déduire que l'image de $B$ par $r$ est le centre de $r$.
2. a) Quelles sont les images de $N$ et de $P$ par $r$ ?
   b) Montrer que le triangle $MNP$ est équilatéral de centre de gravité $O$.
3. Soit les cercles $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ circonscrits aux triangles $APM$, $CPN$ et $BMN$.
   Il n'est pas demandé de dessiner $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$.
   a) Montrer que $\Gamma_1$ passe par $O$. Quels autres résultats pourrait-on obtenir par une démonstration analogue ?
   b) Montrer que $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$ ont le même rayon.

# V. France remplacement, séries C & E

Ex. 2067. ——— *4 points.* *./1993/francerem/exo-1/texte.tex*

Soit le nombre complexe $u = 1 + \mathrm{i}$ et $\overline{u}$ son conjugué.

1. a) Mettre $u$ et $\overline{u}$ sous forme trigonométrique.
   b) Soit $n$ un entier naturel. On pose : $S_n = u^n + \overline{u}^n$. Déduire de 1a que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ où $\lambda_n$ est un réel à préciser en fonction de $n$.
   c) Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $S_n = 0$ ?
   d) Prouver que si $n$ est pair, $S_n$ est un entier relatif.
2. On suppose que $n$ est un entier naturel pair et on pose $n = 2m$.
   a) Écrire, par la formule du binôme, les développements de $(1+\mathrm{i})^{2m}$ et $(1-\mathrm{i})^{2m}$ a ? l ?aide des puissances de i, puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.
   b) Pour $p$ entier naturel, simplifier : $\mathrm{i}^{2p+1} + (-\mathrm{i})^{2p+1}$ et $\mathrm{i}\mathrm{i}^{2p} + (-\mathrm{i})^{2p}$. c.
   c) Exemple $n = 24$ (donc $m = 12$).
   En utilisant les résultats du 1 et ce qui précède, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{12} (-1)^p \mathrm{C}_{24}^{2p} = 2^{12}.$$



Retour page 1

**Ex. 2068.** ——— *4 points.* *./1993/francerem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère les cercles$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centres respectifs $O$ et $O'$, de rayons $R$ et $R'$ $(R \neq R')$ sécants en $A$ et $B$ $(A \neq B)$.

1. Soit $S_A$ la similitude plane directe de centre $A$ qui transforme $O$ en $O'$. Préciser son rapport et son angle en fonction des données. Déterminer l'image de $(\mathscr{C})$ par $S_A$.
2. Soit $I$ le barycentre du système $\{(O, R') ; (O', R)\}$ et $J$ le barycentre du système $\{(O, R') ; (O', -R)\}$.
   a) En prenant $OO'$ =5cm, $R$= 4 cm et $R'$= 2 cm, faire une figure dans laquelle apparaissent $I$ et $J$.
   b) Montrer que les centres des similitudes planes directes $S$ transformant $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$ sont sur le cercle $(\Gamma)$ de diamètre $[IJ]$. Vérifier que $A$ et $B$ sont sur $(\Gamma)$ ; construire $(\Gamma)$.
   c) Montrer qu'il existe deux similitudes, d'angles respectifs $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, transformant $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$. Préciser leurs centres respectifs.
   d) Montrer que l'ensemble des centres des similitudes planes directes qui transforment $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}?)$ est le cercle $(\Gamma)$.

## PROBLÈME 780 *12 points.* *./1993/francerem/pb/texte*

On considère pour $n$ entier naturel non nul, la fonction numérique $f_n$ définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^2(\ln x))^n \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f_n(0) = 0.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan rapporté à ? un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

A- 1. Soit $p$ un entier naturel ; en utilisant la limite de $t^p \mathrm{e}^{-t}$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$, montrer que la limite de $x(\ln x)^p$ lorsque $x$ tend vers $0$ est égale à $0$.
   2. En déduire, pour tout entier $k \geqslant 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ lorsque $x$ tend vers $0$.
   3. Montrer que $f_n$ est dérivable en $0$ et calculer son nombre dérivé en $0$.

B- 1. Étudier le sens de variation de $f_1$ sur $[0 ; 1]$.
   2. a) Montrer que pour $n$ entier supérieur ou égal à $1$ : $0 < \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} < 1$.
      b) L'entier $n$ étant fixe $(n \geqslant 1)$, résoudre dans $]0 ; 1]$ l'inéquation :
      $$\ln(x) + \frac{n}{2} \leqslant 0.$$
      c) Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $f_n$ est dérivable sur $[0 ; 1]$ et $f_n'(x)$ admet le même signe que $\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1}$ pour tout $x$ élément de$]0 ; 1]$ tel que$f_n'(x) \neq 0$.
      d) Étudier le sens de variation de $f_n$ sur $[0 ; 1]$ pour $n \geqslant 2$. (On distinguera deux cas, suivant la parité de $n$, et on dressera les deux tableaux de variations.
   3. L'unité graphique étant 10cm, construire $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$. Déterminer les coordonnées de leurs points communs.
   4. Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par deux points indépendants de $n$. Préciser les coordonnées de ces deux points.

C- Dans cette partie, $t$ désigne un réel appartenant à $[0 ; 1]$ et $n$ désigne un entier naturel non nul.
   1. Prouver que l'intégrale de $f_n$ de $t$ à $1$, existe.
      On pose
      $$I_n(t) = \int_t^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad L_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
   2. Montrer que la fonction $t \longmapsto L_n ? I_n(t)$ est la primitive sur $[0 ; 1]$ de la fonction $f_n$ qui s'annule pour $t = 0$.
   3. En déduire que $I_n(t)$ admet pour limite $L_n$ lorsque $t$ tend vers $0$.
   4. On considère la fonction numérique $F$ définie sur $[0 ; 1]$ par :
   $$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} \quad \text{pour } 0 < x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad F(0) = 0.$$



Retour page 1

a) Prouver que $F$ est dérivable sur $]0\,;1]$ et calculer $F'(x)$ pour $x \in ]0\,;1]$.

b) Prouver que $F$ est dérivable en $0$ et préciser $F'(0)$.

c) En déduire que $F$ est une primitive de $f_1$ sur $[0\,;1]$. Calculer $L_1$.

5. Soit $\varphi_n$ la fonction définie sur $]0\,;1]$ par :

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n.$$

a) Déterminer la limite de $\varphi_n(t)$ lorsque $t$ tend vers $0$.

b) Á l'aide d'une intégration par parties prouver que, pour $t$ élément de $]0\,;1]$ :

$$I_{n+1}(t) = \varphi_n(t) - \frac{n+1}{3}I_n(t).$$

c) En déduire que :

$$L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}L_n.$$

d) Prouver, par récurrence sur l'entier naturel non nul $n$, que :

$$L_n = (-1)^n\frac{n!}{3^n+1}.$$

e) Calculer en fonction de $n$ l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et l'axe des abcsisses.

# Chapitre XXXVI

# 1994.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I :Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

— groupe II : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours & Rennes.

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

## I. Groupe I, série C

**Ex. 2069.** ——— *4 points.* *./1994/groupe1C/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $a$ un nombre réel positif, on considère l'application $F_a$ qui à tout point $m$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ associe $M_a$ d'affixe $Z_a = (z + \mathrm{i})(az - 1)$.

**1.** On donne $a = 0$, reconnaître l'application $F_0$.

**2.** On prend maintenant $a$ strictement positif.

a) Déterminer les points ayant pour image par $F_a$ le point $O$.

b) Calculer les coordonnées $X_a$ et $Y_a$ de $M_a$ en fonction de $x$, $y$ et $a$.

c) Pour $a \neq 1$, montrer que l'ensemble des points dont l'image est un point de l'axe imaginaire $(O, \vec{v})$ est une hyperbole.
Calculer son excentricité, les coordonnées de son centre et préciser, suivant les valeurs de $a$, son axe focal.

**3.** Faire une figure correspondant à $a = \dfrac{1}{2}$.

**Ex. 2070.** ——— *4 points.* *./1994/groupe1C/exo-2/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\jmath}$.

**1.** $M$ est un point quelconque du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on pose :

$$d_1 = \det(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) \quad d_2 = \det(\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MO}) \quad d_3 = \det(\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MA}).$$

a) Calculer $d_1$, $d_2$ et $d_3$ en fonction de $x$ et $y$ et prouver que $d_1 + d_2 + d_3 \neq 0$.

b) En déduire la relation

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(d_2\overrightarrow{OA} + d_3\overrightarrow{OB}\right) \tag{1}$$

**2.** Soit $I$ le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $a$ est un réel strictement positif.
On suppose que $M$ est barycentre du système de points pondérés $\{(O,\ a),\ (A,\ 1),\ (B,\ 2)\}$.

a) Démontrer que $M$ appartient au segment $[OI]$.

b) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $a$.*
En déduire en utilisant la relation (1) que $d_3 = 2d_2$ et $d_1 = ad_2$.

c) Démontrer que :

$$\text{aire}(MAB) = a \times \text{aire}(MOB) \qquad \text{et} \qquad \text{aire}(MOA) = 2 \times \text{aire}(MOB).$$

## Problème 781 *12 points*

*./1994/groupe1C/pb/texte*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).
Soit $f$ la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.
On appelle $\Gamma$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A. Étude de la fonction $f$. 1. Déterminer le sens de variations de la fonction $f$.

2. Déterminer les limites de $f$ en 1 et $+\infty$.
3. a) Démontrer que pour tout $x$ de l'intervalle $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ : $f(x) \geqslant x$.
   b) Soit $h$ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $h(x) = 2x - f(x)$.
   Á partir du sens de variation de $h$, démontrer que $h$ est positive.
   c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $x$ de l'intervalle $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ :

$$x \leqslant f(x) \leqslant 2x.$$

4. a) Calculer $f(x)$ à $10^{-2}$ près, pour $x = 1 + \dfrac{k}{10}$, où $k$ est en entier variant de 1 à 10.
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution que l'on notera $\lambda$ et justifier le fait que $\lambda \in ]1{,}1\,;1{,}2[$.
   Tracer les droites d'équation $x = 1$, $y = x$ et $y = 2x$, puis la courbe $\Gamma$.

Partie B. Approximation de $\lambda$ par une suite On rappelle que $\lambda$ est l'unique solution de $f(x) = 0$.

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$.
2. a) Soit $I$ l'intervalle $]1\,;2[$ ; démontrer que pour tout $x$ de $I$, $g(x) \in I$.
   b) Démontrer que, pour tout $x$ de $I$, $0 \leqslant |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{(2\mathrm{e}} \leqslant \dfrac{1}{5}$.
   c) En déduire que pour tout $x$ de $I$, $|g(x) - \lambda| \leqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)|x - \lambda|$.
3. $n$ étant un entier naturel, soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$, la suite définie par

$$\begin{cases} u_O = 1{,}1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

   Il résulte de la question 2a que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   a) Établir que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - \lambda| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$.
   Conclure à la convergence de $(u_n)$, préciser sa limite et déterminer un entier $p$ tel que $u_p$ soit une valeur approchée de $\lambda$ à $10^{-4}$ près.

$\lambda$ désigne toujours l'unique solution de $f(x) = 0$.
Soit $H$ le fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$H(x) = \int_{\lambda}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

Partie C. Calcul de la limite d'une intégrale 1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$J(x) = \int_{\lambda}^{x} \ln(t-1)\,\mathrm{d}t.$$

$$\left(\text{On pourra écrire } \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}\right).$$

2. Vérifier que la fonction $t \longmapsto (t+1)\ln(t+1) - t$ est une primitive de $t \longmapsto \ln(t+1)$, puis calculer $H(x)$.
3. On rappelle que $f(\lambda) = 0$. Démontrer que :

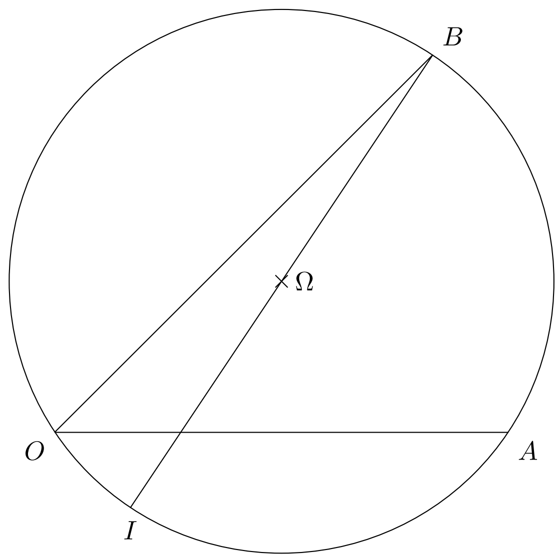
$$\lim_{x\to 1} H(x) = \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda + \ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1} + 2\ln 2 - \frac{3}{2}.$$

## II. Groupe II, série C

Ex. 2071. ____________ *5 points.* *./1994/groupe2C/exo-1/texte.tex*

Sur figure ci-dessous, qui sera remise avec la copie après avoir été éventuellement complétée, $O$, $A$, et $B$ sont trois points du plan orienté tels que :

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{modulo } 2\pi.$$




Le cercle $\mathscr{C}$, de centre $\Omega$ est le cercle circonscrit au triangle $OAB$. On désigne par $I$ le point diamétralement opposé à $B$ sur $\mathscr{C}$.

**1.** On appelle $s$ la similitude directe de centre $I$ qui transforme $A$ en $B$.
Déterminer l'angle de la similitude $s$.
Quelle est la nature du triangle $IAB$ ?
En déduire le rapport de la similitude $s$.

**2.** On appelle $G$ le point défini par la relation $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite $(IG)$ recoupe $\mathscr{C}$ en $K$.
On appelle $s'$ la similitude directe de centre $K$ qui transforme $A$ en $B$.
a) Déterminer l'angle de la similitude $s'$.
b) On se propose de déterminer le rapport de la similitude $s'$.
Montrer l'égalité $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA.KB$.
On désigne par $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(BK)$.

Retour page 1

Exprimer $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$.

En déduire $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\dfrac{1}{2}KB^2$.

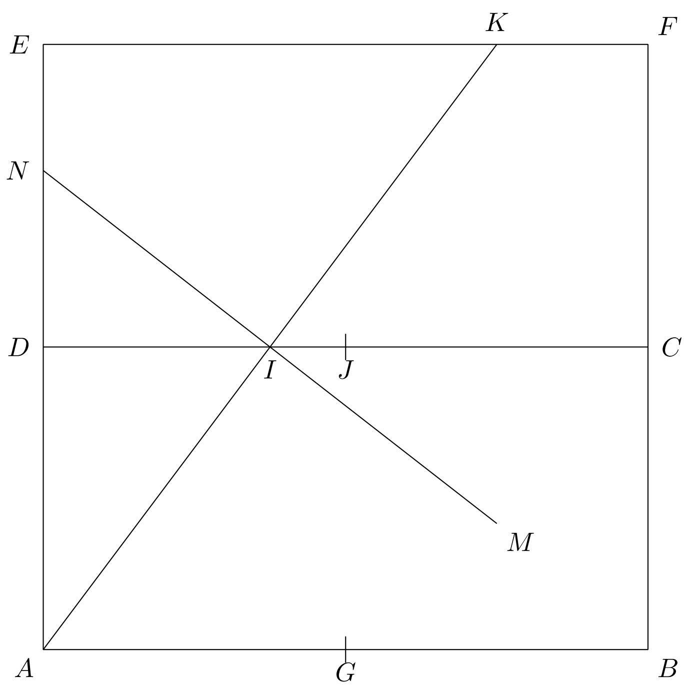
Déterminer le rapport de la similitude $z'$.

Ex. 2072. 5 points. ./1994/groupe2C/exo-2/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABFE$ de centre $J$, tel que :

$$AB = AE = 2 \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi.$$

Soient $D$, $C$ et $G$ les milieux respectifs de $[AE]$, $[BF]$ et $[AB]$.
Soit $I$ un point quelconque de $[DC]$. La droite $(AI)$ coupe la droite $(EF)$ en $K$. La perpendiculaire en $I$ à la droite $(AI)$ coupe la droite $(AE)$ en $N$.
On désigne par $M$ le symétrique de $N$ par rapport à $I$.
On se propose de déterminer et de tracer l'ensemble $P_1$ des points $M$ obtenus lorsque $I$ décrit le segment $[DC]$.




**1.** a) Préciser les positions de $M$ lorsque $I$ est en $D$ puis en $J$.

b) Quelle est la nature du triangle $AMKN$ ?

c) En déduire que $MA = MK$ et que $K$ est le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(EF)$.

d) Montrer que $P_1$ est inclus dans une parabole $P$ dont on déterminera le foyer et la directrice.

**2.** On munit le plan du repère orthonormé $(A,\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AD})$.

a) Donner une équation cartésienne de $P$.

b) Préciser l'ensemble des abscisses de $M$ quand $I$ décrit $[DC]$ et donner les coordonnées des extrémités de $P_1$. Tracer $P_1$.

## Problème 782 *10 points* ./1994/groupe2C/pb/texte

La partie A a pour objet l'étude de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.
Les parties B et C sont consacrées aux études des convergences de deux suites.

A. Étude de la fonction $f$.

1° On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Étudier le sens de variation de $g$. Calculer $g(0)$.



Retour page 1

b) En déduire que l'expression $\dfrac{x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel $x$.

On considère alors la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.

2° a) Vérifier que, pour tout réel $x$, $f(x) > 0$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3° a) Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4° Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ et étudier les variations de $f$.

5° Représenter graphiquement la fonction $f$ dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

B. Étude de la suite $(u_n)$ définie par : pour tout entier naturel $n$, $u_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer explicitement $u_n$.

1° Donner une interprétation géométrique de $u_n$.

2° Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$ ?

3° a) Montrer que, pour tout réel $x$,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{e^x - x}.$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

c) En déduire la limite de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

C. Étude de la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = u_n - n$. On a donc, pour tout entier naturel $n$, $v_n = \displaystyle\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,\mathrm{d}x$.

1° Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante.

2° a) Montrer que, pour tout réel $x$ positif ou nul, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

c) En effectuant une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $n$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \leqslant 2$.

3° La suite $(v_n)$ est-elle convergente ?

## III. Groupe III, série C

**Ex. 2073.** ——— *4 points.* *./1994/groupe3C/exo-1/texte.tex*

Une urne contient sept boules, cinq noires et deux rouges, indiscernables au toucher.

**1.** On extrait simultanément deux boules de l'urne.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont rouges ».

B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

**2.** De la même urne, on extrait cette fois-ci les sept boules, l'une après l'autre. Il y a donc $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ tirages possibles.
Déterminer successivement le nombre de tirages pour lesquels :

a) la première boule tirée est rouge ;

b) la première boule tirée est noire et la deuxième rouge ;

c) la première boule rouge tirée est en troisième position ;

d) la première boule rouge tirée est en quatrième position ;

e) la première boule rouge tirée est en cinquième position ;

f) la première boule rouge tirée est en sixième position.

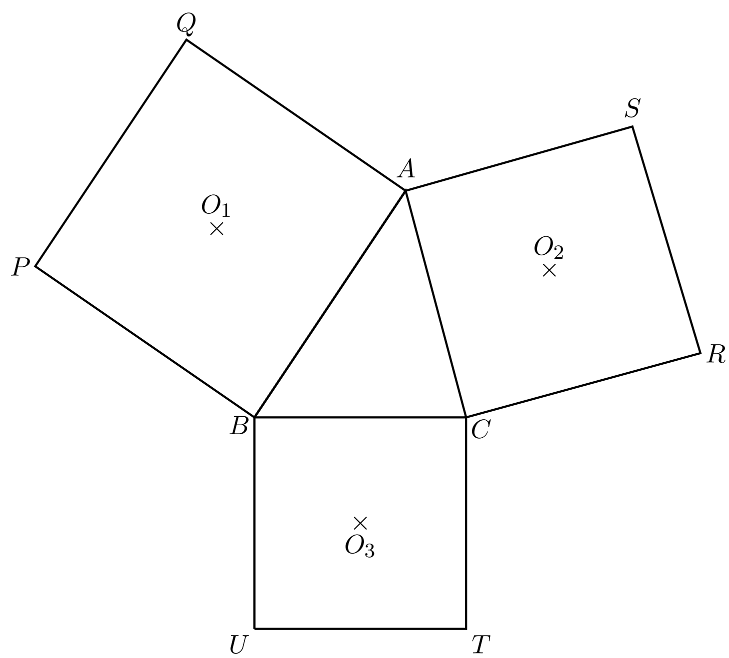
**3.** Dans la situation de la question **??**, on appelle $X$ le rang de la première boule rouge tirée.

a) Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire $X$ ; les valeurs $p_i = p(X = i)$ seront données sous forme de fractions.

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de $X$. On donnera les détails des calculs et les valeurs exactes.

Ex. 2074. *5 points.* *./1994/groupe3C/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle $ABC$, non rectangle, de sens direct. À l'extérieur du triangle, conformément à la figure, on trace les carrés $AQPB$, $ACRS$ et $BUTC$ de centres respectifs $O_1$, $O_2$ et $O_3$
On appelle $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles circonscrits aux carrés $AQPB$ et $ACRS$.
Enfin on note par $I$ le milieu du segment $[BC]$.




Les trois questions sont indépendantes. Chacune vise à établir une propriété de la configuration.

**1.** Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en $A$ et en un second point $A'$. Montrer que le point $A'$ est sur le cercle de diamètre $[BC]$. (On pourra utiliser les propriétés angulaires relatives aux points cocycliques).

**2.** Soient $r_1$ et $r_2$ les rotations de centres $O_1$ et $O_2$, et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$ ?

b) Quelle est l'image de $B$ par $r_2 \circ r_1$ ?

c) En déduire déduire les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

d) Montrer que le triangle $IO_1O_2$ est rectangle et isocèle.

**3.** a) Quelle est l'image du triangle $ABO_3$ par la similitude directe de centre $B$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ ?

b) Déterminer une similitude directe dans laquelle le triangle $AO_1O_2$ ait pour image le triangle $AQC$.

c) Prouver que les segments $[AO_3]$ et $[O_1O_2]$ sont orthogonaux et de même longueur.

## Problème 783 *11 points.* ./1994/groupe3C/pb/texte

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $I = ]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine $O$ et d'unité graphique 5 cm.

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ et déterminer ses limites aux bornes de $I$. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote $\Delta$ que l'on précisera.

**2.** a) Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point $M$ de $\mathscr{C}$, d'abscisse $a$. On note $T_a$ cette tangente.

b) Montrer qu'il existe deux valeurs de $a$ pour lesquelles la droite $T_a$ passe par l'origine $O$.

**3.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On mettre en évidence la droite $\Delta$ et les deux tangentes trouvées ci-dessus.

**4.** On pose, pour $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction $F$ est-elle monotone ? Est-elle positive ?

**Partie B**

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale $J$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de $J$.

**1.** En utilisant l'étude de la fonction $f$ réalisée dans la partie A, montrer que $1 \leqslant J \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

**2.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $u_0$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}\mathrm{e} + (n+1)u_n.$$

c) Calculer alors successivement $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_6$.
On donnera les réponses sous la forme $a\mathrm{e} - b$ avec $a$ et $b$ entiers naturels.

**3.** a) Montrer que

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \int_0^1 \mathrm{e}^t \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :

$$J = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + R_n, \qquad \text{avec} \quad R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Retour page 1

c) Prouver que :
$$\frac{1}{n+2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2(n+2)}.$$

d) *i.* Trouver le plus petit entier $n$ tel que :
$$\frac{\mathrm{e}}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0{,}05.$$

*ii.* Calculer $S_6 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$ sous forme $a\mathrm{e} - b$, avec $a$ et $b$ entiers naturels.

*iii.* Prouver que $S_6 - \frac{\mathrm{e}}{16} \leqslant J \leqslant S_6 - \frac{1}{8}$.

*iv.* Déduire de ce qui précède un encadrement de $J$, d'amplitude inférieure à $0{,}05$, par deux nombres décimaux.

# IV. Amérique du Nord, série C

Ex. 2075. ——————— *4 points* *./1994/ameriquenordC/exo-1/texte.tex*

Soit $ABC$ un triangle quelconque du plan orienté.
On désigne par :

- $R_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- $R_2$ la rotation de centre $C$ et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
- $R_3$ la rotation de centre $AB$ et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Le but de cet exercice est de déterminer la transformation $f$ définie par $f = R_3 \circ R_2 \circ R_1$.
Soient $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Delta_3$ les bissectrices intérieures des angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$.
Soit $I$ le point de concours de ces trois droites.
Les réflexions d'axes $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Delta_3$ sont notées $S_{\Delta_1}$, $S_{\Delta_2}$ et $S_{\Delta_3}$.

**1.** Montrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle.

**2.** Montrer que $R_2 \circ R_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. (On utilisera les décompositions de $R_2$ et de $R_1$ en produit de réflexions.)

**3.** Montrer que $f(I)$ est le point $I_1$ symétrique de $I$ par rapport à $(AB)$.

**4.** Déterminer le centre $\Omega$ de la rotation $f$. Montrer que $(AB)$ est tangente en $\Omega$ au cercle inscrit au triangle $ABC$.

# V. Groupe IV, série D

Ex. 2076. ——————— *5 points* *./1994/groupe4D/exo-1/texte.tex*

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie A Dans un urne $U_1$, on a placé 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200.
On extrait simultanément au hasard 3 jetons de $U_1$, et on note la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

**1.** Montrer que la probabilité d'obtenir une somme égale à 400 est $\frac{18}{35}$.

**2.** Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage de trois jetons la somme obtenue.

a) Quelles sont les valeurs prises par X?
Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

On considère l'urne $U_1$ de la première question et une autre urne $U_2$ contenant 3 jetons marqués 100 et 2 jetons marqués 200.
Un tirage consiste à extraire un jeton de $U_1$, puis un jeton de $U_2$.

Partie B **1.** Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons portant le même nombre.

**2.** En déduire la probabilité pour que la somme des nombres tirés soit égale à 300.

**3.** Calculer la probabilité d'avoir extrait de $U_1$ un jeton marqué 100 sachant qu'on a obtenu une somme égale à 300.

**Ex. 2077.** ____________ *4 points* ./1994/groupe4D/exo-2/texte.tex

On considère les nombres complexes $-1+\mathrm{i}$, $3(1+\mathrm{i})$ et 2.

**1.** Écrire ces nombres sous forme trigonométrique.

**2.** On désigne par $a$, $b$ et $c$ ces trois nombres de façon que $|a|<|b|<|c|$ et par $A$, $B$ et $C$ leurs images respectives dans un plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Placer $A$, $B$ et $C$.

b) Montrer que le triangle obtenu est rectangle isocèle.

**3.** Soit $f$ l'application de (P) dans (P) qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z'=2\mathrm{i}z+1-2\mathrm{i}.$$

Soient $A'$, $B'$ et $C'$ d'affixes respectives $a'$, $b'$ et $c'$, les images par $f$ des points $A$, $B$ et $C$.

a) Déterminer $a'$, $b'$ et $c'$. Placer $A'$, $B'$ et $C'$ dans le plan (P). Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$ ? (Justifier la réponse.)

b) Calculer $W=\dfrac{c'-b'}{c-b}$. Ecrire $W$ sous forme trigonométrique.

En déduire la valeur de $\dfrac{B'C'}{BC}$ et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{B'C'})$. Que peut-on dire des droites $(BC)$ et $(B'C')$ ?

## Problème 784 *11 points.* ./1994/groupe4D/pb/texte

On considère la fonction définie pour tout réel $x$ par : $f(x)=\dfrac{4(1-\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}$, et on note (C ) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1cm) .

### Partie A

**1.** Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ puis en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

**2.** Former le tableau des variations de $f$ .

**3.** Trouver une équation de la tangente $(T)$ à la courbe (C) au point d'abscisse nulle .

**4.** Démontrer que f est une fonction impaire .

**5.** Construire (C ) et $(T)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

### Partie B

**1.** Calculer l'intégrale

$$I=\int_{-3}^{0}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

On donnera le résultat sous d'un logarithme népérien d'un quotient.

**2.** Vérifier que, pour tout réel $x$, $f(x)=4-\dfrac{8\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

**3.** Déduire des questions précédentes l'aire, en cm$^2$, de la partie de la courbe comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C ) et les droites d'équations :

$$x=-3 \quad \text{et} \quad x=0.$$

Donner une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près de cette aire .

4. On considère ici la région du plan comprise entre la courbe (C) , la droite $(T)$ et les droites d'équations : $x=-3$ et $x=0$. Calculer,en cm$^2$, l'aire de cette région.
Donner une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près de cette aire.

### Partie C

Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$ où $\alpha$ est un nombre réel donné.

**1.** En utilisant les résultats de la partie 784, montrer que, si $\alpha$ n'appartient pas à l'intervalle $]-4\,;4[$, l'équation n'a pas de solution.

**2.** On suppose désormais que $-4 < \alpha < 4$..

a) Démontrer qu'il existe une solution et une seule pour cette équation.

b) Pour $\alpha = 2$, exprimer cette solution à l'aide d'un logarithme népérien .

c) Pour $\alpha$quelconque appartenant à l'intervalle $]-4\,;4[$, exprimer cette solution en fonction de $\alpha$.

**Partie D**

On se propose d'étudier l'existence des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) + x = 0$.

**1.** Á partir de la représentation graphique de $f$, indiquer le nombre de solutions de cette équation.

**2.** Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$.

a) Vérifier que, pour tout réel $x$, on a :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{8\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

b) En déduire les variations de $\varphi$. (On pourra commencer par résoudre l'équation $X^2 - 6X + 1 = 0$.)

c) Déterminer la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

**3.** a) Á partir des résultats précédents, déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) + x = 0$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Retrouver ainsi, de manière rigoureuse, les résultats trouvés à la question 1

# VI. National remplacement, séries C & E

**Ex. 2078.** ——— *4 points.* *./1994/franceCErem/exo-1/texte.tex*

Dans un plan on donne une droite (Δ) et un point $O$ n'appartenant pas à (Δ).
On note $H$ le projeté orthogonal de $O$ sur (Δ) . Pour la figure on prendra $OH = 4$ cm. Un point $P$ décrit la droite (Δ).
La perpendiculaire en $P$ à (Δ) et la perpendiculaire en O à la droite (OP) se coupent en un point $M$ ; soit $I$ le milieu de $[PM]$.

1. Montrer que $IO = IP$ et en déduire que, lorsque $P$ décrit (Δ), le point $I$ appartient à une parabole $(C)$ dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On considère un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\overrightarrow{OH} = \vec{\imath}$.
   a) On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point $M$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP}$ et en déduire une équation cartésienne de l'ensemble $(\mathscr{C}')$ décrit par le point $M$ quand $P$ décrit $(\Delta)$.
   b) Montrer que $(\mathscr{C}')$ est une parabole dont on précisera le foyer $O'$ et la directrice $(\Delta')$.
3. Placer approximativement sur le dessin les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

**Ex. 2079.** ——— *4 points.* *./1994/franceCErem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan orienté, on donne un triangle $ABC$ direct (c'est-à-dire que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$ admet une mesure comprise entre 0 et $\pi$).
$ACDE$ est le carré tel que $(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ; on désigne son centre par $O$.
$ACDE$ est le carré tel que $(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ; on désigne son centre par $O'$.
$I$ est le milieu de $[BC]$. $J$ est le milieu de $[EF]$.

1. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ démontrer que l'on a : $(\overrightarrow{FC},\ \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $FC = BE$.
2. En déduire que le triangle $OIO'$ est un triangle rectangle en $I$ et isocèle.
3. Démontrer que $JO'IO$ est un carré.

Retour page 1

## 🏛Problème 785 *12 points*

./1994/franceCErem/pb/texte

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

A- 1. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{-x}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

a) Établir le tableau de variation de $f$ en précisant les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.

c) Tracer la droite $\Delta$ et la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = x - 2$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie E du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

B- Dans cette partie, à tout point $M$ du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Soit $T$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M_1$ d'affixe $z_1$ tel que $z_1 = (-1 - \mathrm{i})z + 1$.

1. Donner la nature de $T$ et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Calculer les coordonnées $x$ et $y$ du point $M$ en fonction des coordonnées $x_1$ et $y_1$ du point $M_1$.
3. Déterminer les équations des transformées par $T$ des droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x-2$.
4. Soit $f_1$ la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;2[$ par

$$f_1(x) = 1 - x - 2\ln(2 - x)$$

et soit $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. . Soit $M$ un point de $\mathscr{C}$ et $M_1 = T(M)$.
Montrer que l'abscisse $x_1$ de $M_1$ est strictement inférieure à 2 et que $M_1$ est sur la courbe $\mathscr{C}_1$.
Inversement, si $M_1$ est sur la courbe $\mathscr{C}_1$ montrer qu'il existe un point $M$ de la courbe $\mathscr{C}$ tel que $M_1 = T(M)$. En déduire que $C_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par $T$.

C- 1. Établir le tableau de variations de $f_1$ en précisant les limites de $f_1$ en $-\infty$ et 2. On pourra remarquer que :

$$f_1(x) = (2 - x)\left[\frac{1 - x}{2 - x} - 2\frac{\ln(2 - x)}{2 - x}\right].$$

2. Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$g(x) = 2x - \mathrm{e}^{x} + 2\ln(2 - x) = f(x) - f_1(x).$$

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

3. a) Déterminer le sens de variation de $g'$ sur $]-\infty\,;2[$. Calculer $g'(0)$.

b) Établir le tableau de variation de $g$ sur $]-\infty\,;2[$ en précisant les limites de $g$ en $-\infty$ et $2$.

c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$ dans $]-\infty\,;2[$ $(\alpha < beta)$. Vérifier que $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$ et $0{,}6 < \beta < 0{,}7$.

d) Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.
5. On appelle $\mathrm{E}_1$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équations respectives $y = 1 - x$ et $x = -1$. On admet que la partie E est transformée en $\mathrm{E}_1$ par $T$. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ de la partie $\mathrm{E}_1$.



Retour page 1

# VII. Ile de la Réunion, série C ou E ?

Ex. 2080. ? ./1994/reunion/exo-1/texte.tex

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $1$ et $-2\text{i}$.

1 a) Déterminer et construire l'ensemble $(\Delta)$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant :

$$(2+\text{i})z+(2-\text{i})\overline{z}=4.$$

(On pourra poser $z=x+\text{i}y$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels).

b) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant :

$$(z+2\text{i})(\overline{z}-2\text{i})=4.$$

(On pourra remarquer que $\overline{z}-2\text{i}=\overline{z+2\text{i}}$).

2 Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ ($z\neq 2\text{i}$), associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z=\frac{\overline{z}+4\text{i}}{\overline{z}-2\text{i}}.$$

a) Vérifier que $z'-1=\dfrac{6\text{i}}{\overline{z}-2\text{i}}$.

En déduire l'égalité $BM\times AM'=6$ et déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{AM'})$.

b) On appelle $M_1$ et $M_2$ les points d'intersection de $(\Gamma)$ et $(\Delta)$. Déterminer les images par $f$ de $M_1$ et $M_2$.

## Problème 786 ?

./1994/reunion/pb/texte

Partie A- le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \text{e}^{-x^2}\,\text{d}x$.

I. On considère les fonction $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{e}^{-x^2}$ et $g(x)=x\text{e}^{-x^2}$.

1. Étudier la fonction $f$ : parité, sens de variation et limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier la fonction $g$ : parité, sens de variation et limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

   On pourra utiliser l'égalité $g(x)=\dfrac{1}{x}\left(x^2\text{e}^{-x^2}\right)$ pour $x\neq 0$.
3. On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de $f$ et $g$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 5cm).
4. a) Étudier les positions respectives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

   b) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

II. 1. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\text{d}x$.

2. On se propose d'encadrer $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

   Pour cela, on considère les fonctions $h_1$ et $h_2$ définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$h_1(t)=t-1+\text{e}^{-t}$$

$$h_2(t)=\frac{t^2}{2}-t+1-\text{e}^{-t}.$$

   a) Étudier le sens de variation de $h_1$ et en déduire le signe de $h_1(t)$.

   b) Étudier le sens de variation de $h_2$ et en déduire le signe de $h_2(t)$.



Retour page 1

c) Déduire des questions précédentes, que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$, on a :

$$1-x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1-x^2+\frac{x^2}{4}.$$

Montrer que

$$\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{23}{30}.$$

Partie B- Le but de cette partie est l'étude de la convergence d'une suite définie par une intégrale.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : pour tout entier naturel $n$, $u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Interpréter graphiquement le réel $u_n$.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$ ?
3. Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)$ est bornée.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leqslant \int_1^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \int_1^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

b) En utilisant l'encadrement de l'intégrale $I$ obtenu dans la partie A, prouver que, pour tout $n$ supérieur ou égal à 1, $\frac{2}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

Retour page 1

# Chapitre XXXVII

# 1995.

## Sommaire



## I. National, série S

Ex. 2081. ./1995/nationalS/exo-1/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

**2.** Soit $K$, $L$, $M$ les points d'affixes respectives :

$$z_K = 1 + \mathrm{i};\ z_L = 1 - \mathrm{i};\ z_M = -\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ d'unité graphique $4$ cm. On complétera la figure dans les questions suivante.

**3.** a) On appelle $N$ le symétrique du point $M$ par rapport au point $L$.
Vérifier que l'affixe $z_N$ du point $N$ est $2 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point $M$ en le point $A$ et le point $N$ en le point $C$.
Déterminer les affixes respectives $z_A$ et $z_C$ des points $A$ et $C$.

c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2\mathrm{i}$ transforme le point $M$ en le point $D$ et le point $N$ en le point $B$.
Déterminer les affixes respectives $z_D$ et $z_B$ des points $D$ et $B$.

**4.** a) Montrer que le point $K$ est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \mathrm{i}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Ex. 2082. *Obligatoire.* ./1995/nationalS/exo-2/texte.tex

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}},\ J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x,\ K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\ \mathrm{d}x.$$

**1.** Calculons $I$ : soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer Calculer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.

b) En déduire la dérivée $f'$ de $f$.

c) calculer alors $I$.

**2.** Calcul de $J$ et de $K$.

a) Sans calculer explicitement $J$ et $K$, montrer que $J+2I=K$.

b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale $K$, montrer que : $K=\sqrt{3}-J$

c) En déduire les valeurs de $J$ et de $K$.

Ex. 2083. *Spécialité.* *./1995/nationalS/exo-3/texte.tex*

L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)$ définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, pour } n \geqslant 1n \quad u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

**1.** a) Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Calculer la dérivée $f'$ de $f$. En déduire $u_0$.

b) Calculer $u_1$.

**2.** a) Prouver que la suite $(u_n)$ est décroissante (on ne cherchera pas à calculer $u_n$).
En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

b) Montrer que pour tout nombre $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ on a :

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}. \qquad (1)$$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**3.** Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose :

$$I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$u_n+u_{n-2}=I_n.$$

Par une intégration par parties portant sur $I_n$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$nu_n+(n-1)u_{n-1}=\sqrt{2}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$(2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}. \qquad (2)$$

c) Á l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite $(nu_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## 🏛PROBLÈME 787

./1995/nationalS/pb/texte

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentant la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle, puis d'étudier la configuration obtenue.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.
On note :

— $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ les courbes d'équations respectives : $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \ln x$.

— $T_a$ la tangente à la courbe $\Gamma$ au point $A$ d'abscisse $a$, $a$ étant un nombre réel.

— $D_\lambda$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $K$ d'abscisse $\lambda$, $\lambda$ étant un nombre réel strictement positif.

-A- Dans cette partie, on cherche le lien entre des droites, tangentes aux courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ et qui sont parallèles ; puis à quelle condition une droite tangente à la courbe $\Gamma$ est également tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

1° a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $T_a$.
Déterminer de même une équation cartésienne de la droite $D_\lambda$.

b) Déterminer $\lambda$ en fonction de $a$ pour que les droites $T_a$ et $D_\lambda$ soient parallèles.
On notera $b$ la valeur de $\lambda$ ainsi obtenue, $B$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $b$ et $D_b$ la tangente correspondante.

2° Montrer que les droites $T_a$ et $D_b$ sont confondues si et seulement si :

$$b = \mathrm{e}^{-a} \qquad \text{et} \qquad (a+1)\mathrm{e}^{-a} = a - 1.$$

-B- Dans cette partie, on se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{x-1}{x+1}. \tag{1}$$

Pour cela, on considère la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$, $x \neq 1$, par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\mathrm{e}^x$.

1° a) Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

b) Étudier les variations de $f$ sur $I = [0\,;+\infty[$ et la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans $I$, une solution unique $\mu$, et que $\mu$ appartient à l'intervalle $[1{,}5\,;\,1{,}6]$.

2° a) Pour tout nombre réel $x$, différent de 1 et de -1, calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.

b) Déduire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.

c) Déterminer les tangentes communes aux courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$.

3° Tracer dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$. On rappelle que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
Tracer également les deux tangentes communes $T_\mu$ et $T_{-\mu}$.
On prendra pour $\mu$ la valeur approchée 1,55.

**-C- Étude géométrique du problème**

On considère l'application $S$ du plan dans lui-même qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, $y$ non nul, associe le point $M'$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ avec $x' = -x$ et $y' = \dfrac{1}{y}$.

1° Déterminer $S(M')$. Montrer que, si le point $M$ appartient à la courbe $\Gamma$ alors le point $M'$ appartient aussi à la courbe $\Gamma$.

2° Soit $A$ le point d'abscisse $\mu$ ($\mu$ étant le réel défini en B(1)c)) de la courbe $\Gamma$, $T_\mu$ est donc tangente à la courbe $\Gamma$ au point $A$ et tangent à la courbe $\mathscr{C}$ au point $B$ d'abscisse $\mathrm{e}^{-\mu}$.

a) Déterminer en fonction de $\mu$ les coordonnées de $A' = S(A)$.

b) Vérifier que la droite $T_{-\mu}$ est tangente à la courbe $\Gamma$ au point $A'$ et qu'elle est aussi tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en un point $B_1$, dont on déterminera les coordonnées en fonction de $\mu$.
Compléter la figure en plaçant les points $A$, $B_1$, $A'$ et $B$.



Retour page 1

3° a) Justifier les coordonnées suivantes :

$$A\left(\mu\ ;\ \frac{\mu+1}{\mu-1}\right)\ ;\qquad B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\ ;\ -\mu\right)\ ;$$

$$A'\left(-\mu\ ;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)\ ;\qquad B_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\ ;\ \mu\right).$$

b) En déduire que les droites $T_\mu$ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
Déterminer la nature du quadrilatère $AB_1BA$.

c) Montrer que l'aire de domaine délimité par le segment $[AA']$ et l'arc de la courbe $\Gamma$ d'extrémités $A$ et $A'$ est égale à $2\mu$.
On admettra que cet arc est situé en dessous du segment $[AA']$.k

## II. National S remplacement, Septembre 1995

**Ex. 2084.** ——— *4 points* ./1995/nationalSrem/exo-1/texte.tex

Le président d'une association sportive constate que, chaque année, l'association garde 75 % de ces anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux inscrits. On suppose que l'évolution du nombre d'adhérents reste le même au fil des années. On se propose d'étudier cette évolution. On note un le nombre d'adhérents au bout de $n$ années. On sait qu'au démarrage de l'association il y avait 1 600 adhérents ($u_0=1\ 600$).

1. Montrer que pour tout entier $n$,
$$u_{n+1}=0{,}75u_n+800.$$

2. On pose $v_n=3200-u_n$.
   a) Calculer $v_0$.
   b) Vérifier que $v_{n+1}=0{,}75v_n$.
   Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

3. En déduire que $u_n=3200-1600\times(0{,}75)^n$.
   Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on en déduire concernant le nombre d'adhérents de l'association ?

**Ex. 2085.** ——— *5 points, Obligatoire.* ./1995/nationalSrem/exo-2/texte.tex

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2-2z+2=0.$$

2. Soit $K,\ L,\ M$ les points d'affixes respectives :
$$z_K=1+\mathrm{i};\ z_L=1-\mathrm{i};\ z_M=-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$
Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ d'unité $4$ cm.
On complétera la figure dans les questions suivantes :

3. a) On appelle $N$ le symétrique du point $M$ par rapport au point $L$.
   Vérifier que l'affixe $z_N$ du point $N$ est $2+\mathrm{i}(\sqrt{3}-2)$.
   b) La rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point $M$ en le point $A$ et le point $N$ en le point $C$.
   Déterminer les affixes respectives $z_A$ et $z_C$ des points $A$ et $C$.
   c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2\mathrm{i}$ transforme le point $M$ en le point $D$ et le point $N$ en le point $B$.
   Déterminer les affixes respectives $z_D$ et $z_B$ des points $D$ et $B$.

4. a) Montrer que le point $K$ est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.
   b) Montrer que $\dfrac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=\mathrm{i}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Ex. 2086. ——— *5 points, Spécialité.* ./1995/nationalSrem/exo-3/texte.tex

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan et $G$ le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 2)\ ;\ (B,1)\}$.

**1.** Démontrer que le point $A$ est le milieu du segment $[GB]$.

**2.** Montrer que l'ensemble $\Gamma$ des points $N$ tels que $\dfrac{NB}{NA}=2$ est un cercle de centre $G$ dont on précisera le rayon en fonction de $AB$.

**3.** Soit $C$ un point de $\Gamma$ et $\mathscr{L}$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2=0.$$

a) Montrer que le point $C$ appartient à : $CaligL$.

b) En écrivant $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}$, montrer que pour tout point $M$ de $\mathscr{L}$, on a

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CG}=0.$$

c) Déterminer alors l'ensemble $\mathscr{L}$.

## Problème 788 *11 points.* ./1995/nationalSrem/pb/texte

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=(x+1)\ln|x-3|.$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentant $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm).

A- **Étude de la fonction** $f$

1. Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de $f$.
2. a) Vérifier que si $x$ appartient à $\mathscr{D}$, alors :

$$f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|.$$

b) Pour $x$ appartenant à $\mathscr{D}$, calculer $f''(x)$ où $f''$ désigne la dérivée seconde de $f$. En déduire les variations de $f'$.

c) Calculer les limites de $f'$ en $-\infty$ et en $3$ à gauche.

d) Montrer que $f'$ s'annule sur $]-\infty\,;3[$ pour une seule valeur $\alpha$.
Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0{,}1$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;3[$.

e) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]3\,;+\infty[$.

f) Dresser le tableau de variation de $f$.

3. Étudier les limites de $f$ aux bornes de $\mathscr{D}$. Préciser les asymptotes éventuelles à $(\mathscr{C})$.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

B- **Calcul d'une aire**

$\mathscr{A}$ désigne l'aire en cm$^2$ de la région comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.

1. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout réel $x$ différent de $3$ :

$$\frac{x^2+2x}{3-x}=ax+b+\frac{c}{3-x}.$$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$I=\int_{-1}^{2}\frac{t^2+2t}{3-t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Grâce à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

Retour page 1

# III. Amérique du Nord, série S

Ex. 2087. ——— *5 points.* *./1995/ameriqueduns/exo-1/texte.tex*

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0 \tag{E}$$

1. a) Vérifier que $4$ est solution de l'équation (E).
   b) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $z$ complexe :
   $$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = (z-4)(az^2 + bz + c).$$
   c) Résoudre l'équation E dans $\mathbb{C}$ et exprimer les solutions sous forme trigonométrique.
2. $p$ étant un réel strictement positif, on note ($\text{E}_p$) l'équation suivante :
   $$z(z-4)(z^2 - 4z + 4 + p^2) = 0. \tag{$\text{E}_p$}$$
   a) Montrer que les points du plan dont les affixes sont solutions de ($\text{E}_p$) sont les sommets d'un losange dont l'aire vaut $4p$ unités d'aire.
   b) Dessiner ce losange dans le cas où $p = 2$.

# IV. Amérique du Sud, série S

Ex. 2088. ——— *4 points.* *./1995/ameriqueduss/exo-1/texte.tex*

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
Á tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, on associe le point $M'$ d'affixe $'z$ telle que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

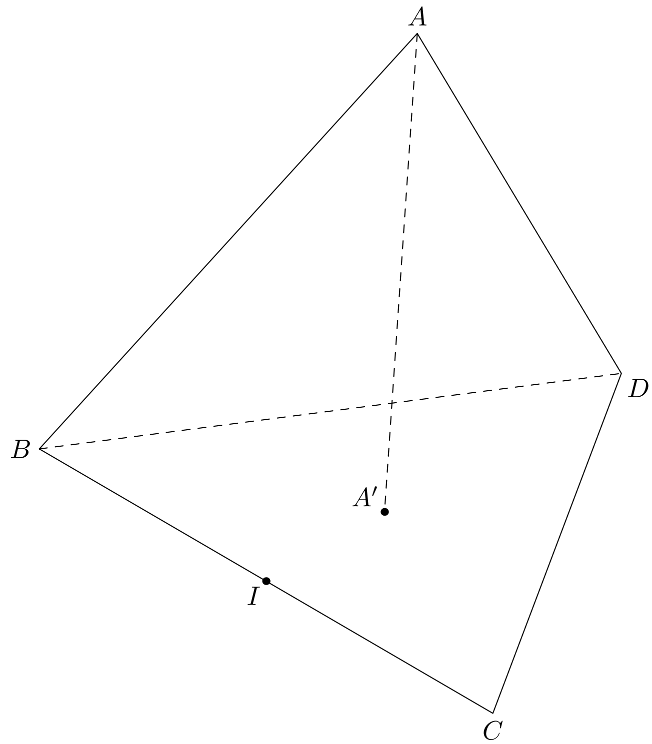
1. a) Déterminer une relation entre les arguments de $z$ et de $z'$.
   b) En déduire que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés.
2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.
   On nomme $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 1 et -1.
   On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A$ contenant le point $O$ et par $\mathscr{C}^\star$ le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $O$.
3. On suppose dans cette question que le point $M$ appartient à $\mathscr{C}^\star$.
   a) Justifier l'égalité : $|z-1| = 1$.
   Démontrer l'égalité $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   b) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point $M'$ à partir du point $M$.
4. Le point $M$ étant un point du plan, d'affixe $z$ non réelle, on nomme $M_1$ son symétrique par rapport à l'axe des réels.
   a) Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\overline{z}$.
   Exprimer alors l'argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \ \overrightarrow{M_1B})$.
   b) Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \ \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \ \overrightarrow{MB})$.
   c) Démontrer que $M'$ appartient au cercle circonscrit au triangle $AMB$.



Retour page 1

Ex. 2089. *Obligatoire. 4 points* ./1995/ameriqueduss/exo-2/texte.tex

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un tétraèdre régulier : $AB = AC = AD = BC = CD = DB = d$, où $d$ est un réel strictement positif.
On nomme $I$ le milieu de $[BC]$ et $A'$ le centre de centre de gravité du triangle $BCD$.
La droite $(AA')$ est alors orthogonale au plan $(BCD)$ (propriété admise).
On désire tracer l'image du cercle circonscrit au triangle $ABC$ par la projection orthogonale sur le plan $(BCD)$.




1. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$.
   a) En se plaçant dans le plan $(ABC)$, représenter en vraie grandeur le triangle $ABC$ (figure 1 ; on prendra pour cette figure : $d$ = 8 cm). On nomme $\Omega$ le centre du cercle $\mathscr{C}$.
   b) Exprimer le rayon $R$ de $\mathscr{C}$ en fonction de la distance $d$.
   c) On nomme $E$ le point défini par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AI}$.
   Démontrer que $[AE]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.
2. On désigne par $p$ la projection orthogonale sur le plan $(BCD)$.
   On nomme $\Omega'$ et $E'$ sont les images respectives de $\Omega$ et $E$ par $p$.
   a) En se plaçant dans le plan $(BCD)$, représenter en vraie grandeur le triangle $BCD$ (figure 2 ; $d$= 8 cm).
   Préciser les images par $p$ des points $A$, $B$, $C$ et $I$.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{I\Omega'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA'}$ et que $\Omega'$ est le milieu du segment $[E'A']$.
   c) On nomme $F$ et $G$ les extrémités du diamètre $[E'A']$ de $\mathscr{C}$ parallèle à $(BC)$.
   On désigne respectivement par $F'$ et $G'$ leurs images respectives par $p$.
   Montrer que $(F'G')$ est parallèle à $(BC)$ et que $F'G' = FG$.
3. L'image du cercle $\mathscr{C}$ par la projection $p$ est une courbe $\Gamma$ contenant les points $A'$, $E'$, $F'$ et $G'$.
   a) Quelle est la nature de la courbe $\Gamma$ ?
   b) Tracer $\Gamma$ sur la figure 2 (on précisera les tangentes à $\Gamma$ aux points $A'$,È$'$, $F'$ et $G'$).



Retour page 1

# V. Antilles Guyane, série S

**Ex. 2090.** ——— *4 points.* *./1995/antillesguyaneS/exo-1/texte.tex*

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3.
Deux concurrents $A$ et $B$ sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants?

Pour le concurrent $A$, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre : $\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}$.
Pour le concurrent $B$, les éventualités sont équiprobables.
ℹ : *les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

**1.** Le concurrent lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne chaque fois la case 3?

b) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans cet ordre?

c) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3?

**2.** On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir $A$ est égale à deux fois la probabilité de choisir $B$.

a) Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte?

b) Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit le concurrent $A$ qui ait lancé la fléchette?

**Ex. 2091.** ——— *Obligatoire. 5 points* *./1995/antillesguyaneS/exo-2/texte.tex*

On se propose de déterminer, quels sont les nombres complexes solutions de l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0 \qquad ()$$

et de placer, par construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

**1.** a) Résoudre l'équation (). On note $u$ et $\overline{u}$ ses solutions, $u$ étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Calculer le module et un argument de $u$. En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.

**2.** a) On considère le nombre complexe : $u-4$. Écrire ce nombre sous forme algébrique (cartésienne), puis sous sa forme trigonométrique.

b) Calculer le module et un argument du nombre : $\frac{u}{u-4}$. En déduire le module et un argument de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

**Ex. 2092.** ——— *Spécialité. 5 points.* *./1995/antillesguyaneS/exo-3/texte.tex*

$ABC$ est un triangle rectangle en $A$ tel que $AB = a$ et $AC = 2a$. $I$ désigne le milieu de $[AC]$ et $G$ est la barycentre du système $\{(A,\ 3),\ (B,\ -2),\ (C,\ 1)\}$.

**1.** Construire le point $G$ et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$. Exprimer en fonction de $a$ les distances $GA$, $GB$ et $GC$.

**2.** Á tout point $M$ du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $MG$ et de $a$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels que : $f(M) = 2a^2/$

**3.** Á tout point $M$ du plan, on associe le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que :

$$h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{U} - 2a^2.$$

b) On désigne par $(\Delta)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$h(M) = -2a^2.$$

Vérifier que les points $I$ et $B$ appartiennent à $(\Delta)$, préciser la nature de cet ensemble. Construire $(\Delta)$.

**4.** $(\Delta)$ et $(\Gamma)$ sont sécants en deux points $E$ et $F$. Montrer que les triangles $GEC$ et $GFC$ sont équilatéraux.

Retour page 1

## PROBLÈME 789 *11 points.* *./1995/antillesguyaneS/pb/texte*

I- On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique 1 cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. a) Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et établir la tableau de variations de $f$.
4. a) Montrer que la droite D d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

   b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
5. Déterminer une équation de la tangente D' à $\mathscr{C}$ au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.
6. Construire $\mathscr{C}$ et D.
7. Calculer en cm$^2$ l'aire du domaine limité par D, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

II- Pour tout entier $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, on désigne par $E_n$ le domaine limitée par la droite D, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation : $x = -n - 1$ et $x = -n$.

1. Calculer en cm$^2$ l'aire $\mathscr{A}_n$ du domaine $E_n$.
   Montrer que la suite des réels $\mathscr{A}_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $\mathscr{A}_0$ et la raison.
2. Calculer $S_n = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \cdots + \mathscr{A}_n$.
   En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

III- 1. Montrer qu'en tout point $M$ d'abscisse $a$ de la courbe $\mathscr{C}$ il existe une tangente à $\mathscr{C}$ dont on établira une équation en fonction de $a$.

2. Cette tangente rencontre l'asymptote D en un point $N$. On désigne par $M'$ et $N'$ les projections orthogonales de $M$ et $N$ sur l'axe des abscisses.

   a) Montrer que $M'N'$ est un nombre constant.

   b) En déduire une construction simple de la tangente en $M$.

   c) Construire la tangente D' définie au I5.

# VI. Centres étrangers, série S

**Ex. 2093.** *4 points.* *./1995/centresetrangerss/exo-1/texte.tex*

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments $E_1$ et $E_2$.
La défectuosité d'un seul des deux éléments $E_1$ et $E_2$ suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne.
Soient $A_1$ et $A_2$ les deux évènements :
$A_1$ : « l'élément $E_1$ tombe en panne » ;
$A_2$ : « l'élément $E_2$ tombe en panne ».
On suppose que $A_1$ et $A_2$ sont deux évènements indépendants de probabilités respectives :

$$p_1 = p(A_1) = 0{,}08 \qquad \text{et} \qquad p_2 = p(A_2) = 0\ {,}05.$$

**1.** Calculer la probabilité $s$ pour que les deux éléments soient simultanément hors service.

**2.** Calculer la probabilité $p$ pour que la machine M soit en panne.

**3.** On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) Vérifier que l'espérance mathématique de $X$ est égale à $0{,}13$.



Retour page 1

**Ex. 2094.** *Obligatoire. 5 points* ./1995/centresetrangerss/exo-2/texte.tex

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; unité graphique : 2 cm.
Soit $A_0$ le point d'affixe 2, $A'_0$ le point d'affixe $2\mathrm{i}$ et $A_1$ le milieu du segment $[A_0A'_0]$.
Plus généralement, si $A_n$ est le point d'affixe $z_n$, on désigne par $A'_n$ le point d'affixe $\mathrm{i}z_n$ et par $A_{n+1}$ le milieu du segment $[A_nA'_n]$.
On note $\rho_n$ et $\theta_n$ le module et l'argument de $z_n$.

1. a) Déterminer les affixes des points $A_0$, $A'_0$, $A_1$, $A'_1$, $A_2$, $A'_2$,Å$_3$. Placer ces point sur une figure.

   b) Calculer $\rho_0$, $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ ainsi que $\theta_0$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$.

2. a) Pour tout entier $n$, exprimer $z_{n+1}$ en fonction de $z_n$. En déduire $z_n$ en fonction de $n$.

   b) Établir les expressions de $\rho_n$ et $\theta_n$ en fonction de $n$.

   c) Déterminer la limite de $\rho_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

   d) Comparer les modules et arguments de $z_n$ et $z_{n+8}$.

3. Établir que $A_nA_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$.

   Après avoir exprimé $A_nA_{n+1}$ en fonction de $n$, déterminer en fonction de $n$, la longueur $\ell_n$ de la ligne brisée $a_0A_1A_2\dots A_n$.

   Déterminer la limite de $\ell_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 2095.** *Spécialité. 5 points.* ./1995/centresetrangerss/exo-3/texte.tex

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; unité graphique : 5cm.
$A$, $B$,$\mathscr{C}$ désigne les points d'affixes respectives $a$, i et $-1$. On note $g$ l'application qui à tout point $M$ du plan, d'affixe $z$, associe le point $g(M)$ d'affixe :

$$z' = \frac{a + z + \mathrm{i}z}{3}.$$

1. a) Á tout point $M$ d'affixe $z$, on fait correspondre le point $M_1$ d'affixe $\mathrm{i}z$. On note $M'$ le barycentre des points $A$, $M$ et $M_1$. Exprimer en fonction de $z$ l'affixe $M'$.

   b) Montrer que $g(O) = B$ si et seulement si $a = 1 - \mathrm{i}$ et que, dans ces conditions $O$, $A$, $I$ sont alignés, $I$ désignant le milieu de $[BC]$.
   Placer les points $O$, $A$, $B$, $C$, $I$ sur une figure.
   Dans la suite de l'exercice, on prend $a = 1 - \mathrm{i}$.

2. a) Prouver que $g$ est une similitude directe dont on déterminera le centre $\Omega$, le rapport et l'angle.

   b) Prouver que les points $A$, $B$ et $\Omega$ sont alignés.

3. a) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$. Montrer que l'image de la droite $(OB)$ par $g$ est la droite $(OI)$.

   b) Soit $O'$ l'image de $O$ par $g$. Montrer que la droite $(OO')$ est l'image par $g$ de la droite $(BO)$.

   c) En déduire que les points $I$, $0$, $O'$ et $A$ sont alignés.

4. Montrer que les points $I$ et $\Omega$ appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$.

## Problème 790 *11 points.* ./1995/centresetrangerss/pb/texte

L'objet de la partie I est d'étudier la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3 + 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

On note $\mathscr{C}$

I-

II-



Retour page 1

# VII. Japon, série S

**Ex. 2096.** *Obligatoire. 4 points* ./1995/japon/exo-2/texte.tex

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives :

$$Z_A = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\ ;\ Z_B = 1 - \mathrm{i}\ \ Z_c = \frac{Z_A}{Z_B}.$$

**1.** Écrire $Z_C$ sous forme algébrique.

Déterminer le module et un argument de $Z_A$ et de $Z_B$.

**b)** Écrire $Z_C$ sous forme trigonométrique ; en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

**2.** Soit $I$ le point d'affixe $z_I = 1$.

a) Quelle est la nature du triangle $OIB$ ?

b) Déterminer les images de $I$ et $B$ dans la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

En déduire la nature du triangle $OAC$.

**Ex. 2097.** *Spécialité. 4 points.* ./1995/japon/exo-3/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et quatre points distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que :

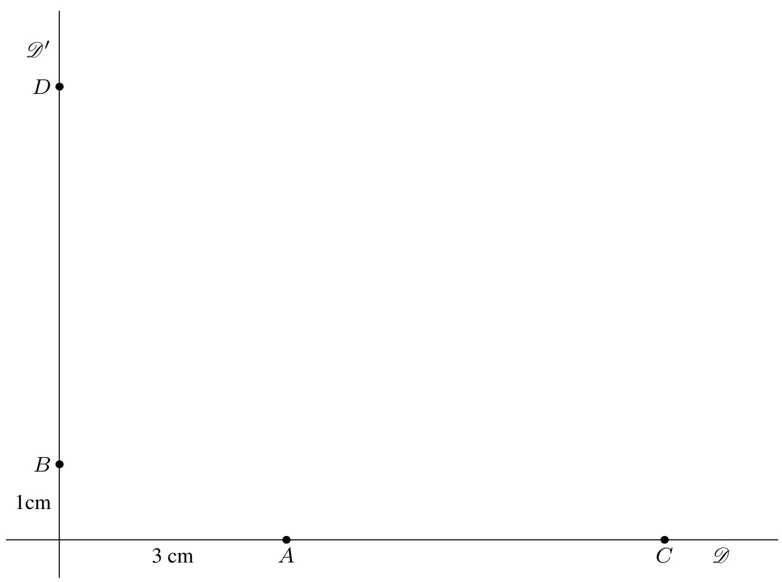
— $A$ et $C$ sont sur $\mathscr{D}$

— $B$ et $D$ sont sur $(\mathscr{D}')$

— $AC = BD$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

— $[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas même milieu.

— Compléter cette configuration au fur et à mesure des questions et la joindre à la copie.




**1.** Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_1$ qui transforme $A$ en $B$ et $C$ en $D$.
Déterminer son angle $\alpha_1$ et construire sur la figure son centre $I$. (On expliquera la construction.)

**2.**

**3.** Justifier qu'il existe une rotation $\mathscr{R}_2$ qui transforme $D$ en $A$ et $B$ en $C$.
Déterminer son angle $\alpha_2$ et construire sur la figure son centre $J$. (On expliquera la construction.)

**4.** On désigne par $M$ le milieu de $[AC]$ et $N$ celui de $[BD]$.
Déterminer la nature du quadrilatère $IMJN$.



Retour page 1

**5.** Soit $P$ le point diamétralement opposé à $I$ sur le cercle de diamètre $[AB]$, et $Q$ le point diamétralement opposé à $I$ sur le cercle de diamètre $[CD]$.

a) Déterminer les angles $(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IP})$, $(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IQ})$ et calculer les rapports $\dfrac{IP}{IA}$ et $\dfrac{IQ}{IC}$.

b) Préciser l'angle et le rapport de la similitude directe de centre $I$ qui transforme $A$ en $P$ et $C$ en $Q$.

c) En déduire que $J$ est le milieu de $[PQ]$.

## Problème 791 *12 points.*

*./1995/japon/pb/texte*

**1.** le but de cette partie est d'étudier la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+2-2\ln x.$$

a) Étudier le sens de variation de $g$ et calculer$g(1)$.

**2.**

# VIII. La réunion, série S

**Ex. 2098.** *4 points.* *./1995/lareunionS/exo-1/texte.tex*

Le code antivol d'un autoradio est un nombre à quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs $0,\ 1,\ \dots,\ 9$.

**1.** a) Quel est le nombre de codes possibles ?

b) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

**2.** Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.

Il sait que les quatre chiffres de son code sont $1,\ 9,\ 9$ et $5$, mais il a oublié l'ordre des chiffres.

a) Combien de codes différents peut-il composer avec ses $4$ chiffres ?

b) Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais successifs).

Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

**Ex. 2099.** *Obligatoire.* *./1995/lareunionS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v}\,)$ ; (unité graphique : 4cm). On appelle $A$ et $B$ les points d'affixes respectives i et $-$i.

Á tout point $M$ du plan d'affixe $z$ différente de $-$i, on associe le point $M'$ dont l'affixe $z'$ est définie par

$$z'=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

**1.** Calculer l'affixe $z'$ du point $M'$ associé au point $M$ d'affixe $z=2+\mathrm{i}$. Préciser le module et un argument de $z'$. Placer les points $M$ et $M'$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**2.** Dans cette question, $M$ est un point quelconque du plan distinct de $B$.

Montrer que $OM'=\dfrac{MA}{MB}$. En déduire que, lorsque $z$ est réel, $M'$ appartient à un cercle que l'on précisera.

**3.** Dans cette question, $M$ est un point quelconque du plan distinct de $B$.

Aux points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ d'affixes respectives $z_1=\overline{z}$, (où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de $z$), $z_2=-z$ et $z_3=\dfrac{1}{z}$, on associe les points $M_1'$, $M_2'$ et $M_3'$ d'affixes $z_1'$, $z_2'$ et $z_3'$.



Retour page 1

a) Montrer les relations $z_1' = \frac{1}{z'}$, $z_2' = \frac{1}{z'}$ et $z_3' = -\frac{1}{z_1'}$.

Exprimer les modules et arguments de $z_1'$, $z_2'$ et $z_3'$ en fonction du module et d'un argument de $z'$.

b) En utilisant ce qui précède, placer les points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_1'$, $M_2'$ et $M_3'$ sur la même figure qu'au 1) dans le cas où $z = 2 + \mathrm{i}$.

**Ex. 2100.** ―――――― *Spécialité.* ./1995/lareunionS/exo-3/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral $ABC$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par :

— $r_A$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

— $r_B$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

— $r_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

et par $D$ et $E$ les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

**1.** Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre $B$. Préciser alors position du point $E$.

**2.** On admet qu'il existe une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme $A$ en $B$.
On note $\mathscr{S}$ cette similitude.
Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire que $\mathscr{S}(E) = D$.

**3.** Soit $\Omega$ le centre de la similitude $\mathscr{S}$.
Montrer que $\Omega$ appartient aux cercles circonscrits aux triangles $ABC$ et $DBE$.

**4.** a) Démontrer que $\mathscr{S}$ transforme la droite $(AC)$ en $(CB)$.

b) Démontrer que l'image par $\mathscr{S}$ du cercle circonscrit au triangle $ACE$ est le cercle de diamètre $[BD]$.
En déduire que l'image de $C$ par la similitude $\mathscr{S}$ est le point $I$, milieu du segment $[DE]$.

## Problème 792 *11 points* ./1995/lareunionS/pb/texte

Dans tout le problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

-A-Étude d'une fonction auxilière. On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x.$$

1° Étudier les variations de $g$. Préciser $g(1)$.

2° En déduire le signe de la fonction $g$ sur chacun des intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

-B- Étude d'une fonction. On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2.$$

**1.** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ (on pourra mettre $x^2$ en facteur dans l'expression $f(x)$).
Déterminer la limite de $f$ en $0$.

**3.** Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f('x) = \frac{1}{2x}g(x)$.
En utilisant la partie -A-, étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**4.** On nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm.
Tracer $\mathscr{C}$.

-C- Résolutions approchées d'équations. **1.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0\,;1]$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction $h$ définie sur $]0\,;1]$ par $h(x) = f(x) - x$).
On nomme $\alpha$ cette solution.

**2.** Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
On nomme $\beta$ cette solution.
Montrer que $\alpha.\beta = 1$.

**3.** Déterminer une encadrement de $\beta$ d'amplitude $10^{-2}$. En déduire un encadrement de $\alpha$.

# IX. Polynésie, série S

**Ex. 2101.** ——— *4 points.* *./1995/polynesieS/exo-1/texte.tex*

$\alpha$ étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$ et $z$ un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1.$$

**1.** a) Calculer $P(1)$.

b) En déduire l'existence de trois nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$P(z) = (z-1)(az^2+bz+c).$$

Déterminer $a,\ b,\ c$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

**2.** On considère trois nombres complexes :

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha \quad ; \quad z_3 = -\sin\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes $z_1,\ z_2$ et $z_3$.

**Ex. 2102.** ——— *Obligatoire.* *./1995/polynesieS/exo-2/texte.tex*

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels :

— dans 5% des cas l'emballage n'est pas intact,

— dans 70% des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée,

— 90% des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

**1.** Un client achète un paquet de ces gaufrettes.
On note $I$ l'événement : « l'emballage est intact » et $C$ l'événement : « au moins une gaufrette est cassée ».

a) Calculer la probabilité de $I$.

b) On considère les deux événements suivants :
$E$ : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
$F$ : « l'emballage est pas et aucune gaufrette n'est cassée ».
Exprimer $E$ et $F$ en fonction de $I$, $\overline{I}$ (événement contraire de $I$) et $\overline{C}$ (événement contraire de $C$).
Calculer alors les probabilités de $E$, et de $F$.
En déduire la probabilité de $\overline{C}$ (événement contraire de $C$) puis celle de $C$.

**2.** Lors d'une ventre promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets.
Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.
Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact ? qu'il y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à $10^{-4}$ près.



Retour page 1

**Ex. 2103.** ———— *Spécialité.* *./1995/polynesieS/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par $M,\ N,\ P$ trois points distincts de ce plan d'affixes respectives $m,\ n,\ p$.

**1.** Démontrer que le triangle $MNP$ est rectangle en $N$, si, et seulement si, le complexe $\mathrm{i}\dfrac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

**2.** Dans cette question, $M,\ N,\ P$ sont d'affixes $z,\ z^2,\ z^4$.

a) Quelles conditions doit vérifier $z$ pour que $M,\ N,\ P$ soient distincts deux à deux?

b) Démontrer que l'ensemble des points $M$ d'affixes $z=x+\mathrm{i}y$ du plan tels que le triangle $MNP$ soit rectangle en $N$ est une conique $\Gamma$ d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2=\dfrac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

**3.** Préciser la nature de $\Gamma$ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).

**4.** Représenter $\Gamma$ et mettre en place sur le figure, les sommets, les foyers, et les asymptotes de $\Gamma$.

## PROBLÈME 793 *11 points* *./1995/polynesieS/pb/texte*

Le but du problème est d'étudier, dans un premier temps (partie 793) , la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\text{ pour }x>0\quad\text{et }f(0)=\frac{1}{2}$$

puis (partie 793) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x)=x$.

### Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique : 2cm. On désigne par C la courbe représentative de $f$ dans ce repère .

I- **Étude d'une fonction auxiliaire.** Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}.$$

1° a) Étudier le sens de variation de $g$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$.

2° Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[2\,;3]$, on a $g(x)<\dfrac{1}{2}$.

II- 1° Déterminer la limite, quand $x$ tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x=\dfrac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en $x=0$.

2° La fonction $f$ est-elle dérivable en $x=0$? Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3° Étudier le sens de variation de $f$ (on vérifiera que $f'(x)=g(x)$).

4° a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$).

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

c) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à $C$ au voisinage de $+\infty$.

5° Tracer dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la droite $\Delta$, la courbe C et la droite d'équation $y=x$.

### Partie B

Dans cette partie, on désigne par $I$ l'intervalle $[2\,;3]$.

I- 1° Soit $h$ la fonction définie sur $I$par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout x de $I$, $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h'(x) = g'(x) - 1$).

2° En déduire le sens de variation de $h$et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $I$ ; on note $\alpha$ cette solution.

II- 1° Montrer que pour tout $x$ de $I$, $0 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$ .

2° En déduire que, pour tout x de $I$, $|f(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

III- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que pour tout $n$ de $IN$, $u_n$ appartient à l'intervalle $I$.

1. Établir les inégalités suivantes :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \tag{1}$$

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{2}$$

2. En déduire que la suite $(u_n)$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Déterminer $n_0$ entier naturel tel que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près. En déduire alors une approximation de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

## X. Pondichéry, série S

**Ex. 2104.** ——— *4 points.* *./1995/pondicheryS/exo-1/texte.tex*

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
On note $f$ l'application du plan P privé du point $O$ dans P, qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.
On a donc aussi $z' = \dfrac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de $z$.

**1.** Montrer que les points $O$, $M$ et $M'$ sont alignés.

**2.** Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points invariants par $f$.
Vérifier que cet ensemble $\Gamma$ contient les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $-1$ et i.

**3.** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, $E$ le milieu de $[AB]$ et $E' = f(E)$.
Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
Montrer que $E'$ appartient à $\mathscr{C}$.

**4.** Le point $M$ d'affixe $z$ étant un point quelconque de la droite $(AB)$, on se propose de construire son image $M'$ d'affixe $z'$ par l'application $f$.

a) Déterminer une équation de la droite $(AB)$.
On pose $k = OM^2$, $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.
Exprimer $k$ en fonction de $x$.
Montrer que $M'$ appartient à $\mathscr{C}$ (on pourra exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $k$).

b) Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point $M'$ connaissant le point $M$.

**Ex. 2105.** ——— *Obligatoire.* *./1995/pondicheryS/exo-2/texte.tex*

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen. L'examinateur décide d'établir au hasard une liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

**1.** Dans cette question, on suppose que l'examinateur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.
On désigne par $F_1$ l'événement : « le premier candidat interrogé est une fille », et par $F_2$ l'événement : « le deuxièle candidat interrogé est une fille ».

a) Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles ?

b) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?

c) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?

**2.** On suppose maintenant que l'examinateur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané des quatre noms.

On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a) Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

b) Calculer l'espérance de $X$.

**3.**

Ex. 2106. *Spécialité.* *./1995/pondicheryS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère le triangle $ABC$ rectangle en $B$, tel que :

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi.$$

On prendra $AB = 5$ cm pour la figure.
Soient $I$ le milieu de $[AB]$, $E$ le milieu de $[AC]$ et $J$ le milieu de $[EC]$.

**1.** Montrer qu'il existe une rotation $r$ transformant $A$ en $E$ et $B$ en $C$.

Quel est son angle ?

Construire son centre $O$ en justifiant la construction.

Dans la suite de l'exercice, $k$ désigne un nombre réel, $M$ et $M'$ sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}.$$

**2.** a) Préciser la position de $M$ et de $M'$ pour $k = 0$, $k = \dfrac{1}{2}$ et $k = 2$.

Le réel $k$ est désormais quelconque.

b) Montrer que $M' = r(M)$.

En déduire la nature du triangle $OMM'$.

c) Montrer que les points $O,\ A,\ M$ et $M'$ sont cocycliques.

**3.** Soit $N$ le centre du cercle circonscrit au triangle $OMM'$.

a) Montrer que $N$ est l'image de $M$ par une similitude directe de centre $O$ dont on précisera l'angle et le rapport.

b) Quel est l'ensemble des points $N$ lorsque $M$ décrit la droite $(AB)$ ?

Construire cet ensemble.

c)

## Problème 794 *11 points* *./1995/pondicheryS/pb/texte*

La partie A. du problème a pour objet la résolution d'une équation différentielle du second ordre. Les parties B. et C. sont consacrées à l'étude des fonctions.
*Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendantes.*

**Partie A.**

**1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0 \tag{1}$$

où $y$ est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

**2.** Déterminer la solution de l'équation (1) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

**Partie B.**

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

**1.** a) Étudier le sens de variation de $f$.

b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ admet deux solutions réelles.
On notera $\alpha$ et $\beta$ ces solutions $(\alpha < \beta)$.
Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right[$.
Donner une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-2}$ près par défaut en justifiant la méthode employée.

**2.** a) Tracer $\mathscr{C}$ en faisant apparaître graphiquement tous les résultats obtenus dans la question B. 1.

b) Soit $\lambda$ un réel positif. Á l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

**Partie C.**
Pour tout entier relatif $k$, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-kx}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de $f_k$ dans le repère orthonormé orthonormal ci-joint.
Lorsque $k = 1$, on retrouve la fonction $f$ étudiée dans la partie B., c'est à dire dans ce cas $f_1 = f$ et $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}$.

**1.** Quelle est la nature de la fonction $f_0$ ?
Déterminer par le calcul les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
Vérifier que, pour tout entier relatif $k$, la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par ces points.

**2.** Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $(x+1)(\mathrm{e}^{-x} - 1)$.
En déduire la position relative de $\mathscr{C}_k$ et de $\mathscr{C}_{k+1}$.

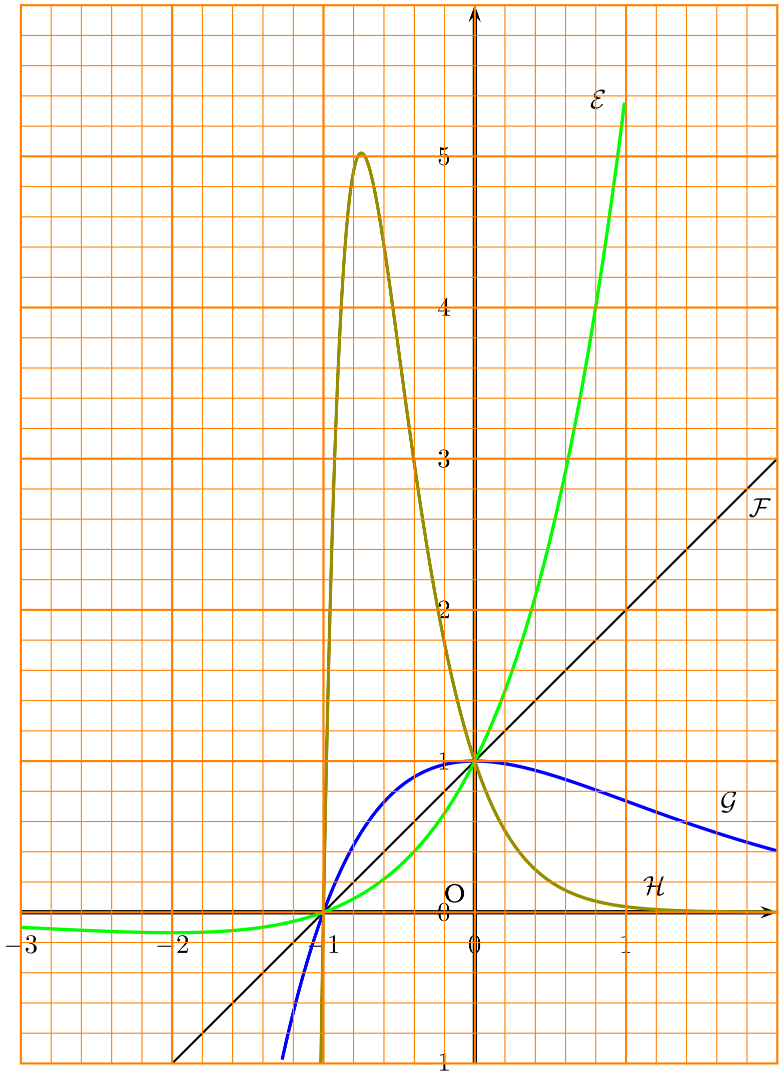
**3.** On suppose que $k$ est non nul.

a) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel $x$.

b) En déduire la sens de variation de la fonction $f_k$ (distinguer les cas : $k > 0$ et $k < 0$).

c) On a représenté sur le graphique ci-joint quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ correspondant à quatre valeurs différentes de $f$. Identifier ces valeurs, en justifiant la réponse.

Retour page 1






Retour page 1

# Chapitre XXXVIII

# 1996.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice & Toulouse ;

— groupe II : Amiens, Lille, Paris, Rouen ;

— groupe III : Besançon, Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Lyon, Reims & Strasbourg ;

— groupe IV : Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Poitiers, Orléans-Tours.

De plus le groupe I bis correspond aux groupes I & IV, et le groupe II bis aux groupes II & III.

## I. Antilles, série S

**Ex. 2107.** *4 points.* *./1996/AntillesS/exo-1/texte.tex*

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

**1.** On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Soit $X$ la variable aléatoire « Nombre de boules blanches tirées parmi les trois boules extraites ».

Déterminer la loi de probabilité de $X$, son espérance mathématique et son écart type.

**2.** On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite de l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables.

Soit $Y$ la variable aléatoire « Nombre de tirages où apparaît une boule blanche ».

Déterminer la loi de probabilité de $Y$ et son espérance mathématique.

**Ex. 2108.** *6 points Enseignement obligatoire.* *./1996/AntillesS/exo-2/texte.tex*

**1.** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z$ :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0. \qquad \text{(E)}$$

a) Vérifier que $8$ est solution de cette équation.

Déterminer les nombres réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que, pour tout nombre complexe $Z$ :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma).$$

b) Résoudre alors l'équation (E)

**2.** $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal du plan orienté (unité : 1 cm).
On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2i\sqrt{3},\ b = 2 + 2i\sqrt{3},\ \text{et } c = 8.$$

a) Calculer le module de $a$, $|a|$ et donner un argument de $a$.

b) Calculer le nombre complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument $\varphi$. En déduire, la nature du triangle $ABC$.

c) Déterminer le barycentre $D$ des points pondérés $(A,\ |a|)$, $(B,\ |b|)$, $(C,\ |c|)$.
Placer $D$.

d) Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Tracer $\Gamma$.

**Ex. 2109.** *6 points Enseignement de spécialité.* *./1996/AntillesS/exo-3/texte.tex*

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan orienté, l'unité graphique est 2 cm.
On considère l'application $f$ de ce plan privé de $O$ dans lui-même, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle associe le point $M'$ d'affixe :

$$z' = z + \frac{1}{z}.$$

1. a) On considère les points $P$, $Q$, $R$, $U$ d'affixes respectives $2$, $-2$, i, $-2$i. Calculer les affixes de leurs images par $f$ notées $P'$, $Q'$, $R'$, $U'$. Placer ses points.

   b) Soit $E'$ le point d'affixe $-1$. Montrer que $E'$ est l'image par $f$ de deux points $E_1$ et $E_2$ dont on calculera les affixes $z_1$ et $z_2$. Calculer $|z_1|$ (ou bien $|z_2|$ ) et utiliser ce résultat pour placer $E_1$ et $E_2$. Placer $E'$.

2. On se propose de déterminer l'emsemble $(\Gamma')$ des points $M'$ lorsque $M$ décrit une courbe une courbe $(\Gamma)$ donnée.

   a) *Préliminaires :* on note $r$ le module de $z$ et $\theta$ son argument ; on désigne par $x'$ et $y'$ les coordonnées de $M'$.
   Donner l'écriture algébrique de $z'$ en fonction de $r$ et $\theta$ et montrer que l'on a

   $$x' = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$$
   $$y' = \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

   b) On suppose que $M$ décrit le cercle $(\Gamma_1)$ de centre $O$ et de rayon 1.
   - Justifier que les points $R'$ et $E'$ appartiennent à $(\Gamma_1')$.
   - Déduire du 2a une représentation paramétrique de $(\Gamma_1')$ et préciser la nature de $(\Gamma_1')$.

   c) On suppose que $M$ décrit le cercle $(\Gamma_2)$ de centre $O$ et de rayon 2.
   - Justifier que les points $P'$, $Q'$ et $U'$ appartiennent à $(\Gamma_2')$.
   - Donner une représentation paramétrique de $(\Gamma_2')$. En déduire que $(\Gamma_2')$ est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. Préciser les éléments géométriques (sommets, foyers, directrices, excentricité) de $(\Gamma_2')$ et tracer $(\Gamma_2')$.

**Problème 795** *10 points.* *./1996/AntillesS/pb/texte*

A- **Étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=5\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan, l'unité graphique est 1cm.

1. Étudier les limites de $f$ respectivement en $0$ et $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?
2. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ et donner le tableau de ses variations.
3. Donner une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathscr{C})$ en son point $A$ d'abscisse 1. Tracer $(T)$ et $(\mathscr{C})$.
4. Soit le domaine plan

$$(\mathscr{D})=\{M(x\ ;\ y)/1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\qquad \text{et}\qquad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

Calculer l'aire en cm$^2$ de $(\mathscr{D})$ à l'aide d'une intégration par parties.

B- **Étude de l'équation** $f(x)=-5$

1. Justifier l'affirmation : « l'équation $f(x)=-5$ admet sur $]0\,;+\infty[$ une solution unique $\alpha$, et $0{,}4<\alpha<0{,}6$ ».
2. a) On pose pour $x$ strictement positif $h(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. Vérifier que $\alpha$ est solution de l'équation

$$h(x)=x.$$

b) Calculer $h'(x)$, puis montrer que pour tout réel $x$ de $[0{,}4\,;0{,}6]$ on a :

$$h(x)\in[0{,}4\,;0{,}6]\qquad \text{et}\qquad \left|h'(x)\right|\leqslant 0{,}43.$$

3. On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0=0{,}4\qquad \text{et}\qquad u_{n+1}=h(u_n).$$

a) Justifier successivement le affirmations :

- $(u_n)$ est une suite d'éléments de $[0{,}4\,;0{,}6]$.
- Pour tout entier naturel $n$, $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant 0{,}43\,|u_n-\alpha|$.
- Pour tout entier naturel $n$, $|u_n-\alpha|\,0{,}2\leqslant 0{,}43^n$.
- La suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

b) Déterminer le plus petit entier $n_0$ solution de l'inéquation :

$$0{,}2(0{,}43)^n\leqslant 10^{-4}.$$

Que représente $u_{n_0}$ pour $\alpha$ ? Á l'aide de votre calcultrice, calculer $u_{n_0}$ et donner une approximation décimale à $10^{-5}$ du résultat affiché.

## II. Groupe I bis, série S

**Ex. 2110.** *4 points.* *./1996/groupeIbis/exo-1/texte.tex*

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.
N.B- Si E est un événement, on notera $P(\mathrm{E})$ sa probabilité et $\overline{\mathrm{E}}$ l'événement contraire.
Si E et F sont deux événements, $P(\mathrm{E}_{|\mathrm{F}})$ est la probabilité de « E sachant que F est réalisé ».

**1.** On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire.
Calculer les probabilités des événements suivants :

a) A : « les sportifs choisis pratiquent tous l'athlétisme » ;

b) B : « les sportifs choisis pratiquent tous le même sport ».



Retour page 1

**2.** Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 68% des inscrits en gymnastique sont des filles.

a) On choisit un inscrit au hasard.
Quelle est la probabilité $p_1$ que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
Quelle est la probabilité $p_2$ que ce soit une fille ?

b) Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité $p_3$ qu'elle pratique l'athlétisme ?

**Ex. 2111.** ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1996/groupeIbis/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 4 cm, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$ telles que :

$$a=1-\mathrm{i},\qquad b=1+\mathrm{i},\qquad c=-1+\mathrm{i}=-a.$$

On note $\Gamma$ le cercle de diamètre $[AB]$.

**1.** a) Placer sur une figure les points $A$, $B$, $C$ et $\Gamma$.

b) Mettre les nombres complexes $a$, $b$ et $c$ sous forme trigonométrique.

c) Soit $r$ la rotation de centre $O$ telle que $r(A)=B$. Déterminer l'angle de $r$ et le point $r(B)$, image de $B$ par $r$.

d) Déterminer l'image $\Gamma'$ du cercle $\Gamma$ par $r$ ; placer $\Gamma'$ sur la figure.

**2.** On considère $\theta\in\,]0\,;2\pi[$ distinct de $\pi$ ; on note $M$ la point d'affixe $z=1+\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}$.
On désigne par $M'$ l'image de $M$ par $r$, et on appelle $z'$ l'affixe de $M'$.

a) Montrer que $M$ est un point de $\Gamma$ distinct de $A$ et de $B$.

b) Exprimer $z'$ en fonction de $z$.
Calculer en fonction de $\theta$ les affixes $u$ et $u'$ des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

c) Établir la relation $u=u'\tan\dfrac{\theta}{2}$.

d) Prouver que les points $B$, $M$ et $M'$ sont alignés. Placer sur la même figure un point $M$ et son transformé $M'$.

**Ex. 2112.** ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1996/groupeIbis/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle $ABC$ tel que $AB=AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Soit $I$ le point tel que le triangle $CAI$ soit isocèle te rectangle avec $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.
Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra $AB=5$ cm.

**1.** On appelle $r_A$ la rotation de centre $A$ qui transforme $B$ en $C$ et $r_C$ la rotation de centre $C$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On pose $f=r_C\circ r_A$.

a) Déterminer les images par $f$ de $A$ et de $B$.

b) Démontrer que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre $O$. Placer $O$ sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$ ?

**2.** Soit $s$ la similitude directe de centre $O$ qui transforme $A$ en $B$.
On appelle $C'$ l'image de $C$ par $s$, $H$ le milieu du segment $[BC]$ et $H'$ son image par $s$.

a) Déterminer une mesure de l'angle de $s$.
Montrer que $C'$ appartient à la droite $(OA)$.

b) Donner l'image par $s$ du segment $[OA]$ et montrer que $H'$ est le milieu de $[OB]$.

c) Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à $(OB)$.
En déduire que $C'$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $OBC$.

## PROBLÈME 796 *11 points.*

*./1996/groupeIbis/pb/texte*

L'objet de ce problème est :

— d'étudier la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}\ ;$$

— de justifier *rigoureusement* le tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique 5 cm.

— de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de $f$.

**Partie A - Questions préliminaires**

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de $g$ sur $[0\,;+\infty[$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.

**2.** Soit $h$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (2-x)e^x - 1$

a) Étudier la fonction $h$ et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, $\alpha$, et que $\alpha > 1$.

c) Vérifier la double inégalité $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, le signe de $h(x)$.

**Partie B - Étude de la fonction $f$ et tracé de la courbe $\mathscr{C}$**

**1.** a) Justifier que $f$ est bien définie en tout point de $x \in [0\,;+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}.$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ; interpréter géométriquement, relativement à $\mathscr{C}$, le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

d) Étudier la fonction $f$ et dresser son tableau de variation.

**2.** a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $D$ d'équation $y = x$.

**3.** a) Préciser la tangente au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

b) Tracer $\mathscr{C}$, en faisant figurer sur le dessin la droite $\Delta$ d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

**Partie C - Étude de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^n [f(x) - 1]\,dx$**

**1.** Déterminer une primitive de la fonction $f$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**2.** Interpréter géométriquement le nombre réel $-u_1$.

**3.** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (on pourra utiliser l'égalité $n = \ln(e^n)$).

**4.** Interpréter géométriquement le nombre réel $u_n - u_1$ puis le résultat obtenu dans la question précédente.



Retour page 1

# III. Groupe II bis, série S

Ex. 2113. 4 points. ./1996/groupeIIbis/exo-1/texte.tex

On dispose de deux urnes :

— une urne $U_1$ dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;

— une urne $U_2$ dans laquelle il y a deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

**1.** Montrer que la probabilité de l'événement E : « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

**2.** On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer le loi de probabilité de $X$.

b) Le joueur doit verser 2,50 F avant d'effectuer le tirage : il reçoit à l'issue du tirage, 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

**3.** Calculer la probabilité de tirer une et une seule boule blanche de l'urne $U_1$ sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

**4.** On ne considère que l'urne $U_1$, dans laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches.

On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne).

Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

Ex. 2114. *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1996/groupeIIbis/exo-2/texte.tex

Dans le plan complexe $P$, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives

$$z_A = -2\text{i}, \qquad z_B = 4-2\text{i}, \qquad z_C = 4+2\text{i}, \qquad z_D = 1.$$

**1.** a) Placer les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sur une figure, qui sera peu à peu complétée. On prendra pour unité graphique 2 cm.

b) Préciser la nature du triangle $ABC$.

**2.** On désigne par $F$ l'application qui, à tout point $M$ de $P$ d'affixe $z$ et distinct de $A$, associe le point $M'$ d'affixe :

$$z' = \frac{z-(4+2\text{i})}{z+2\text{i}}.$$

a) Déterminer les images de $B$ et $C$ par $F$.

b) Déterminer l'ensemble E des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z'| = 1$. Construire $E$.

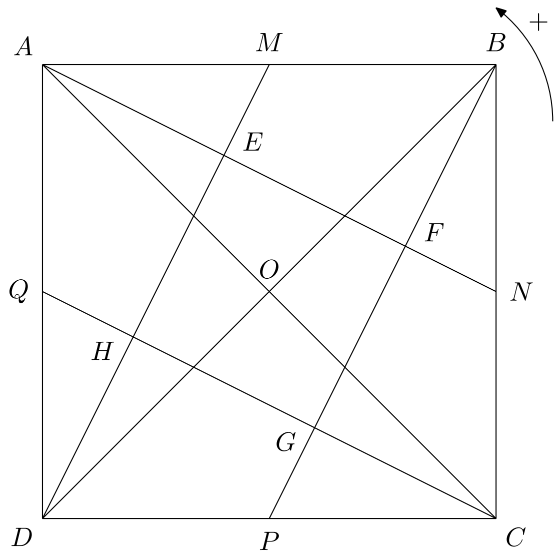
**3.** a) Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ distinct de $-2$i, on a :

$$(z'-1)(z+2\text{i}) = -4-4\text{i}.$$

b) Montrer que, pour tout point $M$ distinct de $A$, et dont l'image par $F$ est notée $M'$, on a :

$$\begin{cases} M' \neq D \\ DM'.AM = 4\sqrt{2} \\ \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{DM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM}}\right) = \dfrac{5\pi}{4} \quad (mod\ 2\pi). \end{cases}$$

**Ex. 2115.** ———— *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1996/groupeIIbis/exo-3/texte.tex




Dans le plan orienté on considère la figure ci-dessus.
$ABCD$ est un carré de centre 0 et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.
Les points $M$, $N$, $P$ et $Q$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère $EFGH$ est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré $ABCD$.
*Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.*

**1.** On se propose de *démontrer* que $EFG$ est un carré.
Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image par $r$ du point $N$, puis celle du segment $[AN]$.
Déterminer l'image par $r$ du point $P$, puis celle du segment $[BP]$. En déduire $r(F)$ et la nature du triangle $FOG$.

b) Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

**2.** Comparaison des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

a) Justifier les égalités $AE = EH = DH$ et $AE = 2QH$.

b) Soit $K$ l'image de $H$ par la symétrie $s$ de centre $Q$.
Démontrer que $AEHK$ est un carré et comparer son aire à celle du triangle $AED$.

c) En déduire le rapport des aires des carrés $ABCD$ et $EFGH$.

**3.** Généralisation de la question 1.
On suppose maintenant que les points $M'$, $N'$, $P'$ et $Q'$ vérifient respectivement les égalités :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

On construit le quadrilatère $E'F'G'H'$ en traçant les droites $(AN')$, $(BP')$, $(CQ')$ et $(DM')$.
Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. pour démontrer que $E'F'G'H'$ est un carré ?

## PROBLÈME 797 *11 points.* ./1996/groupeIIbis/pb/texte

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \qquad g(x) = f(x) + [f(x)]^2, \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Partie A-** *Étude de la fonction $f$*



Retour page 1

**1.** a) Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Partie B-** *Étude de la fonction $g$*

**1.** Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$g'(x) = f'(x)\left[1+2f(x)\right].$$

Étudier le sens de variation de $g$.

**2.** Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**3.** Donner le tableau de variation de $g$. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.

**4.** a) Établir que, pour tout réel $x$, on a :

$$g(x) - x = x\mathrm{e}^{-x}\left[1 + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\right].$$

b) Montrer que, pour tout $x$ réel, on a :

$$1 + x\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x}.$$

c) Préciser la position de la courbe représentative $\Gamma$ de la fonction $g$ par rapport à sa tangente $T$ en $O$.

**5.** Tracer $\Gamma$ (on prendra pour unité 4 cm). Préciser las abscisses des points d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente $T$.

**Partie C-** *Étude de la fonction $h$*

**1.** Quelle est la dérivée de $h$ ? Étudier le sens de variation de $h$.

**2.** Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
Déterminer la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

b) Á l'aide de deux intégrations par parties, calculer $J(x)$. Déterminer la limite de $J(x)$ en $+\infty$.

c) Expliciter $h(x)$ et déterminer la limite de $h(x)$ en $+\infty$.

## IV. National S remplacement, Septembre 1996

**Ex. 2116.** *4 points* *./1996/nationalSrem/exo-1/texte.tex*

Tous les résultats demandés dans l'exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient cinq boules : deux blanches, trois noires, indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de tirer :
      (i) deux boules blanches ;
      (ii) deux boules de la même couleur.
   b) Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage. Donner la loi de probabilité de $X$ ; calculer l'espérance de la variable $X$.
2. On effectue un tirage de deux boules de l'urne de la manière suivante : on tire une première boule de l'urne et on note sa couleur ; on la remet ensuite dans l'urne en ajoutant en plus dans l'urne une boule de la même cou- leur que la boule tirée (il y a donc dans l'urne six boules avant le second tirage) ; on tire ensuite une seconde boule. On considère les événements suivants :
   - $B_1$ : « on obtient une boule blanche au premier tirage » ;
   - $N_1$ : « on obtient une boule noire au premier tirage » ;
   - $B_2$ : « on obtient une boule blanche au second tirage ».

   a) Calculer :
      - $p(B_2/B_1)$ (probabilité conditionnelle de $B_2$ sachant que $B_1$ est réalisé) ;
      - $p(B_2/N_1)$ (probabilité conditionnelle de $B_2$ sachant que $N_1$ est réalisé) ;

   b) Calculer la probabilité de l'événement $B_2$.

**Ex. 2117.** ——— *5 points, Obligatoire.* *./1996/nationalSrem/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note $A$ le point d'affixe i. Á tout point $M$ du plan, distinct de $A$, d'affixe $z$, on associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{\mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}}.$$

1. a) Déterminer les points $M$ tels que l'on ait $M = M'$.

   b) Déterminer le point $B'$ associé au point $B$ d'affixe 1 ; déterminer le point $C$ tel que le point associé $C'$ ait pour affixe 2.

2. Étant donné un nombre complexe $z$, distinct de i, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.

   a) Déterminer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

   b) Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$, distincts de $A$, pour lesquels $z'$ est réel.

   c) Placer $A$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ et $\Gamma$ sur une figure (unité graphique : 4 cm).

3. Soit $z$ un nombre complexe différent de i.

   a) Montrer que l'on a $z' - \mathrm{i} = \dfrac{-1}{z - \mathrm{i}}$.

   b) On suppose que $M$, d'affixe $z$, appartient au cercle $\gamma$ de centre $A$ et de rayon 1. Montrer que $M'$ appartient à $\gamma$.

**Ex. 2118.** ——— *5 points, Spécialité.* *./1996/nationalSrem/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre $I$, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Étant donné un point $M$ du segment $[BD]$, distinct de $B$ et distinct de $D$, on appelle $N$, $P$ et $Q$ les projetés orthogonaux de $M$ respectivement sur les droites $(AB)$, $(AD)$ et $(DC)$.

1. On considère les isométries suivantes : $r$ est la rotation de centre $I$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, $r'$ la rotation de centre $D$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

   a) Déterminer les points $(r' \circ t)(A)$ et $(r' \circ t)(B)$. Préciser la nature de l'application $r' \circ t$. En déduire que $r' \circ t = r$.

   b) Déterminer $t(N$. Démontrer que $r(N) = P$. En déduire que :
   $$\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PD}.$$

   c) Démontrer les égalités :
   $$\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}.$$
   En déduire que les droites $(MC)$ et $(NP)$ sont orthogonales.

2. Soit $M'$ le symétrique du point $M$ par rapport à la droite $(NP)$.
   Montrer que les points $N$, $P$ et $M'$ appartiennent au cercle de diamètre $[AM]$ et que les points $M$, $C$ et $M'$ sont alignés. En déduire que le point $M'$ appartient au cercle circonscrit au carré $ABCD$.

## Problème 798 *11 points.* *./1996/nationalSrem/pb/texte*

I- On considère l'équation différentielle :
$$y'' - 4y' + 3y = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution $f$ de (E) telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

II- Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour la figure, on se limitera aux points de la courbe dont l'abscisse est comprise entre $-4$ et 0,5 et on prendra pour unité graphique 4 cm.



Retour page 1

1. **Variations de $f$**
   a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$.
   b) Résoudre l'équation $3e^{2x} = 1$ ; étudier le signe de $3e^{2x} - 1$ selon les valeurs de $x$.
   c) En déduire le signe de $f'$ et les variations de $f$.
2. **Limites aux bornes de $f$**
   a) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. (on pourra mettre $e^{3x}$ en facteur).
3. **Étude de $f$ à l'origine**
   a) Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0$.
   b) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\varphi(x) = f(x) - 2x.$$
   Calculer $\varphi(0)$ et montrer que, pour tout nombre réel $x$, on peut écrire :
   $$\varphi'(x) = (e^x - 1)(3e^{2x} + 3e^x + 2).$$
   c) Étudier les variations de $\varphi$.
   d) En déduire le signe de $\varphi(x)$ et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $T$.
4. Tracer $\mathscr{C}$ et $T$.

III- Dans cette partie, on se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$.

1. a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution $\alpha$ et une seule sur $\mathbb{R}$.
   b) Prouver que $\alpha$ appartient à l'intervalle$[0 ; 1]$.
   c) Montrer que $\alpha$ satisfait à la relation :
   $$\alpha = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-\alpha}).$$
2. Soit $g$ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ :
   $$g(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x}).$$
   a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.
   b) Calculer la dérivée $g'$ de $g$.
   c) Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.

# V. Amérique du Nord, série S

**Ex. 2119.** ———— *4 Points.* *./1996/ameriquenordS/exo-1/texte.tex*

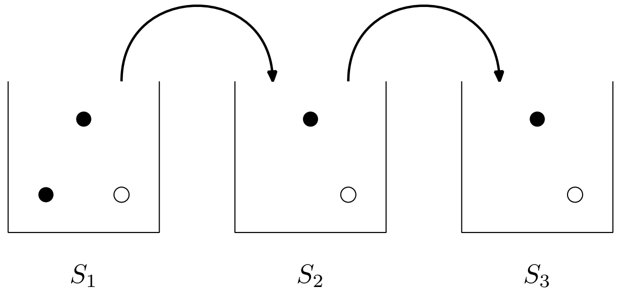
On désigne par $n$ un entier naturel supérieur où égal à 2. On imagine $n$ sacs de jetons $S_1, \ldots, S_n$. Au départ, le sac $S_1$ contient 2 jetons noirs et un jeton blanc, et chacun des autres sacs contient un jeton noir et un jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton dans $S_1$.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans $S_2$ et on tire au hasard un jeton de $S_2$.
- Troisième étape : après avoir placé dans $S_3$ le jeton sorti de $S_2$, on tire au hasard un jeton de $S_3$ … et ainsi de suite. . . .

Pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $E_k$ l'événement « le jeton sorti de $S_k$ est blanc », et $\overline{E}_k$ l'événement contraire.



Retour page 1




**1.** a) Déterminer le probabilité de $E_1$, notée $p(E_1)$, et les probabilités conditionnelles $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
En déduire la probabilité de $E_2$, notée $p(E_2)$.

b) Pour tout entier naturel $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de $E_k$ est notée $p_k$.
Justifier alors le relation suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

**2. Étude d'une suite $(u_k)$.**
On note $(u_k)$ la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel $k \geqslant 1$ :

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}.$$

a) On considère la suite $(v_k)$ définie pour tout élément $k$ de $\mathbb{N}^\star$, par :

$$v_k = u_k - \frac{1}{2}.$$

Démontrer que la suite $(v_k)$ est géométrique.

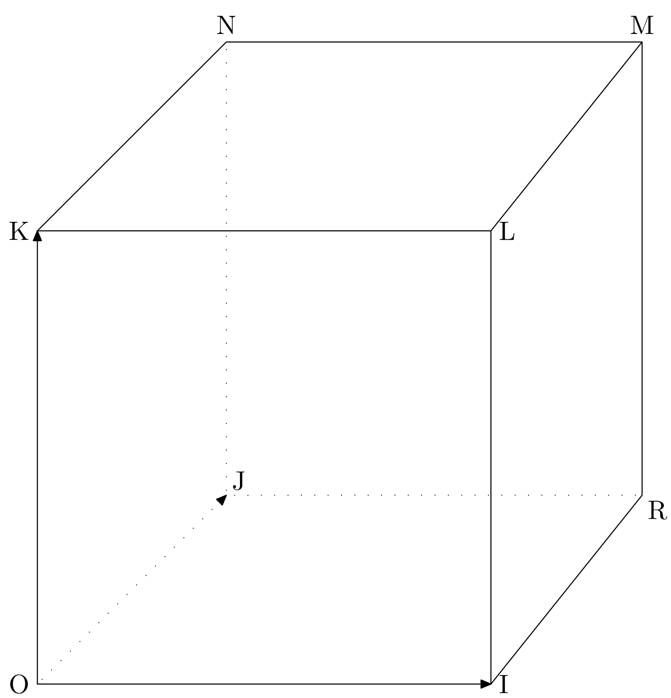
b) En déduire l'expression de $u_k$ en fonction de $k$. Déterminer la limite de la suite $(u_k)$.

**3.** Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Déterminer pour quelles valeurs de $k$ on a :

$$0{,}499\,9 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5.$$

Ex. 2120. 5 Points, obligatoire ./1996/ameriquenordS/exo-2/texte.tex

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O;\ \overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ},\ \overrightarrow{OK})$, on considère le cube de sommets $O$, $I$, $R$, $J$, $N$, $K$, $L$, $M$ dont une représentation est donnée ci-dessous.






Retour page 1

On note $A$ le milieu de l'arête $[IL]$ et $B$ le point défini par :

$$\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}.$$

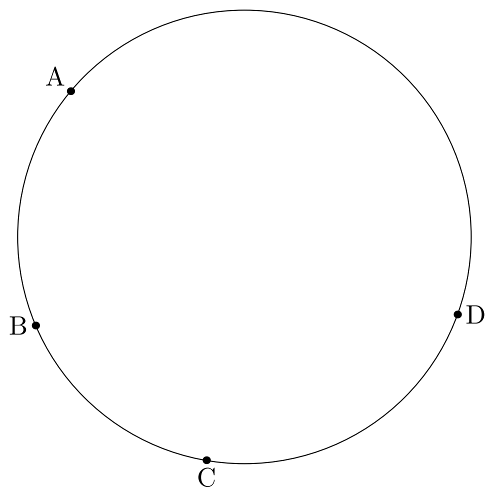
On appelle $\mathscr{P}$ le plan passant par les points $O$, $A$ et $B$.

1. a) Préciser les coordonnées des points $A$ et $B$.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
2. a) En déduire que l'aire du triangle $OAB$ vaut $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.
   b) Le point $C\left(1 ; \dfrac{1}{3} ; 1\right)$ appartient-il à $\mathscr{P}$ ? Justifier votre réponse.
3. On considère le tétraèdre $OABK$.
   a) Montrer que son volume vaut $\dfrac{1}{9}$.
   b) En déduire la distance du point $K$ au plan $\mathscr{P}$.

: *On rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire de la base par la longueur de la hauteur correspondante.*

**Ex. 2121.** *5 Points, spécialité* *./1996/ameriquenordS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.




D'une manière générale, si $M$, $N$, $P$, $Q$ sont quatre points tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ désigne une mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}})$.

**1.** Soit $S$ la similitude directe plane de centre $A$ qui transforme $C$ en $D$. On désigne par $E$ l'image du point $B$.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ (modulo $2\pi$).
   b) Montrer que $E$ est sur la droite $(BD)$. Marquer le point $E$ sur la figure. On admettra que $E$ est sur le segment $[BD]$.
   c) Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.

**2.** a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ (modulo $2\pi$) puis que $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$.
   b) Soit $S'$ la similitude directe de centre $A$ qui transforme $B$ en $C$. Montrer que $D$ est l'image de $E$ par cette similitude.
   c) Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$.



Retour page 1

**3.** Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation :

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

: cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémé. Ptolémé était un mathématicien et astronome grec du IIe sièvle après J.-C ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'un arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

## Problème 799 *11 points.*

*./1996/ameriquenordS/pb/texte*

A- 1. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ et $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

a) T-racer $\Gamma$ ainsi que la tangente au point d'abscisse $0$ après en avoir donné une équation sous la forme $y = \varphi_1(t)$. Par une observation graphique, comparer $\mathrm{e}^t$ et $t+1$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction

$$h : t \longmapsto \varphi(t) - \varphi_1(t).$$

En déduire que pour tout élément $t$ de $\mathbb{R}$ on a : $\mathrm{e}^t \geqslant t+1$.
Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.

2. Déduire de ce qui précède que, pour tout $t$ élément de $]-1\,;+\infty[$, on a :

$$\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t+1}.$$

Préciser dans quel(s) cas on a l'égalité.

B- Soit $f$ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de $f$ en $-1$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de $f$. Dresser le tableau de ces variations.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).
   a) Quelle est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0$ ?
   b) Construire $\mathscr{C}$ et cette tangente.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$ et que $-1 < \alpha < 0$.
   b) Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-0{,}95$ | $-0{,}94$ | $-0{,}93$ | $-0{,}92$ | $-0{,}91$ | $-0{,}90$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

*Remarque :* pour $f(x)$, on donnera une approximation décimale à $10^{-2}$ près.
Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.

C- Soit $J = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ où $\alpha$ est le réel défini dans la partie B, mais il n'est pas indispensable d'avoir traité les questions de la partie B pour traiter cette partie jusqu'au C(5)a inclus.

1. Interpréter géométriquement $J$.
   sans chercher à calculer $J$, montrer géométriquement que $0 \leqslant J \leqslant -\alpha$.
2. a) Montrer que, pour tout $x > -1$,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{x+1}{.}$$

   b) Calculer $\displaystyle\int_\alpha^0 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\alpha$.

Retour page 1

3. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties $\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\alpha$.

4. a) Calculer l'intégrale $J$ en fonction de $\alpha$.

   b) En utilisant le fait que $\alpha$ est solution de $f(x)=0$, montrer que $J=\alpha-1+\mathrm{e}^{-\alpha}(\alpha+2)$.

5. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x-1+\mathrm{e}^{-x}(x+2).$$

   a) Calculer $g'$. Montrer que pour tout élément $x$ de $\mathbb{R}$, $g'(x)=\mathrm{e}^{-x}h(x)$, où $h$ est la fonction définie ndans la partie A.
   En déduire le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de $g$.

   b) Utiliser en particulier l'encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$ pour donner un encadrement de $J$ puis une valeur approchée de $J$ en indiquant la précision.

*Remarque :* On indiquera sur la copie les résultats utilisés fournis par la calculatrice.

## VI. Centres étrangers Groupe 1, série S

Ex. 2122. 4 points. *./1996/centresets/exo-1/texte.tex*

**1.** $a$ est un nombre réel. On considère la suite $(u_n)$ de nombres réels définie pour tout entier naturel par :

$$u_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n,$$

avec pour condition initiale $u_1=a$.

a) $(v_n)$ est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, par :

$$v_n=13u_n-4.$$

Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison $k$.
Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et $a$.

b) Prouver que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ :

$$u_n=\frac{4}{13}+\left(a-\frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**2.** Un professeur oublie fréquemment les clés des sa salle.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note $\mathrm{E}_n$ l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour $n$ » et $\overline{\mathrm{E}}_n$ l'événement contraire.
$p_n$ est la probabilité de $\mathrm{E}_n$ et $q_n$ celle de $\overline{\mathrm{E}}_n$. On pose $p_1=a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
On suppose en outre qui les deux conditions suivantes sont réalisées :

— si le jour $n$, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\frac{1}{10}$.

— si le jour $n$, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\frac{4}{10}$.

a) Démontrer que, pour tout $n\geqslant 1$ :

$$p_{n+1}=\frac{1}{10}p_n+\frac{4}{10}q_n.$$

b) En déduire l'expression de $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.

c) Á l'aide des résultats de la question 1, donner l'expression de $p_n$ en fonction de $n$ et de $a$.
La limite $p$ de la suite $(p_n)$ dépend-t-elle de la condition initiale $a$ ?

Retour page 1

**Ex. 2123.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1996/centresets/exo-2/texte.tex

(??)?? Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Lorsqu'un point de P est désigné par une lettre majuscule ($A$, $B$, $G$,... , $M_1$,... ,$M'$,...), on convient de désigner son affixe complexe par la lettre minuscule correspondante ($a$, $b$, $g$,... , $m_1$,... ..., $m'$,...).

Soient $A$, $B$, $C$ trois points du plan P. On note $G$ leur isobarycentre. À tout point $M$ du plan P on associe les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ isobarycentres respectifs de $\{M, B, C\}$, $\{M, A, C\}$ et $\{M, A, B\}$. On note enfin $M'$ l'isobarycentre de $\{M_1, M_2, M_3\}$.

1. a) Tracer le triangle $ABC$ et son isobarycentre $G$ sur une figure.
   Exprimer $\overrightarrow{OG}$ , en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$. En déduire l'expression de $g$ en fonction de $a$, $b$, $c$.
   b) Exprimer de même $m_1$, $m_2$, $m_3$ puis $m'$ en fonction de $a$, $b$, $c$, $m$.
2. Soit $f$ la transformation qui à tout point $M$ de P associe le point $M'$.
   a) Montrer que $m'-g=3(m-g)$.
   b) En déduire la nature de la transformation $f$et ses éléments caractéristiques.
   c) Placer sur la?gure l'image $A'B'C'$ du triangle $ABC$ par la transformation $f$.
   d) Déterminer le rapport des aires de ces deux triangles.

**Ex. 2124.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1996/centresets/exo-3/texte.tex

On considère deux points distincts donnés $F$ et $F'$ du plan orienté. On note $O$ le milieu de $[FF']$ et $\Delta$ la médiatrice de ce segment.

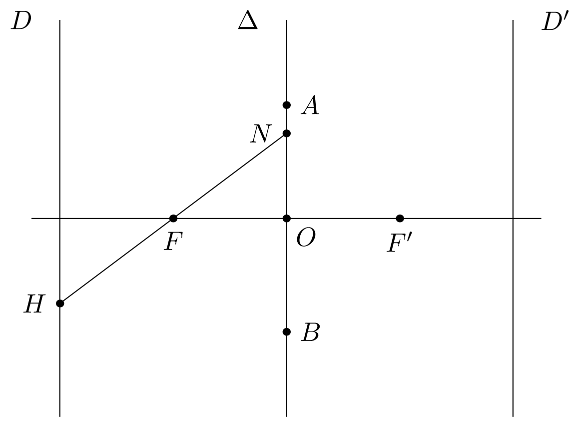
On pose $c=OF$. On note $A$ et $B$ les points de $\Delta$ tels que $OA=OB=c$. On note $s$ la symétrie centrale de centre $F$ et $r$ la rotation de centre $F$ et d'angle dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient $D$ et $D'$ les droites symétriques de $\Delta$ par rapport à $F$ et $F'$. Ces différents éléments sont placés sur la figure ci-dessous. Il convient de reproduire cette figure sur la copie.

1. a) On considère les points $P=r(A)$ et $Q=s(A)$. Prouver que r (Q) = B. Déterminer la nature du quadrilatère $APQB$ et tracer ce quadrilatère sur la figure.
   b) Déterminer les images respectives du segment $[AB]$ par $s$, par $r$ et par $r\circ s$.
   c) À tout point $N$ du segment $[AB]$, on associe les points $H=s(N)$, $I=r(N)$, et $J=r(H)=(r\circ s)(N)$. Déterminer la nature du quadrilatère $NIHJ$ et tracer ce quadrilatère sur la figure.
2. On note $\Gamma$ le cercle de centre $N$ et de rayon $NI$.
   a) Montrer que pour tout point $M$ du plan,
   $$MH^2+MN^2=NF^2.$$
   b) En déduire que $\Gamma$ est l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant
   $$MH^2-2MF^2=0.$$
3. On note $K$ la projection orthogonale de $H$ sur $\Delta$ et on pose $\alpha=ON$ où $0\leqslant\alpha\leqslant c$. Exprimer $NK$ en fonction de $\alpha$, puis $NF$ et $NI$ en fonction de $\alpha$ et de $c$. En déduire que le cercle $\Gamma$ coupe la droite $(HK)$ en deux points $M_1$ et $M_2$ distincts ou confondus.
4. Prouver que
   $$\frac{M_1F}{M_1H}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
   En déduire que lorsque $N$ parcourt le segment $[AB]$, les points $M_1$ et $M_2$ appartiennent à une ellipse $E$ dont $F$ est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à $F$. Placer les sommets de $E$ et tracer cette ellipse.



Retour page 1




**🏛PROBLÈME 800** *11 points.* *./1996/centresets/pb/texte*

Soit $k$ un nombre réel. On considère la fonction $f_k$ définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f_k(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique $10$ cm).
On note $I, J$ et $L$ les points de coordonnées respectives $(1,0), (0,1)$ et $(1,1)$.

**Partie I** *Étude de fonction $f_0$*
Dans cette question $\boldsymbol{k = 0}$. Étude et représentation graphique de $f_0$.

**1.** Signe de la dérivée.

a) Calculer la dérivée $f_0'$ de $f_0$ sur l'intervalle $]0\,;1]$ et montrer que $f_0'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_0'(x) = (\ln x)(\ln x + 2).$$

b) Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

c) Étudier le signe de $f_0'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

**2.** Étude à l'origine.

a) Déterminer la limite de $\dfrac{\ln u}{\sqrt{u}}$, puis de $\dfrac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $x(\ln x)^2$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$, en déduire que la fonction $f_0$ est continue en $x = 0$.

c) Déterminer la limite de $\dfrac{f_0(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $0$.
En déduire la tangente en $0$ à la courbe $\mathscr{C}_0$.

**3.** Tracé de la courbe $\mathscr{C}_0$.

a) Dresser le tableau des variations de $f_0$ sur $[0\,;1]$.

b) Construire $\mathscr{C}_0$.

**Partie II** *-Étude des fonctions $f_k$.*

**1.** Dérivée de $f_k$.

a) Calculer $f_k'(x)$ pour $x$ dans l'intervalle $]0\,;1]$.

b) Soit $A_k$ le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1$. Montrer que la tangente en $A_k$ à $\mathscr{C}_k$ est la droite $(OA_k.)$

**2.** Étude en l'origine.

a) Établir que $f_k$ est continue en $0$.

b) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_k$ en $O$.
**On ne demande pas d'étudier** $f_k$.



Retour page 1

**Partie III** *Étude et représentation graphique de $f_1$ et $f_{\frac{1}{2}}$.*

**1.** Étude et représentation graphique de $f_1$.

a) Prouver que pour tout $x \in ]0\,;1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.

b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

c) Établir le tableau de variation de $f_1$ et tracer $\mathscr{C}_1$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ en précisant le coefficient directeur de la tangente $T_1$ à $\mathscr{C}_1$ au point $A_1$.

**2.** Étude et représentation graphique de $f_{\frac{1}{2}}$.

a) Prouver que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$

b) En déduire une construction de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ à partir de $\mathscr{C}_0$ et $C_1$ et tracer $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ en précisant la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ à $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$.

**Partie IV** *Partage du carré $OILJ$ en quatre carré de même aire.*
Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.

**1.** Calcul d'une intégrale.

On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a) Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \int_\alpha^1 x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

b) Á l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

c) Déterminer la limite $I$ de $I(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $0$.

d) Justifier le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ existe.

Que vaut, d'après-vous cette intégrale ? *Ce résultat ne sera pas démontré !*

**2.** Calcul d'aires.

a) On pose $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de $\alpha$. En déduire la limite $S_k$ de $S_k(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $0$.
*On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_k$, l'axe $(Ox)$ et la droite d'équation $x = 1$.*

b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathscr{C}_1$ partagent le carré $OILJ$ en quatre parties de même aire.

Retour page 1

# VII. Centres étrangers remplacement, série S

Ex. 2125. 4 points. ./1996/centresetSrem/exo-1/texte.tex

1. La lettre $z$ désignant un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z) = z^2 + 4z - 29$.
   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
2. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ étant un repère orthonormal du plan (unité $0,5$ cm), on désigne par $A$, $B$, $C$ les points d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = -2 + 5\text{i}$, $z_c = -2 - 5\text{i}$.
   Soit $I$et $J$ les points d'affixes $z_I = 2 + 3\text{i}$ et $z_j = 18 - 5\text{i}$.
   a) Placer les points $A$, $B$, $C$, $I$, $J$.
   b) Calculer les distances $IB$, $IC$, $BC$ et montrer que les points $A$, $B$, $I$, $C$ sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon et que l'on tracera.
   c) Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_B - z_i}{zJ - z_I}$.
   Qu'en résulte-t-il pour les points $I$, $B$, $J$ ?

Ex. 2126. *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1996/centresetSrem/exo-2/texte.tex

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 kilomètres et qui désire être servi à 20h00 précisément.
Le livreur se déplace en mobylette dont la vitesse moyenne est 36 km/h. (on néglige les phases d'accélération et de décélération).
Sur son trajet, il va rencontrer 2 feux tricolores non syncronisés et indépendants.

— S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes puis repart.

— S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes puis repart.

Pour chaque feu :

• la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est 1/2,

• la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est 1/4,

Soit $T$ la variable aléatoire correspondant au « temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ».

1. a) Calculer la probabilité $p(T = 11)$, en justifiant le calcul
   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $T$.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $T$
3. Représenter sa fonction de répartition.
4. Le livreur part à 19h49.
   a) Quelle est alors la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?
   b) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en avance ?

1)
2)
3)
a)
b)

Retour page 1

# VIII. Japon, série S

**Ex. 2127.** ——— *4 points.* *./1996/japonS/exo-1/texte.tex*

*Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions.*
On dispose de trois dés à 6 faces, parfaitement équilibrés.
Sur le premier, 2 faces sont bleues; sur le deuxième, 3 faces sont bleues; sur le troisième, 5 faces sont bleues; les autres faces sont rouges.

**Partie A**

Dans un premier temps, on conside?re le premier dé. On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge dans cet ordre?

**2.** Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge?

**3.** Quelle est la probabilité d'avoir au moins une face bleue?

**Partie B**

On considère maintenant les trois dés.

**1.** On prend au hasard et de façon équiprobable l'un des trois dés et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir une face bleue?

**2.** Quelle est la probabilité d'avoir lancé le troisième dé sachant que l'on a obtenu une face bleue?

**Ex. 2128.** ——— *5 points, obligatoire.* *./1996/japonS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
Á tout nombre complexe $z$, distinct de 4, on associe le nombre :

$$Z=\frac{\text{i}z-4}{z-4}.$$

On note $A$ le point d'affixe 4 et on considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M$ du plan, distincts de $A$, et d'affixe $z$ telle que $Z$ soit un nombre réel.
On se propose de déterminer et de construire cet ensemble $\mathscr{C}$ par deux méthodes différentes.

**1.** *Méthode analytique.*

a) On pose : $z=x+\text{i}y$ et $Z=X+\text{i}Y$ avec $x,\ y,\ X,\ Y$ réels. Exprimer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Écrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. Reconnaître la nature de $\mathscr{C}$ et caractériser cet ensemble. Construire $\mathscr{C}$.

**2.** *Méthode géométrique.*

On considère le point $B$ d'affixe $-4\text{i}$.

a) Vérifier que $\dfrac{\text{i}z-4}{z-4}$ est réel si et seulement si le nombre $\dfrac{z+4\text{i}}{z-4}$ est imaginaire pur. On pourra remarquer que :

$$\text{i}z-4=\text{i}(z+4\text{i}).$$

b) Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$?

En interprétant géométriquement le condition ci-dessus, établir que $M$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

En déduire la nature de $\mathscr{C}$, et caractériser cet ensemble.

**Ex. 2129.** ——— *5 points, spécialité.* *./1996/japonS/exo-3/texte.tex*

Le plan est rapporté a? un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ unité graphique : 2 cm.

1. Étude d'une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x=f(t)=\dfrac{t^2}{2}+t \\ \\ y=g(t)=-\dfrac{t^2}{2}+t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$



Retour page 1

a) Étudier conjointement les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f$ et $g$.

b) Préciser les points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle a? l'un des axes de coordonnées.

c) Préciser les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes $Ox$ et $Oy$. Donner un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus. Dessiner $\mathscr{C}$.

2. On se propose de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est une parabole, en étudiant son image par une transformation particulière du plan.

a) Le plan est assimilé au plan complexe. On considère l'application $R$ qui, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe :

$$z' = \frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}z.$$

Quelle est la nature de $R$? Déterminer ses éléments caractéristiques.

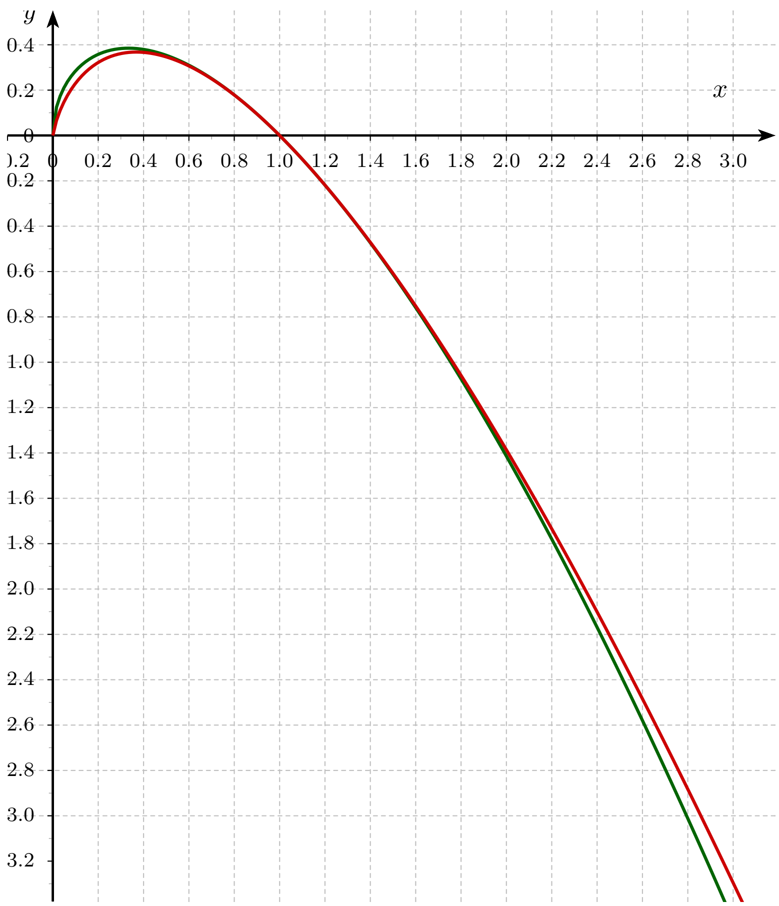
b) Calculer en fonction de $t$ l'affixe de $M'$ lorsque $M$ est le point d'affixe : $f(t)+\mathrm{i}g(t)$.
En déduire l'expression en fonction de $t$ des coordonnées $x'$ et $y'$ du point $M'$.
Écrire une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$' image par $R$ de la courbe $\mathscr{C}$. Représenter $\mathscr{C}$? sur la me?me figure que $\mathscr{C}$.
Pourquoi peut-on affirmer que $\mathscr{C}$ est une parabole?

## Problème 801 *11 points.*

*./1996/japonS/pb/texte*

Le graphique ci-dessous présente dans un même repère orthonormal le tracé de deux courbes, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. L'une, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $x \longmapsto f(x) = (1-x)\sqrt{x}$. L'autre, la courbe $\mathscr{C}_g$, représente la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = -x\ln x & \text{pour } x \text{ strictement positif} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$






Retour page 1

**Partie A-**
Le but de cette partie est de déterminer quel est le tracé de $\mathscr{C}_f$ et quel est celui de $\mathscr{C}_g$.
Comparaison des deux fonctions $f$ et $g$ On s'intéresse à la différence : $f(x)-g(x)$ et on se propose d'en étudier le signe. Á cet effet, on pose pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ :

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}.$$

1. Vérifier que : $\varphi(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Calculer la fonction dérivée $\varphi'$ de $\varphi$ et vérifier que : $\varphi'(x)=-\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$.
   Que est le sens de variation de $\varphi$ sur $]0\,;+\infty[$ ? (L'étude des limites de $\varphi$ aux bornes de son domaine de définition n'est pas demandée).
2. Calculer $\varphi(1)$ puis déterminer le signe de la différence $f(x)-g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
3. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$et $\mathscr{C}_g$ . Identifier sur le graphique chacune de ces deux courbes.

**Partie B- Calcul d'intégrales**
Pour tout réel $a$ de l'intervalle $]0\,;1]$ on pose :

$$I(a)=\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J(a)=\int_a^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**1.** Calculer l'intégrale $I(a)$ en fonction de $a$. Á cet effet, on pourra remarquer que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}.$$

**2.** Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $J(a)$ en fonction de $a$.

a) Calculer : $\lim\limits_{a\to0}(I(a)-J(a))$. (On admettra que $\lim\limits_{x\to0}x^2\ln x=0$.)

b) Donner une interprétation géométrique de cette limite.

**Partie C-**
On considère l'équation, définie dans $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=-24$. Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de la solution $\alpha$ de cette équation.

1. Justifier que l'équation proposée a dans $\mathbb{R}^+$ une solution $lpha$ et une seule et que : $9<lpha<11$. Vérifier que $\alpha$ est solution de l'équation :
$$x=\frac{24}{\ln x}.$$
2. Soit $h$la fonction définie sur $[9\,;11]$ par :
$$h(x)=\frac{24}{\ln x}.$$
   a) Démontrer, que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[9\,;11]$, $h(x)$ appartient aussi a? l'intervalle $[9\,;11]$.

   b) Démontrer,pour tout $x$ de l'intervalle $[9\,;11]$, la double inégalité :
$$\left|h'(x)\right|\leqslant\frac{2}{3(\ln 3)^2}<0{,}56.$$
   c) En déduire,pour tout réel $x$ de l'intervalle$[9\,;11]]$, l'inégalité :
$$|h(x)-h(\alpha)|<0{,}56\,|x-\alpha|\,.$$
3. On considère la suite $(u_n)$ définie par récurrence :
$$\begin{cases}u_0=9\\ u_{n+1}=h(u_n)\qquad\text{pour tout entier naturel } n.\end{cases}$$
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à l'intervalle $[9\,;11]$, puis que l'inégalité $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant0{,}56\,|u_n-\alpha|$ est vérifiée.

Retour page 1

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ l'inégalité$|u_n - \alpha| \leqslant 2(0,56)^n$ est vérifiée. Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

c) Trouver le plus petit entier naturel $n$ pour lequel on a l'inégalité :

$$2(0{,}56)^n < 0{,}01.$$

Soit $n_0$ cet entier, que représente pour $\alpha$ le terme $u_{n_0}$ correspondant ?
Á l'aide de votre calculatrice, donner une approximation décimale à $10^{-2}$ près de $u_{n_0}$.

# IX. Nouvelle Calédonie, série S

**Ex. 2130.** ——— *4 points.* *./1996/nllecaledonieS/exo-1/texte.tex*

Soit $ABCD$ un quadrilatère, $I$ le milieu de $[AC]$, $J$ le milieu de $[BD]$. Soit $K$ le point tel que$\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, $L$ le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et $M$ le milieu de $[LK]$.
Le but du problème est de montrer que $M$, $I$, $J$ sont alignés et de donner la position de $M$ sur la droite $(IJ)$.

**1.** Justifier l'existence du barycentre $G$ du système :

$$\{(A,\ 1),\ (B,\ 2),\ (C,\ 1),\ (D,\ 2)\}.$$

**2.** En regroupant les points de différentes façons, montrer que $G$ appartient aux deux droites $(KL)$ et $(IJ)$.

**3.** Montrer que $G$ est en $M$, que $M$, $I$, $J$ sont alignés et donner la position de $M$ sur$(IJ)$.

**4.** Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

**Ex. 2131.** ——— *5 points, obligatoire.* *./1996/nllecaledonieS/exo-2/texte.tex*

On note $\mathscr{P}$ le plan complexe et $\mathscr{P}^s tar$ ce plan privé du point $A$ d ?affixe 3?i.
On note $f$ l'application de $\mathscr{P}^\star$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par :

$$z' = \frac{2\text{i}z?4 + 2/ic}{z?3 + \text{i}}.$$

**1.** Calculer l'affixe du point $P'$ image par $f$ du point $P$ d'affixe $1 + \text{i}$.

**2.** Calculer l'affixe du point $Q$ dont l'image est le point $Q'$ d'affixe $1 + \text{i}$.

**3.** Déterminer et représenter les ensembles de points $M$ d'affixe $z$ tels que :

a) $z'$ soit réel.

b) $z'$ soit imaginaire pur.

c) $z'$ soit de module 2.

**Ex. 2132.** ——— *5 points, spécialité.* *./1996/nllecaledonieS/exo-3/texte.tex*

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre $O$.
2. On considère la transformation $s$ de $\mathscr{P}$ dont l'expression complexe est $z' = \text{i}\sqrt{2}(2z + 1)$.

   a) Déterminer la nature géométrique de $s$ et préciser ses éléments caractéristiques.

   b) On pose $A = s(\alpha)$, $B = s(\beta)$, $C = s(\gamma)$ où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les trois points d'affixes respectives $1$, $\text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}}$ et $\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$.
   Montrer que $ABC$ est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre $\Omega$.
3. Soit $F$ le point d'affixe 2 et $D$ la droite d'équation $x = 3$.
   Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}$, on appelle $H$ son projeté orthogonal sur la droite $D$.

   a) Montrer que l'ensemble (E) des points $M$ de $\mathscr{P}$ vérifiant $3MF^2 = 2MH^2$ est une conique passant par $B$, $C$ et $\Omega$, dont on précisera la nature.

   b) En déduire, sans calculs, le centre et les sommets de (E).

   c) Tracer sur une même figure le triangle $ABC$ et la conique (E) (unités : 2 cm).

Retour page 1

## 🏛Problème 802 *11 points.* ./1996/nllecaledonieS/pb/texte

Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément.

A- On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée s'annule en $0$.
3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet une tangente horizontale en $A$, point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

B- On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de $f$.
3. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités : 2 cm).
4. Calculer, en cm$^2$, l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$ et la courbe $(\mathscr{C})$.
   On utilisera une intégration par parties.

C- La fonction $f$ est toujours celle définie dans la partie B. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de $f$.

1. Calculer $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel non nul $n$, que

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

3. Pour tout entier $n$ non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point $M_n$.
   a) Calculer les coordonnées $x_n$ et $y_n$ de $M_n$.
   Vérifier que les points $M_n$ appartiennent à la courbe $(\Gamma)$ d'équation

$$y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4^x}.$$

   b) Vérifier que la suite $(x_n)$ est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Étuder la limite de la suite $(x_n)$.
   c) Vérifier que la suite $(y_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Étuder la limite de la suite $(y_n)$.

# X. Polynésie, série S

**Ex. 2133.** ———— *4 points* ./1996/polynesieS/exo-1/texte.tex

un sondage effectué récemment dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

— 65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;

— parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes ;

— parmi les personnes favorables à la construction, 20 % sont des écologistes.

On note C l'évènement : « la personne interrogée est contre la construction », et $\overline{C}$ l'évènement contraire.
On note E l'évènement : « la personne interrogée est écologiste ».
On note F l'évènement : « la personne interrogée est contre la construction et n'est pas écologiste ».

1. Calculer les probabilités $p(C)$, $p(E|C)$,$p(E|\overline{C})$.



Retour page 1

2. a) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit contre la construction du barrage et soit écologiste.
   b) Calculer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit pour cette construction et soit écologiste.
   c) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
3. a) Montrer que la probabilité de $F$ est égale à $0{,}195$.
   b) On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins une qui soit contre la construction du barrage et ne soit pas écologiste ? (On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres.)

**Ex. 2134.** ———— *5 points, obligatoire* *./1996/polynesieS/exo-2/texte.tex*

La lettre $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

**Partie A**

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**2.** Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

**Partie B**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a = 2 : ic$, $b = -\sqrt{3} + \text{i}$ et $c = -\sqrt{3} - \text{i}$.

**1.** Placer les points $A$, $B$ et $C$ sur une figure.

**2.** Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $Z$.

b) Écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c) En déduire la nature du triangle $ABC$ ainsi qu'une mesure, en radians, de $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA})$. l'angle BC,BA
.

**3.** Calculer l'aire du triangle $ABC$ en centimètres carrés.

**Ex. 2135.** ———— *5 points, spécialité* *./1996/polynesieS/exo-3/texte.tex*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $\Omega$ le point de coordonnées $(-2\ ;\ 3)$.
Soit $S$ la similitude plane directe de centre $\Omega$, d?angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
Á tout point $M$ d'affixe $z = x + \text{i}y$ ($x$ et $y$ réels), $S$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ ($x'$ et $y'$ réels).

**1.** Exprimer $z'$ en fonction de $z$. Quelle est la similitude réciproque $S'$ de $S$ ?

**2.** En déduire l'expression de $x'$ et de $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.

**3.** Soit $C'$ la conique dont une équation cartésienne dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est :

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.$$

Quelle est la nature de $C'$ ? Préciser les coordonnées des foyers et des sommets de $C'$. Calculer l'excentricité de $C'$ et tracer $C'$ à l?aide des éléments trouvés.

**4.** Soit $C$ la conique image de $C'$ par la similitude $S'$ (autrement dit $C'$ est l'image de $C$ par la similitude $S$). Sans chercher à déterminer une équation cartésienne de $C$ , donner la nature de $C$, placer son centre et ses sommets et donner son allure sur la même figure.

## Problème 803 *11 points.* *./1996/polynesieS/pb/texte*

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

**Partie A - Étude d'une fonction**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right).$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

b) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.
Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\Delta)$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et justifier que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left[1\,;\dfrac{5}{4}\right]$.

2. Soit la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier la limite de $g$ en $+\infty$.

b) Étudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variations.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de $g$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et sa tangente à l'origine.

d) Soit $b$ un réel strictement positif.Déterminer, en cm$^2$, l'aire $\mathscr{A}(b)$ de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $C_g$ et la droite d'équation $x = b$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

3. L'aire $\mathscr{A}(b)$ admet-elle une limite lorsque $b$ tend vers $+\infty$ ?

**Partie B - Calcul approché de $\alpha$**

1. Montrer que $\alpha$ est solution de l'équation $g(x) = x$.
2. Montrer que : si $11 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}$, alors $1 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$.
3. En étudiant le signe de $g''$ et les variations de $g'$, montrer que pour tout élément $x$ de $\left[1\,;\dfrac{5}{4}\right]$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4.
4. Soit $(U_n)$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) En utilisant 2 montrer par récurrence que :pour tout entier naturel $n$, $\quad 1 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{5}{4}$.

b) Prouver que : pour tout entier naturel $n$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|.$$

En déduire que : pour tout entier naturel $n$,

$$|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Quelle est la limite de la suite $(U_n)$ ?

c) Déterminer un entier naturel $p$ tel que $U_p$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près et donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

# XI. Pondichéry, série S

Ex. 2136. 4 points ./1996/pondicheryS/exo-1/texte.tex

Un fabriquant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10%, 40% et 50% de la production totale de son usine.
Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5% pour la machine A, de 1,5% pour la machine B et de 2,2% pour la machine C.
Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines. On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

**1.** Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.

**2.** Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.

**3.** Calculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.

**4.** On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remet tant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

Retour page 1

**Ex. 2137.** ———— *4 points, obligatoire* *./1996/pondicheryS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

**1.** On considère trois points distincts $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

a) Interpréter géométriquement l'argument du quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$.

b) Montrer que $A$, $B$ et $C$ son t alignés si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

**2.** Placer sur une figure (unité graphique : 1 cm) les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ d'affixes respectives :

$$a_1 = 2,\ b_1 = \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad c_1 = -4+3\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Montrer à l'aide de la propriété précédente, que les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ sont alignés.

**3.** On considère les points $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$ tels que les quadrilatères $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$ soient des carrés directs.

a) Tracer les carrés $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.

b) Déterminer les affixes $a_3$, $b_3$ des points $A_3$ et $B_3$ puis les affixes $a_2$ et $b_2$ des points $A_2$ et $B_2$.

c) Á l'aide de la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, calculer l'affixe $c_3$ de $c_3$ à l'aide de $c_1$.

d) En déduire que les points $A_3$, $B_3$ et $C_3$ sont alignés.

**4.** a) Déterminer le réel $\mu$ tel que le barycentre du système $\{(O,\ \mu),\ (C_1,\ 1),\ (C_3,\ 1)\}$ soit $C_2$.

b) Calculer l'affixe $c_2$ de $c_1$.

c) Montrer que les points $A_2$, $B_2$ et $C_2$ sont alignés.

**Ex. 2138.** ———— *4 points, spécialité* *./1996/pondicheryS/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points $M$ du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+\mathrm{i})z-3+3\mathrm{i}|^2+|z-6|^2 = 54.$$

**1. Première méthode**

a) En posant $z = x+\mathrm{i}y$, donner une équation cartésienne de (C).

b) En déduire la nature de (C).

c) Construire (C).

**2. Deuxième méthode**

On désigne par $s$ la similitude qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe $z_1 = (1+\mathrm{i})z-3+3\mathrm{i}$ et on désigne par $t$ la translation qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z-6$.

a) Caractériser géométriquement ces deux transformations.

b) Déterminer les antécédents respectifs $S$ et $T$ de $O$ par $s$ et $t$.

c) Calculer le rapport $\dfrac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\dfrac{TM}{OM_2}$.

d) En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par

$$2SM^2+TM^2 = 54.$$

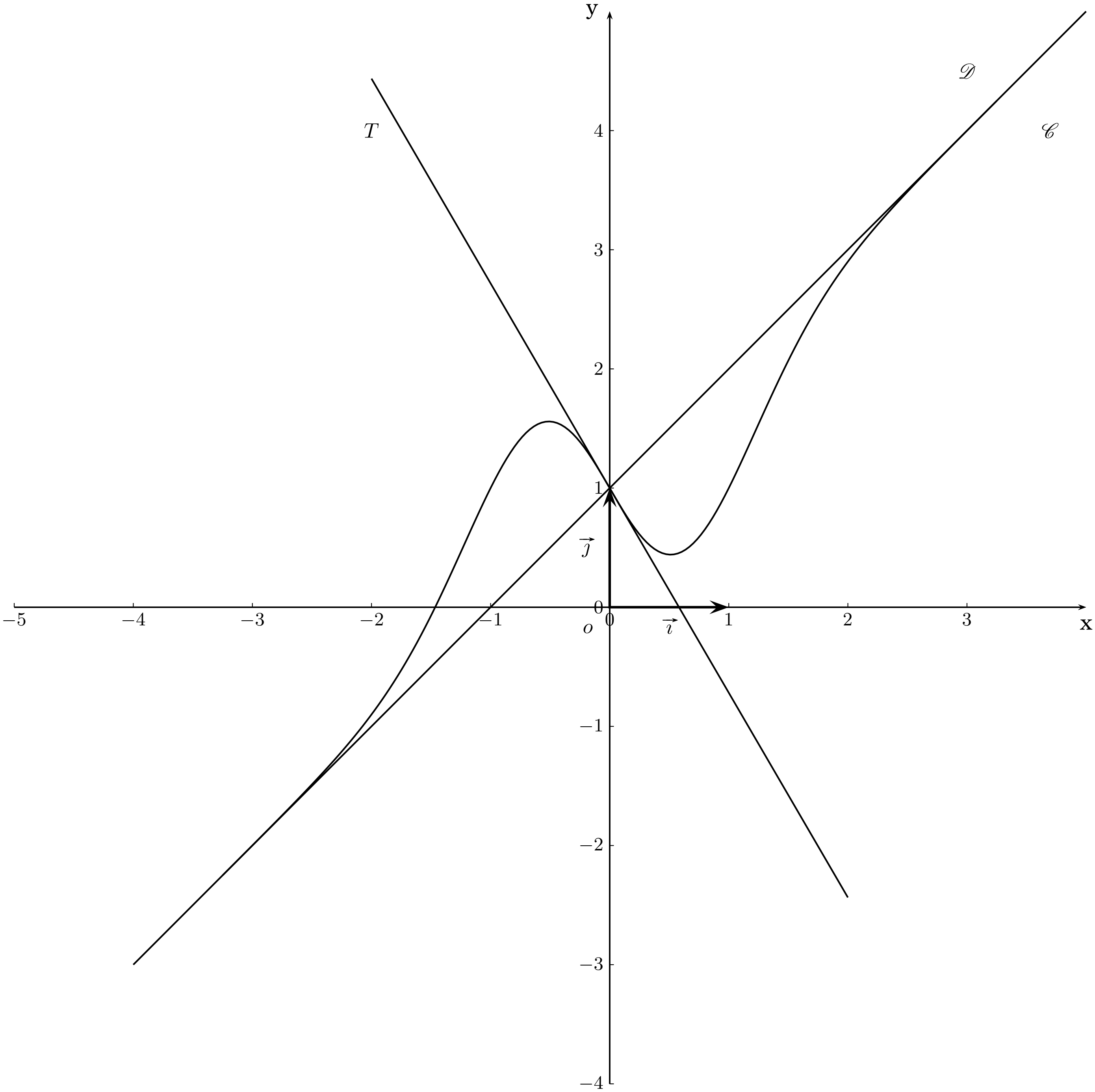
e) Calculer l'affixe du barycentre $G$ du système $\{(S,\ 2),\ (T,1)\}$.

f) Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.

g) En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

## 🏛Problème 804 *12 points.* *./1996/pondicheryS/pb/texte*

Sur la figure ci-dessus, sont représentées la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans une repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote $\mathscr{D}$ et sa tangente $T$ au point d'abscisse $0$.




On sait que le point $J(0~;~1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ et que l'asymptote $\mathscr{D}$ passe par les points $K(-1~;~0)$ et $J$, et que la tangente $T$ a pour équation réduite $y=(1-\mathrm{e})x+1$.

**Partie A** *–Expression de $f$–*

**1.** Déterminer une équation de $\mathscr{D}$.

**2.** On suppose qu'il existe des réels $m$ et $p$ et une fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x$ réel, $f(x)=mx+p+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

a) Déterminer $m$ et $p$.

Retour page 1

b) Démontrer que pour tout $x$ réel, $f(x)+f(-x)=2$.

c) En déduire que la fonction $\varphi$ est impaire puis que la fonction $f'$, dérivée de $f$, est paire.

**3.** On suppose maintenant que, pour tout $x$ réel :
$\varphi(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où $a$ et $b$ sont des réels.
Démontrer en utilisant les données et les résultats précédents que $a=-\mathrm{e}$ et que $b=0$.

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=1+x-x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction $f$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** a) Vérifier que pour tout réel $x$ :

$$f'(x)=1+(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que $T$ est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0$. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ vis à vis de sa tangente $T$.

**2.** Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de $f$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

a) Démontrer que $f''(x)$ est du signe de $6x-4x^3$.

b) Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution $\alpha$ unique dans l'intervalle $[0\,;1]$.

c) Montrer que $0,51<\alpha<0,52$.

d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

**Partie C**

Sur le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est très proche de son asymptote pour les points d'abscisses supérieure à 2,4.
Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel $\lambda$ positif ou nul, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$.

**1.** Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de $\lambda$.

**2.** Déterminer la limite A de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

**3.** Á partir de quelle valeur de $\lambda$ a-t-on $|\mathscr{A}(\lambda)-\mathrm{A}|\leqslant 10^{-2}$ ?

# XII. Réunion, série S

Ex. 2139. 4 points ./1996/reunionS/exo-1/texte.tex

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public :
Dans une urne se trouvent placées 7 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard ; si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si cette boule est rouge, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée apporte au joueur 1 F et chaque boule rouge 2 F. Pour faire un jeu, le joueur paie 2 F. On désigne par $X$ la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

1. a). Quelles sont les valeurs que $X$ peut prendre ?

   b). Deéterminer la loi de probabilité de $X$ et son espérance mathématique.

2. Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques (après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne).
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A : le joueur perd 3 F.
   B : le joueur perd 1 F.
   C : le gain du joueur est nul.
   En déduire la probabilité de l'événement D : « le joueur a un gain strictement positif ».

**Ex. 2140.** ——— *5 points, obligatoire* ./1996/reunionS/exo-2/texte.tex

**1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

**2.** On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$, $D$ d'affixes respectives :

$$z_A = 1+2\mathrm{i},\ z_B = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i},\ z_C = 1+\sqrt{3}-\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z = 1-2\mathrm{i}.$$

a) Placer $A$, $B$, $C$ et $D$ et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.

b) Vérifier que $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Que peut-on en déduire pour les droites $(AB)$ et $(BD)$.

c) Prouver que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ appartiennent à un même cercle $\Gamma$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer $\Gamma$.

**3.** On considère l'équation :

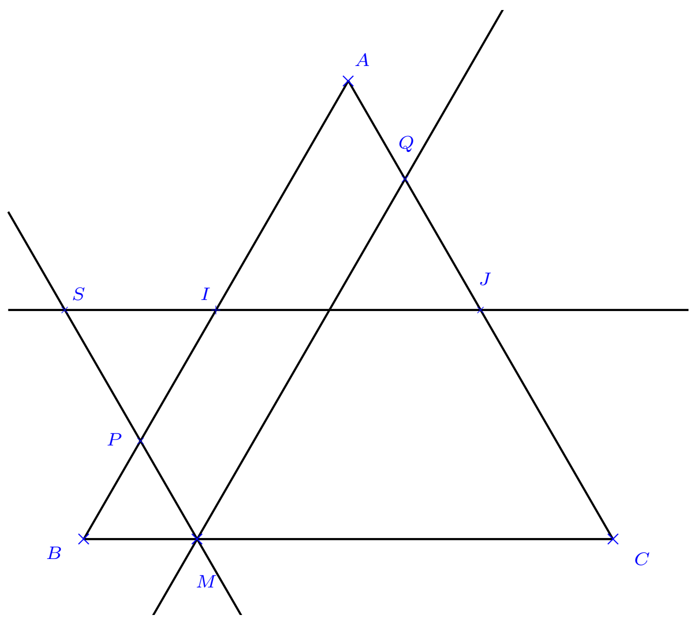
$$z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

où $\theta$ désigne un nombre réel quelconque.

a) Résoudre l'équation 1 dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle $\Gamma$.

**Ex. 2141.** ——— *5 points, spécialité* ./1996/reunionS/exo-3/texte.tex




On considère dans le plan euclidien orienté un triangle équilatéral de sens direct $ABC$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$ modulo $2\pi$.

On note $I$ le milieu du segment $[AB]$, $J$ celui de $[AC]$, $M$ est un point variable du segment $[BC]$.

On mène par $M$ la parallèle à $(AC)$ qui coupe $(AB)$ en $P$ et $(IJ)$ en $S$, puis la parallèle à $(AB)$ qui coupe $(AC)$ en $Q$ et $(IJ)$ en $T$.

On désigne par $O$ le milieu du segment $[PQ]$.

**1.** Quel est le lieu géométrique du point $O$ lorsque $M$ décrit le segment $[BC]$ ?

**2.** Montrer que $O$ est milieu des segments $[IT]$ et $[SJ]$.

**3.** On suppose dans la suite que $M$ est distinct du milieu de $[BC]$. Démontrer que les triangles $QMC$ et $QJT$ sont équilatéraux et de sens direct.



Retour page 1

**4.** Soit $s$ la symétrie de centre $O$ et $r$ la rotation de centre $Q$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = r \circ s$.

a) Déterminer les images par $f$ des points $P$, $A$ et $I$.

b) Justifier que $f$ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

c) Déterminer le centre $\Omega$ de $f$. Que représente-t-il pour le triangle $ABC$ ?

**5.** Démontrer que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point fixe indépendant de la position de $M$ sur $[BC]$.

## Problème 805 *11 points.*

./1996/reunionS/pb/texte

On considère la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

A- **Étude de la fonction** $f$

1. a) Étudier les variations de la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x\mathrm{e}^x - 1$.

   b) En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha$ tel que : $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-3}$.

   c) Préciser le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de $x$.

2. a) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

   b) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$ en utilisant la question A1. Dresser le tableau des variations de $f$.

   c) Montrer que $f$ admet un nminimum $m$ égal à $\alpha + \alpha{-}1$. Justifier que : $2{,}32 \leqslant m \leqslant 2{,}34$.

3. **Construction de la courbe** $\mathscr{C}$

   1. Donner une équation de la tangente $T$ à$\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
      Déterminer le point d'intersection de $T$ avec l'axe des ordonnées.
   2. Tracer $\mathscr{C}$ et $T$.
   3. Soit $\lambda$ un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$.

      a) Calculer $\displaystyle\int_\lambda^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, en utilisant une intégration par parties.

      b) Exprimer, en centimètres carrés, en fonction de $\lambda$, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan constitué des points $M(x\ ;\ y)$ tels que : $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

      c) Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers zéro par valeurs strictement positives. (On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.)

4. **Étude d'une suite**

   1. En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que, pour tout entier $n > 3$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On notera $x_n$ cette solution.
   2. Déterminer à la calculatrice des valeurs approchées à $10^{-1}$ près de $x_{10}$, $x_{100}$, $x_{1\ 000}$.
   3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
   4. Démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 3$, $f(\ln p) \geqslant p$. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.

Retour page 1

# Chapitre XXXIX

# 1997.

## Sommaire



On a ici les regroupements suivants :

— groupe I bis : Aix-Marseille, Amiens, Corse, Créteil, Lille, Montpellier, Nice, Paris, Rouen, Versailles & Toulouse ;

— groupe II bis : Besançon, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Dijon, Grenoble, Limoges, Lyon, Nancy-Metz, Orléans-Tours, Poitiers, Reims, Rennes & Strasbourg ;

De plus le groupe I bis correspond aux groupes I & IV, et le groupe II bis aux groupes II & III.

## I. Amérique du Nord, série S

**Ex. 2142.** *5 points.* *./1997/ameriquedunordS/exo-1/texte.tex*

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour $n$ entier naturel non nul :
$G_n$ l'événement : « Juliette gagne la $n^e$ partie » ;
$P_n$ l'événement : « Juliette perd la $n^e$ partie ».

Partie A **1.** Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2/G_1)$ et $p(G_2/P_1)$.
En déduire la probabilité $p(G_2)$.

**2.** Calculer $p(P_2)$.

Partie B On pose, pour $n$ entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$..

**1.** Déterminer, pour $n$ entier naturel non nul, les probabilités $p(P_{n+1}/G_n)$ et $p(G_{n+1}/P_n)$.

**2.** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}7y_n. \end{cases}$$

**3.** Pour $n$ entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a) Montrer que la suite $(v_n)$ est constante de terme général égal à 1.

b) Montrer que la suite $(w_n)$ est géométrique et exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

**4.** a) Déduire du 3, l'expression de $x_n$ en fonction de $n$.

b) Montrer que la suite $(x_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Ex. 2143.** ———— *5 points, obligatoire* *./1997/ameriquedunordS/exo-2/texte.tex*

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + 5y = 2x + 3. \qquad \text{(E)}$$

**1.** Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de cette équation.

**2.** Soit $g$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g$ vérifie (E) si et seulement si $g - f$ vérifie l'équation (E') :

$$y'' + 2y' + 5y = 0. \qquad \text{(E')}$$

**3.** Résoudre (E') et en déduire la solution générale de (E).

**4.** Déterminer la fonction numérique $h$, solution particulière de (E) vérifiant les conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.

**Ex. 2144.** ———— *5 points, spécialité* *./1997/ameriquedunordS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, direct, non isocèle. $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$.

Le point $D$ est tel que $ACD$ soit un triangle rectangle en $A$, isocèle et direct. $O$ est le pie de la hauteur issue de $D$ dans le triangle $DBC$. $K$ est le pied de la hauteur issue de $A$ dans le triangle $DAO$.

**1.** Faire une figure.

**2.** Montrer que la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ transforme la droite $(CB)$ en la droite $(DO)$, puis le triangle $AHC$ en le triangle $AKD$. En déduire que $AHOK$ est un carré.

**3.** Montrer que les droites $(AB)$ et $(KH)$ sont sécantes. (On pourra montrer que l'hypothèse « $(AB)$ et $(KH)$ parallèles » conduit à l'égalité « $AO = AD$ » et que ceci est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé).

**4.** En déduire qu'il existe une homothétie $h$ qui transforme le triangle $AKD$ en le triangle $BHA$.

**5.** On considère la transformation composée $s = h \circ r$.

a) Déterminer les images des points $H$, $C$ et $A$ par $s$.

b) Identifier cette transformation et en donner ses éléments caractéristiques.

## PROBLÈME 806 *10 points.* *./1997/ameriquedunordS/pb/texte*

La partie 806 est indépendante des parties 806 et 806. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 3 cm).

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$..

Partie A **1.** Justifier que, pour tout $x$ réel, $x2 - 2x + 2 > 0$.

**2.** Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ et étudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**4.** Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ : on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de $(\Delta)$.

On pose, pour tout réel $x$, $\varphi(x) = f(x) - x$.

**1.** Déterminer la fonction dérivée $\varphi'$ de $\varphi$. En déduire que$\varphi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**2.** a) Déterminer la limite de $\varphi$ en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right).$$

En déduire la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

**3.** Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire que la droite $(\Delta)$coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en un point et un seul.
On désigne par $\alpha$ l'abscisse de ce point. Montrer que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

Partie C On pose $J = [0{,}3\,; 0{,}4]$.

**1.** Montrer que la fonction $x \longmapsto x2 - 2x + 2$ est décroissante sur $J$. En déduire que si $x$appartient à $J$ alors $f(x)$ appartient à $J$.

**2.** a) Prouver que, pour tout $x$ de $J$, $\left|f'(x)\right| \leqslant 0{,}95$ (on pourra montrer que $f'$ est croissante sur $J$).

b) En déduire que, pour tout $x$ de $J$, $|f(x)-\alpha| \leqslant 0{,}95\,|x-\alpha|$. (0,25 point)

**3.** On définit la suite $(u_n)$ par : $u_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Prouver que, pour tout $n$ :

- $u_n \in J$
- $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}95\,|u_n - \alpha|$
- $|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}1 \times (0{,}95)^n$.

En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

b) Déterminer un entier naturel $n_0$ tel que, pour tout $n$supérieur ou égal à $n_0$, $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

Partie D On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $(\mathscr{C})$. On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en unités d'aire.

**1.** Montrer que la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ a pour équation $y = -\dfrac{24}{25}x + \dfrac{6}{25} + \ln\dfrac{25}{16}$.

**2.** Soient les points $E$ d'abscisse 0 et $F$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ de la courbe $(\mathscr{C})$.

Montrer que la droite $(EF)$ a pour équation $y = 2\left(\ln\dfrac{5}{8}\right)x + \ln 2$.

**3.** On admet que, sur l'intervalle $\left[0\,; \dfrac{1}{2}\right]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (T) et en dessous de $(EF)$.

a) a) Montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{24}{25}x + \frac{6}{25} + \ln\frac{25}{16}\right)\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\ln\frac{5}{8}\right)x + \ln 2\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire que $\ln\dfrac{5}{4} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{2}$.

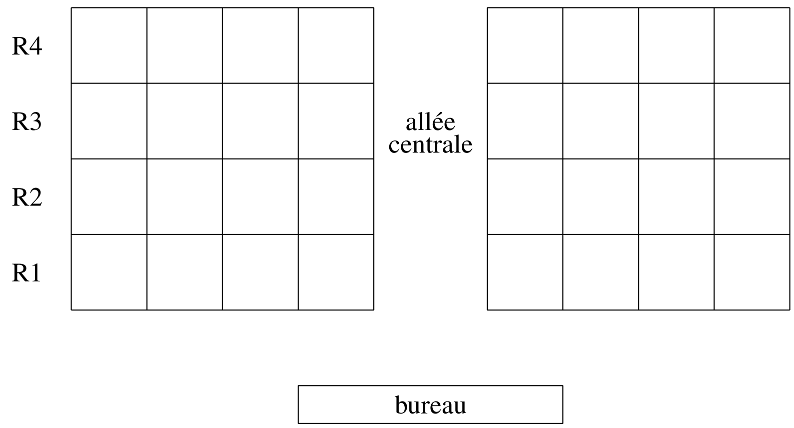
c) Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à $5.10^{-3}$ près.

Retour page 1

# II. Antilles, série S

Ex. 2145. ——————— *4 points.* *./1997/antillesS/exo-1/texte.tex*

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont.




Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle. La classe de TS1 comporte 28 élèves.

**1.** a) Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?

b) Calculer à $10^{-1}$ près, les probabilités des événements suivants :

A : « les huit places du rang R4 sont toutes occupées » ;

B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale ».

**2.** Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit $X$ la variable aléatoire « nombre de places inoccupées au rang R4 ».

a) Donner la loi de probabilité de $X$.

b) Calculer son espérance mathématique.

Ex. 2146. ——————— *5 points, obligatoire.* *./1997/antillesS/exo-2/texte.tex*

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique est 1 cm. On considère les points $A, B$ et $C$, d'affixes respectives :

$$z_A = (3\sqrt{3}-2)+\mathrm{i}(3+2\sqrt{3})\ ;\ z_B = (-\sqrt{3}-1)+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)\ ;\ z_C = (1-4\sqrt{3})+\mathrm{i}(-4-\sqrt{3}).$$

**1.** On se propose de placer les points $A, B$ et $C$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ à l'aide d'un compas. Pour cela on considère la rotation $\mathscr{R}$ de centre $O$ et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

a) Donner l'écriture complexe de $\mathscr{R}$.

b) Vérifier que $\mathscr{R}$ transforme le point $A$ en le point $A'$ d'affixe $4-6\mathrm{i}$.
On admettra que $\mathscr{R}$ transforme les points $B$ et $C$ en les points $B'$ et $C'$ d'affixes respectives $2+2\text{ß}$ et $-2+8\text{ß}$.

c) Placer les points $A', B'$ et $C'$, puis à l'aide du compas, les points $A, B, C$. (La construction de $A$ sera justifiée).

**2.** a) Calculer $z_A - z_B + z_C$.

b) En déduire que le point $O$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

**3.** Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M$ du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

a) Vérifier que $B$ appartient à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{C}$.

**4.** Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M$ du plan tels que :

$$2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|.$$

Retour page 1

**Ex. 2147.** ——— *5 points, spécialité.* ./1997/antillesS/exo-3/texte.tex

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère la courbe $(C)$ d'équation :

$$7x^2+13y^2-6\sqrt{3}xy-30=0.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la nature et les éléments remarquables de la courbe $(C)$ puis de la tracer.

**1.** On considère la transformation $f$ du plan qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z'=(\sqrt{3}-\mathrm{i})z$.
Déterminer la nature de $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**2.** Exprimer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de $M$ en fonction des coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $M'$.

**3.** a) Montrer que $(C')$ image de de la courbe $(C)$ par la transformation $f$ est, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, la courbe d'équation :

$$x^2+4y^2=36.$$

b) En déduire que $(C')$ est une conique dont bon déterminera la nature et éléments caractéristiques (foyers, sommets, directrices). Tracer $(C')$.

**4.** Déduire des questions précédentes la nature de la courbe $(C)$ et la tracer.

## Problème 807 *11 points.* ./1997/antillesS/pb/texte

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}.$$

**1.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$ et étudier le sens de variation de $f$.

**2.** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $0$ et lorsque x tend vers $+\infty$.

**3.** Donner le tableau des variations de la fonction $f$ et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x$appartenant à $]0\,;+\infty[$.

**4.** Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe $C$ représentative de la fonction $f$.

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

**1.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction $g$. Déduire de la partie **??** le sens de variation de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

**2.** Vérifier que $g=h\circ k$ avec $h$ et $k$ fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$par :

$$h(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\quad\text{et}\quad k(x)=\frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de $g$ en $+\infty$ et en $0$.

**3.** Donner le tableau des variations de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Partie C**

**1.** Soit $\lambda$ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm$^2$ du domaine « ensemble des points $M$ du plan dont les coordonnées vérifient : $1\leqslant x\leqslant\lambda$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$ ». En utilisant les résultats de la partie **??** :

a) calculer $A(\lambda)$ en fonction de $\lambda$ ;



Retour page 1

b) déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque l tend vers $+\infty$;

c) justifier l'affirmation : « L'équation $A(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée $\lambda_0$ ». Puis donner un encadrement de $\lambda_0$ d'amplitude $10^{-2}$.

**2.** Soit $(u_n)$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^\star$ par : $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

Montrer en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

a) la suite $(u_n)$ est une suite croissante;

b) la suite $(u_n)$ est convergente, et préciser sa limite.

## III. Asie, série S

Ex. 2148. ______ *5 points.* *./1997/asieS/exo-1/texte.tex*

**1.** Une urne contient deux boules blanches et $n$ noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note $A_2$ l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ». Déterminer $n$ pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement $A_2$ soit égale à $\dfrac{1}{15}$.

**2.** Dans toute la suite du problème on prend $n = 4$.

A- *Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne* et on note :
$A_0$ l'événement : « le joueur a tiré deux boules noires »;
$A_1$ l'événement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche »;
$A_2$ l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

a) Calculer la probabilité des événements $A_0$ et $A_1$.

b) Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée. Soit $X$ le nombre de points marqués.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$. Déterminer $E(X)$.

Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules. Soit $B_i$ l'événement : « on obtient $i$ boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0,\ 1$ ou 2).

B- *i.* Donner $p(B_0|A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$. Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$. En déduire que $p(B_0) = \dfrac{41}{75}$.

*ii.* Montrer de même que $p(B_2) = \dfrac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

Ex. 2149. ______ *./1997/asieS/exo-2/texte.tex*

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormal direct $(O\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$.

**1.** Soit le polynôme $P$ tel que, pour tout $z$ de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$

Déterminer les réels $u$ et $v$ tels que $P(z) = (z-2)(z^2 + uz + v)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

**2.** On note $\alpha$ la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et $\beta$ le conjugué de $\alpha$. Soit $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $\alpha$, $\beta$ et 2, I le milieu de [AB] et $r$la rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ . Déterminer l'affixe du point $r(B)$ et en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.

**3.** Soit $f$ l'application de $\mathscr{P}$ privé du point $C$ dans $\mathscr{P}$ qui au point $M$ d'affixe $z$ ($z \neq 2$) associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{z - (1 + \mathrm{i})}{z - 2}.$$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. Déterminer le point $E$ tel que $f(E) = C$.

b) Quelles distances représentent les réels $|z - (1 + i)|$ et $|z - 2|$? En déduire que si $M$ appartient à la médiatrice de $[AC]$, $M'$ appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.



Retour page 1

**Ex. 2150.** 5 points, spécialité. ./1997/asieS/exo-3/texte.tex

On considère (C) et (C') deux cercles de centres respectifs $O$ et $O'$ et de rayons $r$ et $2r$ tangents extérieurement en $A$, de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AA']$.
Soit $M$ un point quelconque de (C), distinct de $A$ et $B$, et $M'$ un point de $(C')$ tel que le triangle $AMM'$ soit rectangle en $A$ (on prendra pour la figure $r=2$ cm).

**1.** a) Déterminer en justifiant les réponses :

— le rapport de l'homothétie $h_1$ de centre $A$ qui transforme $(C)$ en $(C')$.

— le centre $I$ de l'homothétie $h_2$ distincte de $h_1$ qui transforme $(C)$ en $(C')$.

Placer $I$ sur la figure.

b) On note $M_1 = h_1(M)$.
Montrer que le point $M_1$ est le point de $(C')$ diamétralement opposé à $M'$.
Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite $(MM')$ passe par un point fixe, lorsque $M$ décrit le cercle $(C)$ privé des points $A$ et $B$.

**2.** La droite $(MM')$ recoupe $(C)$ en $N$ et $(C')$ en $N'$.
Quelle est l'image de $N$ par $h_2$ ?
Montrer que $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN'}, \overrightarrow{AM'})$ (mod $\pi$) et en déduire que le triangle $ANN'$ est rectangle en $A$.

**3.** Soit $\omega$ le milieu de $[MM']$. Montrer que $\omega$ appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon (on pourra utiliser le milieu $D$ de $[OO']$.

## PROBLÈME 808 — 10 points. ./1997/asieS/pb/texte

Pour tout entier $n$ strictement positif on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie A**
**Étude pour** $n=1$

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour $C_1$ ?

**2.** Étudier le sens de variation de $f_1$ et donner le tableau des variations de $f_1$.

**3.** Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe $C_1$.
Étude pour n = 2

**4.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$.
Que peut-on en déduire pour $C_2$ ?

**5.** Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de $f_2$.

**Partie B**

**1.** Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ ; en déduire la position relative de $C_1$ et $C_2$.

**2.** Tracer $C_1$ et $C_2$.

**Partie C**

$n$ étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**1.** . On pose $F(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire $I_1$.

**2.** En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.$$



Retour page 1

**3.** Calculer $I_2$ puis l'aire en cm$^2$ du domaine compris entre les courbes $C_1$ et $C_2$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

**Partie D**

**1.** En utilisant la question 2 de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!}I_n = 1-\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

**2.** En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[[1\,;\mathrm{e}]$, montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$

3. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

## IV. Centres étrangers groupe 1, série S

Ex. 2151. ./1997/centresetrangersg1S/exo-spe/texte.tex

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 5 cm, on donne les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives i, $\sqrt{2}$, et $\sqrt{2}+\mathrm{i}$.
On appelle $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[AC]$ et $[BC]$ et $s$ la similitude directe qui transforme $A$ en $I$ et $O$ en $B$.

**1.** a) Déterminer le centre et l'angle de $s$.

b) Donner l'écriture complexe de $s$.

c) En déduire l'affixe $\omega$ du centre $\Omega$ de $s$. Représenter $\Omega$ dans la plan P.

d) Quelle est l'image du rectangle $OABC$ par $s$.

**2.** On considère la transformation $s^2 = s\circ s$.

a) Quelles sont les images des points $O$, $A$ et $B$ par $s^2$ ?

b) Montrer que $s^2$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) En déduire que les droites $(OC)$, $(BJ)$ et $(AK)$ sont concourantes.

**3.** On définit la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$A_0 = A$ et pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1} = s(A_n)$.

a) Placer les points $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sur la figure du 1c.

b) On note $u_n$ la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

- Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
- Calculer $u_0$ et en déduire $u_n$ en fonction de $n$.
- Calculer $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n$ en fonction de $n$.
- Quelle est la limite de $S_n$ en fonction de $n$ ?

## V. Groupe I bis, série S

Retour page 1

**Ex. 2152.** *4 points.* *./1997/groupeIbis/exo-1/texte.tex*

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.

On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance. On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux ». On note B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

**1.** a) Définir l'événement contraire de A que l'on notera

b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{\text{A}}$.

**2.** a) Calculer $p(\text{B}/\text{A})$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(\text{B} \cap \text{A})$.

b) Calculer $p(\text{B})$.

**3.** Calculer $p(\text{A}/\text{B})$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

**Ex. 2153.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1997/groupeIbis/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 4 cm. On note $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $2\text{i}$, $-1$ et i.

On considère l'application $f$ de $\mathscr{P} - \{A\}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point $M$ de $\mathscr{P} - \{A\}$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2\text{i}}.$$

**1.** a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b) Déterminer l'affixe du point $C'$ image de $C$. Quelle est la nature de quadrilatère $ACBC'$ ?

c) Montrer que le point $C$ admet un unique antécédent par $f$ que l'on notera $C'$.
Quelle est la nature du triangle $BCC'$ ?

**2.** Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de $z'$.

**3.** Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :

a) L'ensemble $E_b$ des points $M$ dont les images par $f$ ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.

b) L'ensemble $E_b$ des points $M$ dont les images par $f$ ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

c) ll4ensemble $E_c$ des points $M$dont les images appartiennent au cercle de centre $O$ et de rayon 1.

**Ex. 2154.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1997/groupeIbis/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 3 cm. Tout point $M$ du plan est repéré par son affixe $z$.

**1.** Déterminer et représenter l'ensemble E des points $M$ du plan tels que $|z| = 3$.

**2.** On considère la transformation $T$ qui à tout point $M$ du plan distinct de $O$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z'$ en fonction du module et de l'argument de $z$.

b) Déterminer et représenter l'ensemble E', dont les éléments sont les points $M'$ images des points $M$ de E. Préciser ses éléments caractéristiques.

**3.** Soit $N$ le point d'affixe $-\frac{1}{z}$.. Montrer que $M'$ est le milieu de $[MN]$.

**4.** Soit $A$ le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
Montrer que, lorsque le point $M$ décrit la demi-droite $[OA)$ privée du point $O$, le point $N$ décrit une demi-droite $D$. Tracer $D$.

**5.** Montrer que l'image de la demi-droite $[OA)$ privée du point $O$ par la transformation $T$ est une partie d'une hyperbole $H$.
Représenter $H$ après avoir donné ses éléments caractéristiques.



Retour page 1

## Problème 809 *11 points.*

*./1997/groupeIbis/pb/texte*

**Partie A**

Soit la fonction $\varphi$ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

**1.** Étudier le sens de variation de $\varphi$ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

**2.** Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule $\alpha$ et que l'on a :

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27.$$

**3.** En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

**1.** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \varphi(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de $f$.

**2.** Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

**3.** Soit $T$ la tangente à $(C)$ au point d'abscisse $0$. Donner une équation de $T$ et étudier la position de $(C)$ par rapport à $T$.

**4.** Chercher les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que la droite $D$ d'équation $y = x$ est asymptote à $(C)$ et étudier la position de $(C)$par rapport à $D$.

**5.** Faire le tableau de variation de $f$.

**6.** Tracer sur un même dessin $(C)$, $T$ et $D$. La figure demandée fera apparaître les points de $(C)$ dont les abscisses appartiennent à $[-2\,;4]$.

**Partie C**

On considère la fonction $g$, définie sur $[0\,;1]$ par : $g(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
On note $(L)$ la courbe représentative de $g$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $I$ le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $A$ le point d'abscisse $0$ de $(L)$ et $B$ son point d'abscisse $1$.

**1.** Étudier brièvement les variations de $g$.

**2.** Donner une équation de la tangente en $A$ à $(L)$.

**3.** On note $P$ l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.

**4.** On admet que la courbe $(L)$est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}.$$

**5.** Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**6.** En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Retour page 1

# VI. Groupe II bis, série S

**Ex. 2155.** *4 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-1/texte.tex*

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

**1.** On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

**2.** On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.

**3.** $n$ étant un nombre entier strictement positif, on effectue $n$ tirages successifs avec remise. On appelle $P_n$ la probabilité d'obtenir au cours de ces $n$ tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a) Calculer $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_n$ .

b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$. ($n > 1$). Exprimer $S_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite $S$ de $S_n$.

**Ex. 2156.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe $P$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par $A$ le point d'affixe i.
Á tout point $M$ du plan, distinct de $A$, d'affixe $z$, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ défini par :

$$z' = \frac{z^2}{\mathrm{i} - z}.$$

**1.** Déterminer les points $M$ confondus avec leur image $M'$.

**2.** Étant donné un complexe distinct de i, on pose : $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.
Montrer que :

$$x' = -\frac{x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

En déduire l'ensemble $E$ des points $M$ dont l'image $M'$ est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble $E$.

**3.** Trouver une relation simple liant les longueurs $OM$, $AM$ et $OM'$.
En déduire l'ensemble $F$ des points $M$ du plan tels que $M$ et $M'$ soient situés sur un même cercle de centre $O$. Dessiner l'ensemble $F$.

**4.** Dans toute cette question, on considère un point $M$ d'affixe $z$, situé sur le cercle de centre $A$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
$M'$ est le point d'affixe $z'$ correspondant, et $G$ l'isobarycentre des points $A$, $M$ et $M'$.
Calculer l'affixe $z_G$ de $G$ en fonction de $z$.
Montrer que $G$est situé sur un cercle de centre $O$ dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de $G$. En déduire celle de $M'$.

**Ex. 2157.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1997/groupeIIbis/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe P est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 1 cm pour unité de longueur.
On considère le point $J$ de coordonnées $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 6\right)$ et le cercle $(C)$ de diamètre $[OJ]$. On note $I$ son centre.
Les points $A$, de coordonnées $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$, et $B$, de coordonnées$(0\ ;\ 6)$, sont les projetés orthogonaux de $J$, respectivement sur les axes $(O\ ;\ \vec{u})$ et $(O\ ;\ \vec{v})$. On remarquera que le cercle $(C)$ est circonscrit au rectangle $OAJB$.

**1.** Soit $S$ la similitude directe de centre $O$ transformant $B$ en $A$.

a) Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.

b) Déterminer les images $I'$, $J'$, $A'$ des points $I$, $J$ et $A$ par la similitude $S$.

c) Soit $M$ un point quelconque du cercle $(C)$, et $M'$ son image par la similitude $S$. Quel est l'ensemble $(C')$ décrit par $M'$lorsque $M$ décrit $(C)$ ?

Représenter $(C')$ puis démontrer que, quel que soit le point $M$ du cercle $(C)$, les points $M$, $A$ et $M'$ sont alignés.

**2.** Soit $\Omega$ le point de coordonnées $\left(4+2\sqrt{3}\ ;\ 2\right)$.

On considère la rotation $R$ de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ .

a) Montrer que $J$ est l'image de $J'$ par $R$.

b) Pour tout point $M$ du plan $P$, on note $M'$ son image par $S$ et $M''$ l'image de $M'$ par $R$. Déterminer l'image de $J$ par la transformation $R \circ S$ (composée de $R$ et de $S$), puis une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{JM},\ \overrightarrow{JM''})$, où $M$ est distinct de $J$.

c. Montrer que $JM'' = JM$. En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JM''}$, et conclure quant à la nature de la transformation $R \circ S$.

## Problème 810 *11 points.*

*./1997/groupeIIbis/pb/texte*

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm.

**Partie A** *Étude d'une fonction $g$*

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et $C$ sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Étudiez les limites de $g$ en $0$ et en $+\infty$.

**2.** Étudiez les variations de $g$. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de $x$.

**3.** On note $C'$ la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \ln x$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrez que $C$ et $C'$ ont deux points communs d'abscisses respectives $1$ et $\mathrm{e}$ et que, pour tout $x$ élément de $[0\,;1]$ on a :

$$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x.$$

On ne demande pas de représenter $C$ et $C'$.

**4.** a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$$

.

b) Soit $D$ le domaine plan défini par :

$$D = \{M\,(x\ ;\ y)\ ;\ 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\}.$$

Déterminer, en cm$^2$, l'aire de $D$. Donner une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près de cette aire.

**Partie B** *Étude d'une fonction $f$*

Soit $f$ la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x.$$

.

**1.** Étudiez les limites de $f$ en $+\infty$ et en $1$ (pour l'étude de la limite en $1$, on pourra utiliser un taux d'accroissement).

**2.** Déterminer le tableau de variation de $f$ (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).

**3.** Tracer la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**Partie C** *Étude de l'équation* $f(x) = \dfrac{1}{2}$

**1.** Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution notée $\alpha$ et que $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

**2.** Soit $h$ la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que $\alpha$ est solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Étudier le sens de variation de $h$.

c) On pose $I = [3\,;4]$. Montrer que pour tout $x$ élément de $I$ on a $h(x)$ appartient à $I$ et $\left|h'(x)\right| \leqslant \dfrac{5}{6}$.

**3.** On définit la suite $(u_n)$ par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a) Pour tout entier naturel $n$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{5}{6}|u_n - \alpha|$.

b) Pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

c) La suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

**4.** Donner un entier naturel $p$, tel que des majoration précédentes on puisse déduire que $u_p$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
Indiquer une valeur décimale approchée à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

# VII. National S remplacement, Septembre 1997

**Ex. 2158.** *4 points* *./1997/nationalSrem/exo-1/texte.tex*

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- s'il a arrêté le $n$-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n+1)$- iéme] est $0{,}8$ ;
- s'il a laissé passer le $n$-iéme tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est $0{,}6$ ;
- la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est $0{,}7$.

Dans tout l'exercice, si $E$ est un événement, on note $p(E)$la probabilité de $E$ , $\overline{E}$ l'événement contraire de $E$. On note $p(E/F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement $E$ sachant que $F$ est réalisé.
$A_n$ est l'événement « le gardien arrête le $n$-iéme tir ». On a donc $p(A_1) = 0{,}7$.

1. a) Donner, pour $n \geqslant 1$, les valeurs de $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

   b) Exprimer $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de $p(A_n)$.

   c) En déduire que, pour tout entier strictement positif $n \geqslant 1$, on a : $p(A_{n+1}) = 0{,}2p(A_n) + 0{,}6$.

2. On pose à présent, pour $n \geqslant 1$, $p_n = P(A_n)$ et $u_n = p_n - 0{,}75$.

   a) Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $0{,}2$.

   b) En déduire une expression de $p_n$ en fonction de $n$.

   c) Montrer que $(p_n)$ admet une limite que l'on calculera.

**Ex. 2159.** ——— *5 points, Obligatoire.* *./1997/nationalSrem/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère :

**1.** le point $A$ d'affixe $a = 5 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ ;

**2.** le point B tel que le triangle $OAB$ soit équilatéral direct, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3}$ ;

**3.** le milieu $Q$ de $[OB]$.

1. a) Démontrer que $B$ a pour affixe $b = 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   En déduire l'affixe $q$ de $Q$.
   b) Déterminer l'affixe $z_K$ du point $K$ tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.
   c) Démontrer que $\dfrac{z_K - a}{z_k}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle $OKA$?
   Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.
   d) Placer les points $A$, $B$, $Q$ et $K$ dans le plan.
2. Soit $C$ le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$.
   a) Calculer $\dfrac{z_K - b}{z_k - c}$. Que peut-on en déduire pour les points $B$, $C$ et $K$ ?
   b) Placer $C$ sur la figure

b. .

**Ex. 2160.** ——— *5 points, Spécialité.* *./1997/nationalSrem/exo-3/texte.tex*

$n$ et $c$ étant deux entiers naturels non nuls, le but de cet exercice est de comparer le PGCD de $cn$ et de $2n+1$ au PGCD de $c$ et de $2n+1$, et de déterminer selon selon les valeurs de $n$, le PGCD des deux nombres $A = 3n$ et $B = 2n+1$.

1. Montrer que $n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. En utilisant le théorème de Bezout, démontrer que pour tout entier naturel $c$ non nul, le PGCD de $cn$ et de $2n+1$ est égal au PGCD de $c$ et de $2n+1$.
3. En déduire que le PGCD de $A$ et de $B$ est le PGCD de 3 et de $2n+1$.
4. Déterminer le PGCD de 3 et de $2n+1$ selon les valeurs de $n$ en utilisant, par exemple, les 3 valeurs possibles du reste dans la division euclidienne de $n$ par 3.

## Problème 811 *11 points.* *./1997/nationalSrem/pb/texte*

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + \mathrm{e}^{2x}.$$

I- **Étude des variations de $f$**

1. Calculer, pour tout nombre réel $x$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre réel $x$, on a $f''(x) > 0$.
   b) En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule qu'on note $\alpha$.
   c) Vérifier la double inégalité $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$.
3. a) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x$, le signe de $f'(x)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Tracer, en se limitant à l'intervalle $\left[-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).

II- **Interprétation géométrique de $f$**

On note $\Gamma$ la courbe représentative, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ introduit dans la partie I, de la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x}.$$



Retour page 1

1. a) Exprimer la distance $OM$ du point $O$ au point $M$ de $\Gamma$ d'abscisse $x$ en fonction de $f(x)$.
   b) Traduire alors les résultats obtenus dans la partie I en une propriété concernant la variation de la distance $OM$ quand $M$ parcourt $\Gamma$.
2. Soit $A$ le point de $\Gamma$ d'abscisse $\alpha$ ($\alpha$ a été introduit dans la partie I ; on rappelle que $f'(\alpha) = 0$).
   a) Écrire une équation de la tangente $T$ à $\Gamma$ en $A$.
   b) Quelle relation peut-on écrire entre les coefficients directeurs des droites $(OA)$ et $T$ ? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. On note $\beta$ l'abscisse du point d'intersection de la droite $T$ avec l'axe $(O; \vec{\imath})$. Calculer en fonction de $\alpha$ et en cm$^2$ l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $\Gamma$, la tangente $T$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$.

## VIII. Nouvelle Calédonie, série S

**Ex. 2161.** *5 points.* *./1997/nllecaledonieS/exo-1/texte.tex*

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement $E$ et $p(E/F)$ la probabilité conditionnelle de $E$ sachant $F$.
Un client téléphone à l'artisan.
On note :
$R$ l'évènement « le client obtient le répondeur » ;
$A$ l'évènement « l'artisan est présent » ;
$\overline{A}$ l'évènement contraire de $A$.

1. Déterminer la probabilité $p(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelle $p(R/A)$ et $p(R/A)$.
2. a) Exprimer $p(R)$ en fonction de $p(R/A)$, $p(R/\overline{A})$ et $p(A)$.
   b) En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}p(A) + 1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.
3. Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

**Ex. 2162.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1997/nllecaledonieS/exo-2/texte.tex*

1. On considère l'équation d'inconnue complexe $z$ :
$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$
   a) Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   b) Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
   Les points $I$ et $J$ du plan ont pour af?xes respectives : $z_1 = -\sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = -\sqrt{3} - \text{i}$.
   a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 2, et placer les points $I$ et $J$ sur la?gure.
   b) Montrer que le point $J$ est l'image du point $I$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   c) En déduire la nature du triangle OIJ.
3. Soit $B$ le milieu du segment $[OI]$.
   a) Déterminer l'affixe du point $B$ et placer le point $B$ sur la?gure.
   b) Préciser la nature du triangle $JBO$.
4. Soit $A$ le point du plan dé?ni par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$.
   a) Déterminer l'affixe du point $A$ et placer le point $A$ sur la figure.
   b) Vérifier que le point $A$ est l'image du point $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   c) Montrer que le point $A$ est le barycentre des points $J$, $O$, $B$ affectés de coef?cients que l'on déterminera.



Retour page 1

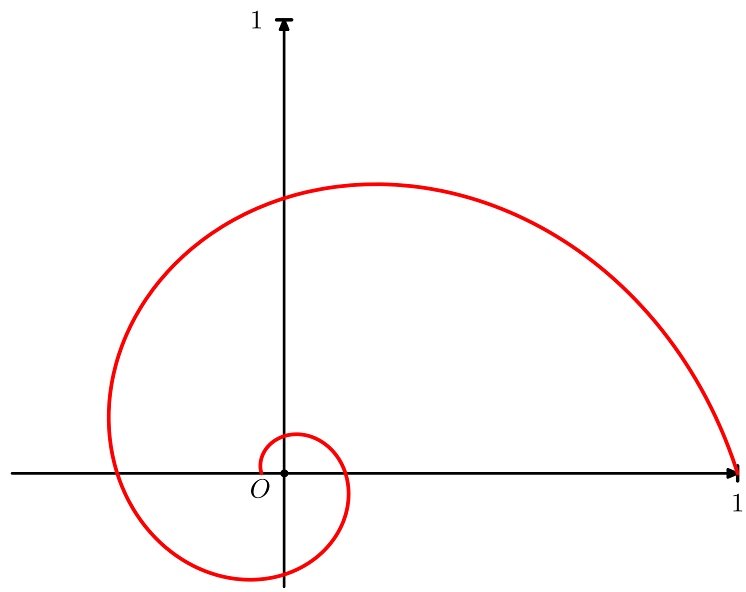
**Ex. 2163.** ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1997/nllecaledonieS/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe $P$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 15 cm).
Soit $t$ un nombre réel positif. On note $M(t)$ le point de $P$ de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ définies par :

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right). \end{cases}$$

Quand $t$ varie dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, le point $M(t)$ parcourt une courbe paramétrée notée $\Gamma$.
On a représenté sur la figure donnée, la partie de $\Gamma$ correspondant aux valeurs de $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;6]$.
Le but de l'exercice est d'étudier des propriétés géométriques de certains points de $\Gamma$

1. a) Exprimer en fonction de $t$ , l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$.
   b) Préciser le module et un argument de $z(t)$.
   c) Tracer les points $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ et $M(4)$ sur la figure donnée en annexe.
2. a) Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+1)$ en fonction de $z(t)$. En déduire que $M(t+1)$ est l'image de $M(t)$ par la similitude directe de centre $O$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ et d' angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note $s$ cette similitude.
   b) Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+2)$ en fonction de $z(t)$. Justifier que $M(t+2)$ est l'image de $M(t)$ par une homothétie $h$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.
   a) Les points $M(2)$ et $h(M(0))$ sont confondus.
   b) Les points $M(1)$ et $M(3)$ sont symétriques par rapport au point $O$.
   c) Les points $M(n)$, où $n$ est un entier naturel, sont les points d'intersection de$\Gamma$ avec les axes de coordonnées.




**PROBLÈME 812** *10 points.* *./1997/nllecaledonieS/pb/texte*

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $C$ et $\Gamma$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 4 cm).

A- **Étude des fonctions $f$ et $g$**



Retour page 1

1. a) Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à $C$.

   c) Prouver que le point $\Omega$ de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $C$.

   d) On note $T$ la tangente à $C$ au point $\Omega$. Déterminer le coefficient directeur de $T$.

   e) Représenter $T$ et $C$.

2. a) En observant que, pour tout nombre réel $x$, on a $g(x) = f(-x)$, montrer que $\Gamma$ est l'image de $C$ par une symétrie que l'on déterminera.

   b) Véri ?er que, pour tout nombre réel $x$, on a $f(x) + g(x) = 1$. En déduire que $\Gamma$ est l'image de $C$ par une autre symétrie que l'on déterminera.

   c) Déterminer le coefficient directeur de la tangente $T'$ à $\Gamma$ au point $\Omega$.

   d) Représenter $T'$et $\Gamma$ sur la figure de la question A1.

B- **Calcul d'une aire** On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En utilisant l'égalité de la question A(2)b, calculer $I + J$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre réel $t$, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}$.

   b) En déduire une primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$, puis la valeur de $J$.

3. Calculer la valeur de $I$.

4. a) Prouver que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$.

   b) On note $\Delta$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x). \end{cases}$$

   On note $A$ l'aire, exprimée en cm$^2$ , du domaine $\Delta$. Exprimer $A$ en fonction de $I$ et $J$. Donner une approximation décimale de $A$ à $10^{-2}$ près.

C- **Étude d'une fonction définie par une intégrale**

On considère les fonctions $h$ et $H$ définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^x \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \qquad \text{et} \qquad H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a) Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0\,;+\infty[$, $h(x)$ est strictement positif.

   b) En déduire que $H$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

   c)

2. On note $h'$ la fonction dérivée de $h$. Vérifier que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $[0\,;+\infty[$, $h(x) = h'(x) + g(x)$. En déduire $H(x)$ en fonction de $x$.

3. a) Véri ?er que, pour tout nombre réel x appartenant à [$[0\,;+\infty[$,

   $h(x) = \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}}$.

   En déduire la limite de $h$ en $+\infty$.

   b) Déterminer la limite de $H$ en $+\infty$. Prouver finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} [H(x)?x] = 1?2\ln 2$.

   Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

   c)

Retour page 1

# IX. Polynésie, série S

**Ex. 2164.** ——— *4 points.* *./1997/polynesieS/exo-1/texte.tex*

Les questions 1, 2 et **??** sont indépendantes.
Tous les résultats de calcul des probabilités seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.
Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

**1.** À chaque séance du cours de mathématiques le professeur interroge au hasard trois élèves. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »,
B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »,
C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés ».

**2.** Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles. On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
D : « Les deux délégués sont internes »,
E : « Un seul des deux délégués est interne ».

**3.** À la fin de chaque séance, le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.

a) Déterminer la probabilité $p_n$ pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de $n$ séances.

b) Déterminer le nombre minimal de séances pour que $p_n$ > 0,9999.

**Ex. 2165.** ——— *Enseignement Obligatoire 6 points.* *./1997/polynesieS/exo-3/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6+6\mathrm{i}$ d'image $A_0$.
Pour tout $n$ entier naturel non nul, on désigne par $A_n$ le point d'affixe $z_n$ définie par $z_n = a^n z_0$ .

Partie A

**1.** Exprimer $z_1$ et $a^2$ sous forme algébrique. Écrire $z_1$ sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

**2.** Exprimer $z_3$ puis $z_7$ en fonction de $z_1$ et $a^2$ ; en déduire l'expression de $z_3$ et $z_7$ sous forme exponentielle.

**3.** Placer les points $A_0,\ A_1,\ A_3$ et $A_7$ images respectives des complexes $z_0, z_1, z_3$ et $z_7$.

Partie B

Pour tout $n$ entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

**1.** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

**2.** En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

**3.** Déterminer la limite de la suite $(r_n)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**4.** Déterminer le plus petit entier naturel $p$ tel que $OA_p < 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\ \overrightarrow{OA_p})$.

**Ex. 2166.** ——— *Enseignement de Spécialité 6 points.* *./1997/polynesieS/exo-2/texte.tex*

Partie A Soient, dans l'espace $E$, quatre points $A,\ B,\ C$ et $D$ distincts deux à deux.

**1.** Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $D$ est le barycentre du système $\{(A,\ 1), (B,\ -1), (C,\ 1)\}$.

**2.** On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme.
Déterminer l'ensemble $(S)$ des points $M$ de l'espace $E$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = BD.$$



Retour page 1

**3.** On suppose maintenant que $ABCD$ est un rectangle.
Déterminer l'ensemble $(S)$des points $M$ de l'espace $E$ tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2.$$

Partie B

On considère dans l'espace $E$ deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ainsi que les milieux $I$, $J$, $K$ et $L$ de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ respectivement.

**1.** Montrer que $L$ est barycentre des points $I$, $J$ et $K$ affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

**2.** Soient $O$, $Q$et $P$ les centres respectifs des parallélogrammes$IJKL$, $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Montrer que $O$ est le milieu de $[PQ]$.

## **Problème 813** *10 points.*

./1997/polynesieS/pb/texte

Le but du problème est l'étude d'une fonction f, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\left\|\vec{\imath}\right\| = 2$ cm et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 5$ cm.

Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

On note $(C)$ sa courbe représentative.

**1.** Montrer que f est paire. Étudier ses variations sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$ ?
Tracer sa courbe $(C)$.

**2.** Montrer que $f$ établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1]$.
On note $y$ un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1]$. Exprimer en fonction de $y$ le seul réel positif $x$ vérifiant $f(x) = y$.

Partie B

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(On admettra que, pour tout réel $x$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.)

**1.** Calculer $F'(x)$. En déduire que $F$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

**2.** a) Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$.

b) Montrer que $F$ est impaire.

c) En déduire la limite de $F$ en $-\infty$.

**3.** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm$^2$ de la partie du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de $\lambda$ ; donner la valeur exacte de $A(\lambda)$ et déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

Partie C

On pose $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n == \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ .

**1.** Calculer $u_0$. Calculer $u_3$ à l'aide d'une intégration par parties. (Remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

**2.** Montrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$ . En intégrant cette double inégalité sur $[0\,;1]$, montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

Retour page 1

# X. Polynésie remplacement, série S

**Ex. 2167.** ——— *Enseignement Obligatoire 6 points.* *./1997/polynesieSrem/exo-3/texte.tex*

### Partie A.

Soient, dans l'espace E, quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ distincts deux à deux.

**1.** Montrer que $ABCD$est un parallélogramme si, et seulement si, $D$ est le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ -1),\ (C,\ 1)\}$.

**2.** On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble $(S)$ des points $M$ de l'espace E tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = BD.$$

**3.** On suppose maintenant que $ABCD$ est un rectangle. Montrer que pour tout point $M$ de E,

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2.$$

Déterminer l'ensemble $(\Sigma)$ des points $M$ de l'espace E tels que

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2.$$

### Partie B.

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ainsi que les milieux $I$, $J$, $K$ et $L$ de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ respectivement.

**1.** Montrer que $L$ est barycentre des points $I$, $J$ et $K$ affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

**2.** Soient $O$, $Q$ et $P$ les centres respectifs des parallélogrammes $IJKL$, $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Montrer que $O$ est le milieu de $[PQ]$.

**Ex. 2168.** ——— *Enseignement de Spécialité 6 points.* *./1997/polynesieSrem/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6+6\mathrm{i}$ d'image $A_0$. Pour tout $n$ entier naturel non nul, on désigne par $A_n$ le point d'affixe $z_n$ définie par $z_n = a^n z_0$.

### Partie A

**1.** Exprimer $z_1$ et $a^2$ sous forme algébrique. Écrire $z_1$ sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

**2.** Exprimer $z_3$ puis $z_7$ en fonction de $z_1$ et $a^2$ ; en déduire l'expression de $z_3$ et $z_7$ sous forme exponentielle.

**3.** Placer les points $A_0$, $A_1$, $A_3$ et $A_7$ images respectives des complexes $z_0$, $z_1$, $z_3$ et $z_7$.

### Partie B

Pour tout $n$ entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

**1.** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

**2.** En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

**3.** Déterminer la limite de la suite $(r_n)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**4.** Déterminer le plus petit entier naturel $p$ tel que $OA_p \leqslant 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\ \overrightarrow{OA_p})$.

Retour page 1

### 🏛Problème 814 *10 points.* ./1997/polynesieSrem/pb/texte

Le but du problème est l'étude d'une fonction $f$, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\left\|\vec{\imath}\right\| = 2$ cm et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 5$ cm.

**Partie A**

Soit $f$la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On note $(C)$ sa courbe représentative.

**1.** Montrer que $f$ est paire. Étudier ses variations sur $[0\,;+\infty[$et déterminer sa limite en $-\infty$. Tracer sa courbe $(C)$.

**2.** Montrer que $f$ établit une bijection de $[[0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1]$. On note $y$un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1[$. Exprimer en fonction de $y$ le seul réel positif $x$ vérifiant $f(x) = y$.

**Partie B**

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. (On admettra que, pour tout réel $x$, $x+\sqrt{1+x^2} > 0$.

**1.** Calculer $F'(x)$. En déduire que $F$ est la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

**2.** a) Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$.

b) Montrer que $F$ est impaire.

c) En déduire la limite de $F$ en $-\infty$.

**3.** Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm$^2$ de la partie du plan constituée des points $M((x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de $\lambda$ ; donner la valeur exacte de $\mathscr{A}(\lambda)$ et déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

**Partie C**

On pose $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

**1.** Calculer $u_0$. Calculer $u_3$ à l'aide d'une intégration par parties.

(Remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.)

**2.** Montrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

**3.** En intégrant cette double inégalité sur $[[0\,;1]$, montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

## XI. Réunion, série S

### 🏛Problème 815 ./1997/reunionS/pb/texte

Pour tout entier naturel $n$ non nul, soit $f_n$ la fonction définie sur $I = [0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $a$ un élément non fixé dans $I$. Pour tout entier naturel $n$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

**1.** Calculer $I_0(a)$.

**2.** Montrer que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) + f_n(x).$$



Retour page 1

**3.** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}.$$

**4.** Montrer alors que, pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

**5.** Dans cette question, on pose $a = 1$.
On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de $u_n$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ et tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}x^n$.

c) En déduire l'encadrement valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

Quelle est alors la limite de la suite $(u_n)$ ?

d) Montrer enfin que

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right)$$

Retour page 1

CHAPITRE XL

# 1998.

## Sommaire



## I. Amérique du Nord, série S

Ex. 2169. *5 points.* *./1998/ameriquenordS/exo-1/texte.tex*

Afin de créer une loterie, on met dans une urne $n$ billets différents ($n$ supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

**1.** Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.

a) On suppose ici $n = 10$. $X$ désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.
Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) On revient au cas général avec $n$ supérieur ou égal à 3.
Calculer la probabilité, notée $p_n$, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

**2.** Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a) On suppose ici $n = 10$. $Y$ désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets choisis.
Déterminer la loi de probabilité de $Y$.

b) On revient au cas général avec $n$ supérieur ou égal à 3.
Calculer la probabilité, notée $q_n$, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

**3.** a) Montrer que pour tout $n$ supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

b) En remarquant que pour tout entier $n$, $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n$ supérieur ou égal à $n_0$, on ait

$$p_n - q_n < 10^{-3}$$

c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

**Ex. 2170.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/ameriquenordS/exo-2/texte.tex*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point $M$ du plan, d'affixe $z$, $M_1$ d'affixe $z_1$, désigne l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis $M?$ d'affixe $z'$ l'image de $M_1$ par la translation de vecteur $-\vec{u}$. Enfin, on note $T$ la transformation qui à chaque point $M$ associe le point $M?$.

1. a) Démontrer :

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z - 1.$$

   b) Déterminer l'image du point $B$.

   c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x$ et $y$ réels.

   a) Pour $z$ non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$. en fonction de $x$ et de $y$.

   b) Démontrer que l'ensemble $(E)$, des points $M$ du plan tels que le triangle $OMM?$ soit rectangle en $O$, est un cercle $(C)$, dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer $(E)$.

3. . Dans cette question on pose $z = 1 + \mathrm{i}$.

   a) Vérifier que $M$appartient à $(E)$. Placer $M$ et $M?$ sur la?gure.

   b) Calculer le module de $z'$.

   c) Calculer l'aire, en cm$^2$, du triangle $OMM?$.

**Ex. 2171.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/ameriquenordS/exo-3/texte.tex*

1. Dans cette question, $a$ est un entier strictement supérieur à 2.

   a) Démontrer que le nombre $N = (a-2)^2$ s'écrit $\overline{(a-2)1}$ en base $a$.

   b) Comment s'écrit en base $a$ le nombre $P = 2(a-1)$ ?

2. Dans cette question, $b$ est un entier naturel strictement supérieur à 3.

   a) Comment s'écrit en base $b$ le nombre $Q = (b-1)^3$ ?

   b) Écrire en base $b$ le nombre $(b+2)(b-1)^2$.

Quelle remarque peut-on faire ?

## PROBLÈME 816 *10 points.* *./1998/ameriquenordS/pb/texte*

On désigne par $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées $f_n$, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}.$$

.

A- I) **Étude des fonctions $f_n$**

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Étudier le signe de $f_n'(x)$
3. Déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$.
4. Établir le tableau de variations de la fonction $f_n$ et calculer sa valeur maximale en fonction de $n$.

II) **Représentation graphique de quelques fonctions $f_n$**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, (unité graphique : 5 cm). On note $C_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans ce repère.

1. Tracer $C_2$ et $C_3$.
2. a) Calculer $f_{n+1}(x)?f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier $n$ ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $C_4$ à partir de $C_2$ et $C_3$. Tracer $C_4$.

B- **Calculs d'aires**

1. Calculer en intégrant par parties, l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes $C_n$, $C_{n+1}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
3. On note $A_n$ l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $C_n$, et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

   a) Calculer $A_2$.

   b) Déterminer la nature de la suite $A_n$ en précisant l'interprétation graphique de la raison.

C- **Étude sur l'intervalle** $]1\,;+\infty[$ **de l'équation** $f_n(x) = 1$.

Dans toute la suite, on prendra $n > 3$.

1. a) Vérifier que pour tout $n$, $\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.

   b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1\,;\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\,;+\infty\right[$ exactement une solution notée $\alpha_n$.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)$.

   a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que pour $n > \mathrm{e}^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite $(\alpha_n)$.

## II. Amérique du Sud, série S

**A**Ex. 2172. ———— *4 points.* *./1998/ameriquesudS/exo-1/texte.tex*

Le plan est rapport au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct ; unité graphique 2 centimères.

*On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice.*

Soit I le point d'affixe 2i.

On nomme $f$ la transformation qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = \mathrm{i}z$.

**1.** a) Préciser la nature de $f$ ainsi que ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'affixe du point $A'$, image par $f$ du point $A$ d'affixe 1 + $\sqrt{2} + \mathrm{i}$.

c) Montrer que les points A, I et A' sont alignés.

**2.** a) Montrer que l'ensemble (Γ) des points $M$ du plan tels que $M$, I et $M'$ sont alignés, est le cercle de centre $\Omega$ d'affixe 1 +i et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Vérifier que le point A appartient à(Γ).

c) Déterminer l'ensemble (Γ′) décrit par le point $M'$ lorsque le point $M$ décrit (Γ).

**3.** Soit B le point d'affixe 2 + 2i et B′ l'image de B par $f$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (AB′) sont perpendiculaires.

b) Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A′B). Déterminer la nature du quadrilatère OACA′.

Retour page 1

Ex. 2173. —————— *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1998/ameriquesudS/exo-2/texte.tex

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

**1.** En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.

**2.** On désigne le point $M$ un point quelconque de $\mathscr{P}$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E_1$ des points $M$ du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$$

**3.** On considère le système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; $n$) ; (C ; $n$)} où $n$ est un entier naturel fixé.

a) Montrer que le barycentre $G_n$ de ce système de points pondéré existe. Placer $G_0$, $G_1$, $G_2$.

b) Montrer que le point $G_n$ appartient au segment [AH].

c) Calculer la distance $AG_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de $AG_n$ quand $n$ tend vers + $\infty$.
Préciser la position limite de $G_n$ quand $n$ tend vers + $\infty$.

d) Soit $E_n$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|$$

Montrer que $E_n$ est un cercle qui passe par le point A.
En préciser le centre et le rayon, noté $R_n$.

e) Construire $E_2$.

Ex. 2174. —————— *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1998/ameriquesudS/exo-3/texte.tex

Le plan est rapporté un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est 4 cm.
On considère les points A(1 ; 0), C(0 ; 1), D(0 ; - 1) et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit $M$ un point du cercle (Γ), d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C.
La droite (D$M$) rencontre l'axe des abscisses au point I.
Le point $N$ est le point d'intersection de la droite (O$M$) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I.

**1.** Réaliser la figure.

**2.** On note $t$ une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath},\ \overrightarrow{OM})$.
On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point $N$ lorsque $t$ décrit l'intervalle$[0\,;\pi]$ privé de $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les coordonnées de $M$ en fonction de $t$.

b) Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{\cos t}{1+\sin t}\ ;\ 0\right)$ puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $N$ sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t} \qquad y(t) = \frac{\sin t}{1+\sin t}.$$

**3.** a) Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$.
En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F).

b) Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

**4.** a) Calculer, en fonction de $t$, la distance O$N$ puis la distance de $N$ ?la droite d'équation $y = 1$.

b) En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.

c) Tracer l'ensemble (F).

Retour page 1

## Problème 817 *11 points.*

*./1998/ameriquesudS/pb/texte*

A- **Résolution d'une équation différentielle**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0. \qquad (E_0)$$

2. Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2. \qquad (E)$$

Vérifier que le polynôme $h$ défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.

3. a) Montrer que si $f$ est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout $x$ réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction $g$, telle que $g = f - h$, est solution de ($E_0$).

   b) Réciproquement, montrer que si $g$ est solution de ($E_0$) alors la fonction $f$, telle que $f = g + h$, est solution de (E).

   c) En déuire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire une solution $\varphi$ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$.

B- **Étude de la fonction $f$ et tracé de sa courbe représentative**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ; (unité graphique. 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de $f$ en + $\infty$. On pourra montrer que :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

   b) Déterminer la limite de $f$ en - $\infty$.

   c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ réel et en déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. *i.* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique. On note $\alpha$ cette solution.

   *ii.* Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle$[1{,}7\,;\,1{,}8]$.

3. On appelle $\Gamma$ la parabole d'équation $y = x^2$.

   *i.* Éudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\Gamma$.

   *ii.* Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

4. Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ et la parabole $\Gamma$.

C- **Calculs d'aires**

Soit $a$ un nombre réel strictement inférieur ?1. On appelle $D_a$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

On note A($a$) l'aire du domaine D, exprimé en unité d'aire.

1. Montrer que A($a$) $= 2(a-1)\mathrm{e}^{(a-1)} - 2\mathrm{e}^{(a-1)} + 2$.
   (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer l'aire A(0) du domaine D.
3. Déterminer la limite de $A(a)$ quant $a$ tend vers $-\infty$.

D- **Calcul de probabilité**

Sur la feuille de papier millimétré de la partie **??**, on place les points $(1\ ;\ 0)$, $J(0\ ;\ 1)$ et $K(1\ ;\ 1)$. On utilise cette feuille comme cible.

On admet que, pour chaque essai :

— la probabilité d'atteindre un point du carré $OIJK$ est égale à $\frac{1}{2}$. ;



Retour page 1

— sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à $D_0$ est égale à A(0).

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine $D_0$ est égale à 1 - $\frac{2}{e}$.
2. On effectue $n$ essais ($n$ entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.
   *i.* Exprimer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ d'atteindre au moins une fois un point du domaine $D_0$ au cours de ces $n$ essais.
   *ii.* Déterminer le nombre minimal $n$ d'essais pour que cette probabilité $p_n$ soit supérieure ou égale à 0,99.

## III. Antilles & Guyane, série S

Ex. 2175. *4 points.* *./1998/antillesS/exo-1/texte.tex*

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents. Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.
2. On tire simultanément trois dominos du sac.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?
3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des évè- nements suivants :
   a) $J_2$ : « Le jaune ?gure deux fois »
   b) $J_1$ : « Le jaune figure une fois »
   c) $J$ : « Le jaune figure au moins une fois ».
4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur(s) obtenue(s) avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants.
   Calculer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ , que $J$ soit réalisé au moins une fois.
   Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

Ex. 2176. *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/antillesS/exo-2/texte.tex*

A- 1. On considère le polynôme $P$ de la variable complexe $z$ défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7.$$

a) Calculer $P(\mathrm{i})$ et $P(-\mathrm{i})$.
b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q$ du second degré, que l'on déterminera, tel que :

$$\text{pour tout } z \text{ dans } \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z^2+1)Q(z).$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

B- Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
a) Placer dans ce repère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}$, $z_B = -\mathrm{i}$, $z_C = -\sqrt{3}$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.
Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.
b) Montrer qu'il existe une rotation de centre $O$ qui transforme $C$ en $D$. Calculer une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.
c) Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}.$$

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

Retour page 1

Ex. 2177. Enseignement de Spécialité 5 points. ./1998/antillesS/exo-3/texte.tex

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère $f$ l'application de du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe :

$$z'=\frac{1}{2}\mathrm{i}z+\frac{1-3\mathrm{i}}{2}.$$

**1.** Montrer que $f$ est une similitude directe dont on précisera le centre $\Omega$, le rapport $k$ et l'angle $\theta$.

**2.** Soit $M_0$ le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3\mathrm{i}$. Pour tout entier naturel $n$, le point $M_{n+1}$ est défini par $M_{n+1}=f(M_n)$.

a) En utilisant la première question 1, calculez $\Omega M$ en fonction de $n$.

b) Placer le point $M_0$ et construire les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$.

c) Á partir de quel rang $n_0$ a-t-on : « pour tout $n\geqslant n_0$, $M_n$ appartient au disque de centre $\Omega$ et de rayon $r=0{,}05$ »?

**3.** a) Calculer $M_0M_1$.

b) Pour tout entier $n$, on note $d_n=M_nM_{n+1}$. Montrer que $(d_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) On note $\ell_n=d_0+d_1+d_2+\cdots+d_n$. Calculer $\ell_n$ en fonction de $n$ et en déduire la limite de $\ell_n$ en $+\infty$.

**4.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $G_n$ l'isobarycentre des points $M_0$, $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$.

a) Montrer que pour tout $n>0$, $\Omega M_n\leqslant\dfrac{16}{n+1}$.

b) En déduire la position limite du point $G_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## Problème 818 *11 points.* ./1998/antillesS/pb/texte

**Partie A : Etude de fonctions** On considère les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x)=(x+1)e^{-x}\quad f_2(x)=-xe^{-x}\quad f_3(x)=(x-1)e^{-x}$$

On appelle $C_1$, $C_2$, $C_3$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. Les courbes $C_2$ et $C_3$ sont données sur le graphique ci-dessous.

**1.** Etude de la fonction $f_1$.

a) Calculer la dérivée $f_1'$ de $f_1$ et étudier son signe. En déduire les variations de $f_1$.

b) Déterminer les limites de $f_1$ en $+\infty$, en $-\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de $f_1$.

**2.** Etude graphique.

a) Identifier sur la figure donnée les courbes $C_2$ et $C_3$ et placer sur le dessin le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b) Etudier la position relative des courbes $C_1$ et $C_3$.

c) Tracer $C_1$ dans le même repère que $C_2$ et $C_3$ sur la figure fournie.

**3.** Etude d'équations différentielles.

a) Montrer que $f_1$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1)\quad y'+y=e^{-x}$$

b) Montrer que $f_1$ est aussi solution de l'équation différentielle :

$$(E_2)\quad y''+2y'+y=0$$

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$. En déduire que $f_2$ et $f_3$ sont aussi des solutions de $(E_2)$.

d) Parmi les solutions de $(E_2)$, quelles sont celles qui sont aussi solutions de $(E_1)$?

**Partie B : Etude d'aires liées à $C_1$ et $C_2$.** Pour $n$ entier strictement positif, on appelle $M_n$ le point de $C_3$ d'abscisse $n\ln 2$. On pose :

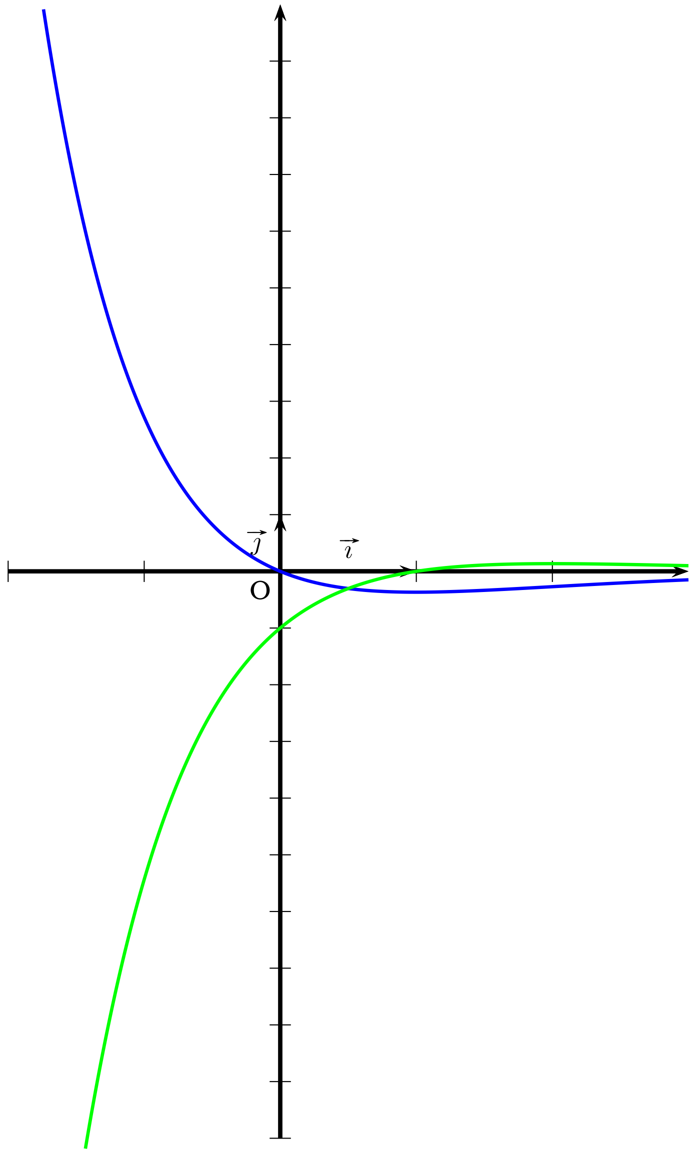
$$f(x)=f_1(x)-f_3(x)$$

pour tout $x$ réel.

Retour page 1

**1.** Calculer, en unités d'aire, l'aire $U_n$ du domaine plan limité par la courbe $C_3$, la courbe $C_1$ et les segments $[M_n, P_n]$ et $[M_{n+1}P_{n+1}]$ pour $n > 0$. $P_n$ et $P_{n+1}$ sont les projections orthogonales respectives de $M_n$ et $M_{n+1}$ sur $(O;\vec{\imath})$.

**2.** Calculer, en unités d'aire, l'aire $V_n$ du trapèze $P_nM_nM_{n+1}P_{n+1}$ pour $n > 0$. Montrer que le rapport $\dfrac{V_n}{U_n}$ est constant.




## IV. Centres étrangers I, série S

Ex. 2178. *4 points.* *./1998/centresetrangersIS/exo-1/texte.tex*

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue $n$ tirages successifs ($n$ entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on ne la remet pas. Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A.**

Dans cette partie, $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Si $k$ est un entier compris entre 1 et 3, on note $E_k$ l'événement « seule la $k$-ième boule tirée est blanche ».
Par exemple, $E_1$ est l'événement « seule la première boule tirée est blanche fg.

**1.** Montrer que la probabilité de l'événement $E_1$ est $\dfrac{5}{36}$.



Retour page 1

**2.** Calculer les probabilités des événements $E_2$ et $E_3$. En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.

**3.** Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

**Partie B.**
On effectue maintenant $n$ tirages.

**1.** Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ de tirer au moins une boule blanche en n tirages.

**2.** Quelles valeurs faut-il donner à $n$ pour que $p_n > 0{,}99$ ?

**Ex. 2179.** ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/centresetrangersIS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est de 3 cm. On considère les points $B$, $C$, $D$, $E$ définissant le carré de sens direct $BCDE$ d'affixes respectives :

$$b=1-\mathrm{i} \quad ; \quad c=-1-\mathrm{i} \quad ; \quad d=-1-3\mathrm{i} \quad ; \quad e=1-3\mathrm{i}.$$

**1.** Calculer $|b|$, $|c|$, $|d|$ et $|e|$.

**2.** Soit $(\Gamma)$ le cercle de centre $O$ passant par $B$. Déterminer une équation du cercle $(\Gamma)$. On considère $Q$ un point de $(\Gamma)$ distinct de $B$et $C$. L'affixe de $Q$ est notée $q=x+\mathrm{i}y$ (avec $x$ et $y$ réels).

**3.** Soient $F$ et $G$ les points du plan tels que $QBFG$ soit un carré de sens direct, c'est-à-dire tels que $(\overrightarrow{QB},\ \overrightarrow{QG})=+\dfrac{\pi}{2}$. On pose $Z=\dfrac{g-q}{b-q}$ où $g$est l'affixe du point $G$.
Interpréter géométriquement le module et un argument de $Z$.
En déduire $Z$.

**4.** Prouver que $g=(1+x+y)+\mathrm{i}(1-x+y)$. En déduire en fonction de $x$ et $y$.

**5.** En utilisant la question **??**, exprimer $|g|$ en fonction de $y$.

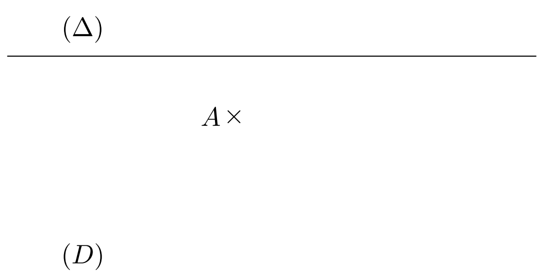
**6.** À l'aide de considérations géométriques, prouver que : $|f|=|g|$, $f$ étant l'affixe du point $F$.

**7.** Pour quelles valeurs de $x$ et de $y$ les points $E$, $D$, $G$ et $F$sont-ils sur un cercle de centre O ?
Préciser le rayon de ce cercle.
En déduire alors la nature du triangle $QBC$ ?

**Ex. 2180.** ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/centresetrangersIS/exo-3/texte.tex*

**Partie A :** *Où on construit un triangle équilatéral*

On considère la figure suivante où $(\Delta)$ et $(D)$ sont deux droites parallèles et $A$ un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'entre elles.




On se propose de construire un triangle équilatéral $ABC$ tel que $B$ et $C$ appartiennent respectivement aux droites $(\Delta)$ et $(D)$.
Dans toute la suite, on note $\mathscr{R}$ la rotation de centre $A$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.

**1.** On considère la droite $(D')$ image de $(D)$ par la rotation $\mathscr{R}$. Montrer que $(D')$ coupe $(D)$. On note $C$ le point d'intersection de $(D')$ et de $(D)$.

**2.** Soit $B=\mathscr{R}^{-1}(C)$. Montrer que le triangle $ABC$ répond au problème posé.

**3.** Construire la droite $(D')$ et placer les points $B$ et $C$.

Retour page 1

**Partie B :** *Où l'on calcule l'aire de ce triangle équilatéral*

Soit $O$ le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $(D)$. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(D)$ et $\vec{v}$ est choisi de sorte que le point $A$ ait pour affixe $a\text{i}$ ($a$ réel positif).
On note $\alpha$ la distance du point $A$ à la droite $(\Delta)$. Soit $B$ un point de $(D)$ d'affixe $z_B$ ($z_B$ est réel). On appelle $z_C$ l'affixe du point $C$ image de $B$ par la rotation $\mathscr{R}$.

**1.** Montrer que $z_C = \dfrac{1}{2}(z_B + a\sqrt{3}) + \dfrac{\text{i}}{2}(a + z_B\sqrt{3})$.

**2.** En déduire que le point $C$appartient à la droite $(D)$ si, et seulement si, $z_B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(a+2\alpha)$. Dans la suite, on prendra cette valeur pour $z_B$.

**3.** Exprimer $AB^2$ en fonction de $a$ et $\alpha$. En déduire que l'aire du triangle équilatéral $ABC$ est :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + a\alpha + \alpha^2).$$

## Problème 819 *11 points.*

*./1998/centresetrangersIS/pb/texte*

Le but du problème est l'étude d'une fonction $g_k$ où $k$ est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < \text{e}$.
Dans la partie A on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie B.

**Partie A.**

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2-x)\text{e}^x - k$$

.

**1.** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**2.** Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de $f$.
Calculer $f(1)$.

**3.** a) Établir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée $\alpha_k$ appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;1[$ et une autre notée $\beta_k$ appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

b) Montrer que $\text{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\text{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$. On démontrerait de même que $\beta_k$ vérifie l'égalité :

$$\text{e}^{\beta_k} - k\beta_k = (\text{e}^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1).$$

**4.** Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie B.**

**1.** Soit $u$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \text{e}^x - kx.$$

a) Étudier le sens de variation de $u$.

b) On rappelle que $0 < k < \text{e}$. Justifier la propriété suivante :

$$\text{pour tout réel } x, \text{e}^x - kx > 0.$$

**2.** Soit $g_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : . On note $(C_k)$ la courbe représentative de la fonction $g_k$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

a) Déterminer la limite de $g_k$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Prouver que : $g_k'(x) = \dfrac{kf(x)}{(\text{e}^x - kx)^2}$.

c) En déduire le tableau de variation de $g_k$. Calculer $g_k(1)$.



Retour page 1

**3.** On nomme $M_k$ et $N_k$ les points de la courbe $(C_k)$ d'abscisses respectives $\alpha_k$ et $\beta_k$.

a) En utilisant la question 3b (Partie A), montrer que : $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

b) Donner de même $g_k(\beta_k)$ .

c) Déduire de la question précédente que, lorsque $k$ varie, les points $M_k$ et $N_k$ sont sur une courbe fixe $(H)$ dont on donnera une équation.

**4.** Représentations graphiques pour des valeurs particulières de $k$.

a) Déterminer la position relative des courbes $(C_1)$ et $(C_2)$.

b) Prouver que $\alpha_2 = 0$ .

c) En prenant comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes $(C_1)$, $(C_2)$ et $(H)$ sur le même graphique. On prendra $\alpha_1 = -1{,}1$, $\beta_1 = 1{,}8$ ; $\beta_2 = 1{,}6$.

## V. France sujet national, série S

**Ex. 2181.** ———— *5 points.* *./1998/franceS/exo-1/texte.tex*

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $P(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de A ; $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

**1.** Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire $X$ dont on donne la loi de probabilité avec : $p_i = P(X = i)$

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de $X$.

b) Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**2.** Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :

$\mathrm{C}_1$ : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;

$\mathrm{C}_2$ : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;

E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a) Calculer $P(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{E})$.

b) Montrer que $P(\mathrm{E}/\mathrm{C}_2) = 0{,}42$ et calculer $P(\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{E})$.

c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

**3.** Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de $Y$.

**Ex. 2182.** ———— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/franceS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\frac{z-2}{z-1} = z. \qquad (1)$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\frac{z-2}{z-1} = i. \qquad (2)$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

**3.** Soit $M$, $A$ et $B$ les points d'affixes respectives : $z$, 1 et 2.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation de la question(2).

**4.** Montrer, à l'aide d'un interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$ :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i,$$

où $n$ désigne un entier naturel non nul, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

**5.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i.$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

**Ex. 2183.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/franceS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB=\sqrt{2}$, $AD=1$ ; $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ est un angle droit direct ; $I$ désigne le milieu de $[AB]$.

A. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1° Vérifier que les points $C$ et $I$ appartiennent à $\mathscr{E}$.

2° a) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$.

b) En déduire que les droites $(BD)$ et $(CI)$ sont perpendiculaires.

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\ ;\vec{u},\ \vec{v})$ avec $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit $S$ une similitude directe qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = az+b$, $a$ et $b$ étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.

1° Déterminer les nombres $a$ et $b$ pour que $S(D)=C$ et $S(C)=B$.

2° Soit $T$ la similitude directe qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}.$$

Déterminer le rapport et l'angle de $T$.

3° Montrer que la similitude $T$ transforme $B$ en $I$.

4° En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites $(BD)$ et $(CI)$.

5° Montrer que le centre $\Omega$ de la similitude $T$ est le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(CI)$.

## Problème 820 *10 points.* *./1998/franceS/pb/texte*

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).
On rappelle qu'une fonction $f$ est majorée par une fonction $g$ (ce qui signifie aussi que $g$ est minorée par $f$) sur un intervalle $I$ si et seulement si, pour tout $x$ appartenant à $I$, $f(x) \leqslant g(x)$.

A- Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ ; on notera $C$ la représentation graphique de $f$ et $\Gamma$ celle de $g$.
On se propose de démontrer que $f$est minorée par $g$ sur $[0\,;+\infty[$.
Soit $h$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Étudier le sens de variation de $h$ sur $[0\,;+\infty[$ calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de $h$ en $+\infty$ n'est pas demandée.)

b) En déduire que pour tout réel $x$ positif ou nul,

$$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x) \tag{1}$$

c) Construire dans le même repère les courbes $C$ et $\Gamma$ et montrer qu'elles admettent en $O$ une même tangente $D$ que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

$k$ désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \longmapsto kx$, majorant la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
Soit $f_k$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

B- a) Étudier le sens de variation de $f_1$ définie sur$[0\,;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x.$$

b) Étudier la limite de $f_1$ en $+\infty$ et donner la valeur de $f_1$ en 0.

c) Montrer que pour tout réel $x$ positif ou nul :

$$\ln(1+x) \leqslant x. \tag{2}$$

d) En déduire que si $k \geqslant 1$, alors : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.

e) Le réel $k$ vérifie les conditions : $0 < k < 1$. Montrer que la dérivée de $f_k$ s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de $f_k$. (L'étude de la limite de $f_k$ en $+\infty$ n'est pas demandée.)

f) En déduire les valeurs de $k$ strictement positives telles que : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.

C- a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

(On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.)

En déduire le calcul de $J = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$

puis de $K = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right)\mathrm{d}x$.

(Pour le calcul de $K$ on pourra vérifier que : $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{x+2}$.)

Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales $J$ et $K$ en utilisant les courbes $C$, $\Gamma$ et la droite $D$ obtenues dans la partie A.

b) Soit $u$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \quad \text{et si} \quad x \neq 0, \quad u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

*i.* Démontrer que la fonction $u$ est dérivable sur $]0\,;1]$.

*ii.* On admet que $u$ est dérivable sur $[0\,;1]$ et on pose :

$$L = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} \leqslant L \leqslant 1.$$

En déduire une valeur approchée de $L$ à $10^{-1}$ près.

Retour page 1

# VI. France sujet national remplacement, série S

**Ex. 2184.** ——— *5 points.* ./1998/franceSrem/exo-1/texte.tex

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 .
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{B}\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{C}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\qquad \mathrm{I}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

**1.** a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

**2.** Soit (Q) le plan d'équation :

$$x+y-3z+2=0$$

et (Q′) le plan de repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

a) Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection $(\Delta)$ des plans (Q) et (Q′).

**3.** Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

**4.** On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{K}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

**Ex. 2185.** ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1998/franceSrem/exo-2/texte.tex

**1.** On considère le polynôme $P$ défini par :

$$P(z)=z^3-6z^2+12z-16.$$

a) Calculer $P(4)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$.

**2.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=2\,\mathrm{cm}$.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$$a=4\qquad b=1+\mathrm{i}\sqrt{3}\qquad c=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$$

a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

**3.** Soit K le point d'affixe $k=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

**4.** Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H.

c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Retour page 1

Ex. 2186. Enseignement de Spécialité 5 points. ./1998/franceSrem/exo-3/texte.tex

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour cette question, il n'est pas demandé de joindre de figure à la copie.
   On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, de la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation :
   $$y = -x + 2\sqrt{2}.$$
   a) Calculer les coordonnées des points d'intersection $A$ et $B$ des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   b) On appelle E l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient :
   $$\begin{cases}\sqrt{2}-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}+1\\ \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant -x+2\sqrt{2}.\end{cases}$$
   Calculer l'aire de E.
2. Soit $s$ la transformation du plan dans lui-même, qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :
   $$z' = (1+\mathrm{i})z.$$
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s$.
   b) Montrer que l'image de la droite $\mathscr{D}$ par $s$ est une droite $\Delta$ d'équation : $y = 2\sqrt{2}$.
   c) Montrer que l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par $s$ est incluse dans la courbe d'équation : $-x^2 + y^2 = 4$.

## Problème 821 *10 points.*

./1998/franceSrem/pb/texte

A- 1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$
2. Déterminer la solution $\varphi$ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :
$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -\mathrm{e}$$

B- 1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}.$$
a) Quel est, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f(x)$ ?
b) Étudier le sens de variation de de $f$.
c) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
d) Dresser le tableau de variations de $f$.
e) On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : $4$ cm).
Quelle est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O ?
Écrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $(-1)$.
f) On appelle $(\Gamma)$ la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x.$$
Quelle est la tangente à $(\Gamma)$ au point d'abscisse $(-1)$ ?

2. On appelle $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 1 + \mathrm{e}x\mathrm{e}^x.$$

a) Étudier le sens de variation de $h$.
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x$.

b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\Gamma)$.

c) Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathcal{C})$ et $(\Gamma)$.

3. Soit $m$ un réel quelconque et $M$ le point de la courbe $(\Gamma)$ d'abscisse $m$.

a) Écrire une équation de la tangente D à $(\Gamma)$ en $M$.

b) La tangente D coupe les axes de coordonnées en $A$ et $B$.
Calculer, en fonction de $m$, les coordonnées du milieu $J$ du segment $[AB]$.

c) Prouver que $J$ appartient à $(\mathcal{C})$.

d) Tracer (D) et $J$ pour $m = 0$.

C- 1. Soit $x$ un réel quelconque. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $x$ un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en $\text{cm}^2$, de l'ensemble des points $N$ du plan dont les coordonnées $(u,\ v)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-\ 1)$.

4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand $x$ tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

## VII. Nouvelle Calédonie, série S

**Ex. 2187.** 5 points. *./1998/nllecaledonieS/exo-1/texte.tex*

A- Dans une foire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

**Partie A**

Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier acheté deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.
Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible, puis à $10^{-3}$ près.

2. Xavier revient chaque jour, pendant trois tours, acheter deux billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
Le résultat sera donné à $10^{-3}$ près.

3. Un autre tour, Xavier achète six billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant Le resultat sera donné à $10^{-3}$ près.

B- Soit $n$ un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité $p_n$, qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \dfrac{2n-1}{2(2n-1)}$.

2. a) Étudier les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déterminer la limite de $p_n$, quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 2188.** *Enseignement Obligatoire 5 points.* ./1998/nllecaledonieS/exo-2/texte.tex

1. On considère l'équation d'inconnue complexe $z$ :

$$z^2+2\sqrt{3}z+4=0.$$

a) Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

b) Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). Les points $I$ et $J$ du plan ont pour af?xes respectives : $z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_2=-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 2, et placer les points $I$ et $J$ sur la?gure.

b) Montrer que le point $J$ est l'image du point $I$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) En déduire la nature du triangle OIJ.

3. Soit $B$ le milieu du segment $[OI]$.

a) Déterminer l'affixe du point $B$ et placer le point $B$ sur la?gure.

b) Préciser la nature du triangle $JBO$.

4. Soit $A$ le point du plan dé?ni par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$.

a) Déterminer l'affixe du point $A$ et placer le point $A$ sur la figure.

b) Vérifier que le point $A$ est l'image du point $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

c) Montrer que le point $A$ est le barycentre des points $J$, $O$, $B$ affectés de coef?cients que l'on déterminera.

**Ex. 2189.** *Enseignement de Spécialité 5 points.* ./1998/nllecaledonieS/exo-3/texte.tex

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 5 cm).
On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].
Placer ces points sur une figure.

**1.** On considère la transformation $s$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$, tel que

$$z'=-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}.$$

a) Démontrer que $s$ est une similitude dont le centre $\Omega$ a pour affixe $\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$ et dont on déterminera le rapport $k$ et une mesure $\theta$ de l'angle.

b) Déterminer les images par $s$ des points O, A, B, C.

**2.** a) Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}},\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}\right)$.
En déduire que les points A, B et $\Omega$ sont alignés.

b) Démontrer de même que les points I, C, $\Omega$ sont alignés.

c) En déduire une construction de $\Omega$. Placer $\Omega$ sur la figure.

**3.** a) Montrer que $\Omega$ appartient aux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de diamètres respectifs [BC] et [AI].

b) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{J}\Omega}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires.

c) Démontrer que la droite $(\Omega\mathrm{O})$ est la tangente commune à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.
Représenter les cercles $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et la droite $(\Omega\mathrm{O})$ sur la figure.



Retour page 1

### 🏛 Problème 822 *10 points.* ./1998/nllecaledonieS/pb/texte

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 3 cm). On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- 1. Justifier que, pour tout $x$ réel, $x^2-2x+2>0$.

2. Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ et étudier le sens de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$, et en $-\infty$.
4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x$ ; on montrera que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisses $0$ et $2$ ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

B- On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de $(\Delta)$.

On pose, pour tout réel $x$, $\varphi(x)=f(x)-x$.

1. Déterminer la fonction dérivée $\varphi'$ de $\varphi$. En déduire que $\varphi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. a) Déterminer la limite de $\varphi$ en $-\infty$.

   b) Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,

$$\varphi(x)=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right].$$

   En déduire la limite de $\varphi$ en $+\infty$.
3. Montrer que la droite $(\Delta)$ coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en un point et un seul.
   On désigne par $\alpha$ l'abscisse de ce point.
   Montrer que $0,3<\alpha<0,4$.

## VIII. Polynésie, série S

Ex. 2190. ——— *5 points.* ./1998/polynesieS/exo-1/texte.tex

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On note $A$ le point d'affixe $1$ et $B$ le point d'affixe $3+2\text{i}$.

On appelle $f$ l'application du plan complexe qui, à tout point $M$ distinct de $A$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z'=\frac{z-1+2\text{i}}{z-1}.$$

**1.** Calculer les affixes des points $O'$ et $B'$ images respectives des points $O$ et $B$ par $f$.
Placer les points $A$, $O$, $B$ et $B'$ dans le plan.

**2.** a) Calculer pour tout $z\neq 1$, le produit $(z'-1)(z-1)$.

b) En déduire que, pour tout point $M$ distinct de $A$, on a :

$$AM\times AM'=2 \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

c) Démontrer que, si $M$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A$ passant par $O$, alors $M'$ appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$. En préciser le centre et le rayon.
Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

d) Le cercle $(\mathscr{C}')$ est-il l'image par $f$ du cercle $(\mathscr{C})$ ?

**3.** a) Déterminer l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right)$.

Retour page 1

b) Démontrer que si $M$ est un point autre que $A$ de la demi-droite $(d)$ d'origine $A$, passant par $B$, alors $M'$ appartient à une demi-droite $(d')$ que l'on précisera.

**4.** On appelle $P$ le point d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ et de la demi droite $(d)$. Placer son image $P'$ par $f$ sur votre figure.

Ex. 2191. ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/polynesieS/exo-2/texte.tex*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On note $A$ le point d'affixe 1 et $B$ le point d'affixe $3+2\mathrm{i}$.

On appelle $f$ l'application du plan complexe qui, à tout point $M$ distinct de $A$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{z-1+2\mathrm{i}}{z-1}.$$

**1.** Calculer les affixes des points $O'$ et $B'$ images respectives des points $O$ et $B$ par $f$.

Placer les points $A$, $O$, $B$ et $B'$ dans le plan.

**2.** a) Calculer pour tout $z \neq 1$, le produit $(z'-1)(z-1)$.

b) En déduire que, pour tout point $M$ distinct de $A$, on a :

$$AM \times AM' = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Démontrer que, si $M$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A$ passant par $O$, alors $M'$ appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$. En préciser le centre et le rayon.

Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

d) Le cercle $(\mathscr{C}')$ est-il l'image par $f$ du cercle $(\mathscr{C})$ ?

**3.** a) Déterminer l'angle $\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AB}}\right)$.

b) Démontrer que si $M$ est un point autre que $A$ de la demi-droite $(d)$ d'origine $A$, passant par $B$, alors $M'$ appartient à une demi-droite $(d')$ que l'on précisera.

**4.** On appelle $P$ le point d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ et de la demi droite $(d)$. Placer son image $P'$ par $f$ sur votre figure.

Ex. 2192. ——— *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/polynesieS/exo-3/texte.tex*

$a$, $b$, $c$ sont trois entiers naturels non nuls compris entre 1 et 8. Le but de cet exercice est de trouver tous les triplets $(a, b, c)$ tels qu'un entier naturel qui s'écrit $\overline{abc}$ en base 9 s'écrive $\overline{cab}$ en base 13.

**1.** Prouver qu'un entier $N$ s'écrit $\overline{abc}$ en base 9 et $\overline{cab}$ en base 13 si et seulement si, $a$, $b$, $c$ sont liés par la relation $42c = 17a + 2b$.

**2.** Déduire de la première question que $a$ est pair. Quelles sont les valeurs possibles de $a$ ?

**3.** On prend $a = 2$. Déterminer $b$ et $c$, s'ils existent, tels que le triplet $(2, b, c)$ soit solution de l'exercice.

**4.** Terminer l'exercice en étudiant successivement les cas $a = 4$, $a = 6$, $a = 8$.

**5.** Conclure, et donner en base 10 les entiers $N$ qui répondent à la question.

## Problème 823 *10 points.* *./1998/polynesieS/pb/texte*

A- **Résolution d'une équation différentielle**

1. Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $(E_1)$ :

$$y'' + 2y' + y = 0. \qquad (E_1)$$

2. On considère l'équation différentielle $(E_2)$ :

$$y'' + 2y' + y = x + 3. \qquad (E_2)$$

a) Vérifier que la fonction $p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x + 1$ est solution de $(E_2)$.

b) Démontrer qu'une fonction $g$ est solution de ($E_2$) si, et seulement si, la fonction $g?p$ est solution de ($E_1$).

c) Déduire de A1 et A(2)b les solutions de ($E_2$).

d) Déterminer la solution générale de ($E_2$) qui vérifie :

$$g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 2.$$

3.

B- **Étude d'une fonction $f$ et courbe représentative**

On appelle $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^x.$$

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm). .

1. a) $f'$ et $f''$ désignant respectivement les dérivées première et seconde de $f$, calculer, pour tout réel $x$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b) Étudier le sens de variation de la dérivée $f'$.

   c) Démontrer que, pour tout réel $x$ positif, $f'(x) > 0$.

   d) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

   e) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

2. a) Démontrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(C)$ et préciser la position relative de $(D)$ et $(C)$.

   b) La courbe $(C)$ admet en un point $A$ une tangente parallèle à la droite $(D)$. Déterminer les coordonnées de $A$.

3. Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une unique solution notée $\alpha$, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4. a) Construire la droite $(D)$, le point $A$ défini au B(2)b, la courbe $(C)$ et la tangente en $A$ à la courbe $(C)$.

   b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de $\alpha$.

C- **Recherche d'une approximation décimale de $\alpha$**

1. Démontrer que, sur $[0\,;+\infty[$, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = x.$$

2. On appelle $h$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

   a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$ et réaliser le tableau de variations de la fonction $h$.

   b) En déduire que, pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$, $h(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

   c) Calculer $h''(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$ ; étudier le sens de variations de $h'$.

   d) En déduire que, pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \qquad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

   a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$,

$$|u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

d) Déterminer un entier $p$ tel que $u_p$ soit une valeur approchée à $10^{-6}$ près de $\alpha$ et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de $u_p$ à $10^{-6}$ près. Que peut-on en déduire pour $\alpha$ ?

# IX. Réunion, série S

**Ex. 2193.** ——— *4points.* *./1998/reunionS/exo-1/texte.tex*

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se pré- sentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note $A_1$ l'évènement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et $A_2$ l'évènement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement $A$.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement $A_1$ est égale à $\frac{1}{19}$.
2. a) Calculer directement la probabilité conditionnelle $p(A_2/A_1)$ de l'évènement $A_2$ sachant que $A_1$ est réalisé.

   b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.
3. a) Calculer la probabilité $p(A_2/\overline{A_1})$.

   b) En remarquant que $A_2 = (A2 \cap A1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$, calculer la probabilité $p(A_2)$ puis en déduire que $p(A2 \cup A1) = \frac{33}{323}$.
4. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire $X$ prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.

   a) Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire $X$.

   b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

**Ex. 2194.** ——— *Enseignement Obligatoire 5 points.* *./1998/reunionS/exo-2/texte.tex*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne $A$, $B$ et $C$ de coordonnées respectives $(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $(3\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $(2\ ;\ 8\ ;\ -4)$.
Aucune figure n'est demandée.

1. Un point $M$ étant de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, exprimer en fonction de $x$, $y$ et $z$ les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.
2. Résoudre le système :

$$\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$$

   On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.
3. Montrer qu'il existe un unique point $N$ vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point $N$.

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ représente l'aire d'une base et $h$ la hauteur correspondante.
   a) Le point $N$ étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$.
   b) En utilisant les résultats du 1, et en prenant $M = C$, calculer l'aire du triangle $ABC$.
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point $N$ au plan $(ABC)$.

Ex. 2195. *Enseignement de Spécialité 5 points.* *./1998/reunionS/exo-3/texte.tex*

Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : le cm), on trace le cercle (C) de diamètre [AO] où A est le point de coordonnées $(-6 ; 0)$. On appelle $\Omega$ le centre de (C). Si P est un point de (C), on note K le projeté orthogonal de P sur la droite (AO) et M le point défini par $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AP}$.
Soit $t$ une mesure on radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}; \overrightarrow{\Omega P}}\right)$.
On veut étudier l'ensemble (E) des points $M$ de paramètre $t$ obtenu lorsque $P$ décrit (C).

**1.** Sur une figure qui sera complétée à la question 5. représenter le cercle (C), placer un point $P$ et les points $K$ et $M$ correspondants.

**2.** a) Exprimer en fonction de $t$ les coordonnées du point $P$ puis celles du point $M$.
   b) En déduire une représentation paramétrique de (E).

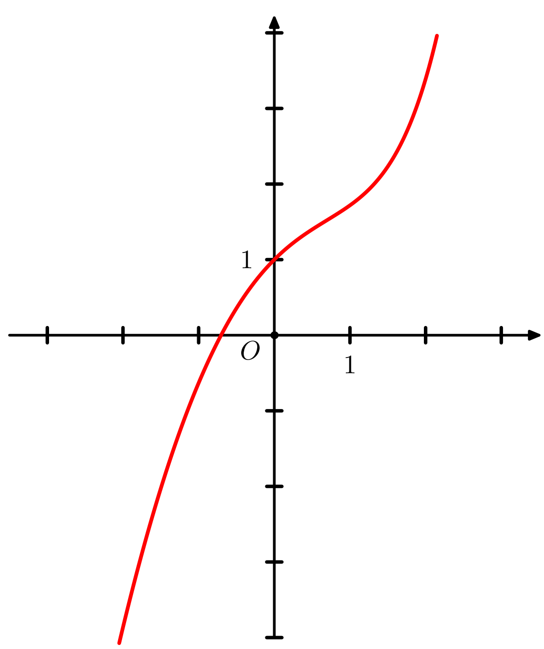
**3.** Soit $M'$ le point de (E) de paramètre $\pi - t$.
   Par quelle transformation peut-on obtenir le point $M'$ à partir du point $M$ de paramètre $t$ ?

**4.** Soit $N$ le point de (E) de paramètre $t + \frac{\pi}{2}$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{ON}$ est un vecteur directeur de la tangente à (E) au point $M$ de paramètre $t$.

**5.** Dessin de (E) :
   a) Placer les sommets de (E).
   b) Construire les points $M_1,\ M_2$ et $M_3$ obtenus pour les valeurs de $t$ suivantes : $\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}$ et utiliser le résultat des questions 2 et 3 pour construire 3 autres points de (E) ainsi que les tangentes à (E) en $M_1,\ M_2$ et $M_3$.
   c) Achever le dessin de (E).

**Problème 824** *11 points.* *./1998/reunionS/pb/texte*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter et à rendre avec la copie.






Retour page 1

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-x$ et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

A- **Remarques préliminaires concernant la fonction $f$**

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par $O$. On notera $A$ son point de contact avec $\mathscr{C}_f$.
Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$,bpuis en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\dfrac{7}{3}$.

B- **Étude de la fonction $g$**

1. Étudier les limites de $g$ en $+\infty$ et en $0$ et justifier que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote
2. a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x-x^2$ sur l'intervalle $]0\,;pf[$.
   b) Soit $u$ la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0\,;pf[$ associe $u(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x^2$.
   Étudier le sens de variation de $u$ sur l'intervalle $[0\,;pf[$.
   c) Déterminer le signe de u(x) sur l'intervalle $[0\,;1[$.
   d) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique $a$ sur l'intervalle $[1\,;2]$. En déduire, suivant les valeurs de $x$, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   e) En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de $g$.

C- **Construction de $\mathscr{C}_g$**

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où $a$ est le réel déterminé dans la question B(2)d.
   a) Montrer que, sur l'intervalle $]0\,;pf[$, $g'(x)=0$ équivaut à $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a)=\dfrac{f(a)}{a}$.
   b) En utilisant ce résultat, établir que $a$est l'abscisse du point $A$ défini dans la première partie.
   c) Justifier que l'ordonnée de $S$ est $f('a)$ et placer $S$ sur le dessin.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ .

D- **Étude d'une primitive de $g$ et calcul d'une intégrale**

Soit $G$ la primitive de $g$ sur l'intervalle $[1\,;2]$ qui s'annule pour $x=1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de $G$ sur $[1\,;2]$.
2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra 1,55 comme valeur approchée de $G(2)$ à $10^{-2}$ près.
3. On considère l'intégrale $J=\displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Justifier que l'intégrale $I$ calculée dans la première partie peut s'écrire
   $$I=\int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x.$$
   b) En utilisant une intégration par parties, établir que $I=2G(2)-J$ et en déduire une valeur approchée de $J$, à $10^{-2}$ près.



Retour page 1

# X. Asie, série S

Ex. 2196. 5 points. ./1998/asieS/exo-1/texte.tex

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm.
Les nombres complexes $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5$ et $z_6$ que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle $(\rho e^{i\theta})$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z-1=0$.

On pose $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ . Exprimer $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle et placer les points $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$ dans le plan P.

**2.** Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Calculer l'affixe $z_3$ du point $M_3=r(M_2)$.
Placer $M_3$ sur la figure précédente. (

**3.** Soit $t$ la translation dont le vecteur $\vec{w}$ pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ . Calculer l'affixe $z_4$ du point $M_4=t(M_2)$.

Placer $M_4$ sur la figure.

**4.** Soient $z_5=\dfrac{i}{2}(1+i\sqrt{3})$ et $z_6=\dfrac{2}{i-\sqrt{3}}$. Exprimer $z_5$ et $z_6$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

Placer les points $M_5$ et $M_6$ d'affixes respectives $z_5$ et $z_6$ sur la figure.

**5.** a) Calculer $z_k^6$ pour $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

b) Écrire $z^6+1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

Ex. 2197. Enseignement obligatoire 5 points. ./1998/asieS/exo-2/texte.tex

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. $\mathbb{N}^\star$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale :

$$I_n=\int_1^{e}(\ln x)^n\ \mathrm{d}x.$$

**1.** a) Démontrer que, pour tout $x$ dans l'intervalle $[1,\exp]$ et tout entier naturel $n$, on a :

$$(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}\geqslant 0.$$

b) En déduire que la suite $(I_n)$ est décroissante.

**2.** a) Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}^s tar$ :

$$I_{n+1}=e-(n+1)I_n.$$

c) En déduire les valeurs de $I_2, I_3$ et $I_4$. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à $10^{-3}$ près par défaut.

**3.** a) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $I_n\geqslant 0$.

b) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $(n+1)I_n\leqslant e$.

c) En déduire la limite de $I_n$.

d) Déterminer la valeur de $nI_n+(I_n+I_{n+1})$, en déduire la limite de $nI_n$.

Ex. 2198. Enseignement de Spécialité 5 points. ./1998/asieS/exo-3/texte.tex

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité graphique étant 1 cm.

**1.** Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{1}{2}(t^2+1) \\ y = g(t) = \dfrac{1}{2}(t^3+2t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Montrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

b) Étudier conjointement les variations des fonctions $f$ et $g$ sur $[0\,;+\infty[$.

c) Préciser la tangente au point de paramètre $t=0$.

d) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

**2.** Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.

a) Tracer $(\mathscr{P})$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

b) Vérifier qu'une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

c) Soit $(\mathscr{D}_t)$ la tangente à $(\mathscr{P})$ au point $M_t$ de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$.
Soit $(\Delta_t)$ la perpendiculaire à $(\mathscr{D}_t)$ au point $M_t$.
Montrer qu'une équation cartésienne de $(\Delta_t)$ est :

$$Y = -tX + t^3 + 2t.$$

d) Pour $t \in \mathbb{R}^\star$, $(\Delta_t)$ coupe l'axe des abscisses en un point $A_t$ et l'axe des ordonnées en un point $B_t$. On appelle $I_t$ le milieu du segment $[A_tB_t]$.
Exprimer en fonction de $t$ les coordonnées du point $I_t$. Quel est l'ensemble des points $I_t$ lorsque $t$ décrit $\mathbb{R}^\star$ ?

## Problème 825 *10 points.* ./1998/asieS/pb/texte

-I- Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout $x$ associe :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2.$$

1. a) Montrer que la dérivée de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$g'(x) = x(\mathrm{e}^x + 2).$$

b) Déterminer les limites de g en +? et en??.

c) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ et une seule sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Montrer que $\alpha$ est dans l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. ·

-II- Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}.$$

1. Montrer que les équations : f (x) = x et g (x) = 0 sont équivalentes sur [0 ; +?[, et que, par suite, l'équation f (x) = x admet? pour solution unique sur I.

2. a) Calculer la dérivée de $f$et en déduire le sens de variation de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$ .



Retour page 1

d) Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ sur $[0\,;+\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $0$ et $1$.

-III- 1. Montrer que, pour tout $x$ appartenant à $I$, $f(x)$ appartient à $I$.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1. \end{cases}$$

*i.* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in I$.

*ii.* Montrer que, pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

*iii.* En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, dé- montrer que :

$$\text{pour tout } n > 1, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_{n-1} - \alpha|\,.$$

*iv.* En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

*v.* En déduire que $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

*vi.* A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-7}$ près ?

3. En utilisant la décroissance de $f$, montrer que $\alpha$ est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-7}$.

Retour page 1

# Chapitre XLI

# 1999.

## Sommaire



Á partir d'ici, les sujets se trouvent sur le site de l'APMEP dont voici le lien : APMEP

## I. National, série S

**Ex. 2199.** *5 points.* *./1999/national/exo-1/texte.tex*

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application $F$ du plan dans lui-même qui, à tout point $m$ d'affixe $z$ associe le point $M$ d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par $M$ lorsque $m$ décrit le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 1
Soit $t$ un réel de [- $\pi$ ; $\pi$] et $m$ le point de ($\mathcal{C}$) d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

**1.** Montrer que l'image $M$ de $m$ par $F$ est le point de coordonnées :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}, \ t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$
Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

**2.** Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

**3.** Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de $x$ sur [0 ; $\pi$].

**4.** Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de $y$ sur [0 ; $\pi$].

**5.** Dans un même tableau faire figurer les variations de $x$ et $y$ sur [0 ; $\pi$].

**6.** Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\pi$ du paramètre $t$ et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t$ = 0 la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque $t$ décrit [0 ; $\pi$] puis tracer (Γ) complètement.

**Ex. 2200.** *Obligatoire 5 points.* *./1999/national/exo-2/texte.tex*

Dans cet exercice, $n$ est un entier naturel non nul. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\ \mathrm{d}t$$

**1.** a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[0,2]$ par
$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$$
Étudier les variations de $\varphi$ sur $[0,2]$. En déduire que, pour tout réel $t$ dans $[0,2]$,
$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}$$

b) Montrer que, pour tout réel $t$ dans $[0,2]$, on a :

$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\, e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$$

c) Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$$

d) On rappelle que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite $L$, alors

$$3 \leqslant L \leqslant \frac{7}{2}$$

**2.** a) Vérifier que pour tout $t$ dans $[0,2]$, on a

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2-\frac{1}{t+2}$$

En déduire l'intégrale

$$I=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que, pour tout $t$ dans $[0,2]$, on a

$$1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$$

En déduire que

$$I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$$

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite $L$.

Ex. 2201. *Spécialité 5 points.* *./1999/national/exo-3/texte.tex*

Pour tout entier $n$ non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4\times 10^n,\quad b_n = 2\times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{c_n} = 2\times 10^{\mathrm{n}}+1.$$

**1.** a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et $c_3$.

b) Combien les écritures décimales des nombres $a_n$ et $c_n$ ont-elles de chiffres ? Montrer que $a_n$ et $c_n$ sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que $b_3$ est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $b_n\times c_n = a_{2n}$.
En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $a_6$.

e) Montrer que $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$.
En déduire que $b_n$ et $c_n$ sont premiers entre eux.

**2.** On considère l'équation :

$$b_3 x + c_3 y = 1 \tag{1}$$

d'inconnues les entiers relatifs $x$ et $y$.

a) Justifier le fait que (**??**) possède au moins une solution.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres $c_3$ et $b_3$ ; en déduire une solution particulière de (1).

c) Résoudre l'équation (1).

*Liste des nombres premiers inférieurs à 100*
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Retour page 1

## 🏛Problème 826 *10 points.*

./1999/national/pb/texte

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ : on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

**Partie A** *Étude d'une fonction $f$ et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.*

On considère la fonction $f$, définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $0$.

**2.** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

**3.** Soit $u$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x)=\ln x+x-3$$

a) Étudier les variations de $u$.

b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[2,3]$. Montrer que $2,20<\alpha<2,21$.

c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0,+\infty[$.

**4.** a) Étudier les variations de $f$.

b) Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en $\alpha$. Montrer que

$$f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2\times10^{-2}$.

**5.** a) Étudier le signe de $f(x)$.

b) Tracer $\mathscr{C}$.

**Partie B** *Étude d'une primitive de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.*

Soit $F$ la primitive de $f$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$. On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de $F$ relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** a) Justifier l'existence de $F$.

b) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de $F$ sur $]0,+\infty[$.

c) Que peut-on dire des tangentes à $\Gamma$ en ses points d'abscisses $1$ et $e^2$ ?

**2.** *Calcul de $F(x)$.*

a) $x$ étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale

$$\int_1^x \ln t\,dt$$

( on pourra faire une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout $x$ strictement positif :

$$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$$

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de $x$.

**3.** a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=0$. En déduire la limite de $F$ en $0$.



Retour page 1

b) Montrer que, pour $x$ strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$

En déduire la limite de $F$ en $+\infty$

c) Dresser le tableau de variation de $F$.

d) Tracer $\Gamma$ sur le même graphique que $\mathscr{C}$.

**4.** *Calcul d'une aire.*
Calculer, en cm$^2$, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

# II. National remplacement, série S

**Ex. 2202.** *4 points.* ./1999/nationalrem/exo-1/texte.tex

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :
On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle $E_0$ l'événement : aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées et $B$ l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.

   a) Calculer P $(E_0 \cap B)$, P $(E_0 \cap \overline{B})$, puis P $(E_0)$.

   b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?

2. On appelle $E_1$ l'événement : une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées et $B$ l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.

   a) Calculer la probabilité de l'événement $E_1$.

   b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois une et une seule boule blanche ?

**Ex. 2203.** *Obligatoire 5 points.* ./1999/nationalrem/exo-2/texte.tex

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On note $Z_M$ l'affixe d'un point $M$.
Soit $A$ le point d'affixe 4 et $B$ le point d'affixe $4\mathrm{i}$.

**1.** Soit $\theta$ un réel de $[0\,;2\pi[$ et $r$ un réel strictement positif.
On considère le point $E$ d'affixe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $F$ le point tel que O$EF$ est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}E}, \overrightarrow{\mathrm{O}F}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Quelle est, en fonction de $r$ et $\theta$, l'affixe de $F$ ?

**2.** Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :

$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$

**3.** On appelle , $P$, $Q$, $R$, $S$ les milieux respectifs des segments [AB], [B$E$], [$EF$], [$F$A].

a) Prouver que P$QRS$ est un parallélogramme.

b) On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_{\mathrm{P}}}$.
Déterminer le module et un argument de $Z$. En déduire que P$QRS$ est un carré.

Retour page 1

**4.** a) Calculer, en fonction de $r$ et $\theta$, les affixes respectives des points P et $Q$.

b) Quelle est, en fonction de $r$ et $\theta$, l'aire du carré $PQRS$ ?

c) $r$ étant fixé, pour quelle valeur de $\theta$ cette aire est-elle maximale ?
Quelle est alors l'affixe de $E$ ?

Ex. 2204. *Spécialité 5 points.* *./1999/nationalrem/exo-3/texte.tex*

Soit le repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 3 - \text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{B}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\text{i}.$$

**1.** Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).

**2.** Prouver que $OAB$ est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle $OAB$. Déterminer l'affixe $z_{\text{G}}$ de G.
Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].

**3.** Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes et R l'application qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = az + b$.

a) Déterminer $a$ et $b$ pour que R(O) = G et R(A) = C.

b) Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

c) Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?

d) Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle $OAB$ par R.

**4.** Soit $a'$ et $b'$ deux nombres complexes et $f$ l'application qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.

a) Déterminer $a'$ et $b'$ pour que $f$(O) = G et $f$(A) = C.

b) Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f$(I). $f$ est-elle une réflexion ?

c) Construire en justifiant la construction, l'image du triangle $OAB$ par $f$.

## Problème 827 *11 points.* *./1999/nationalrem/pb/texte*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de $f$, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie A :**

**1.** Déterminer les limites de $f$ en + $\infty$ et 0.

**2.** Calculer $f'(x)$ en fonction de $x$. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que
$\ln x(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**3.** Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $f$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**4.** On pose pour $p \geqslant 1,\ I_p = \displaystyle\int_1^{\text{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\text{d}x$.

a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{\text{e}^2} \frac{\ln x}{x^2}\,\text{d}x.$$

b) Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $p$ supérieur ou égal à1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{\text{e}^2} + (p+1)I_p.$$

Retour page 1

c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement $I_2$, $I_3$, $I_4$.

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et $\mathrm{e}^2$. Le point $M$ de $\mathcal{C}$, d'abscisse $x$, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

**Partie B :**

Soit $a$ un réel strictement positif et $A$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a$. Soit $\mathrm{T}_a$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A$.

**1.** Écrire une équation de $\mathrm{T}_a$.

**2.** Déterminer les réels $a$, pour lesquels $\mathrm{T}_a$ passe par l'origine O du repère.

**3.** Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathcal{C}$, passant par O.
Tracer ces tangentes sur la figure.

**Partie C :**

On étudie maintenant l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $\Delta$ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x$.

**1.** On pose pour $x$ strictement positif, $\varphi_1(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
Montrer que $\varphi_1$ est strictement croissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$.

**2.** On pose pour $x$ strictement positif, $\varphi_2(x) = x + \mathrm{e}\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de $\varphi_2$ sur $]\,0,\ +\infty[$.

b) Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. On appelle $\alpha$ cette solution ; donner un encadrement de $\alpha$, d'amplitude $10^{-1}$.

c) En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**3.** Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\Delta$.

## III. Antilles Guyane, série S

**Ex. 2205.** 5 points. ./1999/antilles/exo-1/texte.tex

Commun à tous les candidats Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M. ) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépendantes. Á chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.
Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seule ment le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

**1.** Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;
B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».

b) On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note -1 à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».

**2.** On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions.
Quelle est la probabilité de l'événement $C$ décrit au 1b ?

Retour page 1

## 🏛Problème 828 *10 points.* *./1999/antilles/pb/texte*

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

**PARTIE A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$$

**1.** Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction $f$.

**2.** Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par $\alpha$, appartient à $[-0,72;-0,71]$.

**3.** Donner le signe de $f(x)$, pour $x$ appartenant à $]-1,+\infty[$.

**PARTIE B**

Soit $g$ la fonction définie sur l'ensemble $]-1;0[\cup]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

**1.** *Etude de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.*

a) Calculer les limites de $g(x)$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs inférieures et quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

**2.** *Sens de variation de $g$.*

a) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie $A$, son signe.

b) Montrer que

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

**3.** *Tableau de variation et représentation graphique de $g$.*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.

b) Représenter graphiquement la fonction $g$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal ( unité graphique : $2$ cm ).

**4.** *Calcul d'aire*

Soit $a$ un réel strictement supérieur à $0$. On pose :

$$I(a) = \int_1^a g(x)\, dx$$

a) Donner, suivant les valeurs de $a$, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b) En remarquant que, pour $x$ appartenant à $]0,+\infty[$ :

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ et $\lim\limits_{a\to0} I(a)$.

Retour page 1

# IV. Centres étrangers, série S

**Problème 829** *10 points.* ./1999/centresetrangers/pb/texte

Le but du problème est l'étude d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et d'une primitive de $f$.

## *Première partie*

**• Étude d'une fonction auxiliaire $g$**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.

**1.** Montrer que $g$ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et, en détaillant les calculs effectués, montrer que $g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1)$

**2.** Faire l'étude du sens de variation de $g$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

**3.** Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera $\alpha$, dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha) = 0$ ; donner l'approximation décimale à $10^{-2}$ près par défaut de $\alpha$.

**4.** En déduire le signe de $g(x)$, pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

## *Deuxième partie*

**• Étude de la fonction $f$**

La fonction $f$ est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0$$

Sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le plan rapporté à un repére d'origine O est donnée en annexe, qui sera complétée et rendue avec la copie.

**1.** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

En déduire que $f$ est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

**2.** a) Vérifier que, pour $x$ strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$

Faire l'étude du sens de variation de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

**3.** a) Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$

b) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

## *Troisième partie*

**• Étude d'une primitive de $f$**

On note F la primitive de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.

On rappelle que $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ : on ne cherchera pas à calculer F($x$).

**1.** a) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{2\ln(x)}{x}$

b) Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{2\ln(t)}{t}dt$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

**2.** Dresser le tableau de variation de F.

**3.** Montrer que $f(1) < \mathrm{F}(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de F(2). (On prendra $f(\alpha) \approx 0,8$).

**4.** On note I le point de coordonnées (1 ; 0), A le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées (1 ; $\ln 2$) et B le point de coordonnées ($\ln 2$ ; $\ln 2$).

a) Vérifier que B appartient à la tangente à $(\mathcal{C})$ en O.

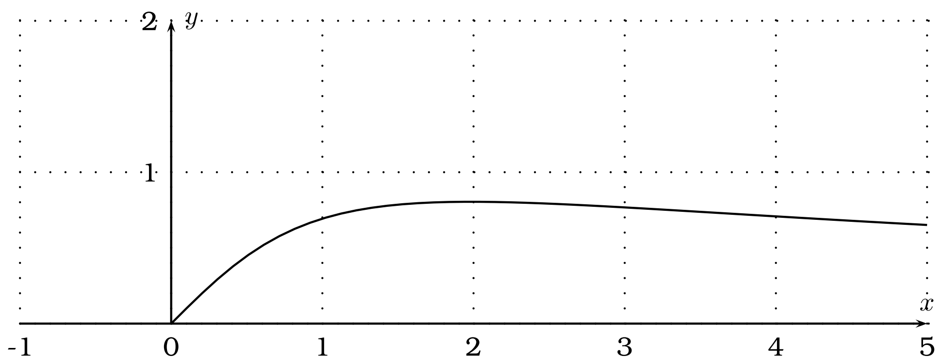
b) Placer les points I, A et B sur une figure et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI].



Retour page 1

c) On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle [0 ; 1], la courbe ($\mathcal{C}$) est située au-dessus de [OA] et au dessous de [OB] et de [BA].
Déterminer un encadrement de F(0), d'amplitude inférieure à $2.10^{-1}$.

**5.** Tracer la représentation graphique ($\Gamma$) de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente à ($\Gamma$) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm).




*Annexe*

## V. Madagascar, série C

Ex. 2206. *20 points.* *./1999/madagascarC/exo-1/texte.tex*

Une urne contient 3 jetons blancs et $n$ jetons rouges ($n \in \mathbb{N}^{\star}$) indiscernables au toucher.
On choisit simultanément, au hasard, deux jetons de l'urne.

1. On appelle « succès » l'obtention de deux jetons blancs
   Calculer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ d'un succès et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
2. On appelle « gain » l'obtention de deux jetons de même couleur. Calculer, en fonction de $n$, la probabilité $q_n$ d'un gain et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n$.
3. a) Trouver une solution particulière $(u,\ v)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation entière d'inconnues $(x\ ;\ y)$ définie par : $5x - 4y = 1$.

   b) En déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation :

$$5x - 4y = 6. \qquad (1)$$

   c) Montrer alors que $5(x - x_0) - 4(y - y_0) = 0$.

   d) En déduire que $x - x_0$ et $y - y_0$ sont divisibles par 4 et 5 respectivement.
4. a) Donner les solutions générales de l'équation (1).

   b) Trouver dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les solutions $(x\ ;\ y)$ de(1) vérifiant : $-18 \leqslant x \leqslant 0$ et$-24 \leqslant y \leqslant 0$.



Retour page 1

# Chapitre XLII

# Dates et lieux inconnus

## Sommaire



## I. A Classer !

**Ex. 2207.** ./xxx/exo-3/texte.tex

« Résolution quantitative » de l'équation $x^k = e^x$. Dans tout le problème , $k$ désigne un entier naturel non nul . $\mathscr{F}$ est la famille de fonctions $f_k$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k e^{-x}$ .
$\mathscr{C}_k$ est la courbe représentative de $f_k$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 2 cm .
Tous les calculs devront être justifiés.

**Partie A.**

**1.** Étudier les variations et les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions $f_1$ , $f_2$ et $f_3$.
Établir les tableaux de variation de ces trois fonctions en précisant les nombres dérivés en 0.

**2.** Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par deux points fixes dont vous précisez les coordonnées.

**3.** Étudier les variations de $f_k$ ainsi que les limites en $+\infty$ et $-\infty$ lorsque :

— k est impair.

— k est pair.

**4.** Comparer les positions respectives de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ sur les intervalles $[0;+\infty[$ puis de $\mathscr{C}_k$ et de $\mathscr{C}_{k+2}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$ .

**5.** En déduire les positions respectives de $\mathscr{C}_1$ , $\mathscr{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ et les représenter dans le même repère.

**Partie B.**

**1.** On pose, pour $x > 0$, $u(x) = x\ln(x) - x$ .
Étudier les variations de $u$ et ses limites en $0$ et $+\infty$ .

**2.** On considère la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \exp[u(x)] \text{ si } \quad x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{E}$ sa courbe représentative.

a) Montrer que $g$ est continue en zéro et que $g$ n'est pas dérivable en zéro. (on rappelle que :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1)$$

b) Étudier les variations de $g$ ainsi que sa limite en $+\infty$ .

c) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $g(x) \geqslant 1$ .

d) On considère les points $M_k(k; f_k(k))$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$. Vérifier que $M_k$ est un point de $\mathscr{E}$.
Tracer $\mathscr{E}$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$ , $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ .

e) Déterminer, suivant les valeurs de $k$, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$f_k(x) = 1$ .

**Ex. 2208.** ./xxx/exo-4/texte.tex

Pour tout nombre complexe $z$, on définit :

$$P(z)=z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8$$

**1.** Vérifier que $P(2)=0$. En déduire une factorisation de $P(z)$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$. On appelle $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation autres que $2$, $z_1$ ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$.
Déterminer le module et un argument de $z_1$ et $z_2$.

**3.** a) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : $2$ cm ), les points $A$ d'affixe $2$, B et C d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$ et I le milieu de $[AB]$.

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

c) Calculer l'affixe $z_I$ de I puis le module de $z_I$.

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{3\pi}{8})$ et $\sin(\dfrac{3\pi}{8})$.

**Ex. 2209.** ./xxx/exo-5/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note $R_A$ et $R_B$ les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout point M du plan, on note $M_1$ et $M_2$ les images respectives de M par $R_A$ et $R_B$.

**1.** On considère la transformation $T=R_B\circ(R_A)^{-1}$.

a) Construire le point C image de A par T.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $M_1M_2CA$.

**2.** On suppose que $M$ décrit le cercle $\Gamma$ de diamètre $[AB]$.

a) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_2$ décrit par le point $M_2$ quand $M$ décrit $\Gamma$.

b) Soient $w$ et $w_2$ les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{ww_2}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

c) Déterminer l'ensemble décrit par le point I, milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit $\Gamma$.

**Ex. 2210.** ./xxx/exo-7/texte.tex

Dans le plan orienté, on considère un triangle $ABC$ tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\quad \text{et}\quad AB<AC.$$

. On note $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $O$ son centre. Soit $E$ le milieu du segment $[BC]$ et $P$ le point du segment $[AC]$ tel que $AB=CP$.
La droite $(OE)$ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en $I$ et $J$, tels que $J$ et $A$ soient sur le même arc $BC$ du cercle $(\mathscr{C})$.

**1.** a) Faire une figure.

b) Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\ ?$$

c) Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)\ \text{et}\ MB<MC?$$

**2.** a) Justifier qu'il existe une unique rotation $R$ telle que $R(A)=P$ et $R(B)=C$, et déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point du cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

c) . Quelle est la nature du triangle $JAP$ ?

**3.** Déterminer l'image de $B$ par la composée $R\circ S_B$, où $S_B$ désigne la symétrie de centre $B$. Donner, en la justifiant, la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

Retour page 1

**Ex. 2211.** ./xxx/exo-8/texte.tex

Soit $ABC$ un triangle de sens direct ayant trois angles aigus.

**1.** Construire les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ tels que :

— $\mathscr{C}_a - \{C,\ B\}$ est l'ensemble des points $P$ tels que $(\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{PB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

— $\mathscr{C}_b - \{A,\ C\}$ est l'ensemble des points $Q$ tels que $(\overrightarrow{QA},\ \overrightarrow{QC}) = \dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

— $\mathscr{C}_c - \{B,\ A\}$ est l'ensemble des points $R$ tels que $(\overrightarrow{RB},\ \overrightarrow{RA}) = \dfrac{\pi}{3}\ (\pi)$.

Démontrer que les cercles $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ ont un point commun noté $I$.

**2.** Soit $P$ un point extérieur à $ABC$ sur $\mathscr{C}_a$. La droite $(PC)$ recoupe $\mathscr{C}_b$ en un point $Q$. Soit $R$ le point d'intersection des droites $(QA)$ et $(PB)$.
Montrer que $R$ est sur $\mathscr{C}_c$. Quelle est la nature du triangle $PQR$ ?

**3.** Á tout triangle $PQR$ on associe $\ell(PQR) = IP + IQ + IR$.

a) Déterminer $P$ pour que $IP$ soit maximum. Soit $P_0$ ce point.
Construire le triangle $P_0Q_0R_0$ déterminé à partir de $P_0$.

b) Montrer que $\ell(PQR)$ est maximum pour $P_0Q_0R_0$.

**Ex. 2212.** ./xxx/exo-10/texte.tex

Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$, $A$ est un point de $\mathscr{H}$ et $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $O$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A$ passant par $A'$.
Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ recoupe l'hyperbole $\mathscr{H}$ en trois points qui sont les sommets d'une triangle équilatéral.
On note $\omega$ l'affixe de $A$ et $M(z)$. On pose $Z = z - \omega$.

**1.** Montrer que $M \in \mathscr{C}$, équivaut à $(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = 4\omega\overline{\omega}$.

**2.** Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M \in \mathscr{H}$ ;

(ii) $z^2 - \omega^2 = \overline{z}^2 - \overline{\omega}^2$ ;

(iii) $z^2 - \overline{z}^2 = 4\mathrm{i}$.

**3.** En déduire que $M \in \mathscr{C} \bigcap \mathscr{H}$ équivaut à

$$\begin{cases} Z \times \overline{Z} & = 4\omega\overline{w} \\ Z^2 + 2\omega z & = \overline{Z}^2 + 2\overline{\omega} z. \end{cases}$$

**4.** Conclure.

**5.** Examiner le cas où $A'$ est sur $\mathbb{C}$.

**Ex. 2213.** ./xxx/exo-13/texte.tex

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit P le plan rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $J$ l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ des $n$ premiers entiers naturels non nuls.
On appelle $M_{(n,\ p)}$ le point de coordonnées $(n\ ;\ p)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(m,\ p)$ appartenant à $J \times J$.
On affecte chaque point $M_{(m,\ p)}$ du coefficient $m$ ; on note $(M_{(m,\ p)},\ m)$ le point pondéré obtenu.

a) Déterminer, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées du barycentre $G_1$ du système $\{(M_{(1,\ p)},\ 1)\ ;\ p \in J\}$ obtenu pour $m = 1$.
Déterminer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les coordonnées du barycentre $G_{m_0}$ du système $\{(M_{(m_0,\ p)},\ 1)\ ;\ p \in J\}$ obtenu pour $m = m_0$.

b) En déduire les coordonnées du barycentre $G$ du système

$$\{(M_{(m,\ p)},\ m)\ ;\ (m,\ p) \in J \times J\}.$$

**Ex. 2214.** ./xxx/exo-14/texte.tex

Soit $\mathscr{E}_3$ un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$. On considère l'application affine $f$ qui à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ données par :

$$\begin{cases} x' = y+3 \\ y' = x-2 \\ z' = -z \end{cases}$$

Montrer que $f$ est un vissage dont on déterminera l'axe et le vecteur de la translation.

**Ex. 2215.** ./xxx/exo-15/texte.tex

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3+(1-8\mathrm{i})z^2-(23+4\mathrm{i})z-3+24\mathrm{i}=0. \qquad \text{(E)}$$

1. a) Montrer que(E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
   b) Achever la résolution de l'équation (E).
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, représenter les points $A$,

$$Bet$$

   C d'affixes respectives $1+2\mathrm{i}$, $3\mathrm{i}$, $-2+3\mathrm{i}$. Soit $G$ le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés des coefficients respectifs $2,\ -2,\ 1$.
   Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.
   Montrer qu'elles forment une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe. En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme $A$ en $B$ et $B$ en $C$. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

**Ex. 2216.** *1973 série D Paris ????* ./xxx/exo-16/texte.tex

Soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs

$$-2,\ -1,\ 3,\ 4$$

avec les probabilités

$$0{,}10,\ 0{,}65,\ 0{,}15,\ 0{,}10.$$

**1.** Calculer l'espérance mathématique et l'écart type $\sigma$, de $X$.

**2.** Déterminer suivant les valeurs de $h$ la probabilité $P(h)$ de l'inégalité $|X| \geqslant h$, où $h$ est un nombre positif donné.

**3.** Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions

$$h \longmapsto P(h) \qquad \text{et} \qquad h \longmapsto \frac{\sigma^2}{h^2}.$$

Comparer $P(h)$ et $\dfrac{\sigma^2}{h^2}$.

Retour page 1