idée DS – Intégrales impropres – corrigé

Pour tout couple d'entiers (n, p) tels que $n \geq p \geq 1$, on pose :

$$J_{n,p} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-p}\sin^p(x) - \sin^n(x)}{x^{n+1}} dx = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^p - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^n \right) \frac{dx}{x}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose également $J_n = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^n - \cos(x) \right) \frac{dx}{x}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{x}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^n - \cos(x) \right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.a) Montrer que f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

Par opérations sur les fonctions continues, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, en effectuant un DL :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{x}\left(\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{O}(x^4) \right)^n - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{O}(x^4) \right) \right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{3-n}{6}x^2 + \underset{x \to 0}{O}(x^4) \right) \\ &= \frac{3-n}{6}x + \underset{x \to 0}{O}(x^3) \end{aligned}$$

Donc $f_n(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent, on peut prolonger f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$.

1.b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sin^n(x)}{x^{n+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^n(x)}{x^{n+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et c'est un $\underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ donc elle est intégrable sur ce même intervalle par comparaison indirecte avec une intégrale de Riemann convergente puisque $n + 1 > 1$.

1.c) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ est convergente.

Puisque $x \mapsto 1 + \sin(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^∞, on peut effectuer une intégration par parties, sous réserve que 2 des 3 termes soient convergents.
Or $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ possède bien une limite (nulle) en $+\infty$ et $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$ est un $\underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc elle est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison indirecte avec une intégrale de Riemann convergente.
Ainsi, on peut écrire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

Et comme les deux termes de droite sont convergents, on peut en déduire que l'intégrale de gauche est convergente.

1.d) Conclure que l'intégrale J_n est convergente.

Puisque f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, $\int_0^1 f_n$ est une intégrale convergente.
Par ailleurs, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^{n+1}} dx$ converge d'après 1.b) et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ converge d'après 1.c) donc, par somme, $\int_1^{+\infty} f_n$ converge. Enfin, par relation de Chasles, l'intégrale J_n est convergente.

2) En déduire que pour tout couple d'entiers (n, p) tels que $n \geq p \geq 1$, l'intégrale $J_{n,p}$ est convergente et l'exprimer en fonction des intégrales J_n et J_p.

On constate que l'intégrande de l'intégrale $J_{n,p}$ est tout simplement la fonction $f_p - f_n$ donc, par somme, l'intégrale $J_{n,p}$ est convergente et $J_{n,p} = J_p - J_n$.

3) Soit a un réel strictement positif et q un entier supérieur ou égal à 1. Soit g une fonction de classe C^q sur $[a,+\infty[$ telle que les dérivées successives $g, g', \dots, g^{(q-1)}$ soient toutes bornées sur $[a,+\infty[$. Sans oublier de justifier les convergences des intégrales, montrer que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{q+1}}dx = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{g^{(k)}(a)}{q(q-1)\dots(q-k)a^{q-k}} + \int_a^{+\infty} \frac{g^{(q)}(x)}{q!\,x}dx$$

Soit $\varphi: x \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} \frac{g^{(k)}(x)}{q(q-1)\dots(q-k)x^{q-k}} = \frac{1}{q!}\sum_{k=0}^{q-1} \frac{(q-k-1)!\,g^{(k)}(x)}{x^{q-k}}$. Alors φ est définie sur $[a,+\infty[$ et de classe C^1 sur cet intervalle, par opérations sur les fonctions de classe C^1. De plus, pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{q!}\sum_{k=0}^{q-1}\left(-\frac{(q-k)!}{x^{q-k+1}}g^{(k)}(x) + \frac{(q-k-1)!}{x^{q-k}}g^{(k+1)}(x)\right)\\ &= \frac{1}{q!}\left(-\frac{q!}{x^{q+1}}g^{(0)}(x) + \frac{1}{x}g^{(q)}(x)\right)\\ &= -\frac{g(x)}{x^{q+1}} + \frac{g^{(q)}(x)}{q!\,x}\end{aligned}$$

Par conséquent, par théorème fondamental de l'intégration, pour tout réel $A > a$:

$$\int_a^A \left(-\frac{g(x)}{x^{q+1}} + \frac{g^{(q)}(x)}{q!\,x}\right)dx = \int_a^A \varphi'(x)dx = \varphi(A) - \varphi(a)$$

Or, toutes les fonctions $g, g', \dots, g^{(q-1)}$ sont bornées sur $[a,+\infty[$ donc, en notant $\|g^{(k)}\|_\infty = \sup(\{|g^{(k)}(x)|, x \in [a,+\infty[\})$, on a la majoration :

$$|\varphi(A)| \leq \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(q-k-1)!}{q!} \times \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{A^{q-k}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, on peut faire tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, prouvant ainsi la convergence de l'intégrale et obtenant la relation :

$$\int_a^{+\infty}\left(\frac{g(x)}{x^{q+1}} - \frac{g^{(q)}(x)}{q!\,x}\right)dx = \varphi(a) = \sum_{k=0}^{q-1}\frac{g^{(k)}(a)}{q(q-1)\dots(q-k)a^{q-k}}$$

De plus, $\frac{g(x)}{x^{q+1}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{q+1}}\right)$ donc par comparaison indirecte avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_a^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{q+1}}dx$ est convergente, et donc par somme, $\int_a^{+\infty} \frac{g^{(q)}(x)}{q!x}dx$ est également convergente.

On obtient donc enfin :

$$\int_a^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{q+1}}dx = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{g^{(k)}(a)}{q(q-1)\dots(q-k)a^{q-k}} + \int_a^{+\infty} \frac{g^{(q)}(x)}{q!\,x}dx$$

Remarque : On aurait pu également effectuer q intégrations par parties successives, mais la démonstration rigoureuse est encore plus pénible à écrire.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n : \mapsto \sin^n(x)$.

4.a) Justifier que g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_n^{(k)}$ possède un développement limité à tout ordre en 0.

La fonction sinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, g_n est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Par théorème de Taylor-Young, on en déduit en particulier que g_n et toutes ses dérivées possèdent des développements limités à tout ordre en 0.

4.b) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], g_n^{(k)}(0) = 0$ et $g_n^{(n)}(0) = n!$

Puisque $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $g_n(x) \underset{x\to0}{\sim} x^n$, autrement dit $g_n(x) = x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n)$.
Par comparaison avec le développement de Taylor-Young :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
et par unicité des coefficients d'un DL, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], g_n^{(k)}(0) = 0$ et $g_n^{(n)}(0) = n!$

4.c) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g_n^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après le résultat précédent, le développement de Taylor-Young de $g_n^{(k)}$ à l'ordre $n-k$ en 0 s'écrit :
$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{n-k} \frac{g_n^{(k+p)}(0)}{p!} x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-k}) = 0 + \cdots + 0 + \frac{g_n^{(n)}(0)}{(n-k)!} x^{n-k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-k})$$
Par conséquent :
$$g_n^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5.a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g_n(x) = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{(n-2k)ix}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par formule d'Euler et binôme de Newton :
$$g_n(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^{n-k} \left(-e^{-ix}\right)^k = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{(n-2k)ix}$$

5.b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^n \cos\big((n-2k)x\big) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^n \cos\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

On peut dériver n fois l'expression obtenue à la question précédente. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \big((n-2k)i\big)^n e^{(n-2k)ix} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^n e^{(n-2k)ix} \end{aligned}$$
Mais la fonction g_n est à valeurs réelles donc toutes ses dérivées le sont également donc $g_n^{(n)}$ est égale à sa partie réelle. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^n \cos\big((n-2k)x\big)$$
On constate alors que les termes de la somme de part et d'autre de $\frac{n}{2}$ sont les mêmes.
Plus précisément, si n est pair alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big) + \binom{n}{p}(-1)^p(n-2p)^n\cos\big((n-2p)x\big)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=p+1}^{2p}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big)\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big) + 0\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}(2k-n)^n\cos\big((2k-n)x\big)\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

Si n est impair, il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big)\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}(2k-n)^n\cos\big((2k-n)x\big)\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$g_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\cos\big((n-2k)x\big)$$

5.c) Combien vaut :

$$\frac{1}{2^{n-1}n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n$$

D'après le résultat de la question précédente, celui de la question 4.b) :

$$\frac{1}{2^{n-1}n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n = \frac{g_n^{(n)}(0)}{n!} = 1$$

6) À l'aide des questions précédentes, conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \int_0^{+\infty}\left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!} - \cos(x)\right)\frac{dx}{x}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut appliquer le résultat de la question 3) à la fonction g_n et à l'ordre $q = n$.

On vérifie donc les hypothèses. On fixe d'abord $a > 0$.
g_n est bien de classe C^n sur $[a, +\infty[$ et d'après l'expression obtenue à la question 5.a), toutes ses dérivées sont bornées sur cet intervalle. Ainsi :

$$\int_a^{+\infty} \frac{g_n(x)}{x^{n+1}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_n^{(k)}(a)}{n(n-1)\dots(n-k)a^{n-k}} + \int_a^{+\infty} \frac{g_n^{(n)}(x)}{n!\,x} dx$$

Par conséquent, puisque $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ converge, en soustrayant, on obtient :

$$\int_a^{+\infty} \left(\frac{g_n(x)}{x^{n+1}} - \frac{\cos(x)}{x}\right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_n^{(k)}(a)}{n(n-1)\dots(n-k)a^{n-k}} + \int_a^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!\,x} - \frac{\cos(x)}{x}\right) dx$$

Puisque l'intégrale J_n converge, on peut faire tendre a vers 0 dans l'intégrale de droite.
Puisque pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{g_n^{(k)}(a)}{a^{n-k}} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{n!}{(n-k)!}$ d'après 4.c), on conclut que l'intégrale de droite possède également une limite lorsque a tend vers 0, autrement dit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!x} - \frac{\cos(x)}{x}\right) dx$ est convergente. En passant à la limite lorsque $a \to 0$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{n!} \times \frac{n!}{(n-k)!} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!\,x} - \frac{\cos(x)}{x}\right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!} - \cos(x)\right) \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!} - \cos(x)\right) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

7) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On note F_b l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)-\cos(bx)}{x} dx$.

7.a) Montrer que l'intégrale F_b est convergente. On pourra utiliser 1.c).

Tout d'abord la fonction $\psi_b : x \mapsto \frac{\cos(x)-\cos(bx)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus :

$$\psi_b(x) = \frac{1}{x}\left(\left(1 + \underset{x\to 0}{O}(x^2)\right) - \left(1 + \underset{x\to 0}{O}(x^2)\right)\right) = \underset{x\to 0}{O}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc ψ_b est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^1 \psi_b$ est convergente.
On a vu en 1.c) que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ est convergente.
Par changement de variable, on en déduit que :

$$\int_b^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(bu)}{bu} (b\,du) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx$ est également convergente.
Par somme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \psi_b$ est convergente et par relation de Chasles l'intégrale $F_b = \int_0^{+\infty} \psi_b$ est convergente.

7.b) Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx = \int_1^{b} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

On a vu à la question précédente que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx = \int_b^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ donc, par relation de Chasles :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx = \int_1^{b} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

7.c) Montrer de même que :

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)-\cos(bx)}{x}dx = \int_1^b \frac{1-\cos(x)}{x}dx$$

De la même façon, puisque $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\cos(x)-\cos(bx)}{x}dx &= \int_0^1 \frac{1-\cos(bx)}{x}dx - \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x}dx\\ &= \int_0^b \frac{1-\cos(u)}{u/b}\frac{du}{b} - \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x}dx\\ &= \int_0^b \frac{1-\cos(x)}{x}dx - \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x}dx\\ &= \int_1^b \frac{1-\cos(x)}{x}dx\end{aligned}$$

7.d) Conclure que $F_b = \ln(b)$.

Finalement, avec les deux résultats précédents :

$$F_b = \int_0^1 \psi_b(x)dx + \int_1^{+\infty} \psi_b(x)dx = \int_1^b \frac{1-\cos(x)}{x}dx + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x}dx = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(b)$$

8) En déduire finalement que :

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor -1} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n \ln(n-2k)$$

Il s'agit de synthétiser les 3 précédentes questions.
D'après la question 5), pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!} - \cos(x) &= \left(\frac{1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n \cos\big((n-2k)x\big)\right) - \cos(x)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n\Big(\cos\big((n-2k)x\big) - \cos(x)\Big)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{g_n^{(n)}(x)}{n!} - \cos(x)\right)\frac{dx}{x} &= \frac{-1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n \int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)-\cos\big((n-2k)x\big)}{x}dx\\ &= \frac{-1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n F_{n-2k}\\ &= \frac{-1}{2^{n-1}\,n!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n}{k}(-1)^k(n-2k)^n \ln(n-2k)\end{aligned}$$

Mais si n est pair, $\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - 1$ et si n est impair, $\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ mais le terme de cette somme obtenu pour $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor$ est nul puisque $\ln(n-2k) = \ln(1) = 0$.
Par conséquent, avec le résultat de la question 6), on peut conclure que :

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{n-1}\, n!} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^n \ln(n-2k)$$

9) En déduire une expression simplifiée de $J_{4,2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin^2(x) - \sin^4(x)}{x^5} dx$ sous la forme $\alpha + \beta \ln(2)$ où α et β sont des rationnels.

D'après 2) et 8) :

$$\begin{aligned} J_{4,2} &= J_2 - J_4 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 2!}\binom{2}{0}(-1)^0(2-0)^2 \ln(2-0)\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3\, 4!}\left(\binom{4}{0}(-1)^0(4-0)^4 \ln(4-0) + \binom{4}{1}(-1)^1(4-2)^4 \ln(4-2)\right)\right) \\ &= -\frac{7}{12} + \frac{1}{2^6 . 3}\left(2^9 \ln(2) - 2^6 \ln(2)\right) + \frac{1}{2^2}\left(2^2 \ln(2)\right) \\ &= -\frac{7}{12} + \frac{4}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

10) Reprendre la méthode précédente pour calculer $K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n\right) \frac{dx}{x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire particulièrement $K_{3,1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin(x) - \sin^3(x)}{x^5} dx$. On pourra admettre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On remarque tout d'abord que la fonction $k_n : x \mapsto \frac{1}{x^2}\left(1 - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ car :

$$k_n(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{O}(x^4)\right)^n\right) = \frac{n}{6} + \underset{x \to 0}{O}(x^2)$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 k_n$ est convergente.

De plus, puisque $\forall x \in \mathbb{R}^+, |\sin(x)| \leq |x|$, $k_n(x) = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc k_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par conséquent, l'intégrale K_n est convergente.

Ensuite, en reprenant le résultat de la question 3) pour la fonction g_n à l'ordre $q = n+1$ (puisque toutes les dérivées de la fonction g_n sont bornées, d'après ce qu'on a vu en 5)), on obtient pour tout $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{g_n(x)}{x^{n+2}} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)!\, g_n^{(k)}(a)}{(n+1)!\, a^{n+1-k}} + \int_a^{+\infty} \frac{g_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!\, x} dx$$

Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable d'après Riemann sur $[a, +\infty[$, on en déduit que :

$$\int_a^{+\infty} k_n(x) dx = \int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{g_n(x)}{x^{n+2}}\right) dx = \frac{1}{a} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)!\, g_n^{(k)}(a)}{(n+1)!\, a^{n+1-k}} - \int_a^{+\infty} \frac{g_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!\, x} dx$$

Malheureusement, le développement précédent de g_n n'est pas assez précis pour permettre de conclure à ce stade.

On peut réécrire : $\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{O}(x^4)\right)$ donc $g_n(x) = x^n\left(1 - \frac{n}{6}x^2 + \underset{x \to 0}{O}(x^4)\right)$.

Par conséquent, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} - \frac{n}{6} \frac{(n+2)!}{(n+2-k)!} x^{n+2-k} + \underset{x \to 0}{O}(x^{n+4-k})$ et $g_n^{(n+1)}(x) = -\frac{n}{6}(n+2)!\, x + \underset{x \to 0}{O}(x^3)$.

Ainsi :

$$\frac{1}{a} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)!\, g_n^{(k)}(a)}{(n+1)!\, a^{n+1-k}} = \frac{1}{a}\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n-k)!}\left(1 + \underset{a \to 0}{O}(a^2)\right)\right) = \underset{a \to 0}{O}(a) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} 0$$

On peut donc passer à la limite lorsque a tend vers 0 et cela prouve en particulier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!x} dx$ (qui en fait n'est pas impropre en 0 puisque $\frac{g_n^{(n+1)}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{n(n+2)!}{6}$).
On a donc finalement :

$$K_n = -\int_0^{+\infty} \frac{g_n^{(n+1)}(x)}{(n+1)!\,x} dx$$

Mais par à un calcul similaire à ce qui a été fait en 5), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_n^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \big((n-2k)i\big)^{n+1} e^{(n-2k)ix} \\ &= \frac{i}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^{n+1} e^{(n-2k)ix} \\ &= \frac{-1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^{n+1} \sin\big((n-2k)x\big) \\ &= \frac{-1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^{n+1} \sin\big((n-2k)x\big) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$K_n = \frac{1}{(n+1)!\,2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\big((n-2k)x\big)}{x} dx$$

Or, pour tout réel $b > 0$:

$$Z_b = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u/b} \frac{du}{b} = \frac{\pi}{2}$$

Donc, finalement :

$$K_n = \frac{\pi}{(n+1)!\,2^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k (n-2k)^{n+1}$$

Enfin :

$$K_{3,1} = K_3 - K_1 = \pi\left(\frac{1}{4!\,2^3}\left(\binom{3}{0}(3-0)^4 - \binom{3}{1}(3-2)^4\right) - \frac{1}{2.2}\binom{1}{0}(1-0)^2\right) = \frac{5\pi}{32}$$