Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES

N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Epreuve : 101 Matière : 03-76 Session : 2020

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

exercice 1.

1) $\dim \ker A = 1$ en notant $\ker A$ le noyau de A.
en effet, en notant $A = (C_i)_{1 \le i \le 4}$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de A,

on a $C_1 = C_2$ et C_2, C_3 et C_4 sont échelonnés donc libres.
donc en notant $\operatorname{Im} A$ l'image de A, $\dim \operatorname{Im} A \geq 3$
et $\dim \ker A \geq 1$. Le théorème du rang nous permet de conclure. refait plus bas. les notations demeurent.

2) $\det A = 0$ car le système $(C_i)_{1 \le i \le 4}$ est lié.
d'après le théorème du rang
$\dim \ker A + \operatorname{rg} A = \dim \mathbb{R}^4 = 4$.
donc $\operatorname{rg} A = 3$.

reprise de la question 1).

$\ker A = \{ X \in \mathbb{R}^4 / AX = 0_4 \}$. en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$,

$$AX = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

$\iff X = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$. donc $\dim \ker A = 1$
une base de $\ker A$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES
N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

exo 1. 3) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de A.

$A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A,

on sait d'après le 1) que 0 est valeur propre

on connait 3 valeurs propres réelles.
sur $\mathbb{C}$, A est au minimum trigonalisable et sa trace est la somme de ses valeurs propre.
en notant d_4, la valeur propre manquante,
on a donc $0 + \frac{1}{2} + 1 + d_4 = d_4 + \frac{3}{2} = \mathrm{Tr}\,A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
d'où $d_4 = 0$. $= 3/2$.
0 est valeur propre double mais l'espace propre lié à 0 est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable

exercice 2.

1) $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots d\}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. $\lambda \in \mathbb{C}$

$\forall i \ |a_{ii} - \lambda| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

supposons que $A - \lambda Id$ ne soit pas inversible.

alors $\exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \neq 0_d$ tel que $(A - \lambda Id)X = 0$.

soit $AX - \lambda X = 0_d$.

$AX = (c_k)_{k \in \{1,\dots d\}}$ avec $c_k = \sum_{i=1}^{d} a_{ki} x_i$

donc $\forall k \in \{1,d\}$. $\sum_{i=1}^{d} a_{ki} x_i - \lambda x_k = 0$

donc $\forall k$, $(a_{kk} - \lambda) x_k = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} a_{ki} x_i$.

$|a_{kk} - \lambda| \, |x_k| = \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} a_{ki} x_i \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} |a_{ki} x_i|$ (inégalité triangulaire)

$\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} |a_{ki}| |x_i|$.

en posant x_k tel que $|x_k| = \sup_{k \in \{1,d\}} |x_k| \neq 0$ par hypothèse.

on a donc $|a_{kk} - \lambda| \, |x_k| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} |a_{ki}| |x_k|$

en particulier

(1) $$\text{d'où } |a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} |a_{ki}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $|a_{ii} - \lambda| > \sum_{j=1}^{i} |a_{ij}|$

on en déduit donc que $A - \lambda Id$ est inversible.

2) soit λ racine de f.

alors, comme f est le polynome caractéristique de Af, λ est une valeur propre de Af.

donc $\exists X \neq 0_1$ tel que $(Af - \lambda Id)X = 0$.

$Af - \lambda Id$ n'est pas injective, donc n'est pas inversible.

3./16.

3) soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| > 1 + \max_{i \in \{0,\dots d-1\}} |f_i|$.
on aurait pu conclure la question 1) avec la condition plus restrictive que $|a_{kk} - \lambda| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{d} |a_{ki}|$ $\forall k \in \{1;\dots d\}$ entraine $A - \lambda Id$ est inversible.

si on l'applique à A_f, alors $|\mu| > 1 + |f_i|$ $\forall i \in \{1,\dots d\}$

soit $|\mu| > 1 + \max_{i \in \{0,\dots,d-1\}} |f_i|$ entraine que $A_f - \mu Id$ est inversible.

ainsi, μ n'est alors pas valeur propre de A_f.
toutes les valeurs propres de A_f (dont le polynome caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$)
vérifient $|\rho| < 1 + \max_{i \in \{0,\dots,d-1\}} |f_i|$.

si $|f_i| \leq 1$ $\forall i$, alors $|\rho| < 1 + \|f\|_\infty$ avec $\|f\|_\infty = 1$

si $\exists j \in \{1,\dots d-1\}$ tel que $|f_j| > 1$ alors $\|f\|_\infty = \max_{i \in \{0,\dots,d-1\}} |f_i|$.
et l'inégalité est encore vraie.

donc si ρ est racine de f, alors $|\rho| \leq 1 + \|f\|_\infty$.

4)

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES

N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0376 Session : 2020

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

exercice 3.

1) a) $(b_1^\#, \dots, b_d^\#)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $b_1^\# = b_1$
et $\forall i \in \{2, \dots, d\}$, $\exists (\alpha_{ij})_{1 \leq j \leq i}$ tels que $b_i^\# = b_i - \sum_{j<i} \alpha_{ij} b_j^\#$

Montrons par récurrence que $\forall i \in \{1, \dots, d\}$
$\text{vect}(b_1, \dots, b_i) = \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_i^\#)$.

- pour $i = 1$, la propriété est trivialement vraie.

- supposons la vraie au rang i avec $1 \leq i < d$.
on a $\text{vect}(b_1, \dots, b_i) = \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_j^\#)$.
Montrons que l'on a alors $b_{i+1}^\# \in \text{vect}(b_1, \dots, b_i)$
et que $b_{i+1} \in \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_i^\#)$.

il existe par hypothèse des nombres réels tels que
$b_{i+1}^\# = b_{i+1} - \sum_{j<i+1} \alpha_{ij} b_j^\#$ or $b_j^\# \in \text{vect}(b_1, \dots, b_i)$
car $j \leq i$
donc $b_{i+1}^\# \in \text{vect}(b_1, \dots, b_{i+1})$.

inversement, $b_{i+1} = b_{i+1}^\# + \sum_{j<i+1} \alpha_{i+1,j} b_j^\# \in \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_{i+1}^\#)$.

ainsi $\text{vect}(b_1, \dots, b_{i+1}) = \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_{i+1}^\#)$.

la relation est vraie pour le rang $i+1$
elle est donc vraie pour tout $i \in \{1; \dots; d\}$.

$(b_1, \dots, b_d)$ sont linéairement indépendants, donc non nuls.
donc $b_1^\#$ est non nul.
$\forall i \in \{2, \dots, d\}$, $\dim \text{vect}(b_1^\#, \dots, b_i^\#) = \dim(b_1, \dots, b_i) = i$

9.75 / 20

donc $\dim \text{vect}(b_1^*, \dots, b_i^*) = 1 + \dim \text{vect}(b_1^*, \dots, b_{i-1}^*)$.
donc $b_i^* \neq 0$ $\forall i \in \{2, \dots, d\}$
donc b_i^* est non nul $\forall i \in \{1, \dots, d\}$.

b) $b_1^* = b_1$. $b_1 \neq 0$ donc $(b_1^* | b_1^*) \neq 0$.
supposons construite une famille de vecteurs $(b_1^*, \dots, b_k^*)$ pour $k \in \{1; d-1\}$ tels que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
$b_i^* = b_i - \sum_{j<i} \mu_{ij} b_j^*$ avec $\mu_{ij} = \frac{(b_i | b_j^*)}{(b_j^* | b_j^*)}$
et $b_j^* \neq 0$ $\forall j \in \{1; \dots; j\}$ (question a).

alors $b_{i+1}^* = b_{i+1} - \sum_{j<i+1} \mu_{ij} b_j^*$ avec $\mu_{ij} = \frac{(b_i | b_j)}{(b_j^* | b_j^*)}$

est bien définie et la construction est réalisée.

c) soient $i, j \in \{1, \dots, d\}$ tels que $i \neq j$.

$$(b_1^* | b_2^*) = \left(b_1 \,\middle|\, b_2 - \frac{(b_2 | b_1^*)}{(b_1^* | b_1^*)} b_1\right) = (b_1 | b_2) - \frac{(b_1 | b_2)}{(b_1 | b_1)} (b_1 | b_1)$$
$$= (b_1 | b_2) - (b_1 | b_2) = 0.$$

supposons que $(b_i^* | b_j^*) = 0$ $\forall i, j \leq k$, $i \neq j$.

cette propriété est vraie pour $k = 2$.
supposons la vraie pour un rang k. il suffit de montrer que $(b_{k+1}^* | b_i^*) = 0$ $\forall j \leq k$ pour vérifier la propriété au rang $k+1$.

$$(b_{k+1}^* | b_i^*) = \left(b_{k+1} - \sum_{j<k+1} \mu_{k+1,j} b_j^* \,\middle|\, b_i^*\right)$$
$$= (b_{k+1} | b_i^*) - \sum_{j<k+1} \mu_{k+1,j} (b_j^* | b_i^*).$$
$\downarrow$ $\mu_{k+1,i}$

$$(b_{k+1}^* \mid b_i^*) = (b_{k+1} \mid b_i^*) - \mu_{k+1,i}(b_i^* \mid b_i^*)$$

$$= (b_{k+1} \mid b_i^*) - \frac{(b_{k+1}, b_i^*)}{(b_i^* \mid b_i^*)}(b_i^* \mid b_i^*) = 0.$$

la relation est vraie au rang $k+1$, elle est donc vraie pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$.
P_3 est donc bien vérifiée.

soit B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs $b_1, \dots, b_d$ dans cet ordre.

2)

page 14

3) d'après la question 2, (non résolue), si $d = n$, alors, $\det B$ et $\det {}^tB$ ont le même signe et on a $\det B = \det {}^tB$.
donc $\det({}^tB\, B) = \det {}^tB \cdot \det B = (\det B)^2$.

d'où $|\det B| = \left(\det({}^tB.B)\right)^{1/2} = \prod_{i=1}^{d} \|b_i^*\|_2$.

8.1.16

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES

N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0376 Session : 2020

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

exercice 4. $n \in \mathbb{N}$ $P_n = t^{p^n} - t$. p nombre premier.

1) $n = qr + k$ la division euclidienne de n par r.

on a $P_n = t^{p^n} - t = t^{p^{qr+k}} - t$.

$\forall n$ $P_n \neq 0$ car p premier.

2) on a $pgcd(P_n, P_r) = pgcd(Q P_r + P_k, P_r)$

$= pgcd(P_k, P_r)$.

$= \dots = P_{pgcd(n,r)}$

par une construction (à montrer) similaire à l'algorithme d'euclide.

9.1/16.

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES
N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Partie 1

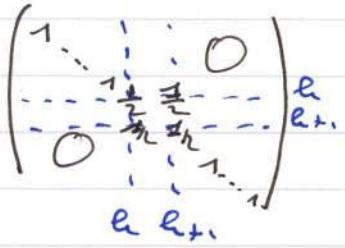
1) a) $\sum_{i=1}^{d} 1 = d$ donc $\xi \notin H$. donc H et $\mathrm{vect}\,\xi$ sont en somme directe.

. H est un hyperplan donc $\dim H = p-1$.

. $\dim \mathrm{vect}(\xi) = 1$.

donc $\dim H \oplus \mathrm{vect}(\xi) = d = \dim \mathbb{R}^d$

d'où $H \oplus \mathrm{vect}(\xi) = \mathbb{R}^d$.

on a $M_e =$ 

$e \in \{1; \dots; d-1\}$.

donc $M_e . \xi = \xi$.

ξ (non nul) est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

soit $X = (x_i)_{i \in [\![1;d]\!]} \in H$. on a $\sum_{i=1}^{d} x_i = 0$.

$M_e . X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{e-1} \\ \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2}x_{e+1} \\ \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2}x_{e+1} \\ x_{e+2} \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = (y_i)_{i \in [\![1;d]\!]}$. $\sum_{i=1}^{d} y_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq e \\ i \neq e+1}}^{d} x_i + \frac{1}{2}(x_e + x_{e+1}) \times 2$

$= \sum_{i=1}^{d} x_i = 0$.

donc $M_e X \in H$ qui est stable par l'endomorphisme associé à M_e.

b) soit $x \in \mathbb{R}^d$ $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d}$.

$Mx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2}x_{e+1} \\ \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2}x_{e+1} \\ x_{e+2} \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ $\|Mx\|_2 = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq e \\ i \neq e+1}}^{d} x_i^2 + \left(\frac{1}{2}(x_e + x_{e+1})\right)^2 \times 2 \right)^{1/2}$

$= \left(\sum_{i \notin \{e; e+1\}} x_i^2 + \frac{1}{2}(x_e + x_{e+1})^2 \right)^{1/2}$

or $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a-b)^2 \geq 0$ $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

donc $\|Mx\|_2 \leq \left(\sum_{i \notin \{e, e+1\}} x_i^2 + x_e^2 + x_{e+1}^2 \right)$

$\leq \|x\|_2$.

dans le cas d'égalité, on a $(x_e + x_{e+1})^2 = 2(x_e^2 + x_{e+1}^2)$

soit $x_e^2 - 2x_e x_{e+1} + x_{e+1}^2 = 0$

soit $(x_e - x_{e+1})^2 = 0$

donc $x_e = x_{e+1}$.

2) on pose $A = M_{d-1} \cdot M_{d-2} \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1$.

on a $\forall k \in \{1, \dots, d-1\}$ $M_k \cdot \xi = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ e \\ e+1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \xi$.

donc par une récurrence simple

$A\xi = M_{d-1} \cdot M_{d-2} \cdot \dots \cdot M_2 M_1 \xi = \xi$.

donc ξ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre (v-p) 1.

H est stable par chaque endomorphisme M_k, donc par composition, H est stable par A.

3) $x \in \text{vect}(\xi)$. avec $x = (x_i)$

alors $\exists i, j \in \{1, d\}$ tels que $x_i \neq x_j$.

en particulier, il existe $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $x_k \neq x_{k+1}$

soit ℓ, le premier indice tel que $x_\ell \neq x_{\ell+1}$.

on a $\|Ax\|_2 = \|M_{d-1} \cdot M_{d-2} \dots M_2 \cdot M_1 x\|_2$.

or si $x_k = x_{k+1}$, $M_k x = x$.

donc $\|Ax\|_2 = \|M_{d-1} \cdot M_{d-2} \dots (M_\ell x)\|_2$

$\leq \|M_\ell x\|_2 < \|x\|_2$.

$x \notin \text{vect}(\mathcal{E})$

si x est un vecteur propre (VP) associé à la vp 1

alors $\|Ax\| = \|x\|$ ce qui est contradictoire.

donc le sous espace propre associé à 1 est $\text{vect}(\mathcal{E})$.

4) soit $x \in H$. $x \neq 0$.

on a d'après la question précédente $\|Ax\|_2 < \|x\|_2$.

si $Ax = 0$ alors la question est trivialement démontrée.

sinon, on a $\|Ax\| = k\|x\|$ avec $k = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1$.

par une récurrence simple, on montre que

$$\|A^n x\| = k^n \|x\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

donc $A^n x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0_{\mathbb{R}^d} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

la limite de $\left(A_H^q\right)_{q \in \mathbb{N}}$ est donc l'endomorphisme nul.

5) $\mathbb{R}^d = \text{vect}(\mathcal{E}) \oplus H$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\exists x_1 \in \text{vect}(\mathcal{E})$ $x_2 \in H$ tels que $x = x_1 + x_2$

$Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = x_1 + Ax_2$

et $\forall q$, $A^q x = A^q x_1 + A^q x_2$ car $\text{vect}(\mathcal{E})$ et H sont
$= x_1 + A^q x_2$. stables par A.

donc $A^q x \xrightarrow[q \to +\infty]{} x_1$

$\left(A^q\right)_{q \in \mathbb{N}}$ converge donc vers Π.

soit $G \in H$.

$X = AX + G \iff (I - A)X = G$.

1 n'est pas vp de la restriction de A à H, donc $I - A$ est inversible, ce qui assure l'existence de l'unique solution $Z = (I - A)^{-1} G$.

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES
N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0376 Session : 2020

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Partie 1 6) (suite).

soit X, une solution dans $\mathbb{R}^d$ de l'equation $X = AX + G$.
on a $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \text{vect}(\mathcal{E})$ et $X_2 \in H$.

alors $X_1 + X_2 = A(X_1 + X_2) + G$

$X_1 + X_2 = AX_1 + AX_2 + G = X_1 + AX_2 + G$.

on obtient donc $X_2 = AX_2 + G$. soit $X_2 = Z$.

donc $X = X_1 + Z$.

inversement, soit $X_1 \in \text{vect}(\mathcal{E})$. Montrons que $X_1 + Z$ est solution.

$A(X_1 + Z) + G = \underbrace{AX_1}_{X_1} + \underbrace{AZ}_{Z} + G = X_1 + Z$.

l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble $\{ X + Z \,/\, X \in \text{vect}(\mathcal{E}) \}$.

Concours section : AGREGATION EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : MATHEMATIQUES GENERALES

N° Anonymat : A000535698 Nombre de pages : 16

9.75 / 20

Partie 2 dans $\mathbb{Q}(t)$, seule la division par un polynome unitaire est assurée.

1) g est un polynome de $\mathbb{Q}(t)$ premier avec f unitaire.

$\text{pgcd}(f,g) = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Q}(t)$ principal

il existe donc $u, v \in \mathbb{Q}[X]$, d'après le théorème de Bezout tels que $uf + vg = 1$.

Exercice 3.

2) ${}^tBB = \begin{pmatrix} b_1 & - \\ \vdots & \\ b_d & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

$= \left((b_i \mid b_j) \right)_{i,j \in \{1,\dots,p\}}$ (2)

Soit M, l'endomorphisme transformant (b_i) en (b_i^*) ✗

les familles (b_i) et (b_i^*) sont de même cardinal et libres, * laissant stable $\mathbb{R}^n$, $\text{vect}(b_i)$.

donc M est inversible.

on a $MB = B^*$ où B^* est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $b_1^*, \dots b_d^*$

$B = M^{-1} B^*$.

${}^tB\,{}^tM = {}^t(MB) = {}^tB^*$

${}^tB = {}^tB^* {}^tM^{-1}$

donc ${}^tBB = {}^tB^* {}^tM^{-1} M^{-1} B^*$

.14./.16.

$$\det {}^t B B = \det({}^t B^* {}^t M^{-1} M B^*)$$

$$= \det {}^t B^* \det(B^*) \underbrace{\det {}^t M^{-1} \det M}_{= \frac{1}{\det M}} \quad \text{car } \det {}^t M = \det M.$$

$$= \det({}^t B^* B^*)$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \|b_i^*\|^2 \quad \text{car } (b_i^*) \text{ est orthogonale.}$$

d'où $\left(\det({}^t B B)\right)^{1/2} = \prod_{i=1}^{d} \|b_i^*\|_2$. en appliquant (2) pour $({}^t b_i)^*$.