Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 1
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 24

19 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Partie A.

I. La fonction $x \in [1, +\infty[\longrightarrow \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc a fortiori sur tout intervalle $[k, k+1]$, et de ce fait

$\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$.

en intégrant cette inégalité entre k et $k+1$ après avoir vérifié que $k \leq k+1$ on a.

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx.$$

Soit $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$ et ce $\forall k \geqslant 1$.

on a donc la première inégalité à savoir

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \quad \text{et ce } \forall k \geqslant 1.$$

En remplaçant k par $k-1$ on a $\forall k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

En fin de compte on a bien

$$\forall k \geq 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

II

On somme l'encadrement à démontrer pour les indices $k \in [\![1, n]\!]$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

D'après la relation de Chasles pour les intégrales on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

et comme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

et que $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n)$

on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

III 1. On a $\lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = +\infty$

donc d'après le théorème de minoration pour les suites on a $\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$.

2. on a $\forall n \geq 2 \quad \ln(n) > 0$ donc.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1.$$

or $\forall n \geq 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$.

or $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$.

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$

De même $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$

D'après le théorème d'encadrement pour les suites on a donc $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et par conséquent

$H_n \sim \ln(n)$.

IV Soit $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n.$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

or dans l'encadrement de la question I en spécifiant $k := n+1$ on a.

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

Soit $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$.

Soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

C'est bien dire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

on a aussi $v_n - v_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n+1) + \ln n$ $\forall n \geq 2$

$$= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

Dans l'encadrement de I en spécifiant $k := n$.

on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$ soit $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

donc $v_n - v_{n-1} \geq 0$

et ce $\forall n \geq 2$. c'est bien dire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

De plus $\forall n \geq 1$, $v_n - u_n = H_n - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$.

$$= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

or $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$

Par composition des limites : la fonction logarithme est continue en 1 donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$.

En résumé on a

- $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante
- $(v_n)_{n\geq 1}$ croissante
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$

} donc les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes

2. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite. De plus comme v_n est croissante on a $\forall n \geq 1$, $v_n \geq v_1$.

or $v_1 = 1 - \ln(2) > 0$.

On en déduit que $\gamma \geqslant 1 - \ln(2) > 0$.

V. 1. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante on a $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \gamma$.

Soit $H_n - \ln(n) \geqslant \gamma$ ou

$-H_n + \ln(n) \leqslant -\gamma$ soit

$0 \leqslant -\gamma + H_n - \ln(n)$.

Comme la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante on $\forall n \geqslant 1$, $v_n \leqslant \gamma$.

Soit $u_n + (v_n - u_n) \leqslant \gamma$ [$v_n - u_n = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ cf : q. IV]

Soit $H_n - \ln(n) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \gamma$

Soit $H_n - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \gamma$

Soit $H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

En résumé : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).}$

```
from math import log

def Constante_Euler(varepsilon):
    N = 1 ; H = 1
    while log(1 + 1/N) < varepsilon :
        N = N+1
        H = H + 1/N
    return H - log(N)
```

Partie B.

VI on a. $\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$.

or $k(k-1)$ est positif et inférieur ou égal à k^2.
donc en passant aux inverses $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

VII la suite $(B_M)_{M \geq 1}$ est clairement croissante,

de plus $\forall n \geq 1$, $B_M = 1 + \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

d'après la question précédente, puis par télescopage.

$$B_M \leq 1 + 1 - \frac{1}{M} \leq 2$$

La suite $(B_M)_{M \geq 1}$ est donc majorée par 2. Comme elle est aussi croissante, elle est convergente.

théorème : Toute suite croissante de réels, majorée est convergente.

(En effet $\mathbb{R}$ est complet pour la topologie usuelle)

.6.1.24.

VIII 1. $\forall n \geq 1$, $\forall t \in [0, \pi]$

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \quad \text{car } 2\cos(kt) = e^{ikt} + e^{-ikt}.$$

2. Soit $q = e^{it}$ on a $q \neq 1$ lorsque $t \in]0, \pi]$.
Donc la somme des $2n+1$ termes de la suite géométrique est

$$D_n(t) = q^{-n} \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1}$$

Soit
$$D_n(t) = e^{-int} \frac{e^{(2n+1)it} - 1}{e^{it} - 1}.$$

$$= e^{-int} \frac{e^{(n+1/2)it} - e^{-(n+\frac{1}{2})it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \times \frac{e^{(n+1/2)it}}{e^{it/2}}.$$

$$= \exp\underbrace{(-int + (n+1/2)it - it/2)}_{=0} \times \frac{2i \sin[(n+1/2)t]}{2i \sin(t/2)}.$$

$$= \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)}$$

$$\boxed{D_n(t) = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t}{2}\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

3. On a clairement $D_n(0) = 2n+1$

IX f est continue sur $]0, \pi/2]$ comme quotient de deux fonctions continues qui ne s'annulent pas (sur tout le sous ...).

De plus on a $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} = \cos(0)$

Soit $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \neq 0$

Donc $\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$: c'est bien dire que f est continue en zéro, et que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ entier.

2. On a $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, ~~$f'(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{\sin^2(t)}$~~

$\cos t \leq 1$ donc $\forall x \geq 0$.

$$\int_0^x \cos t \, dt \leq \int_0^x dt.$$

Soit $\sin x - \sin 0 \leq x$.

ou $\sin x \leq x$.

donc $\forall t \geq 0$ $\sin t \leq t$ donc $\forall x \geq 0$ $\int_0^x \sin t \, dt \leq \int_0^x t \, dt$.

donc ~~$\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2}$~~.

Soit ~~$\cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2}$~~.

$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

donc $\forall t \geq 0$ ~~$\int_0^x \cos t \, dt \geq \int_0^x 1 - \frac{t^2}{2} \, dt$~~.

$\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$

donc $\forall x \geq 0$ $\int_0^x \cos t \, dt \geq \int_0^x (1 - \frac{t^2}{2}) \, dt$.

Soit $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ et a $\forall x \geq 0$.

En résumé $\forall x \geq 0$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

donc $\forall x > 0$ $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq 0$

donc $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

..8/14..

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 1
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 24

19 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- *Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.*
- *Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.*
- *Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.*
- *Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.*
- *N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.*

Maintenant. $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \sin x}{x^2} \frac{x}{\sin x}$$

on a donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \times 1 = 0$

Donc f est dérivable en zéro et de plus $f'(0) = 0$.

3. On a $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{\sin^2(t)}$

donc $f'(t) = \frac{\sin t - t}{\sin^2 t} + \frac{t}{\sin^2 t}(1 - \cos(t))$

$$= \frac{\sin(t) - t}{t \sin t} \times \frac{t}{\sin t} + \frac{t^2}{\sin^2 t} \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

or on a vu que $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)-t}{t \sin t} = 0$ $\lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$

on a $\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{\sin^2 t} = 1$ et $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = 0$

en effet on a $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{t^2}{2}$

D'après la question précédente.

On a donc $\lim_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$. c'est bien dire que f' est continue en 0. La continuité de f' sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ résulte des opérations sur les fonctions continues.

X.1. On pose

$$\begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t & u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1 \\ v'(t) = \cos(kt) & v(t) = \frac{1}{k}\sin(kt). \end{cases}$$

On a

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\,dt$$

puisque les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,\pi]$. donc d'après le théorème d'intégration par parties,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\,dt$$

On pose cette fois.

$$u(t) = \frac{t}{\pi} - 1 \qquad u'(t) = \frac{1}{\pi}.$$

$$v'(t) = \sin(kt) \qquad v(t) = -\frac{1}{k}\cos(kt).$$

u' et v' sont continues sur $[0,\pi]$ donc.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(kt)\,dt = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \times -\frac{1}{k} \cos(kt)\right]_0^\pi + \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kt)\,dt$$

$$= +\frac{1}{k} \times (-1) + \frac{1}{k\pi} \times \frac{1}{k} \left[\sin(kt)\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{k} + 0.$$

Finalement $\forall k \geq 1$

$$\boxed{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\,dt = -\frac{1}{k} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en écrivant $\frac{D_n(t) - 1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ (q. VIII.1)

pour tout $t \in [0, \pi]$, on obtient bien, (linéarité de l'intégrale ...)

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\,dt.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(question X.1)}$$

$$= B_n.$$

3. On a $\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{6\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{3\pi^2 - \pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$$

4. on a $\forall n \geq 1$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) = \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt$$

$$= \underbrace{-B_n}_{q \times 2} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{3}}_{q \times 3}$$

$$= -B_n + \frac{\pi^2}{6}.$$ On a bien démontré que.

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)\, dt.}$$

5. En remplaçant $D_n(t)$ par $\dfrac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}$

lorsque t est non nul on a

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{t}{\sin t/2}\left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \sin(2n+1)t/2\, dt.$$

En effectuant le changement de variable affine
$u := t/2$ on a $dt = 2du$

et
$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{2u}{\sin u}\left(1 - \frac{u}{\pi}\right) \sin(2n+1)u\, du.$$

[Un changement de variable affine est licite pour les fonctions simplement "mesurables".]

Soit $$\boxed{\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin(2n+1)t\, dt}$$

en renommant t la variable d'intégration.

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES

Epreuve matière : EPREUVE 1

N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 24

19 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

XI. On pose $\forall t \in [0, \pi/2]$

$$g(t) = f(t)\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right).$$

g est le produit de deux fonctions de classe C^1 donc est de classe C^1 (la fonction f a été définie en IX.

D'après X.5 on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t)\, dt.$$

XII on pose

$u(t) = g(t)$ $\quad u'(t) = g'(t)$.

$v'(t) = \sin((2n+1)t)$ $\quad v(t) = -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$.

les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, \pi/2]$ donc d'après le théorème d'intégration par parties.

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\, dt = \left[-\frac{1}{2n+1} g(t)\cos(2n+1)t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{2n+1} g(0) - \cos(\pi/2)\, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\, dt.$$

.13./.24.

le terme tout intégré est un $O(\frac{1}{n})$ donc il tend vers zéro. le reste intégral vérifie :

$$\left| \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t)\, dt \right| \leq \left| \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\,|\cos((2n+1)t)|\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\, dt$$

Donc le reste intégral est lui aussi un $O(\frac{1}{n})$

on a donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t)\, dt = 0$.

XIII on a $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - B_n \right) = 0$ c'est bien dire que $\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie C.

XIV Soit $x \in]-1,1[$. la raison x de la suite géométrique $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est différente de 1.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Comme $|x|<1$ on a $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$

donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$. c'est bien dire que la série de terme général $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Converge et que sa somme égale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

XV. En dérivant $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $]-1,1[$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})\times(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Or $\lim_{n\to\infty} n x^n = 0$ lorsque $|x|<1$ par croissance comparée.

donc on a bien $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

lorsque $k=0$ le terme $k x^{k-1}$ est nul donc on a bien

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

La fonction $F : z \longmapsto \frac{1}{(1-z)^2}$ est holomorphe sur le disque ouvert Ω de centre 0 et de rayon 1. Elle est égale sur cet ouvert Ω à la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}$ d'après le théorème de prolongement analytique. Sa dérivée est obtenue en dérivant terme à terme la série entière dont elle est la somme. Les deux séries entières ont le même rayon de convergence soit 1.

or $\forall z \in \Omega$, $F'(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$.

.15.1.24

On a donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) z^{k-1} = \frac{2}{(1-z)^3}$.

en spécifiant $z = x \in]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ on a $\forall x \in]-1, 1[$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) x^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

d'où le résultat puisque le terme d'indice $k=2$ est nul.

XVI Il suffit de démontrer que la série de terme général $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de somme $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Soit $x = 1-p$. on a $0 < p < 1$.

donc $0 < 1-p < 1$

soit $0 < x < 1$.

Donc la série de terme général $\{x^{k-1}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$

Converge, de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$ d'après la question XIV

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} p x^{k-1} = \frac{p}{1-x} = \frac{p}{p} = 1$

Ce qu'il fallait vérifier

XVII On a $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \in [0, +\infty]$

reste à démontrer que cette série ~~existe~~ converge.

19 / 20

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Or on a vu (q.XV) que sous reserve que $0<x<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$ donc en specifiant $x = 1-p$

on a bien $x \in]0,1[$ et.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

C'est bien dire que X admet une esperance et qu'elle vaut $\frac{1}{p}$.

On $V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \mathbb{E}(X)\right)^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{p}\right)^2 p_k \in [0, +\infty]$.

Sous reserve de Convergence :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p(1-p)(1-p)^{k-2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} p (1-p)^{k-1}.$$

$$= \underbrace{p(1-p) \times \frac{2}{p^3}}_{q \times V.} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

(2) $-2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{p} p_k = -\frac{2}{p}\,\mathbb{E}(X) = -\frac{2}{p^2}$

(3) $+\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{1}{p^2}$

En additionnant les trois termes on trouve, outre la convergence de la série qui donne $V(X)$,

$$V(X) = \underbrace{\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}}_{(1)} \underbrace{- \frac{2}{p^2}}_{(2)} \underbrace{+ \frac{1}{p^2}}_{(3)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

XVIII 1. Par linéarité de l'espérance on a.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$$

Partie C.

XXI la collection est complète lorsque $k = n$.
le nombre d'achats T_k s'appelle alors T_n.

T_n est la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection. En effet jusque-là il avait au plus $n-1$ vignettes. Il vient d'obtenir la n-ième. D'après l'énoncé, il arrête d'acheter des tablettes.

XXII. Le collectionneur achète sa première tablette. Il a donc une première vignette forcément.
Donc $p(T_1 = 1) = 1$

XXIII. On va devoir supposer que la répartition des animaux est équiprobable au cours du temps. ce qui représente une jolie prouesse technologique.

En prenant $q = 2$, on voit que le collectionneur a une probabilité $\frac{1}{n}$ de retrouver sa première image, et ainsi une probabilité égale à

~~$\frac{1}{n^{q-1}}$ d'obtenir toujours le même probabili image.~~
~~l'image du mec~~

$\frac{1}{n^{q-1}}$ d'obtenir une image du même animal.

(la probabilité demandée par l'énoncé, à savoir obtenir l'animal lui-même doit être considérée comme nulle)

On doit aussi – faute de mieux – supposer que les tirages des images des différents animaux sont indépendants.

.19/20.

2. L'événement $T_2 > q$ signifie que la première fois que le collectionneur obtient deux images d'animaux différents s'est produite lors qu'il a acheté T_2 tablettes et que $T_2 > q$.
Donc, après avoir acheté sa première tablette, il a acheté q fois une tablette avec l'image de l'animal de la première tablette.
De ce fait on a bien grâce à XXIII.1

$$P(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}$$

3. On a clairement $P(T_2 = 1) = 0$
et $\forall q \geq 2$

$$P(T_2 = q) + P(T_2 > q) = P(T_2 > q-1)$$

Soit $\boxed{P(T_2 = q) = \frac{1}{n^{q-2}} - \frac{1}{n^{q-1}} = \frac{1}{n^{q-2}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$

4. On a $P(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{n}$ = 0,99.
le nombre d'achats pour
Donc ~~la probabilité~~ minimale V obtenir des images de deux animaux différents est 2 (puisque $P(T_2 = 1) = 0$)
Vérification possible avec l'événement contraire.

6. On écrit $\sum_{k=2}^{n} Z_k = \sum_{k=2}^{n} T_k - T_{k-1} = T_n - T_1$

donc $T_n = T_1 + \sum_{k=2}^{n} Z_k = Z_1 + \sum_{k=2}^{n} Z_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

Concours section : CAPES EXTERNE MATHEMATIQUES
Epreuve matière : EPREUVE 1
N° Anonymat : A000072810 Nombre de pages : 24

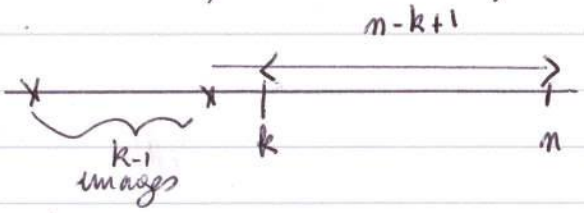
19 / 20

Epreuve : 101 Matière : 0540 Session : 2021

CONSIGNES
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

7. lorsque le collectionneur a par devers lui $k-1$ images d'animaux différents, la probabilité qu'il ait une image d'un animal qu'il n'avait pas au premier tirage est donc

$$P(Z_k = 1) = \frac{n-k+1}{n}$$



au deuxième : $P(Z_k = 2) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$ etc.

Z_k suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-k+1}{n}$

On a bien $p \in]0,1[$, puisque $k \geq 1$ et $k \neq n$
On a dit qu'on arrêtait dorsqu'on aurait les images de tous les animaux différents.

On a donc $E(Z_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1}$ et $1-p = \frac{k-1}{n}$

$$V(Z_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$$

8. On en déduit que

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}.$$

En effectuant le changement d'indices $h := n-k+1$

lorsque $k=1$ on a $h = n$
lorsque $k = n$ on a $h = 1$

Donc $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n H_n$

9. D'après la question III.2. on a $H_n \sim \ln(n)$

donc $\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln(n)$.

XXIV. 1. les variables $(Z_1, \dots, Z_n)$ vérifient les hypothèses de la question XVIII (on ne devrait pas appeler les chiffres romains ...)

donc $V(T_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$

en posant $p_i = \frac{n}{n-i+1}$ donc $p_{n-k+1} = \frac{n}{k}$

$(k \in [\![1, n]\!])$.

donc $V(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(T_n) = n^2 B_n - n H_n$

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n H_n \geq 0$,

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(T_n) \leq n^2 B_n$.

or on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \leq \frac{\pi^2}{6}$

(toute suite croissante ne prend que des valeurs inférieures ou égale à sa limite)

donc $\boxed{\forall n \geqslant 3 \quad \mathbb{V}(T_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.}$

XXV. On pose $a := \lambda n \ln(n)$, on sait que T_n possède une espérance et une variance. En outre $a > 0$ car $n \geqslant 2$
D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev. on a

$$P\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln(n)\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\lambda^2 n^2 \ln(n)^2}$$

$$\leqslant \frac{n^2\pi^2}{6\lambda^2 n^2 (\ln(n))^2}$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2 \ln(n)^2}$$