- **Exercice 3**. Posons $u(z) = z^2 - 6z + 1$ et $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 1}$. On commence par rechercher les singularités de f, c'est-à-dire les racines de u. Un calcul de discriminant donne les racines $z_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $z_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. On a $u'(z) = 2z - 6$ et

$$\mathrm{Res}(f, 3 - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{u'(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{1}{2(3 - 2\sqrt{2}) - 6} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(f, 3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Pour calculer l'intégrale demandée, on applique la formule des résidus. Les valeurs $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont impossibles et $3 - 2\sqrt{2}$ est la seule située dans $\partial D(0, 1)$. Distinguons deux cas.

Cas : $3 - 2\sqrt{2} < |z| < 1$.

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z)dz = 2\pi i(-\frac{1}{4\sqrt{2}}) = -\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}$$

Cas : $|z| > 1$ et $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$.

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z)dz = 0$$