Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 2

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

Epreuve : 102 Matière : 0530 Session : 2021

CONSIGNES

- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Partie A.

I L'élève peut écrire dans la cellule B5

$$= (D\$1+3)*B4 - (3*D\$1+2)*B2 + 2*D\$1$$

II Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, une fois a fixé

$$(a+3)\lambda - (3a+2)\lambda + 2a\lambda = a[\lambda - 3\lambda + 2\lambda] + \lambda(3-2)$$
$$= \lambda$$

c'est bien dire que la suite constante égale à λ est solution de (1)

III 1. La suite e est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = 0^n$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $3e_{n+2} - 2e_{n+1} = 3 \times 0^{n+2} - 2 \times 0^{n+1}$

$$= 3 \times 0 - 2 \times 0$$
$$= 0$$
$$= 0^{n+3} = e_{n+3}$$

Jusque $n+1$, $n+2$ et $n+3$ sont supérieurs ou égaux à 1.

2. On a d'une part

$$v_2 = u_2 - \lambda e_2 = u_2$$

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 2
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

et d'autre part $3v_1 - 2v_0 = 3u_1 - \lambda e_1 - 2u_0 + 2\lambda e_0$
$= 3u_1 - 2u_0 + 2\lambda$.

Donc pour avoir $v_2 = 3v_1 - 2v_0$, il faut et il suffit que

$u_2 = 3u_1 - 2u_0 + 2\lambda$ soit :

$\lambda = \frac{1}{2}(u_2 - 3u_1 - 2u_0)$.

Ce qui donne bien l'existence (et l'unicité) de λ.

3. Le système $\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ \alpha + 2\beta = v_1 \end{cases}$ (*)

d'inconnues $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ admet $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$
comme déterminant. Le système (*) admet une solution (et une seule par ailleurs).

4. On considère la suite $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - \alpha$ où α a été défini (il est unique) ci-dessus on a

$w_1 = v_1 - \alpha = 2\beta = 2(v_0 - \alpha) = 2w_0$.

~~Des plus évidents~~

$w_{n+1} = w_n$

et $w_2 = v_2 - \alpha = 3v_1 - 2v_0 - \alpha$
$= 3v_1 - 3\alpha - 2v_0 + 2\alpha$
$= 3w_1 - 2w_0 = 6w_0 - 2w_0 = 4w_0$.

On va démontrer par une récurrence double la proposition P_n $(n \in \mathbb{N})$:

$$w_{n+1} = 2 w_n. \quad \text{(Ecriture de la proposition)}$$

On vient de voir qu'on avait P_0 et P_1. (Initialisation)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a P_n et P_{n+1}.

On a alors.

$$w_{n+2} = v_{n+2} - \alpha \quad \text{par définition de } w$$

$$= 3 v_{n+1} - 2 v_n - \alpha \quad \text{d'après (3) en spécifiant } n.$$

$$= 3 v_{n+1} - 3\alpha - (2 v_n - 2\alpha)$$

$$= 3 w_{n+1} - 2 w_n$$

$$= 3 w_{n+1} - 2 w_{n+1} \quad \text{d'après } P_n$$

$$= 2 w_{n+1}$$

On a donc bien P_{n+2}. (Hérédité).

En résumé on a $\begin{cases} P_0, P_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ P_{n+1} \wedge P_n \Rightarrow P_{n+2}. \end{cases}$

donc d'après le théorème de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n ce qu'il fallait démontrer (Conclusion).

On en déduit que w est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$$w_0 = v_0 - \alpha = \beta.$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \beta 2^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n + \alpha = \alpha + \beta 2^n$.

..3/20.

5. On sait que $u = v + \lambda e$ où λ a été calculée en III.2 puis que $v = \alpha (1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Donc $u = \lambda e + \alpha (1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien combinaison linéaire de e, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV On a vu que $e \in E_0$ (III.1).
que $1 \in E_0$ (II).
que $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$. (pas encore).

~~$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+2} = 4 \times 2^n = 6 2^n - 2 \times 2^n = 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n$.~~
~~donc $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$. puisqu'elle est soluti~~

$\forall n \in \mathbb{N}$. $3 \times 2^{n+2} - 2 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^{n+2} - 2^{n+2}$
$= 2 \times 2^{n+2}$
$= 2^{n+3}$

Donc $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 2^n$.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$.

e_{n+3}	$=$	$3 e_{n+2}$	$- 2 e_{n+1}$	$\times \lambda$.
1_{n+3}	$=$	$3 1_{n+2}$	$- 2 \cdot 1_{n+1}$	$\times \alpha$.
d_{n+3}	$=$	$3 d_{n+2}$	$- 2 d_{n+1}$	$\times \beta$.

$$(\lambda e + \alpha 1 + \beta d)_{n+3} = 3 (\lambda e + \alpha 1 + \beta d)_{n+2} - 2 (\lambda e + \alpha 1 + \beta d)_{n+1}$$

donc $\lambda e + \alpha 1 + \beta d \in E_0$.

V. 1. On a donc démontré que E_0 est l'espace vectoriel des suites réelles engendré par e, 1 et d.

2. En mathématiques, on dit qu'on a procédé par double inclusion
En didactique institutionnelle on a procédé par analyse (III) – synthèse (IV)

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 2

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

Epreuve : 102 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Partie C.

VI 1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$AU_n = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Soit $AU_n = U_{n+1}$

2. Se démontre par une récurrence sans malice.
en effet, $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

permet d'établir l'hérédité

et $U_0 = I_3 U_0 = A^0 U_0$ permet d'établir l'initialisation.

Je ne détaille pas davantage.

3. On a $P = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_0^1 & \lambda_0^2 \\ \lambda_1^0 & \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^0 & \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$ en posant

$\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$. Le déterminant de P est un déterminant de Vandermonde non nul puisque λ_0, λ_1 et λ_2 sont distincts 2 à 2.

Donc P est inversible de déterminant

$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) = (1-2) \times (0-2) \times (0-1) = -2$

..5./20.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 2
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

L'inverse P^{-1} est donnée par la transposée de la comatrice divisée par -2.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 6 \\ -4 & 16 & -12 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -4 & 16 & -12 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } P^{-1}AP = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. On a $P^{-1}AP = D$

donc $AP = PD$ par multiplication à gauche puis à droite.
et $A = PDP^{-1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD(P^{-1}P)\ldots(P^{-1}P)DP^{-1}$$

par associativité du produit matriciel

Soit $A^n = PD\underbrace{I_3D \times \ldots \times I_3D}_{n-2 \text{ fois}}DP^{-1}$.

$$= PD^nP^{-1}$$

.6./.20.

Vérification par récurrence.

Enoncé : Q_n : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a Q_n.

On a alors
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\,A^n \\ &= A\,PD^nP^{-1}, \text{ d'après } Q_n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \quad \text{(associativité)} \\ &= PD\,I_3\,D^nP^{-1} \\ &= PD\,D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

On a bien Q_{n+1}.

Conclusion : on a $\begin{cases} Q_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ Q_n \Rightarrow Q_{n+1} \end{cases}$

D'après le théorème de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}\ Q_n$.
Ce qu'il fallait vérifier.

5. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = PD^nP^{-1}U_0$

On pose $P^{-1}U_0 := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on a $D^nP^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} x \\ y2^n \\ z3^n \end{pmatrix}$

donc $U_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y2^n \\ z3^n \end{pmatrix}$

en calculant la troisième ligne de U_n on trouve

$u_n = 1.x + 1.y2^n + 1.z3^n$. et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

.7..20.

6. On a de plus $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

c'est bien dire que x, y, z s'expriment linéairement en fonction de u_2, u_1 et u_0.

VII Inversement (1) est solution de (4) puisque $1 = 6 \times 1 - 11 \times 1 + 6 \times 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

de même $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de (4) puisque

$$\begin{aligned} 6 \times 2^{n+2} - 11 \times 2^{n+1} + 6 \times 2^n &= 3 \times 2^{n+3} - 11 \times 2^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} \\ &= 3 \times 2^{n+3} - 8 \times 2^{n+1} \\ &= 3 \times 2^{n+3} - 2 \times 2^{n+3} \\ &= 2^{n+3} \quad \text{ce } \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

De même $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de (4)

$$\begin{aligned} 6 \times 3^{n+2} - 11 \times 3^{n+1} + 6 \times 3^n &= 6 \times 3^{n+2} - 11 \times 3^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} \\ &= 6 \times 3^{n+2} - 9 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times 3^{n+3} - 3^{n+3} \\ &= 3^{n+3} \quad \text{et ce } \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Puis comme à la question IV. 1 on vérifie que toute combinaison linéaire de ces trois vecteurs est solution de (4).

VIII E_3 est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'après VI (analyse) et VII (synthèse).

XXX.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 2

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

Epreuve : 102 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

IX on a $P^{-1} U_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$

donc en posant $x = \frac{7}{2}$; $y = -4$ et $z = \frac{3}{2}$

on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7}{2} - 4\,2^n + \frac{3}{2}\,3^n$.

X. on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n\left[\frac{3}{2} - 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 7\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2} - 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

XI en Python :

```
n = 0
unp2 = 1
unp1 = 0
un = 1
m = 100000
while unp+3 < m :
    temp = unp2
    unp2 =
```

..9./20.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 2
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

```
n = 3
Un = 1
Unp1 = 0
Unp2 = 1
Unp3 = 12
while Unp3 < 100000 :
    temp = Unp3
    Unp3 = 6*Unp2 - 11*Unp1 + 6*Un.
    Un = Unp1
    Unp1 = Unp2
    Unp2 = temp.
    n = n+1
print (n)
```

XII On calcule $P^{-1}U_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 4 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

Comme $\zeta = -\frac{3}{2}$ est négatif on a

$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Il est donc peu probable que u_n dépasse la valeur 10^5. Pour en être sûr il convient de majorer la suite.
En tout cas cela donne une explication plausible à une erreur (vraisemblablement le RUNTIME. L'élève devrait être content d'avoir un message d'erreur alors que son programme boucle indéfiniment ...

..10/20.

XIII 1. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une algèbre pour l'addition la multiplication externe et la multiplication interne

2. On pose $v := \phi(u_n)$: la suite définie par

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} - (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2a\,u_n = 0_n$.

on a $\begin{cases} \phi \text{ est un endomorphisme de } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot) \\ E_a = \operatorname{Ker} \phi \end{cases}$

donc E_a est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$

XIV 1. Trivial.

2. Θ est trivialement surjective : ~~toute suite $u \in E_a$ est entièrement~~ Pour chaque triplet ${}^t(u_2, u_1, u_0)$ on peut construire une solution de E_a par récurrence grâce à la relation (1).

Θ est injective : ~~une suite solution de (1) a pas~~ Deux suites solutions de (1) qui coïncident sur les trois premiers termes sont clairement égales par une récurrence sans malice.

3. Θ est une bijection linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie (egale à 3) alors E_a est de dimension finie (théorème du rang) égale à 3

(Comme $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E_a est de dimension infinie)

XV. E_0 admet pour base la famille generatrice vue en V : e, $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisqu'elle a trois éléments.

E_3 admet pour base la famille generatrice vue en VI : $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

.11.1.80

Ce sont bien sûr des exemples parmi d'autres.

I. On a $P(X \in [0,t]) = \int_{[0,t]} f \, d\lambda$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,

Soit $P(X \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t$$

$$\boxed{P(X \leq t) = -e^{-\lambda t} + 1}$$

On en déduit la probabilité de l'événement contraire:

$$P(X > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})$$

$$= e^{-\lambda t}$$

II $P(X \leq t)$ est la probabilité que le noyau se désintègre avant l'instant t

$P(X > t)$ est la probabilité que le noyau se désintègre après l'instant t.

(La probabilité qu'il se désintègre à l'instant t est nulle).

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 2
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

Epreuve : 102 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Soit $A = (X > t+h)$ et $B = (X > t)$.

on a $A \cap B = A$, $P(B) = e^{-\lambda t} \neq 0$

et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h-t)}$

Soit $\boxed{P_{(X>t)}(X > t+h) = e^{-\lambda h} = P(X > h).}$

IV

$P_{(X>t)}(X > t+h)$ est la probabilité que le noyau se désintègre après l'instant $t+h$, sachant qu'il ne s'est pas désintégré avant l'instant t.

V 1/ c'est la définition. Il est toujours dangereux d'aller au-delà d'une définition en probabilité (voir les événements indépendants)

2/ Cela signifie, dans le cadre de la modélisation de la désintégration radio-active que la désintégration ne dépend pas de l'origine des temps fixée.

VI On a $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt \in [0, +\infty]$.

Pour voir que $t \longmapsto \lambda t\, e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on peut remarquer que

$\lim_{t \to +\infty} t e^{-\lambda t/2} = 0$ (car $\lambda > 0$) et

.13/.20

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 2
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

donc que $t \longmapsto t e^{-\lambda t/2}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$, disons par M. De ce fait

$$\int_0^{+\infty} |\lambda t e^{-t}| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-t/2} dt.$$

$$\leq 2M < \infty$$

Donc $E(X)$ est définie. On pose

$u(t) = t$ $\quad u'(t) = 1$
$v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $\quad v(t) = -e^{-\lambda t}$

$\left.\begin{array}{l}\end{array}\right\}$ u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$

On a — sous réserve de convergences — d'après le théorème d'intégration par parties :

$$E(X) = \left[-t e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt.$$

le terme tout intégré converge vers zéro en $+\infty$ et est nul en zéro.

on a $t \longmapsto e^{-\lambda t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ce qui termine la justification de l'égalité. De plus.

$$E(X) = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Finalement $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}.}$ λ est homogène à l'inverse d'une durée.

Le paramètre λ est l'inverse du temps "moyen" de désintégration du noyau.

.1.4.2.0.

VII Pour les mêmes raisons que précédemment le deuxième moment

$$\int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt < \infty \quad \text{car} \lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-\lambda t/2} = 0$$

On intègre par parties en posant cette fois

$u(t) = t^2$ $\quad u'(t) = 2t$

$v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $\quad v(t) = -e^{-\lambda t}$

$\Big\}$ u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$

Toujours sous réserves de convergences :

$$\int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t}\, dt$$

A nouveau le terme tout intégré converge vers zéro en $+\infty$ par croissance comparée et est nul en zéro ;

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 0 + \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$

Maintenant $\displaystyle V(X) = \int_0^{+\infty} (t - E(X))^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt < \infty$

Puisqu'en développant le carré on a :

$$V(X) = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt - 2E(X)\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\, dt + E(X)^2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt.$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Soit $\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$ et

.157.20

l'écart-type de X est $\frac{1}{\lambda}$ (homogène à une durée).

VIII.3. On peut faire remarquer à l'élève qu'il s'agit d'une <u>modélisation</u>. Une modélisation (activité non-mathématique s'il en est) donne des résultats approchés. Lorsqu'il s'agit de modélisation de populations (Covid, modèle de Verhulst du bac S 2003) on n'hésite pas à couper les individus en morceaux.

Et puis qui peut dire que N(t) n'est pas entier à un instant donné (sans théorème de Gelfond-Schneider).

Enfin le nombre d'Avogadro est-il vraiment un entier ? Et si oui, est-ce un nombre premier ? (En voilà une conjecture qui risque de durer...).

IX 1. la fonction $F : t \longmapsto e^{-\lambda t}$ est continue strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc vérifie le théorème des valeurs intermédiaires

$F(0) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 0$

donc τ est parfaitement définie. De plus, on a

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad -\lambda\tau = -\ln 2$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

2. On a $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$

Ce qui donne $\lambda = 0{,}087\ j^{-1}$ à 10^{-3} près.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 2

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

Epreuve : 102 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

3. $P(6 \leq X \leq 10) = \int_6^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_6^{10}$

$= \exp(-6\lambda) - \exp(-10\lambda)$

en prenant $\lambda = \frac{\ln 2}{8}$ exprimé en j^{-1}

$P(6 \leq X \leq 10) = \exp\left(-\frac{6}{8}\ln 2\right) - \exp\left(-\frac{10}{8}\ln 2\right)$

$= 2^{-3/4} - 2^{-5/4}$

$= 0,174$ à 10^{-3} près.

X. 1. Tout dépend comment on a défini l'exponentielle. A partir du moment où on a réussi à démontrer que l'exponentielle est sa propre dérivée et qu'elle prend la valeur 1 en zéro. on a

$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$

2. Approximativement tout court n'est pas un terme du lexique mathématique donc ça va être dur...

17/20.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 2

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 20

17.98 / 20

On a $P(t \leq X \leq t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda(t+\Delta t))$

$= \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda(t+\Delta t))$

$= \exp(-\lambda t)\left[1 - \exp(-\lambda \Delta t)\right]$

On cherche $P_{(X>t)}(X > t+\Delta t)$

D'après ~~III~~ c'est

On cherche $P_{(X>t)}(t \leq X \leq t+\Delta t)$

Soit $\frac{1}{\exp(-\lambda t)}\left[\int_t^{t+\Delta t} \lambda e^{-\lambda x} dx\right]$

$= \frac{1}{\exp(-\lambda t)}\left[\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda(t+\Delta t))\right]$

$= \frac{1}{\exp(-\lambda t)} \exp(-\lambda t)\left[1 - \exp(-\lambda \Delta t)\right]$

$= \frac{1 - \exp(-\lambda \Delta t)}{-\lambda \Delta t} \times (-\lambda \Delta t)$

En commettant l'erreur de remplacer $\frac{\exp(-\lambda \Delta t) - 1}{-\lambda \Delta t}$ par 1 on trouve comme valeur approchée $-1 \times (-\lambda \Delta t) = \lambda \Delta t$

..18./20.

X1. 2

```
def expo(Lambda):
    return  - math.log (1 - random.random()) / Lambda
```

3. a La fonction mystère ~~calai~~ modelise ~~le nombre~~ la proportion de noyaux qui ne se sont pas désintégrés avant l'instant t.

b.

```
Lambda = math.log(2) / 8
print ( mystere(Lambda, 10) - mystere (Lauda, 6))
```

1.9./20.

20.180.