Alors (6.99) donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m'(t)|^2 + \rho\,\|u_m'(t)\|^2 \leqslant 0 \tag{6.102}$$

donc

(6.103) u_m' demeure dans un borné de $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$,

d'où le Théorème suit. ▌

6.8 Un théorème d'unicité

Orientation.

Comme on a déjà signalé, le problème de l'unicité est ouvert dans le Théorème 6.1, lorsque $n \geqslant 3$.

Une question raisonnable est la suivante : on connaît l'existence d'une solution dans $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$; *quelle propriété* ***supplémentaire*** de u entraînerait *l'unicité* ?

On a dans ce sens le

Théorème 6.9. — *On suppose $n \geqslant 3$. Soit u solution du Problème 6.2, vérifiant* ***en outre***

$$u \in L^s(0, T; (L^r(\Omega))^n), \tag{6.104}$$

où

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} \leqslant 1, \quad r > n. \tag{6.105}$$

Alors la solution u, si elle existe [1]*, est unique dans la classe*

$$L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^s(0, T; (L^r(\Omega))^n).$$

Démonstration.

1) *Majoration préliminaire.*

On se place dans le cas intéressant de (6.105) où $\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1$.

On a

$$|b(u, v, w)| \leqslant c_1 \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\| \|w\|_{(L^\rho(\Omega))^n} \quad \text{si} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}. \tag{6.106}$$

(1) L'existence est maintenant un problème ouvert...

Mais pour u scalaire

$$\| u \|_{L^\rho(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^2(\Omega)}^{2/s} \| u \|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)}^{n/r} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{2/s}{2} + \frac{n/r}{2\, n/(n-2)};$$

or $H_0^1(\Omega) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega)$, donc

$$\| u \|_{L^\rho(\Omega)} \leqslant c_2 \| u \|_{L^2(\Omega)}^{2/s} \| u \|_{H_0^1(\Omega)}^{n/r}$$

et (6.106) donne

$$(6.107) \qquad | b(u, v, w) | \leqslant c_3 \| u \|_{(L^r(\Omega))^n} \| v \| \, | w |^{2/s} \| w \|^{n/r} . \blacksquare$$

Application :

$$(6.108) \quad \begin{cases} \textit{si } u \textit{ est solution du Problème } 6.2 \textit{ et vérifie } (6.104) \textit{ alors} \\ u' \in L^2(0, T; V') \, (^1). \end{cases}$$

En effet d'après (6.107)

$$\begin{aligned} | b(u, u, v) | = | - b(u, v, u) | &\leqslant c_3 \| v \| \| u \|_{(L^r(\Omega))^n} | u |^{2/s} \| u \|^{n/r} \\ &\leqslant c_4 \| v \| \| u \|_{(L^r(\Omega))^n} \| u \|^{n/r} ; \end{aligned}$$

or $t \to \| u(t) \|_{(L^r(\Omega))^n}$ est dans $L^s(0, T)$ et $t \to \| u(t) \|^{n/r}$ est dans $L^{2r/n}(0, T)$: donc $t \to \| u(t) \|_{(L^r(\Omega))^n} \| u(t) \|^{n/r}$ est dans $L^2(0, T)$, donc

$$b(u, u, v) = (g, v), \quad g \in L^2(0, T; V'),$$

d'où (6.108). ▮

2) *Démonstration de l'unicité.*

Soient u et u^* deux solutions du Problème 6.2, vérifiant (6.104). Soit $w = u - u^*$. On a :

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0$$

et prenant $v = w$, les formules étant justifiées par (6.108), on a :

$$(6.109) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 + \nu \| w(t) \|^2 = - b(w(t), u(t), w(t)) \\ \qquad\qquad = b(w(t), w(t), u(t)) . \end{cases}$$

Utilisant une variante de (6.107) on a :

$$| b(w(t), w(t), u(t)) | \leqslant c_3 \| u(t) \|_{(L^r(\Omega))^n} | w(t) |^{2/s} \| w(t) \|^{1+n/r} .$$

(1) Donc u est continue de $[0, T] \to H$.

Posant

$$M(t) = \| u(t) \|^s_{(L^r(\Omega))^n}, \tag{6.110}$$

on a donc

$$| b(w(t), w(t), u(t)) | \leqslant c_3 \, M(t)^{1/s} \, | w(t) |^{2/s} \, \| w(t) \|^{1+n/r}$$
$$\leqslant \nu \, \| w(t) \|^2 + c_4 \, M(t) \, | w(t) |^2 \text{ (on a utilisé (6.105))},$$

et (6.109) donne

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 \leqslant c_4 \, M(t) \, | w(t) |^2 \,, \quad M \in L^1(0, T) \quad \text{(par (6.104))} \tag{6.111}$$

donc $w = 0$. ▮

Remarque 6.8.

Le Théorème 6.9 montre l'unicité dans le Théorème 6.8 si $n \leqslant 4$; en effet on a alors si $n < 4$:

$$u \in L^\infty(0, T; V) \text{ donc } u \in L^\infty(0, T; (L^q(\Omega))^n) \,, \; \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

donc $$u \in L^s(0, T; (L^q(\Omega))^n) \,, \; \frac{2}{s} + \frac{n}{q} = 1 \,, \text{ et } q > n \text{ car } n < 4 \,.$$

Si $n = 4$, on raisonne comme suit (L. TARTAR) : on déduit de (6.109) que

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 + \nu \, \| w(t) \|^2 \leqslant | b(w(t), w(t), u(t)) |$$
$$\leqslant \text{(par (6.97))} \, c_3 \, \| u(t) \| \, \| w(t) \|^2$$

et d'après la Démonstration du Théorème 6.8 on a : $\nu - c_3 \| u(t) \| \geqslant 0$ et par conséquent

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 + (\nu - c_3 \| u(t) \|) \| w(t) \|^2 \leqslant 0$$

montre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 \leqslant 0 \,, \quad \text{d'où} \quad w = 0 \,. \; ▮$$

6.9 Dépendance en la viscosité

Plaçons-nous en dimension d'espace 2. Utilisons, pour un peu simplifier l'écriture, les variables $\{ x, y \}$ au lieu de $\{ x_1, x_2 \}$.

Supposant Ω simplement connexe, on introduit la fonction de courant, définie à une constante additive près, par

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - u_2 \,, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1 \,. \tag{6.112}$$

Alors ψ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) + \nu\,\Delta^2\psi + R(\psi) = g\,, \tag{6.113}$$

où

$$R(\psi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\Delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\Delta\psi\right), \tag{6.114}$$

$$g = \frac{\partial}{\partial x}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\,. \tag{6.115}$$

Si $u = 0$ sur Γ, alors $\partial\psi/\partial x$ et $\partial\psi/\partial y$ sont nuls sur Γ, donc $\partial\psi/\partial n = 0$ et ψ = constante ; on fixe la détermination de ψ en prenant

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\,.$$

Les conditions aux limites sont alors

$$\psi = 0\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\,. \tag{6.116}$$

On déduit du Théorème 6.7 que si

$$g \in L^2(0, T\,; H^{-1}(\Omega)),\ g' \in L^2(0, T\,; H^{-2}(\Omega)) \quad \text{et} \quad \psi(0) = \psi_0,$$

ψ_0 donné correspondant à (6.83), alors il existe une solution ψ et une seule du problème (6.113), ..., (6.116), avec $\psi(0) = \psi_0$, vérifiant :

$$\psi \in L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\,, \tag{6.117}$$

$$\psi' \in L^2(0, T\,; H^2(\Omega))\,. \tag{6.118}$$

Remarque 6.9.

Naturellement on peut aussi « transformer » le Théorème 6.2 de façon à obtenir une solution ψ « faible ». ▮

Pour chaque $\nu > 0$, *la* solution du Problème 6.2 ($n = 2$) dépend évidemment de ν ; on écrira

$$u = u^\nu\,, \quad \psi = \psi^\nu\,. \tag{6.119}$$

Le problème du comportement de, par exemple, ψ^ν, lorsque $\nu \to 0$, est essentiellement ouvert.

On va, dans ce n^{ro}, étudier le comportement lorsque $\nu \to 0$ de la solution d'un problème analogue à (6.113) (6.116) mais avec **d'autres conditions aux limites**. On considère de façon précise le

Problème 6.3 On cherche une fonction $\psi = \psi^\nu$ solution de l'équation (6.113) *avec les conditions aux limites et initiales*

$$\psi = 0\,, \quad \Delta\psi = 0 \text{ sur } \Gamma\,, \tag{6.120}$$

$$\psi(0) = \psi_0 \text{ donné}\,. \tag{6.121}$$

A cause du changement de (6.116) en (6.120), le Problème 6.3 **n'est plus** équivalent au Problème 6.2 — de sorte que l'on doit *reprendre* le problème de l'existence et unicité de ψ solution du Problème 6.3. Nous allons reprendre cela rapidement, en insistant seulement sur le résultat « supplémentaire » (par rapport aux analogues de (6.117) et (6.118)) qui est fourni par (6.126) ci-dessous :

Théorème 6.10. — *Soient g et ψ_0 donnés avec*

$$g \in L^\infty(Q)\,, \quad Q = \Omega \times \,]0, T[\,, \tag{6.122}$$

$$\psi_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,, \quad \Delta\psi_0 \in L^\infty(\Omega)\,. \tag{6.123}$$

Pour chaque $\nu > 0$ fixé, il existe une fonction $\psi = \psi^\nu$ et une seule telle que

$$\psi \in L^\infty(0, T\,; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))\,, \tag{6.124}$$

$$\Delta\psi \in L^2(0, T\,; H_0^1(\Omega))\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\,, \tag{6.125}$$

$$\Delta\psi \in L^\infty(Q)\,, \tag{6.126}$$

et ψ vérifiant (6.113) (6.120) (6.121).

En outre, lorsque $\nu \to 0$, on a :

$$\left\{\begin{aligned} & \|\psi^\nu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi^\nu\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \\ & \qquad + \sqrt{\nu}\,\|\Delta\psi^\nu\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\Delta\psi^\nu\|_{L^\infty(Q)} \leqslant c\,. \end{aligned}\right. \tag{6.127}$$

Démonstration.

1) *Existence de $\psi = \psi^\nu$ vérifiant* (6.124) (6.125).

Cela est la partie maintenant standard ; on part de la « base spéciale » w_j des fonctions propres :

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j\,, \quad w_j \in H_0^1(\Omega)\,, \quad (\text{donc } \Delta w_j = 0 \text{ sur } \Gamma)\,,$$

et on définit ψ_m solution « approchée » du problème par

$$\psi_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m]\,,$$

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\Delta\psi_m, w_j) + \nu(\Delta\psi_m, \Delta w_j) + \beta(\psi_m, \psi_m, w_j) = (g(t), w_j)\,, \\ & 1 \leqslant j \leqslant m \end{aligned}\right. \tag{6.128}$$

où

$$\beta(u, v, w) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta v)\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta v)\frac{\partial w}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,, \tag{6.129}$$

avec la condition initiale

$$\psi_m(0) = \psi_{0m} \in [w_1, \ldots, w_m]\,, \quad \psi_{0m} \to \psi_0 \quad \text{dans} \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{6.130}$$

(*on ne tient pas compte pour l'instant* de l'hypothèse « $\Delta\psi_0 \in L^\infty(\Omega)$ »).

Notant que $\beta(\psi_m, \psi_m, \psi_m) = 0$, on déduit de (6.128) que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a(\psi_m(t), \psi_m(t)) + \nu \| \Delta\psi_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} = (f(t), \psi_m(t))$$

d'où l'existence de ψ_m dans $[0, T]$ et

$$\| \psi_m(t) \|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{\nu}\left(\int_0^T \| \Delta\psi_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant c\,. \tag{6.131}$$

Remplaçant w_j par $-\ 1/\lambda_j\, \Delta w_j$ dans (6.128) on en déduit :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \Delta\psi_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \nu a(\Delta\psi_m(t), \Delta\psi_m(t)) + \\ &\qquad + \beta(\psi_m(t), \psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)) = (g(t), -\Delta\psi_m(t))\,. \end{aligned}\right. \tag{6.132}$$

Mais pour $w = w_j$ on a :

$$\begin{aligned} \beta(w, w, -\Delta w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)^2 - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_\Gamma \left[\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, y) - \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, x)\right](\Delta w)^2\, \mathrm{d}\Gamma = 0 \end{aligned}$$

car la dérivée tangentielle de w sur Γ est nulle. Donc (6.132) donne facilement

$$\| \Delta\psi_m(t) \|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\nu}\left(\int_0^T \| \Delta\psi_m(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)}\, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant c\,. \tag{6.133}$$

Aux estimations (6.131) (6.133) il faut ajouter une estimation sur la dérivée $\partial/\partial t(-\Delta\psi_m)$. On note que, les c désignant des constantes diverses,

$$\begin{aligned} &| \beta(\psi_m(t), \psi_m(t), v) | \leqslant \\ &\quad \leqslant c \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \| \Delta\psi_m(t) \|_{L^4(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y} \right\|_{L^4(\Omega)}\right) \\ &\quad \leqslant \text{(par le Lemme 6.2) } c \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \| \Delta\psi_m(t) \|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \times \\ &\qquad\qquad \times \left(\left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y} \right\|_{L^4(\Omega)}\right) \\ &\quad \leqslant \text{(d'après (6.133)) } c \| v \|_{H_0^1(\Omega)}\, k_m(t) \left(\left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\psi_m(t)}{\partial y} \right\|_{L^4(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

où k_m demeure dans un borné de $L^4(0, T)$.

Mais

$$\left\| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c \left\| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c \, \| \Delta \psi_m(t) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c$$

et donc

$$(6.134) \quad \begin{cases} \beta(\psi_m(t), \psi_m(t), v) = (h_m(t), v), \ h_m \text{ borné dans } L^4(0, T ; H^{-1}(\Omega)), \\ \text{donc borné dans } L^2(0, T ; H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

On désigne par P_m l'opérateur de projection dans $L^2(\Omega)$ sur $[w_1, ..., w_m]$; alors (6.128) donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\Delta \psi_m) + \nu \, \Delta^2 \psi_m + P_m h_m = P_m g ,$$

d'où, grâce à (6.124), l'on déduit, *en particulier*, que

$$(6.135) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\Delta \psi_m) \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T ; H^{-1}(\Omega)) .$$

Utilisant le Théorème de compacité 5.1 on en déduit que l'on peut extraire une suite ψ_μ de ψ_m telle que

$$\begin{aligned} \psi_\mu &\to \psi && \text{dans } L^\infty(0, T ; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ weak-star}, \\ \Delta \psi_\mu &\to \Delta \psi && \text{dans } L^2(0, T ; H_0^1(\Omega)) \text{ faible}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta \psi_\mu) &\to \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta \psi) && \text{dans } L^2(0, T ; H^{-1}(\Omega)) \text{ faible}, \\ \Delta \psi_\mu &\to \Delta \psi && \text{dans } L^2(Q) \textit{ fort} \text{ et p. p.} \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de ψ vérifiant les conditions du Théorème, à l'exception (pour l'instant) de (6.126).

2) *L'estimation* (6.126).

Posant

$$(6.136) \quad -\Delta \psi = \omega$$

on sait que ω vérifie

$$(6.137) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \, \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = g,$$

$$(6.138) \quad \omega(0) = \omega_0 = (-\Delta \psi_0) ,$$

$$(6.139) \quad \omega \in L^2(0, T ; H_0^1(\Omega)) , \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \in L^2(0, T ; H^{-1}(\Omega)) .$$

On considère (6.137) (6.138) (6.139) comme une *équation parabolique* *linéaire* en ω, les « coefficients » $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$ étant dans $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Alors (6.126) et (compte tenu de (6.133)) (6.127) résultent de l'inégalité suivante, que nous allons démontrer :

$$\| \omega \|_{L^\infty(Q)} \leqslant \| \omega_0 \|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \| g(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \, \mathrm{d}t \,. \tag{6.140}$$

La démonstration de (6.140) se fait en trois étapes :

(i) on montre (6.140) pour g et ψ « réguliers » (de sorte que ω est solution régulière) ;

(ii) on montre *l'unicité* de ω satisfaisant à (6.137) (6.138) (6.139) ;

(iii) on approche ω par des solutions régulières.

ETAPE (i).

Soit k un entier positif quelconque. On multiplie les deux membres de (6.137) par ω^{2k-1} et on intègre :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \omega^{2k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ &\quad + \nu \int_\Omega \left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\omega^{2k-1}) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(\omega^{2k-1})\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_\Omega \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}\omega^{2k-1} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\omega^{2k-1}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &\qquad\qquad = \int_\Omega g\omega^{2k-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}\right. \tag{6.141}$$

Mais la troisième intégrale dans (6.141) vaut

$$\frac{1}{2k}\int_\Omega \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega^{2k}}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega^{2k}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

et comme la deuxième intégrale est $\geqslant 0$, on en déduit

$$\frac{1}{2k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_k(t)^{2k}) \leqslant \| g(t) \|_{L^{2k}(\Omega)}\, y_k(t)^{2k-1}\,, \quad y_k(t) = \| \omega(t) \|_{L^{2k}(\Omega)}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_k(t) \leqslant \| g(t) \|_{L^{2k}(\Omega)}\,,$$

d'où

$$y_k(t) \leqslant \| \omega_0 \|_{L^{2k}(\Omega)} + \int_0^t \| g(\sigma) \|_{L^{2k}(\Omega)} \, d\sigma$$

d'où (6.140) en faisant tendre k vers l'infini ([1]).

ETAPE (ii).

Ce point est standard ; il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \in L^2(0, T ; H^{-1}(\Omega))$$

et que

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \omega \right) = 0 .$$

Cela est justifié si, par exemple, $\psi \in L^\infty(0, T ; H^2(\Omega))$.

ETAPE (iii).

On approche ψ par des fonctions ψ_j « régulières », et précisément

$$\psi_j \to \psi \text{ dans } L^2(0, T ; H^1(\Omega)) \text{ fort,}$$
$$\psi_j \to \psi \text{ dans } L^\infty(0, T ; H^2(\Omega)) \text{ weak star .}$$

Soit aussi g_j une suite de fonctions régulières, $g_j \to g$ dans $L^\infty(Q)$ weak star,

$$\int_0^T \| g_j(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \, dt \leqslant \int_0^T \| g(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \, dt .$$

Alors soit ω_j la solution de

$$(6.142) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega_j}{\partial t} - \nu \Delta \omega_j + \dfrac{\partial \psi_j}{\partial y} \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x} \dfrac{\partial \omega_j}{\partial y} = g_j , \\ \omega_j(0) = \omega_0 , \\ \omega_j \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) . \end{cases}$$

Alors d'après l'étape (i), on a :

$$\| \omega_j \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| \omega_0 \|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \| g_j(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \, dt$$

d'où (6.140) suit, si l'on montre que $\omega_j \to \omega$ dans $L^\infty(Q)$ weak star.

([1]) On peut aussi utiliser les troncatures.

Or, d'après (6.142), ω_j demeure dans un borné de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ (¹). On peut donc extraire une suite, encore notée ω_j, telle que $\omega_j \to \omega^*$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ faible — et comme $\psi_j \to \psi$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ *fort*, on en déduit que ω^* est solution de (6.137) (6.138) (6.139) et donc, par l'étape (ii), $\omega = \omega^*$, d'où (6.140). ▌

3° *Unicité.*

La démonstration de l'unicité est très analogue à celle du Théorème 6.2 : si ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions, alors, posant $\theta = \psi_1 - \psi_2$, on a :

$$(6.143) \quad a(\theta', v) + \nu(\Delta\theta, \Delta v) + \beta(\psi_1, \psi_1, v) - \beta(\psi_1 - \theta, \omega_1 - \theta, v) = 0 .$$

Faisant, ce qui est loisible, $v = \theta$ dans (6.143), on en déduit que

$$(6.144) \quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \nu \| \Delta\theta(t) \|^2_{L^2(\Omega)} = - \beta(\psi_1, \theta, \theta) .$$

Mais

$$\begin{aligned} | \beta(\psi_1, \theta, \theta) | &\leqslant c \| \Delta\theta(t) \|_{L^2(\Omega)} \| \psi_1(t) \|_{H^2(\Omega)} \times \left(\left\| \frac{\partial\theta}{\partial x} \right\|_{L^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\theta}{\partial y} \right\|_{L^4(\Omega)} \right) \\ &\leqslant (\text{par le Lemme } 6.2)\ c \| \Delta\theta(t) \|^{3/2}_{L^2(\Omega)} \| \theta(t) \|^{1/2}_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leqslant \nu \| \Delta\theta(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + c \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

de sorte que (6.144) donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} , \quad \text{d'où le résultat} . ▌$$

On est maintenant en mesure d'étudier le comportement de ψ^ν lorsque $\nu \to 0$. On introduit, pour simplifier l'écriture, l'espace (²)

$$(6.145) \quad \mathscr{Y} = \left\{ \psi \mid \psi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) , \ \Delta\psi \in L^\infty(Q) , \ \frac{\partial\psi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\} .$$

Théorème 6.11. — *On se place dans les Hypothèses du Théorème* 6.10. *Il existe une fonction ψ et une seule telle que*

$$(6.146) \quad \psi \in \mathscr{Y} ,$$

$$(6.147) \quad \frac{\partial}{\partial t}(- \Delta\psi) + R(\psi) = g \quad (\text{i. e. } (6.113) \text{ avec } \nu = 0) ,$$

$$(6.148) \quad \psi(0) = \psi_0 .$$

(¹) Prendre le produit scalaire de la 1ʳᵉ équation de (6.142) par ω_j.
(²) Muni de la norme de Banach « du graphe ».

Lorsque $\nu \to 0$, *si* ψ^ν *est la solution fournie par le Théorème* 6.10, *on a* :

$$\psi^\nu \to \psi \text{ dans } \mathcal{Y} \text{ faible}. \tag{6.149}$$

Démonstration de l'existence et démonstration de (6.149).

On part de ψ^ν fournie par le Théorème 6.10 ; on connaît les estimations (6.127). Donc utilisant le Théorème de compacité 5.1, on peut extraire une suite ψ^μ telle que

$$\begin{cases} \psi^\mu \to \psi & \text{dans } \mathcal{Y} \text{ faible}, \\ D\psi^\mu \to D\psi & \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.}, \ D = \dfrac{\partial}{\partial x} \text{ et } \dfrac{\partial}{\partial y}. \end{cases} \tag{6.150}$$

On peut alors passer à la limite dans l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi^\mu) + \mu\,\Delta^2\psi^\mu + R(\psi^\mu) = g ;$$

on voit ainsi que ψ satisfait à (6.147).

Démonstration de l'unicité.

1) *Estimation préliminaire.*

Puisque

$$\Delta\psi \in L^\infty(Q) = L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \quad \forall p \text{ fini},$$

et comme (AGMON [1], AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [1]) Δ est un isomorphisme de

$$W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega),$$

on en déduit que toute solution du problème a la propriété :

$$\psi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega)) \quad \forall p \text{ fini}. \tag{6.151}$$

On a en outre, pour presque tout t fixé :

$$\|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant cp(\|\Delta\psi\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|_{L^p(\Omega)}),\ p \to \infty ; \tag{6.152}$$

cette inégalité, due à YOUDOVICH [1] résulte :

(i) de la résolution du problème de Dirichlet à l'aide des noyaux de Poisson permettant l'usage des intégrales singulières ;

(ii) d'une estimation des normes dans le Théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ ; cf. M. COTLAR [1], p. 289.

2) Soient ψ_1, ψ_2 deux solutions du problème et $\theta = \psi_1 - \psi_2$. Alors si l'on pose $\theta = \psi_1 - \psi_2$, on a :

$$a(\theta', v) + \beta(\theta, \psi_1, v) + \beta(\psi_1, \theta, v) - \beta(\theta, \theta, v) = 0. \tag{6.153}$$

Faisant $v = \theta(t)$, on en déduit, en posant

$$z(t) = \| \theta(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} = a(\theta(t), \theta(t)), \tag{6.154}$$

que

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = - \beta(\psi_1(t), \theta(t), \theta(t)). \tag{6.155}$$

Mais écrivant θ au lieu de $\theta(t)$, etc. :

$$\beta(\psi_1, \theta, \theta) = \int_\Omega \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y -$$
$$- \int_\Omega \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \left\{ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

Par intégration par parties, on en déduit que

$$\left\{ \begin{aligned} \beta(\psi_1, \theta, \theta) = & - \int_\Omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \, \partial y} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \\ & + \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + J , \end{aligned} \right. \tag{6.156}$$

où

$$J = \frac{1}{2} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos n_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos n_y \right) \mathrm{d}\Gamma -$$
$$- \frac{1}{2} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \left(- \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos n_y + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos n_x \right) \mathrm{d}\Gamma .$$

Mais grad ψ_1 et grad θ sont orthogonaux à Γ, donc

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

et comme par ailleurs la dérivée tangentielle

$$- \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos n_y + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos n_x = 0 \text{ sur } \Gamma ,$$

on en déduit que $J = 0$.

Donc (6.156) donne

$$\beta(\psi_1, \theta, \theta) = - \int_\Omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \, \partial y} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y +$$
$$+ \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y ,$$

d'où l'on déduit, par application de Hölder :

(6.157)
$$| \beta(\psi_1, \theta, \theta) | \leqslant c \, \| \psi_1 \|_{W^{2,1/\varepsilon}(\Omega)} \left(\int_\Omega | \operatorname{grad} \theta |^{2/(1-\varepsilon)} \, dx \right)^{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 .$$

Mais d'après (6.151),

$$\psi_i \in L^\infty(0, T \, ; W^{2,p}(\Omega)) \quad \forall p \text{ fini}, \quad i = 1,2,$$

donc $| \operatorname{grad} \theta | \in L^\infty(Q)$, donc il existe une constante M telle que :

(6.158)
$$| \operatorname{grad} \theta(x, t) | \leqslant M$$

et (6.157) donne, en utilisant (6.152) :

(6.159)
$$| \beta(\psi_1, \theta, \theta) | \leqslant c\varepsilon^{-1} (M^{2\varepsilon/(1-\varepsilon)})^{1-\varepsilon} \left(\int_\Omega | \operatorname{grad} \theta |^2 \, dx \right)^{1-\varepsilon} .$$

Utilisant cette inégalité dans (6.155) il vient

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant c\varepsilon^{-1} M^{2\varepsilon} z(t)^{1-\varepsilon} ,$$

d'où

(6.160)
$$z(t) \leqslant M^2 (ct)^{1/\varepsilon} .$$

Soit alors t_0 fixé, avec $ct_0 < 1$. On déduit de (6.160), en faisant $\varepsilon \to 0$, que

$$z(t) = 0 \text{ dans } [0, t_0]$$

et ainsi de suite dans $[t_0, 2\, t_0]$, etc. D'où le résultat. ∎

Remarque 6.10.

Il faut noter *la méthode de démonstration de l'existence de* ψ *dans le Théorème* 6.11 : (i) *on introduit* l'équation (6.113) avec $\nu > 0$, par addition du terme de viscosité $\nu \Delta^2 \psi$; (ii) on résout le problème avec viscosité ; (iii) on fait tendre ν vers 0 après avoir établi des estimations **indépendantes de** ν.

La méthode précédente est dite « **Méthode de Viscosité** » (voir les références bibliographiques dans les Commentaires). ∎

Remarque 6.11.

Dans l'ordre d'idées de la Remarque précédente, on peut démontrer ainsi le Théorème 6.1 ; on ajoute aux équations de Navier-Stokes un terme de *Viscosité artificielle* $(-1)^m \varepsilon \Delta^m u$; on résout donc

(6.161)
$$\begin{cases} u_\varepsilon' + (-1)^m \varepsilon \Delta^m u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^n u_{i\varepsilon} D_i u_\varepsilon = f - \operatorname{grad} p , \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 , \end{cases}$$

avec *les conditions aux limites* :

$$(6.162) \qquad u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u_\varepsilon}{\partial n^{m-1}} = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

et la condition initiale $u_\varepsilon(0) = u_0$.

On démontre *l'existence* de u_ε, solution du problème précédent, avec

$$(6.163) \qquad u_\varepsilon \in L^2(0, T; V \cap (H_0^m(\Omega))^n) \cap L^\infty(0, T; H),$$

et l'*unicité lorsque l'on a*

$$(6.164) \qquad m \geqslant \frac{n+2}{4} \quad (^1).$$

Pour l'unicité, avec des notations analogues à celles du Théorème 6.2, on arrive à (ε est *fixé* ; on n'écrit plus la dépendance en ε)

$$(6.165) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | w(t) |^2 + \| w(t) \|_m^2 \leqslant c \, | b(w, u, w) |$$

où

$$\| \varphi \|_m = \text{norme de } \varphi \text{ dans } (H_0^m(\Omega))^n.$$

Mais

$$(6.166) \qquad | b(w, u, w) | \leqslant c_* \| w \|_{(L^4(\Omega))^n}^2 \| u \|_1 .$$

Or (on utilise ici l'interpolation, comme dans LIONS-MAGENES [1] Chap. 1 ; on pourra consulter également P. L. BUTZER — H. BERENS [1]) :

$$(6.167) \qquad L^2(0, T; H^m(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^{2/(1-\theta_1)}(0, T; H^{(1-\theta_1)m}(\Omega))$$

et (J. PEETRE [1])

$$H^{(1-\theta)m}(\Omega) \subset L^{q_\theta}(\Omega), \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\theta)\, m}{n} (> 0).$$

Si l'on prend θ de façon que $(1 - \theta)\, m/n \geqslant 1/4$, alors $q_\theta \geqslant 4$ et on peut déduire de (6.166) :

$$\begin{aligned} | b(w, u, w) | &\leqslant c_1 \| w \|_m^{2(1-\theta)} | w |^{2\theta} \| u \|_1 \\ &\leqslant \frac{1}{c} \| w \|_m^2 + c_2 | w |^2 \| u \|_1^{1/\theta} . \end{aligned}$$

(1) Donc, lorsque n croit, en « augmentant la viscosité artificielle », on arrive à l'unicité ; si $n = 2$ (6.164) donne $m \geqslant 1$; on peut donc prendre $m = 1$, i. e. la viscosité (réelle) — $\nu\Delta u$ *suffit* ; c'est le Théorème 6.2.

Donc (6.165) donne

$$\frac{d}{dt} | w(t) |^2 \leqslant c_3 | w(t) |^2 \| u(t) \|_1^{1/\theta} \tag{6.168}$$

Mais prenant dans (6.167) θ_1 avec $(1 - \theta_1) m = 1$, on a :

$$u \in L^{2m}(0, T; H^1(\Omega)) \tag{6.169}$$

et cela donne, avec (6.168), le résultat désiré, si $1/\theta \leqslant 2m$, ce qui est compatible avec $(1 - \theta) m/n \geqslant 1/4$ si l'on a (6.164). ∎

On montre ensuite que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible et } L^\infty(0, T; H) \text{ weak star} \\ \text{lorsque } \varepsilon \to 0 . \end{cases} \tag{6.170}$$ ∎

7. ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES (CAS STATIONNAIRE)

7.1 Le problème homogène

Le problème *stationnaire* correspondant au problème d'évolution étudié au n^ro précédent consiste à chercher $u = \{ u_1, ..., u_n \}$ et p vérifiant

$$- \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - \operatorname{grad} p \text{ dans } \Omega , \tag{7.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 , \tag{7.2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma . \tag{7.3}$$

Avec les notations du n^ro 6 on peut formuler (de façon « faible ») le problème précédent sous la forme du

Problème 7.1. Soit f donné dans V'. Trouver $u \in V$ (défini en (6.10), (6.11)) solution de

$$\nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n \text{ (}^1\text{)} , \tag{7.4}$$

où les notations sont définies en (6.14) (6.15) ; le problème a un sens d'après le Lemme 6.1. ∎

On va démontrer le

Théorème 7.1. — *Pour tout f donné dans V', il existe u dans V solution de* (7.4).

Démonstration.

1° On introduit l'espace

$$W = \left\{ v \;\middle|\; v \in V, \ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^{n/2}(\Omega) \right\} , \tag{7.5}$$

(1) i. e. $\forall v \in V$ si $n \leqslant 4$.

que l'on munit de la norme

$$\| v \|_V + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^{n/2}(\Omega)} .$$

On observe que :

(i) $W = V$ si $n \leqslant 4$;

(ii) $v \in W \Rightarrow v \in (L^n(\Omega))^n$ d'après le Théorème de SOBOLEV.

On choisit ensuite une « base » $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ de W et on considère le *problème approché* suivant : on cherche $u_m \in [w_1, \ldots, w_m]$, vérifiant

$$\nu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j), \; 1 \leqslant j \leqslant m . \tag{7.6}$$

On note que

$$\nu a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = \nu a(u_m, u_m) = \nu \| u_m \|^2 , \tag{7.7}$$

de sorte que *l'on peut appliquer le Lemme* 4.3, comme dans la Démonstration du Théorème 4.3. Donc il existe u_m solution de (7.6) et grâce à (7.7) on en déduit que

$$\nu \| u_m \|^2 \leqslant \| f \|_{V'} \| u_m \| ,$$

donc

$$\| u_m \| \leqslant \frac{1}{\nu} \| f \|_{V'} . \tag{7.8}$$

2° On peut alors extraire une suite u_μ telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } V \text{ faible ,} \tag{7.9}$$

$$u_\mu \to u \text{ dans } H \text{ fort et p. p.} \tag{7.10}$$

Par ailleurs les $u_{mi}\, u_{mj}$ demeurent dans un borné de $L^{q/2}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right.$, ou q fini quelconque si $n = 2\Big)$ et on peut donc supposer que

$$u_{\mu i}\, u_{\mu j} \to \chi_{ij} \text{ dans } L^{q/2}(\Omega) \text{ faible, } \forall i, j . \tag{7.11}$$

Utilisant le Lemme 1.3, on en déduit que

$$\chi_{ij} = u_i\, u_j . \tag{7.12}$$

Prenons alors j fixé, $\mu > j$ et montrons que

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j) . \tag{7.13}$$

En effet,

$$\begin{aligned} b(u_\mu, u_\mu, w_j) &= - b(u_\mu, w_j, u_\mu) \\ &= - \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_{\mu i} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} u_{\mu k} \, dx ; \end{aligned}$$

$u_{\mu i}\, u_{\mu k} \to u_i\, u_j$ dans $L^{q/2}(\Omega)$ faible d'après (7.11) (7.12) et $\dfrac{\partial w_j}{\partial x_k} \in L^{n/2}(\Omega)$, d'où le résultat puisque $\dfrac{1}{(q/2)} + \dfrac{1}{(n/2)} = 1$.

Donc on a (7.13) et par conséquent

$$va(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j)$$

et cela $\forall j$, donc par passage à la limite on a (7.4) $\forall v \in W$, puis $\forall v \in V \cap (L^n(\Omega))$. ▮

Remarque 7.1 *Le cas « Ω non borné »*

Le Problème analogue à 7.1 pour Ω *non borné* nécessite quelques modifications dans le choix des espaces (¹).

On introduit

$$(7.14) \qquad \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) = \text{complété de } \mathscr{D}(\Omega) \text{ pour } \left(\int_\Omega |\operatorname{grad} \varphi|^2 \, dx \right)^{1/2} ;$$

$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathscr{D}'(\Omega)$ si $n \geqslant 3$ et si $n = 2$ lorsque $\complement\Omega$ est de capacité > 0 (cf. DENY-LIONS [1] et l'étude des espaces $\hat{\mathscr{D}}^m(\Omega)$ dans HÖRMANDER-LIONS [1]).

Supposons $n \geqslant 3$ pour un peu simplifier. Alors

$$(7.15) \qquad \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) = \left\{ v \;\middle|\; v \in L^q(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right\}.$$

On introduit ensuite

$$(7.16) \qquad \hat{V} = \{ v \mid v \in (\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega))^n\,,\ \operatorname{div} v = 0 \} ;$$

$\hat{V}$ coïncide (cf. Remarque 6.4 qui s'adapte facilement) avec l'adhérence de $\mathscr{V}$ dans l'espace des $v \in (L^q(\Omega))^n$ tels que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}\, (L^2(\Omega))^n .$$

On a alors le

Théorème 7.2. — *Pour $f \in (\hat{V})'$, il existe $u \in \hat{V}$ vérifiant*

$$(7.4\ bis) \qquad va(u, v) + b(u, u\,; v) = (f, v) \quad \forall v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n .$$

(¹) C'est plus simple dans le cas d'évolution où les résultats du nᵒ 6 s'étendent au cas « Ω non borné » sans changement notable.

Démonstration.

On opère par la méthode « standard » ; on considère

$$\Omega_R = \Omega \cap \{ x \mid |x| < R \} .$$

On résout (7.4) dans Ω_R ; il existe donc (avec des notations évidentes) $u_R \in V(\Omega_R)$ tel que

$$(7.17) \qquad \begin{cases} \nu a_{\Omega_R}(u_R, v) + b_{\Omega_R}(u_R, u_R, v) = (f, v)_{\Omega_R} \\ \qquad \forall v \in V(\Omega_R) \cap (L^n(\Omega_R))^n . \end{cases}$$

En outre on peut supposer que

$$(7.18) \qquad \| u_R \|_{V(\Omega_R)} \leqslant \text{constante} .$$

On introduit

$\tilde{u}_R$ = prolongement de u_R à Ω par 0 hors de Ω_R ; d'après (7.18) $\tilde{u}_R$ demeure dans un borné de $\hat{V}$.

Cette fois l'injection de $\hat{V}$ dans H *n'est pas* compacte, mais on peut extraire une suite telle que

$$(\tilde{u}_R)_i \to u_i \text{ dans } L^2_{\text{local}} \textit{ fort} ,$$

i. e. $\qquad (\tilde{u}_R)_i \to u_i$ dans $L^2(\mathcal{O})$ *fort*, $\forall \mathcal{O} \subset \Omega$, $\mathcal{O}$ borné.

On peut alors passer à la limite ; on prend d'abord $v \in \mathcal{V}$; on déduit (7.4 *bis*) $\forall v \in \mathcal{V}$ puis par densité, $\forall v \in \hat{V} \cap (L^n(\Omega))^n$. ∎

7.2 Le problème non homogène

On se donne un vecteur ψ ayant les propriétés suivantes ($\psi = \{ \psi_1, ..., \psi_n \}$) :

$$(7.19) \qquad \psi_i \in H^2(\Omega) , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_i \in L^n(\Omega) , \quad \psi_i \in L^\infty(\Omega) .$$

(Noter que si $n \leqslant 3$, la première condition (7.19) entraîne les deux autres.) On introduit ensuite

$$(7.20) \qquad F = \text{rot } \psi \; (^1) .$$

Il résulte de (7.19) que

$$(7.21) \qquad F \in (L^n(\Omega))^n \cap (H^1(\Omega))^n .$$

(1) Ici « rot » est en fait un système différentiel homogène du premier ordre à coefficients constants tel que div (rot ψ) = 0.

On cherche un vecteur $U = \{ U_1, \dots, U_n \}$ tel que

$$-\nu \Delta U + \sum_{i=1}^{n} U_i D_i U = f - \operatorname{grad} p \text{ dans } \Omega, \tag{7.22}$$

$$\operatorname{div} U = 0, \tag{7.23}$$

$$U - F \in (H_0^1(\Omega))^n. \blacksquare \tag{7.24}$$

Remarque 7.2.

La condition (7.24) signifie que

$$U_i = F_i \quad \text{sur} \quad \Gamma, i = 1, \dots, n. \tag{7.24 bis}$$

Les conditions aux limites sont dites « *non homogènes* ». ▌

On va montrer le

Théorème 7.3. — *On suppose* $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ *donné avec* $f_i \in H^{-1}(\Omega)$ $\forall i$ *et* F *donné par* (7.20) *avec* (7.19). *Il existe alors un vecteur* $U \in (H^1(\Omega))^n$ *et une distribution* $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *vérifiant* (7.22) (7.23) (7.24).

Démonstration.

1° Soit G un vecteur ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} G \in (H^1(\Omega))^n \cap (L^n(\Omega))^n, & \operatorname{div} G = 0, \\ G = F \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{7.25}$$

On pose

$$u = U - G. \tag{7 26}$$

Remarque 7.3.

On peut prendre, *a priori*, $G = F$; on va voir qu'en fait il est *essentiel de ne pas* prendre $G = F$ (à la différence du cas linéaire) : toute la difficulté du problème va consister *à choisir* G. ▌

Donc $U = u + G$ et portant dans (7.22) on trouve :

$$-\nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i G + \sum_{i=1}^{n} G_i D_i u = \tilde{f} - \operatorname{grad} p, \tag{7.27}$$

où

$$\tilde{f} = f + \nu \Delta G - \sum_{i=1}^{n} G_i D_i G; \tag{7.28}$$

on note que

$$\tilde{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n. \tag{7.29}$$

Par ailleurs :

$$\operatorname{div} u = 0$$

et (7.24) équivaut à $u \in V$.

On est donc ramené à trouver $u \in V$ tel que

$$\text{(7.30)} \qquad \begin{cases} \nu a(u, v) + b(u, u, v) + b(u, G, v) + b(G, u, v) = (\tilde{f}, v) \\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n . \end{cases}$$

2° La méthode de démonstration du Théorème 7.1 montre qu'on aura existence de u solution de (7.30) si *l'on peut choisir G de sorte que*

$$\begin{cases} \nu a(v, v) + b(v, v, v) + b(v, G, v) + b(G, v, v) = X \geqslant \alpha \| v \|^2 , \ \alpha > 0 \\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n . \end{cases}$$

Or

$$X = \nu a(v, v) + b(v, G, v) = \nu \| v \|^2 + b(v, G, v)$$

et donc le Théorème résultera du

Lemme 7.1. — *Quel que soit* $\beta > 0$, *on peut choisir G vérifiant* (7.25) *de façon que*

$$\text{(7.31)} \qquad | b(v, G, v) | \leqslant \beta \| v \|^2 .$$

3° Avant de démontrer le Lemme 7.1 vérifions deux autres Lemmes.

Lemme 7.2. — *On pose*

$$\rho(x) = \text{distance de } x \text{ à } \Gamma .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ (assez petit), *il existe une fonction* $\theta_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$ *telle que*

$$\text{(7.32)} \qquad \theta_\varepsilon = 1 \text{ dans un voisinage (variable avec } \varepsilon) \text{ de } \Gamma ,$$

$$\text{(7.33)} \qquad \theta_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{si} \quad \rho(x) \geqslant \delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon) ,$$

$$\text{(7.34)} \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \theta_\varepsilon(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\rho(x)} \quad \text{si} \quad \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon) , \quad \forall k .$$

Démonstration (E. Hopf [2]).

On définit d'abord la fonction $\lambda \to \xi_\varepsilon(\lambda)$ pour $\lambda \geqslant 0$ par

$$\text{(7.35)} \qquad \xi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \lambda < \delta(\varepsilon)^2 , \\ \varepsilon \log\left(\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\lambda}\right) \quad \text{pour} \quad \delta(\varepsilon)^2 < \lambda < \delta(\varepsilon) , \\ 0 \quad \text{pour} \quad \lambda > \delta(\varepsilon) , \end{cases}$$

puis l'on définit χ_ε par

$$\text{(7.36)} \qquad \chi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon(\rho(x)) .$$

Comme Γ est régulière, χ_ε vérifie (7.32) (7.33) (7.34) et on obtient θ_ε par régularisation de χ_ε. ▮

Lemme 7.3. — *Il existe une constante* c_1 *telle que*

$$\left\| \frac{1}{\rho} v \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{7.37}$$

Démonstration.

Par usage d'une partition de l'unité et cartes locales, tout résulte finalement de l'inégalité :

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \varphi(x) \right|^2 \mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^\infty | \varphi'(x) |^2 \,\mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in \mathscr{D}(]0, \infty[) \tag{7.38}$$

ce qui est immédiat $\left(1/x\ \varphi(x) = 1/x \int_0^x \varphi'(y)\,\mathrm{d}y\right.$ puis usage de l'inégalité de Hardy$\left.\right)$. ▮

4° *Démonstration du Lemme* 7.1.

On introduit, avec les notations du Lemme 7.2 :

$$G = \operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\, \psi)\,; \tag{7.39}$$

on a bien (7.25) et on va montrer *qu'on peut choisir* ε *de façon que* (7.31) *ait lieu.*

Des propriétés de θ_ε il résulte que

$$| G_j(x) | \leqslant c_2 \left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)} | \psi(x) | + | D\psi(x) | \right) \qquad \forall j, \quad \text{si} \quad \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon)\,, \tag{7.40}$$

où

$$| D\psi(x) | = \left(\sum_{i,j=1}^{n} | D_i\, \psi_j(x) |^2 \right)^{1/2},$$

et $G_j = 0$ si $\rho(x) > \delta(\varepsilon)$.

Comme on a supposé que $\psi_i \in L^\infty(\Omega)$, on déduit de (7.40) que

$$| G_j(x) | \leqslant c_3 \left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)} + | D\psi(x) | \right) \qquad \forall j, \rho(x) \leqslant \delta(\varepsilon)\,. \tag{7.41}$$

On a par conséquent

$$\| v_i\, G_j \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_3 \left(\varepsilon \left\| \frac{v_i}{\rho} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left(\int_{\rho \leqslant \delta(\varepsilon)} v_i^2 \,| D\psi |^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/n}. \tag{7.42}$$

Introduisons

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\int_{\rho \leqslant \delta(\varepsilon)} | D\psi |^n \, dx \right)^{1/n} \tag{7.43}$$

$\big(\varphi(\varepsilon) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$ grâce à l'hypothèse « $\partial/\partial x_j \, \psi_i \in L^n(\Omega)$ »$\big)$;

on déduit de (7.42) et du Lemme 7.3 :

$$\| v_i G_j \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_4 \, \varepsilon \| v \| + c_3 \| v_i \|_{L^q(\Omega)} \varphi(\varepsilon) , \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} ,$$

et donc

$$\| v_i G_j \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5 \big(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)\big) \| v \| . \tag{7.44}$$

On va en déduire aisément (7.31) ; en effet

$$\begin{aligned} \big| b(v, G, v) \big| &\leqslant c_7 \| v \| \sum_{i,j=1}^{n} \| v_i G_j \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant (\text{par } (7.44)) \; c_6 \| v \|^2 \big(\varepsilon + \varphi(\varepsilon)\big) . \; \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 7.4.

On résoudra par des considérations analogues les problèmes non homogènes dans le cas des équations d'évolution (nro 6). ▮

Remarque 7.5.

Si $v \in \big(H^1(\Omega)\big)^n$ avec div $v = 0$, alors, $v_j |_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ et

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, dx = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma v_j \cos n_j \, d\Gamma = 0 .$$

Réciproquement, si $g_1, \ldots, g_n$ sont donnés dans $H^{1/2}(\Gamma)$, avec

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma g_j \cos n_j \, d\Gamma = 0$$

alors il existe $v \in \big(H^1(\Omega)\big)^n$, div $v = 0$, $v_j = g_j$ sur Γ. Cf. CATTABRIGA [1] ▮.

Remarque 7.6.

Si $n \leqslant 3$, on a *l'unicité* de la solution lorsque $\| f \|_{V'}$ est « suffisamment petit » ; en effet soient u et u^* deux solutions ; si $w = u - u^*$, on a :

$$\nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0 . \tag{7.45}$$

Sous la *seule* hypothèse « $f \in V'$ », u, u^* sont dans V sans propriété de régularité supplémentaire et donc aussi pour w ; il n'est alors loisible de faire

$v = w$ dans (7.45) que si $n \leqslant 3$ (puisque alors la forme tri-linéaire $u, v, w \to b(u, v, w)$ est continue sur V) ; faisant donc $v = w$ dans (7.45) on trouve

$$\nu \| w \|^2 = - b(w, u, w)$$

donc

$$\nu \| w \|^2 \leqslant c \| u \| \; \| w \|^2$$

et comme

$$\nu \| u \|^2 = (f, u) \leqslant \| f \|_{V'} \| u \| ,$$

on a finalement

$$\left(\nu - \frac{c}{\nu} \| f \|_{V'} \right) \| w \|^2 \leqslant 0$$

et donc $w = 0$ si

(7.46) $$\nu^2 > c \| f \|_{V'} ,$$

ce qu'on peut interpréter comme « $\| f \|_{V'}$ assez petit » ou « ν assez grand » ! ▮

8. UN EXEMPLE D'ÉQUATION PARABOLIQUE FORTEMENT NON LINÉAIRE

8.1 Position du problème

On considère dans ce numéro le problème suivant : on cherche une fonction u vérifiant

(8.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0, T[,$$

où p est donné > 2, avec la condition aux limites :

(8.2) $$u = 0 \text{ sur } \Sigma$$

et la condition initiale

(8.3) $$u(x, 0) = u_0(x), \; x \in \Omega . \; ▮$$

Remarque 8.1.

On donnera au Chapitre 2, n^ro 1, une solution de ce problème en utilisant la « méthode de monotonie », solution *plus simple* que celle que nous allons présenter. Mais la méthode ci-après (due à I. M. VISIK [1]) contient plusieurs idées qu'il nous semble utile de mettre en lumière. ▮

Remarque 8.2.

On choisit ici l'équation (8.1) comme « équation modèle », pour dégager l'essentiel, sans complications techniques inutiles. Mais la méthode s'étend à des équations beaucoup plus générales (cf. VISIK, *loc. cit.* et le Chapitre 2). En particulier le fait que l'équation soit du *deuxième ordre* ne joue aucun rôle essentiel. ▌

Remarque 8.3.

Les non-linéarités apparaissent ici dans des termes de la forme

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

pour passer à la limite dans ces termes, *lorsqu'on utilise la méthode de compacité*, il faudra donc obtenir des estimations *a priori* « plus fortes » que celles obtenues pour les équations de Navier-Stokes (n$^{\text{ro}}$ 6) — le problème étant ensuite *d'utiliser* ces estimations. ▌

8.2 Estimations *a priori*. Généralités

8.2.1 *Notations.*

On utilise les espaces :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ v \mid v \in L^p(\Omega), D_i v \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n \},$$

espace de Banach pour la norme

$$\| v \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| v \|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| D_i v \|_{L^p(\Omega)}; \tag{8.4}$$

$$\begin{cases} W_0^{1,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathscr{D}(\Omega) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega), \text{ ou encore :} \\ W_0^{1,p}(\Omega) = \{ v \mid v \in W^{1,p}(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \}; \\ W^{-1,p'}(\Omega) = \text{dual de } W_0^{1,p}(\Omega); \end{cases} \tag{8.5}$$

on a :

$$\begin{cases} f \in W^{-1,p'}(\Omega) \Leftrightarrow f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i f_i, \\ f_0, f_1, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega), \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

On posera :

$$A(\varphi) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right). \tag{8.7}$$

L'opérateur $\varphi \to A(\varphi)$ applique $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Pour $\varphi, \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a :

$$(A(\varphi), \psi) = a(\varphi, \psi), \tag{8.8}$$

où

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx . \tag{8.9}$$

On posera dans ce numéro,

$$| g | = \| g \|_{L^2(\Omega)} . \blacksquare \tag{8.10}$$

8.2.2 *Estimations* (I).

Multipliant (8.1) par u on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} | u(t) |^2 + a(u(t), u(t)) = (f(t), u(t)) . \tag{8.11}$$

Si donc l'on suppose que

$$\begin{cases} f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) \\ u_0 \in L^2(\Omega) , \end{cases} \tag{8.12}$$

on en déduit, en remarquant que, d'après l'inégalité de Poincaré,

$$(a(v, v))^{1/p} = \| v \| \tag{8.13}$$

est une norme équivalente à $\| v \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$, que

$$\frac{1}{2} | u(t) |^2 + \int_0^t \| u(\sigma) \|^p \, d\sigma \leqslant \frac{1}{2} | u_0 |^2 + \int_0^t \| f(\sigma) \|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \| u(\sigma) \| \, d\sigma ,$$

d'où

$$| u(t) |^2 + \int_0^t \| u(\sigma) \|^p \, d\sigma \leqslant | u_0 |^2 + c \int_0^t \| f(\sigma) \|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^{p'} \, d\sigma . \tag{8.14}$$

8.2.3 *Estimations* (II).

On peut maintenant, *formellement* (les hypothèses précises seront faites plus loin), dériver (8.1) en t et multiplier par u' ; il vient :

$$(u''(t), u'(t)) - (p-1) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u'}{\partial x_i} \right) . \, u' \, dx = (f', u') . \tag{8.15}$$

Le terme « non linéaire » dans (8.15) s'écrit

$$(p-1) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{4(p-1)}{p^2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right)^2 dx$$

d'où

$$(8.16)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,|\,u'(t)\,|^2 + \dfrac{4(p-1)}{p^2}\displaystyle\int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2}\,|\,u'(0)\,|^2 + \displaystyle\int_0^t (f', u')\,\mathrm{d}\sigma\,. \end{cases}$$

Il est clair (et d'ailleurs, on montrera...) que l'on peut déduire de (8.16) (avec des hypothèses convenables sur f et u_0) des estimations *a priori* sur u' et, surtout, sur $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$, où

$$(8.17)\qquad \beta(\lambda) = |\,\lambda\,|^{(p-2)/2}\,\lambda\,.$$

Pour appliquer la méthode de compacité, il faut encore une estimation sur les $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$. ▮

8.2.4 *Estimations* (III).

Une idée naturelle est de multiplier par $(-\,\Delta u)$ les deux membres de (8.1) (cf. n^{ro} 1.7 pour une idée analogue). Mais il apparaît alors une difficulté : les intégrations par parties dans $\displaystyle\int_\Omega A(u)\,(\Delta u)\,\mathrm{d}x$ font apparaître des *intégrales de surface non nulles.* ▮

On utilise alors les deux observations suivantes :

(i) dans la méthode de compacité, il faut arriver à une *convergence presque partout* (cf. Lemme 1.3), et pour cela des estimations *intérieures* à Ω suffisent ;

(ii) on peut *supprimer* les intégrales de surface en multipliant par une fonction égale à Δu *à l'intérieur* et *dégénérant sur* Γ. ▮

On est ainsi conduit à introduire une fonction ψ ayant les propriétés suivantes (on suppose Ω borné de frontière C^∞) :

$$(8.18)\quad \begin{cases} \psi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})\,, \quad \psi(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega\,, \\ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma\,(^1)\,. \end{cases}$$

(1) L'utilité de cette dernière condition apparaîtra plus loin.

Si l'on multiplie alors les deux membres de (8.1) par $(-\psi\,\Delta u)$, le terme non linéaire donne

$$
(8.19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A(u)\,(-\psi\,\Delta u)\,\mathrm{d}x = \frac{4(p-1)}{p^2}\times \\ \displaystyle\quad \times \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)^2 \mathrm{d}x\, + \\ \displaystyle\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,A(u)\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\, + \\ \displaystyle\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,. \end{cases}
$$

Les deux derniers termes sont « d'ordre inférieur » de sorte que l'on pourra ainsi obtenir des estimations sur

$$\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right). \ \blacksquare$$

8.3 Utilisation des estimations

Si $w(x,t)$ est une fonction définie dans Q, on pose

$$
(8.20)\quad \begin{cases} \displaystyle Bw = -\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \psi\,\Delta w + \lambda w\,, \\ \text{où } \lambda > 0 \text{ sera choisi (assez grand) ultérieurement.} \end{cases}
$$

On montrera plus loin (au n$^{\text{ro}}$ 8.3) le

Lemme 8.1. — *Il existe une « base » de fonctions $w_1 \dots w_m$ assez régulières dans $\bar{Q}$ telles que $\{Bw_j\}$ soit une « base » de l'espace $L^p(0,T\,;W_0^{1,p}(\Omega))$.*

On va alors utiliser la méthode de Faedo-Galerkin de la façon suivante :

$$
(8.21)\quad \begin{cases} \text{on cherche } u_m \in [w_1,\dots,w_m], \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_0^T (u_m' + A(u_m), Bw_j)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, Bw_j)\,\mathrm{d}t\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m\,. \ \blacksquare \end{cases}
$$

Remarque 1.4.

Noter que l'on traite un *problème d'évolution* comme un *problème stationnaire.* On retrouvera plus loin (aux Chap. 2 et 3) d'autres procédés « d'approximation » d'une équation d'évolution par une équation stationnaire (cf. en particulier la régularisation elliptique). ▮

Remarque 8.5.

Puisque les Bw_j forment une « base » de $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, on voit bien que, si dans (8.21), $u_m \to u$, u vérifiera à la limite l'équation (8.1). ∎

Remarque 8.6.

Comme on verra au n^{ro} 6, la « multiplication par Bu » permet de retrouver essentiellement, en une seule étape, les trois types d'estimations obtenues au n^{ro} 8.2.

On pourrait songer à un procédé différent pour utiliser les estimations (I) et (III) ; on introduit : $\rho \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, $\rho(x) > 0$ dans Ω, $\rho(x) =$ distance de x à Γ si x assez près de Γ, puis l'opérateur Δ_ρ défini par

$$\Delta_\rho v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Les estimations (III) du 8.2 s'obtiennent encore en multipliant par $\Delta_\rho u$.

Comme on sait (M. S. Baouendi-C. Goulaouic [1]) qu'il existe une suite de valeurs propres et fonctions propres de Δ_ρ :

$$\Delta_\rho w_j = \lambda_j w_j, \quad \lambda_j > 0, \quad w_j, \quad \sqrt{\rho}\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),$$

et telles que w_j soit *régulière dans* $\overline{\Omega}$, on pourrait essayer d'utiliser Faedo-Galerkin de la manière usuelle, en prenant les w_j comme « base spéciale » ; *mais alors* w_j *n'est pas nul sur* Γ *et ce procédé conduirait à la solution du problème* (8.1), (8.3) *avec une condition aux limites du type Neumann* :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n, x_i) = 0 \tag{8.22}$$

(au lieu de la condition de Dirichlet (8.2)). ∎

8.4 Enoncé du Théorème

Théorème 8.1. — *On suppose que*

$$\begin{cases} f, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \sqrt{\psi}\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(Q), \ Q = \Omega \times]0, T[, \\ f(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{8.23}$$

où ψ *est donné avec* (8.18).

On suppose également que [1]

$$u_0 = 0. \tag{8.24}$$

[1] Pour un peu simplifier — ce n'est nullement essentiel. Cf. d'ailleurs Chapitre 2, n^{ro} 1.

Il existe alors une fonction u et une seule ayant les propriétés suivantes :

(8.25) $$u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$

(8.26) $$u' \in L^2(Q),$$

(8.27) $$\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(Q), \quad \forall i, j,$$

(8.28) $$\sqrt{(T-t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(Q), \quad \forall i,$$

et u satisfaisant à (8.1) (8.2) *et* (8.3) (avec $u_0 = 0$). ▮

Plan de la démonstration :

(i) démonstration du Lemme 8.1 (n^ro 8.5),

(ii) résolution de (8.21) et estimations, puis passage à la limite (n^ro 8.6),

(iii) démonstration de l'unicité (n^ro 8.7). ▮

8.5 Démonstration du Lemme 8.1

On part de la suite de fonctions g_k sur $[0, T]$ telles que

(8.29) $$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((T-t)\dfrac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}t}\right) = \mu_k\, g_k, \\ g_k(0) = 0, \ g_k(t) \text{ borné lorsque } t \to T, \end{cases}$$

les valeurs propres μ_k étant > 0 et les fonctions propres g_k étant normalisées :

$$\int_0^T g_k^2(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Soit ensuite

(8.30) $$\begin{cases} \xi_m, \ m = 1, 2, \ldots, \text{ une « base » de fonctions de } W_0^{1,p}(\Omega), \\ \text{avec } \xi_m \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ (par exemple) (il suffit que } \xi_m \text{ soit assez régulière)}. \end{cases}$$

On définit alors v_{km} comme *la* solution de

(8.31) $$-\psi\,\Delta v_{km} + (\lambda + \mu_k)\, v_{km} = \xi_m, \quad v_{km} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

On verra que

Lemme 8.2. — *Pour* $\lambda > 0$ *assez grand, le problème* (8.31) *admet une solution unique régulière dans* $\bar{\Omega}$.

Admettant provisoirement ce résultat, on note que

(8.32) $$B(v_{km} \otimes g_k) = B(v_{km}(x)\, g_k(t)) = \xi_m \otimes g_k,$$

de sorte que les $B(v_{km} \otimes g_k)$ forment une « base » de l'espace $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$. On pourra donc prendre, par indexation convenable,

$$w_l = v_{km} \otimes g_k, \tag{8.33}$$

ce qui démontre le Lemme 8.1, sous réserve de la

Démonstration du Lemme 8.2.

On va montrer plus précisément que, pour μ assez grand, si f est donné dans $H_0^k(\Omega)$, il existe u unique vérifiant

$$\begin{cases} u \in H_0^k(\Omega), \quad \sqrt{\psi}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| = k+1, \\ \qquad - \psi \Delta u + \mu u = f. \end{cases} \tag{8.34}$$

Pour démontrer (8.34) on utilise encore une fois la méthode de Faedo-Galerkin, et encore avec une *base spéciale*. On introduit les fonctions propres :

$$(-1)^k \Delta^k \varphi_i = \lambda_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in H_0^k(\Omega). \tag{8.35}$$

On part de $u_m \in [\varphi_1, ..., \varphi_m]$, solution de

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \varphi_j \,\mathrm{d}x + \mu(u_m, \varphi_j) = (f, \varphi_j) \tag{8.36}$$

$$1 \leqslant j \leqslant m;$$

la solution u_m existe ; en effet, on déduit de (8.36) que

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x + \mu |u_m|^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} u_m \,\mathrm{d}x = (f, u_m); \tag{8.37}$$

mais

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{\psi}} \sqrt{\psi} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} u_m \,\mathrm{d}x \right| \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^n \int \psi \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} |u_m|$$

car $$\left| \frac{1}{\sqrt{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right| \leqslant \text{constante}.$$

Donc le premier membre de (8.37) est

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x + \left(\mu - \frac{c_1^2}{2} \right) |u_m|^2.$$

On en déduit donc l'existence de u_m solution de (8.36) si l'on prend $\mu \geqslant c_1^2/2$. On va maintenant montrer que l'on peut choisir μ assez grand pour avoir les estimations supplémentaires :

$$\| u_m \|_{H_0^k(\Omega)} \leqslant \text{constante}, \tag{8.38}$$

$$\int_\Omega \psi (D^{k+1} u_m)^2 \, dx \leqslant \text{constante}, \tag{8.39}$$

où l'on dénote par $D^r u$ une dérivation quelconque *d'ordre r*. Naturellement (8.38) et (8.39) entraînent le résultat.

Grâce à (8.35) on peut remplacer dans (8.36) φ_j par $(-1)^k \Delta^k \varphi_j$ et l'on en déduit que

$$(-\psi \Delta u_m, (-1)^k \Delta^k u_m) + \mu \| u_m \|^2_{H^k(\Omega)} \leqslant \| f \|_{H^k(\Omega)} \| u_m \|_{H^k(\Omega)} . \tag{8.40}$$

Mais

$$\begin{aligned} X &= (-\psi \Delta u_m, (-1)^k \Delta^k u_m) \\ &= -\sum (D^k(\psi \Delta u_m), D^k u_m) \\ &= -\ (\sum D^k(D(\psi D u_m) - (D\psi)(D u_m)), D^k u_m) \\ &= \sum (D^k(\psi D u_m), D^{k+1} u_m) + \sum (D^k(D\psi\, D u_m), D^k u_m) \ (^1). \end{aligned}$$

Posons :

$$||| u_m |||^2 = \sum \int_\Omega \psi (D^{k+1} u_m)^2 \, dx .$$

Alors

$$X = ||| u_m |||^2 + \sum \left(\frac{D\psi}{\sqrt{\psi}} \sqrt{\psi}\, D^{k+1} u_m, D^k u_m \right) + \sum (D^j \psi D^k u_m, D^k u_m) + Y ,$$

$$| Y | \leqslant c \| u_m \|_{H^k(\Omega)} \| u_m \|_{H^{k-1}(\Omega)} .$$

Mais comme $D\psi/\sqrt{\psi} \in L^\infty(\Omega)$, on en déduit

$$X \geqslant ||| u_m |||^2 - c_2 ||| u_m ||| \, \| u_m \|^2_{H^k(\Omega)} - c_3 \| u_m \|^2_{H^k(\Omega)} \geqslant \tfrac{1}{2} ||| u_m |||^2 - $$
$$- (\tfrac{1}{2} \ c_2^2 + c_3) \| u_m \|^2_{H^k(\Omega)} .$$

(1) Noter que $-\left(D^{k+1}(\psi D u_m), D^k u_m\right) = \left(D^k(\psi D u_m), D^{k+1} u_m\right)$ car $D^k(\psi D u_m) = 0$ sur Γ car $\psi = 0$ sur Γ, $\partial\psi/\partial n = 0$ sur Γ et $u_m \in H_0^k(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)$.

Alors (8.40) donne

$$\tfrac{1}{2}\,|||\,u_m\,|||^2 + (\mu - \tfrac{1}{2}\,c_2^2 - c_3)\,||\,u_m\,||^2_{H^k(\Omega)} \leqslant ||\,f\,||_{H^k(\Omega)}\,||\,u_m\,||_{H^k(\Omega)}\,,$$

d'où résultent (8.38) et (8.39).

8.6 Démonstration de l'existence dans le Théorème 8.1

8.6.1 *Existence d'une « solution approchée ».*

On va d'abord démontrer qu'*il existe* u_m vérifiant (8.21).

Par utilisation du Lemme 4.3, l'existence de u_m résulte de *l'inégalité fondamentale* :

$$(8.41)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^T \left(u_m' + A(u_m), Bu_m\right) \mathrm{d}t \geqslant{} & c \int_0^T |\,u_m'\,|^2 \,\mathrm{d}t \,+ \\ & + c \sum_{i=1}^{n} \int_Q |\,D_i\,u_m\,|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & + c \sum_{i=1}^{n} \int_Q (T-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & + c \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\,\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}\right.$$

$c > 0$, $\beta(\lambda)$ défini en (8.17).

En effet, comme on le vérifie sans peine, on a, sous les hypothèses faites sur f,

$$(8.42)\quad \left|\int_0^T (f, Bu_m)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant c_*\left(\int_0^T |\,u_m'\,|^2\,\mathrm{d}t + \int_Q\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

de sorte que l'on a, en particulier,

$$\int_0^T \left(u_m' + A(u_m) - f, Bu_m\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

pour $\quad \left(\int_0^T |\,u_m'\,|^2\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\int_Q |\,D_i\,u_m\,|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)$ assez grand.

8.6.2 *Démonstration de* (8.41).

On a :

$$(8.43)\quad \int_0^T \left(u_m' + A(u_m),\ Bu_m\right)\mathrm{d}t = J_1 + \cdots + J_6\,,$$

avec

$$J_1 = \int_0^T \left(u'_m, \ -\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\right) \mathrm{d}t \,,$$

$$J_2 = \int_0^T (u'_m \,, \ -\psi\, \Delta u_m)\, \mathrm{d}t \,,$$

$$J_3 = \lambda \int_0^T (u'_m, u_m) \,,$$

$$J_4 = \int_0^T \left(A(u_m)\,, \ -\frac{\partial}{\partial t}\left((T-t)\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\right) \mathrm{d}t \,,$$

$$J_5 = \int_0^T \left(A(u_m)\,, \ -\psi\, \Delta u_m\right) \mathrm{d}t \,,$$

$$J_6 = \lambda \int_0^T \left(A(u_m), u_m\right) \mathrm{d}t \,.$$

On a :

(8.44)

$$J_1 = \int_0^T |\, u'_m(t)\,|^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^T \frac{(T-t)}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\, u'_m(t)\,|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int_0^T |\, u'_m(t)\,|^2 \,\mathrm{d}t \,.$$

Ensuite :

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega \psi D_i\, u'_m\, D_i\, u_m \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega D_i\, \psi (D_i\, u_m)\, u'_m \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi \sum_{i=1}^n (D_i\, u_m)^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega D_i\, \psi (D_i\, u_m)\, u'_m \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

et donc

$$J_2 \geqslant -\, c \left(\int_0^T |\, u'_m(t)\,|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_Q \sum_{i=1}^n (D_i\, u_m)^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

donc (les c désignant des constantes diverses)

(8.45) $$J_2 \geqslant -\frac{1}{4}\int_0^T |\, u'_m\,|^2 \,\mathrm{d}t - c\int_Q \sum_{i=1}^n (D_i\, u_m)^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \,.$$

Ensuite

(8.46) $$J_3 \geqslant 0$$

et

$$J_4 = \int_0^T (T-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}(A(u_m)), u_m'\right)\mathrm{d}t \text{ } (^1)$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_Q (T-t)\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\,\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$(8.47) \qquad J_4 = \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^n \int_Q (T-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Estimons maintenant J_5. On a (²)

$$J_5 = \sum_{j=1}^n \int_0^T (A(u_m), -D_j(\psi D_j u_m) + D_j\psi D_j u_m)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) D_i(\psi D_j u_m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \int_Q A(u_m)\,(D_j\psi)\,(D_j u_m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$J_5 = \sum_{i,j=1}^n (p-1)\int_Q \psi\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{D_i\psi}{\sqrt{\psi}}\sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) D_j u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{j=1}^n \int_Q A(u_m)\sqrt{\psi}\,\frac{D_j\psi}{\sqrt{\psi}}\,D_j u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$J_5 \geqslant \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i,j=1}^n \int_Q \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t -$$
$$- c\sum_{i,j=1}^n \int_Q \sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right).D_j u_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

(¹) Noter ici l'analogie avec le calcul du 8.1, Estimations (II).

(²) Noter ici l'analogie avec le calcul du 8.2, Estimations (III).

d'où

$$J_5 \geqslant c \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - c \int_Q \sum_{j=1}^{n} (D_j u_m)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{8.48}$$

Enfin

$$J_6 = \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,. \tag{8.49}$$

Donc de (8.44) ... (8.49) résulte, avec (8.43), que

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_Q^T (u_m' + A(u_m), Bu_m) \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4} \int_0^T | u_m'(t) |^2 \mathrm{d}t + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + c \sum_{i=1}^{n} \int_Q (T - t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ & + c \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q \psi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - c \sum_{i=1}^{n} \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned} \right. \tag{8.50}$$

Or

$$\int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant c_* \int_Q \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

et (8.50) donne alors le résultat (8.41) si l'on choisit

$$\lambda > cc_* . \; \blacksquare$$

8.6.3 *Estimations sur u_m. Passage à la limite.*

On déduit de (8.41) que, lorsque $m \to \infty$,

$$\left\{ \begin{aligned} & u_m \text{ (resp. } u_m') \quad \text{demeure dans un borné de} \quad L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ & \text{(resp. de } L^2(Q)) \,, \end{aligned} \right. \tag{8.51}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(T-t)} \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right), \quad \sqrt{\psi} \, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right) \text{demeurent} \,, \; \forall i, j \,, \\ & \text{dans un borné de } L^2(Q) \,. \end{aligned} \right. \tag{8.52}$$

Il résulte de ce que u_m demeure dans un borné de $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ que :

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ demeure dans un borné de } L^{p'}(Q) \,. \tag{8.53}$$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert quelconque tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$; il résulte de (8.52) que, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \quad \text{demeure dans un borné de} \quad H^1(\mathcal{O} \times]0, T - \varepsilon[) \,. \tag{8.54}$$

Comme l'injection de

$$H^1(\mathcal{O} \times]0, T - \varepsilon[) \to L^2(\mathcal{O} \times]0, T - \varepsilon[)$$

est *compacte*, on voit que l'on peut extraire de u_m une suite u_μ telle que :

$$(8.55)\qquad \begin{cases} u_\mu \to u & \text{dans} \quad L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ faible},\\ u'_\mu \to u' & \text{dans} \quad L^2(Q) \text{ faible}, \end{cases}$$

$$(8.56)\qquad \beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \quad \textit{converge} \text{ p. p. } \textit{dans} \quad Q \ (^1),$$

$$(8.57)\qquad \sqrt{(T - t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) \to \chi_i \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \text{ faible},$$

$$(8.58)\qquad \sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right) \to \mathcal{O}_{ij} \qquad \text{dans} \quad L^2(Q) \text{ faible},$$

$$(8.59)\qquad \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \to \xi_i \qquad \text{dans} \quad L^{p'}(Q) \text{ faible}.$$

Mais comme $\lambda \to \beta(\lambda)$ est *monotone*, il résulte de (8.56) que $\partial u_m/\partial x_i$ *converge* p. p. Alors, d'après le Lemme 1.3, on a

$$\chi_i = \sqrt{(T - t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right),$$

$$\mathcal{O}_{ij} = \sqrt{\psi}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right), \quad \xi_i = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Alors $A(u_m) \to A(u)$ dans $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ et donc (8.21) donne :

$$(8.60)\qquad \int_0^T (u' + A(u), Bw_j)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f, Bw_j), \quad \forall j.$$

Comme $\{ Bw_j \}$ est une « base » de $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, on déduit de (8.60) que u satisfait à (8.1).

Cela démontre *l'existence* dans le Théorème 8.1.

8.7 Démonstration de l'unicité dans le Théorème 8.1

Il y a relativement à l'unicité un résultat plus fort que celui énoncé dans le Théorème 8.1 (²) : il y a au plus une solution de (8.1) vérifiant la seule condition (8.15).

(¹) Puisque dans (8.54) $\mathcal{O}$ et ε sont quelconques (procédé diagonal).

(²) On verra au Chapitre 2 des énoncés plus systématiques dans ce sens.

En effet, si u vérifie (8.1) et (8.25), alors

$$u' = f - A(u) \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) \tag{8.61}$$

d'où résulte :

$$u \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

(et même : $t \to u(t)$ est continue de $[0, T] \to L^2(\Omega)$).

Soient alors u et u_* deux solutions ; si $w = u - u_*$, on a :

$$w' + A(u) - A(u^*) = 0\,. \tag{8.62}$$

Mais comme on le vérifie sans peine

$$\big(A(u) - A(v), u - v\big) \geqslant 0 \quad (^1) \tag{8.63}$$

et donc (8.62) donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\,w(t)\,|^2 \leqslant 0$$

d'où $w = 0$. ▌

Remarque 8.6 *Cas stationnaire.*

On peut étudier, par le même genre de méthode (cf. I. M. Visik [2]), les problèmes stationnaires pour l'opérateur A. On verra au Chapitre 2 comment on peut utiliser la monotonie de A. ▌

9. PROBLÈMES DE TRANSMISSION ET PROBLÈMES COUPLÉS

9.1.1 Un problème de transmission parabolique-hyperbolique

Des problèmes du type de celui considéré ci-après interviennent en Biologie ; cf. H. Cohen et S. I. Rubinow [1].

On considère deux ouverts Ω_1, Ω_2 de $\mathbf{R}^n$, bornés, comme indiqués Figure 1.

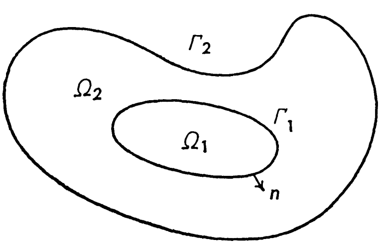

Fig. 1.

(1) C'est la propriété de monotonie de l'opérateur A dont un usage systématique sera fait au Chapitre 2.

La normale n [1] à Γ_1 est orientée vers l'extérieur de Ω_1 (donc l'intérieur de Ω_2).

On cherche des vecteurs :

$$u = \{ u_1, \ldots, u_n \} \text{ défini dans } \Omega_1 \times]0, T[= Q_1 ,$$

$$w = \{ w_1, \ldots, w_n \} \text{ défini dans } \Omega_2 \times]0, T[= Q_2 ,$$

et la fonction scalaire p, satisfaisant aux équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \, \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \, D_i \, u = f - \operatorname{grad} p \quad \text{dans } Q_1 , \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q_1 , \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = g \quad \text{dans } Q_2 , \tag{9.3}$$

avec *les conditions de transmission sur* $\Gamma_1 \times]0, T[= \Sigma_1$:

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma_1 , \tag{9.4}$$

$$\begin{cases} \nu \dfrac{\partial u_i}{\partial n} - p \cos n_i - \dfrac{1}{2} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \cos n_i \right) \times u_i = \dfrac{\partial w_i}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma_1 , \\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{9.5}$$

ainsi que les conditions sur $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$:

$$w = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2 \tag{9.6}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega_1 , \\ w(0) = w_0 , \quad w'(0) = w_1 & \text{sur } \Omega_2 . \blacksquare \end{cases} \tag{9.7}$$

Transformation de la formulation du problème.

On introduit

$$\Phi = w' . \tag{9.8}$$

Alors (9.3) devient :

$$\Phi' - \Delta \left(\int_0^t \Phi \, d\sigma \right) = g + \Delta w_0 . \tag{9.9}$$

[1] Que l'on ne saurait confondre avec la dimension.

On introduit ensuite les notations suivantes :

$$(f, g)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} fg \, \mathrm{d}x \,, \qquad i = 1, 2 \,, \tag{9.10}$$

$$a_{\Omega_i}(u, v) = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathrm{d}x \,, \quad i = 1, 2 \,, \tag{9.11}$$

$$b_{\Omega_1}(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_1} u_i(D_i v_j) \, w_j \, \mathrm{d}x \,, \tag{9.12}$$

$$V_1 = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega_1))^n, \operatorname{div} v = 0 \} \,, \tag{9.13}$$

$$V_2 = \{ v \mid v \in (H^1(\Omega_2))^n, v = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \} \,. \tag{9.14}$$

On va alors vérifier que l'on peut formuler le problème posé sous la forme suivante :

Problème 9.1.

On cherche u, Φ, avec

$$u \in L^2(0, T\,; V_1) \cap L^\infty(0, T\,; (L^2(\Omega_1))^n) \,, \tag{9.15}$$

$$\Phi \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_2))^n) \,, \quad \int_0^t \Phi \, \mathrm{d}\sigma \in L^\infty(0, T; V_2) \,, \tag{9.16}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (u', v)_{\Omega_1} + (\Phi', \varphi)_{\Omega_2} + \nu a_{\Omega_1}(u, v) + a_{\Omega_2}(\Phi, \varphi) + b_{\Omega_1}(u, u, v) \\ & \qquad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} u_i \, u_j \, v_j \cos n_i \, \mathrm{d}\Gamma_1 = \\ & \qquad = (f_1, v)_{\Omega_1} + (g, \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}(w_0, \varphi) \,, \quad \forall v \in v_1 \,, \ \varphi \in V_2 \,, \end{aligned} \right. \tag{9.17}$$

avec

$$v = \varphi \text{ sur } \Gamma_1 \,, \tag{9.18}$$

et avec

$$u(0) = u_0 \,, \tag{9.19}$$

$$\Phi(0) = w_1 \tag{9.20}$$

et

$$u = \Phi \text{ sur } \Sigma_1 \,. \ \blacksquare \tag{9.21}$$

Vérifions par exemple que si $\{ u, \Phi \}$ est solution du Problème 9.1, alors

$$\{ u, w \} \,, \, w = \int_0^t \Phi(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma + w_0 \,,$$

vérifient (dans un sens faible) les conditions (9.1) ... (9.7).

Tout d'abord prenant dans (9.17) v à support compact dans Ω_1 et $\varphi = 0$ (puis $v = 0$ et φ à support compact dans Ω_2) on trouve que u et Φ satisfont à (9.1) et (9.9).

Le point essentiel est alors de vérifier que (9.5) a lieu.

Si l'on multiplie (9.1) par v et (9.9) par φ, il vient (1)

$$(u', v)_{\Omega_1} + \nu a_{\Omega_1}(u, v) + b_{\Omega_1}(u, u, v) + (\Phi', \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}\left(\int_0^t \Phi \, d\sigma, \varphi\right) +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \left(-\nu \frac{\partial u}{\partial n} + pn + \frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^t \Phi \, d\sigma\right)\right) v \, d\Gamma_1 =$$
$$= (f, v)_{\Omega_1} + (g, \varphi)_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}(w_0, \varphi) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w_0}{\partial n} \varphi \, d\Gamma_1$$

et tenant compte de (9.17), il vient

(9.22)
$$\int_{\Gamma_1} \left[-\nu \frac{\partial u}{\partial n} + pn + \frac{\partial}{\partial n}\left(\int_0^t \Phi \, d\sigma + w_0\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n u_j \cos n_j\right) u\right] v \, d\Gamma_1 = 0.$$

Comme div $v = 0$, on a :

$$\int_{\Gamma_1} v.n \, d\Gamma_1 = 0 \tag{9.23}$$

et réciproquement, si $v_* \in (H^{1/2}(\Gamma_1))^n$ avec (9.23), il existe $v \in V_1$ avec $v = v_*$ sur Γ_1 (cf. Remarque 7.5). Donc (9.22) équivaut à

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{\partial u}{\partial n} + pn + \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\displaystyle\int_0^t \Phi \, d\sigma + w_0\right) + \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n u_j \cos n_j\right) u = \lambda n \\ \lambda \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{9.24}$$

et changeant p en $p - \lambda$ (ce qui est loisible), on trouve la condition (9.5) $\left(\text{car } \displaystyle\int_0^t \Phi(\sigma) \, d\sigma + w_0 = w\right)$. ∎

On va donner maintenant l'essentiel de la démonstration du

Théorème 9.1. — *Il existe* $\{u, \Phi\}$ *solution du Problème* 9.1.

Démonstration.

1) On applique la méthode de Faedo-Galerkin, comme au nro 6, avec une « base spéciale », comme au nro 6.3.

(1) Tenant compte de ce que $v = \varphi$ sur Γ_1.

On définit

(9.25) $W_s = \{ w \mid w \in (H_0^s(\Omega))^n,\ \Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2,\ \operatorname{div} w = 0 \text{ sur } \Omega_1 \}$;

on désigne par $(u, v)_{W_s}$ le produit scalaire dans W_s ; on choisit alors (comme en (6.43)) $s = n/2$ et on désigne par w_j les fonctions propres :

(9.26) $$(w_j, v)_{W_s} = \lambda_j(w_j, v) = \lambda_j \int_\Omega w_j\, v\, dx\,, \quad \forall v \in W_s\,.$$

On applique alors Faedo-Galerkin à (9.17), avec la « base »

(9.27) $$\{ v_j, \varphi_j \},\ v_j = w_j \text{ sur } \Omega_1\,,\ \varphi_j = w_j \text{ sur } \Omega_2\,.$$

Soit $\{ u_m, \Phi_m \}$ la solution « approchée » d'ordre m correspondante.

2) On note que

$$b_{\Omega_1}(u, u, u) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int u_i\, u_j\, u_j \cos n_i\, d\Gamma_1 = 0\,,$$

de sorte que l'on vérifie sans peine que

(9.28) $$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T\,;V_1) \cap L^\infty(0, T\,; (L^2(\Omega_1))^n)\,, \\ \Phi_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_2))^n)\,, \\ \displaystyle\int_0^t \Phi_m\, d\sigma \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T\,; V_2)\,. \end{cases}$$

3) On vérifie enfin, comme au n$^{\text{ro}}$ 6.4, que

(9.29) $$\{ u_m', \Phi_m' \} \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T\,; W_s')\,.$$

4) On utilise alors le Théorème de compacité 5.1 dans les conditions suivantes : on l'applique à la suite $\{ u_m, \Phi_m \}$, dans l'espace

$$L^2(0, T; V_1 \times (L^2(\Omega_2))^n), \quad \text{donc} \quad p_0 = 2\,,$$

$B_0 = V_1 \times (L^2(\Omega_2))^n$, dont on estime la dérivée en t avec (9.29), donc : $p_1 = 2$, $B_1 = W_s'$; on choisit ensuite ([1])

(9.30) $$\begin{cases} B = (H_{\mathrm{div}}^{1-\varepsilon}(\Omega_1))^n \times (H^{-\varepsilon}(\Omega_2))^n\,, \\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

On sait (cf. Lions-Magenes [1], Théorème 16.1, Chap. 1) que l'injection de $H^1(\Omega_1) \to H^{1-\varepsilon}(\Omega_1)$ est compacte, et de même l'injection de $L^2(\Omega_2) \to H^{-\varepsilon}(\Omega_2)$ est compacte. Donc on peut appliquer le Théorème 5.1.

On peut donc extraire u_μ telle que

(9.31) $$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0, T; (H^{1-\varepsilon}(\Omega_1))^n)\ \textit{fort}\ (^2)\,.$$

(1) $(H_{\mathrm{div}}^{1-\varepsilon}(\Omega_1))^n = \{ v \mid v \in (H^{1-\varepsilon}(\Omega_1))^n,\ \operatorname{div} v = 0 \}$.

(2) Le même raisonnement est évidemment possible dans le cadre du n$^{\text{ro}}$ 6 mais est alors inutile.

Alors, puisque $\varepsilon < \frac{1}{2}$, l'application

$$v \to v|_{\Gamma_1}$$

est continue de $H^{1-\varepsilon}(\Omega_1) \to L^2(\Gamma_1)$ (1) et donc

$$u_\mu|_{\Gamma_1} \to u|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \textit{ fort}. \tag{9.32}$$

On peut grâce à (9.31) (resp. (9.32)) passer à la limite dans les termes

$$b_{\Omega_2}(u_\mu, u_\mu, v_j)\left(\text{resp.} \sum \int_{\Gamma_1} u_{\mu i}\, u_{\mu j}\, v_j \cos n_i \, d\Gamma_1\right)$$

et on obtient ainsi l'existence d'une solution $\{ u, \Phi \}$ du Problème. ∎

Le problème de l'unicité de la solution est ouvert, sauf dans le cas $n = 2$:

Théorème 9.2. — *Si l'on suppose $n = 2$, le Problème* 9.1 *admet une solution unique.*

Démonstration.

Soient $\{ u, \Phi \}$ et $\{ u_*, \Phi_* \}$ deux solutions.
On pose :

$$\chi = u - u_*, \qquad \Psi = \Phi - \Phi_*,$$

$$\gamma(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} u_i\, v_j\, w_j \cos n_i \, d\Gamma_1 . \tag{9.33}$$

On a :

$$\left\{\begin{aligned} &(\chi', v)_{\Omega_1} + (\Psi', \varphi)_{\Omega_2} + \nu a_{\Omega_1}(\chi, v) + a_{\Omega_2}\left(\int_0^t \Psi \, d\sigma, \varphi\right) + \\ &\qquad + b_{\Omega_1}(u, \chi, v) + b_{\Omega_1}(\chi, u, v) - b_{\Omega_1}(\chi, \chi, v) - \\ &\qquad\qquad - \gamma(u, \chi, v) - \gamma(\chi, u, v) + \gamma(\chi, \chi, v) = 0 , \end{aligned}\right. \tag{9.34}$$

et cela $\forall v \in V_1 \times V_2$, $v = \varphi$ sur Γ_1.
A cause des termes « hyperboliques », on ne peut prendre $\varphi = \Psi(t)$ dans (9.34) et comme il faut que $v = \varphi$ sur Γ_1, on doit utiliser une méthode techniquement plus compliquée.

Soit $s \in]0, T[$; on introduit :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_m(t) = \text{fonction continue dans } [0, T], \text{ linéaire par morceaux} , \\ &\theta_m(t) = 1 \text{ si } t < s - \frac{2}{m}, \quad \theta_m(t) = 0 \text{ si } t > s - \frac{1}{m}, \end{aligned}\right. \tag{9.35}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_n \text{ suite régularisante de fonctions} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_t) , \ \rho_n(t) = \rho_n(-t) , \\ &\rho_n \text{ à support dans } \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \ \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, dt = 1 . \end{aligned}\right. \tag{9.36}$$

(1) En fait de $H^{1-\varepsilon}(\Omega_1) \to H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma_1)$.

On introduit, pour $n > 2m$,

$$\left\{\begin{aligned} v(t) &= \big((\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n\big)\,\theta_m\,, \\ \varphi(t) &= \big((\theta_m \Psi) * \rho_n * \rho_n\big)\,\theta_m\,, \end{aligned}\right. \tag{9.37}$$

(où $*$ désigne le produit de convolution en t et où on a implicitement prolongé χ et Ψ par 0 hors de $[0, T]$).

Puisque $\chi = \Psi$ sur Σ_1, on a également $v(t) = \varphi(t)$ sur Σ_1, et on peut alors prendre $v = v(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ dans (9.34), et intégrer de 0 à T. Il vient :

$$c_{nm} + d_{nm} + e_{nm} + f_{nm} + g_{nm}^1 + g_{nm}^2 + g_{nm}^3 = 0 \tag{9.38}$$

où

$$c_{nm} = \int_0^T (\chi', (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1}\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$d_{nm} = \int_0^T (\Psi, (\theta_m \Psi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_2}\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$e_{nm} = \nu \int_0^T a_{\Omega_1}(\chi, (\theta_n \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$f_{nm} = \int_0^T a_{\Omega_2}\left(\int_0^T \Psi \,\mathrm{d}\sigma, (\theta_m \Psi) * \rho_n * \rho_n\right) \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$g_{nm}^1 = \int_0^T b_{\Omega_1}(u, \chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t - \int_0^T \gamma(u, \chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$g_{nm}^2 = \int_0^T b_{\Omega_1}(\chi, u, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t - \int_0^T \gamma(\chi, u, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,,$$

$$g_{nm}^3 = \int_0^T b_{\Omega_1}(\chi, \chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t - \int_0^T \gamma(\chi, \chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)\, \theta_m \,\mathrm{d}t\,.$$

On va faire tendre n vers l'infini. On note que

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \int_0^T ((\theta_m \chi)' - \theta_m' \chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T ((\theta_m \chi)' * \rho_n, (\theta_m \chi) * \rho_n)_{\Omega_1} \,\mathrm{d}t - \int_0^T \theta_m'(\chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} \,\mathrm{d}t \\ &= - \int_0^T \theta_m'(\chi, (\theta_m \chi) * \rho_n * \rho_n)_{\Omega_1} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et donc

$$c_{nm} \to c_m = - \int_0^T \theta_m \theta_m' \,|\chi|_{\Omega_1}^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty\,. \tag{9.39}$$

De même

$$d_{nm} \to d_m = -\int_0^T \theta_m \theta'_m |\Psi|^2_{\Omega_2} \, dt . \tag{9.40}$$

Il est évident que

$$e_{nm} \to e_m = \nu \int_0^T \theta_m^2 \, a_{\Omega_1}(\chi, \chi) \, dt . \tag{9.41}$$

Pour calculer f_{nm}, posons :

$$\int_0^t \Psi \, d\sigma = F(t);$$

alors

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \int_0^T a_{\Omega_2}\big(\theta_m F, (\theta_m F') * \rho_n * \rho_n\big) \, dt \\ &= \int_0^T a_{\Omega_2}\big((\theta_m F) * \rho_n, (\theta_m F') * \rho_n\big) \, dt - \int_0^T a_{\Omega_2}\big(\theta_m F, (\theta'_m F) * \rho_n * \rho_n\big) \, dt \\ &= -\int_0^T a_{\Omega_2}\big(\theta_m F, (\theta'_m F) * \rho_n * \rho_n\big) \, dt , \end{aligned}$$

d'où

$$f_{nm} \to f_m = -\int_0^T \theta_m \theta'_m \, a_{\Omega_2}(F, F) \, dt . \tag{9.42}$$

Reste à considérer les expressions g^i_{nm}. Admettons un instant le

Lemme 9.1. — *Si $v \in H^1(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbf{R}^2)$, Γ = frontière de Ω, on a :*

$$v|_\Gamma \in L^3(\Gamma)$$

et

$$\| v|_\Gamma \|_{L^3(\Gamma)} \leqslant C \| v \|^{2/3}_{H^1(\Omega)} \| v \|^{1/3}_{L^2(\Omega)} . \tag{9.43}$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} \text{si } v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) , \text{ alors} \\ v|_\Gamma \in L^3(0, T; L^3(\Gamma)) . \end{cases} \tag{9.44}$$

Conséquence : $u, \chi \in L^3(0, T; L^3(\Gamma_1))$ et par conséquent on peut faire tendre n vers l'infini dans g^i_{nm} :

$$g^1_{nm} \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(u, \chi, \chi) - \gamma(u, \chi, \chi)]\, \theta^2_m \, dt = 0\,,$$

$$g^2_{nm} \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, \theta^2_m \, dt = g^2_m\,,$$

$$g^3_{nm} \to \int_0^T [b_{\Omega_1}(\chi, \chi, \chi) - \gamma(\chi, \chi, \chi)]\, \theta^2_m \, dt = 0\,.$$

On en déduit, avec (9.39) ... (9.42) et (9.39) que

$$c_m + d_m + e_m + f_m + g^2_m = 0\,. \tag{9.45}$$

On fait maintenant $m \to \infty$. On note que, d'après un théorème de Lebesgue,

$$-\int_0^T \theta_m\, \theta'_m \mid \chi \mid^2_{\Omega_1} dt \to \frac{1}{2} \mid \chi(s) \mid^2_{\Omega_1} \text{ pour presque tout } s\,.$$

On obtient donc :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\mid \chi(s) \mid^2_{\Omega_1} + \mid \Psi(s) \mid^2_{\Omega_2} + a_{\Omega_2}(F(s), F(s))\right) + \nu \int_0^s a_{\Omega_1}(\chi, \chi)\, dt\, + \\ &\qquad + \int_0^s [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, dt = 0\,, \text{ p. p. en } s\,. \end{aligned}\right. \tag{9.46}$$

Pour simplifier l'écriture, désignons par $|f|$ la norme dans $(L^2(\Omega_1))^n$ et $\|f\|$ la norme dans V_1 ; on note que $a_{\Omega_1}(f, f) = \|f\|^2 - |f|^2$; on déduit donc de (9.46) que

$$\left\{\begin{aligned} &\mid \chi(s) \mid^2 + 2\,\nu \int_0^s \| \chi(t) \|^2\, dt \leqslant 2\,\nu \int_0^s \mid \chi(t) \mid^2\, dt\, + \\ &\qquad + \left| \int_0^s [b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) - \gamma(\chi, u, \chi)]\, dt \right|. \end{aligned}\right. \tag{9.47}$$

Mais (cf. n[ro] 6.2) :

$$\left\{\begin{aligned} \mid b_{\Omega_1}(\chi, u, \chi) \mid = \mid b_{\Omega_1}(\chi, \chi, u) \mid &\leqslant c_1 \| \chi \|^{3/2} \mid \chi \mid \| u \|_{(L^4(\Omega_1))^2} \\ &\leqslant \nu \| \chi \|^2 + c_2 \mid \chi \mid^2 \| u \|^4_{(L^4(\Omega_1))^2}\,, \end{aligned}\right. \tag{9.48}$$

et d'après le Lemme 9.1, on a :

$$\left\{\begin{aligned} \mid \gamma(\chi, u, \chi) \mid &\leqslant c_3 \| \chi \|^{4/3} \mid \chi \mid^{2/3} \| u \|^3_{(L^3(\Gamma_1))^2} \leqslant \\ &\leqslant \nu \| \chi \|^2 + c_4 \mid \chi \mid^2 \| u \|^3_{(L^3(\Gamma_1))^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{9.49}$$

Portant (9.48) (9.49) dans (9.47) il vient :

$$|\chi(s)|^2 + 2\nu \int_0^s \|\chi(t)\|^2 \,dt \leqslant 2\nu \int_0^s \|\chi(t)\|^2 \,dt + \int_0^s M(t)\,|\chi(t)|^2 \,dt,$$

où

(9.50) $$M(t) = 2\nu + c_2 \|u(t)\|^4_{(L^4(\Omega_1))^2} + c_4 \|u(t)\|^3_{(L^3(\Gamma_1))^2},$$

donc $M(t) \in L^1(0, T)$ et

$$|\chi(s)|^2 \leqslant \int_0^s M(t)\,|\chi(t)|^2 \,dt, \text{ p. p.};$$

d'où $\chi = 0$.

Mais alors (9.46) donne $\Psi = 0$.

On a donc démontré le Théorème sous réserve de la

Démonstration du Lemme 9.1.

L'application $v \to v|_\Gamma$ envoie $H^{2/3}(\Omega) \to H^{2/3-1/2}(\Gamma) = H^{1/6}(\Gamma)$ (cf. LIONS-MAGENES, Chap. 1) et d'après J. PEETRE [1], $H^{1/6}(\Gamma) \subset L^3(\Gamma)$ (Γ étant de dimension 1) ; on a donc :

$$\|v|_\Gamma\|_{L^3(\Gamma)} \leqslant c_1 \|v\|_{H^{2/3}(\Omega)} \leqslant C_2 \|v\|^{2/3}_{H^1(\Omega)} \|v\|^{1/3}_{L^2(\Omega)}. \blacksquare$$

Remarque 9.1.

Les conditions (9.5) font apparaître des *non-linéarités dans les conditions aux limites*. Les remarques fondamentales pour le traitement de tels problèmes sont *du type* des suivantes :

(i) l'application « trace » $v \to v|_{\Gamma_1}$ est COMPACTE de

$$H^\theta(\Omega_1) \to L^2(\Gamma_1) \text{ si } \theta > \tfrac{1}{2};$$

(ii) on a des estimations sur la trace *du type* de (9.43). ∎

9.2 Equations couplées

Donnons brièvement deux exemples d'équations couplées.

Exemple 9.1 (cf. P. S. CHERNYAKOV [1]).

On cherche le vecteur u et les fonctions scalaires p et w, vérifiant

(9.51) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i\,D_i\,u + \xi w = f - \operatorname{grad} p,$$

(9.52) $$\operatorname{div} u = 0,$$

(9.53) $$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + u.\operatorname{grad} w = 0,$$

avec des conditions aux limites :

$$u = 0\,, \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{9.54}$$

et les conditions initiales

$$u(0) = u_0\,, \quad w(0) = w_0 \quad \text{donnés}\,, \tag{9.55}$$

où dans (9.51) ξ est un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$.

Les méthodes utilisées au n$^{\text{ro}}$ 6 pour les équations de Navier-Stokes s'adaptent sans peine ; on notera en effet que

$$\int_\Omega (u.\text{grad } w)\, w \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\, w^2 \, \mathrm{d}x = 0\,.$$

On obtient ainsi *l'existence* d'une solution $\{ u, w \}$,

$u \in L^2(0, T\,; V)$ (V défini comme au n$^{\text{ro}}$ 6), $u \in L^\infty(0, T\,; (L^2(\Omega))^n)$,

$$w \in L^2(0, T\,; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T\,; L^2(\Omega))\,.$$

On peut démontrer *l'unicité* lorsque $n = 2$. ▌

L'exemple précédent correspond à un couplage « *parabolique-parabolique* », et il ne s'agit alors que d'une variante immédiate des équations de Navier-Stokes. Voici un exemple correspondant à un couplage « *parabolique-hyperbolique* (1).

Exemple 9.2.

On cherche le vecteur u et les fonctions p et w, vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i\, D_i\, u + \xi w = f - \text{grad } p\,, \tag{9.56}$$

$$\operatorname{div} u = 0\,, \tag{9.57}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w + |\, w\,|^\rho\, w + u.\text{grad}\,\frac{\partial w}{\partial t} = g \quad (^2)\,, \tag{9.58}$$

avec les conditions aux limites (9.54) et les conditions initiales

$$u(0) = u_0\,, \quad w(0) = w_0\,, \quad w'(0) = w_1 \tag{9.59}$$

Noter — on a fait ce qu'il fallait pour ça ! — qu'en multipliant (9.58) par w', le terme

$$\int_\Omega (u.\text{grad } w')\, w' \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(w')^2 \, \mathrm{d}x = 0\,.$$

(1) Nous ignorons si l'exemple ci-après correspond à une situation physique.

(2) On peut naturellement multiplier les exemples en « couplant convenablement » deux à deux les situations étudiées dans les n$^{\text{ros}}$ précédents...

Combinant les méthodes des nros 1 et 6 on montre *l'existence* d'une solution $\{ u, w \}$ (et $p \in \mathscr{D}'(Q)$) qui vérifie

(9.60) $$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n),$$

(9.61) $$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

(9.62) $$w \in L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)).$$

On peut aussi montrer *l'unicité* lorsque $n = 2$ (ρ quelconque). ▮

10. ÉQUATION NON LINÉAIRE DU TYPE SCHRŒDINGER

10.1 Position du problème

On prend dans ce nro des fonctions à *valeurs complexes*.
On cherche u solution de

(10.1) $$u' - \mathrm{i}\,\Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{dans } Q,$$

$\rho > 0$ donné, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, f donnée dans Q, avec les conditions aux limites et initiales :

(10.2) $$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

(10.3) $$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

On va montrer brièvement comment les méthodes du nro 1 s'adaptent à cette situation. ▮

10.2 Théorème d'existence et unicité

On va montrer le

Théorème 10.1. — *On suppose que*

(10.4) $$f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(Q),$$

(10.5) $$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

Alors il existe une fonction u et une seule, vérifiant (10.1) (10.3).

(10.6) $$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(Q), \quad p = \rho + 2$$

(10.7) $$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Démonstration.

1) On choisit une « *base spéciale* » dans la méthode de Faedo-Galerkin : on prend les fonctions propres

(10.8) $$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad j = 1, \ldots, w_j \in H_0^1(\Omega).$$

La solution « approchée » u_m est donc solution de

$$(10.9)\quad \begin{cases} (u_m'(t), w_j) + \mathrm{i}a(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = \\ \qquad\qquad = (f(t), w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m \end{cases}$$

où

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x\,,$$

$$(f, g) = \int_\Omega f\bar{g} \,\mathrm{d}x\,,$$

avec

$$(10.10)\qquad u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \dots, w_m]\,,\ u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega)\,.$$

2) Multipliant (10.9) par $\overline{g_{jm}(t)}$ $\left(\text{si } u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j\right)$ et sommant en j, il vient

$$(10.11)\quad (u_m'(t), u_m(t)) + \mathrm{i}a(u_m(t), u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

d'où en prenant la partie réelle des deux membres de (10.11) :

$$(10.12)\qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_m(t)|^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^p \,\mathrm{d}x = (f(t), u_m(t))$$

$\left(\text{où } |f|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)$.

On en déduit que :

(10.13) u_m demeure dans un ensemble borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et de $L^p(Q)$.

3) Grâce à (10.8) on peut remplacer dans (10.9) w_j par Δw_j, et donc écrire (10.9) sous la forme

$$(10.14)\quad a(u_m'(t), w_j) + \mathrm{i}(\Delta u_m(t), \Delta w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta w_j) = a(f(t), w_j)$$

(car f satisfait à (10.4)).

On déduit de (10.14) que

$$(10.15)\quad \begin{cases} a(u_m'(t), u_m(t)) + \mathrm{i}\,|\Delta u_m(t)|^2 + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = \\ \qquad\qquad = a(f(t), u_m(t))\,. \end{cases}$$

Pour utiliser (10.15) calculons (Re = « partie réelle ») :

$$2 \operatorname{Re}\left(|v|^\rho v, -\Delta v\right) =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|v|^\rho v\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \mathrm{d}x$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |v|^\rho \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\rho}{2} |v|^{\rho-2} \times$$

$$\times \left(v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}(v\bar{v}) \mathrm{d}x$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |v|^\rho \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x + \rho \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |v|^{\rho-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(v\bar{v})\right)^2 \mathrm{d}x$$

et donc, en particulier ([1])

(10.16) $$\operatorname{Re}\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)\right) \geqslant 0$$

et donc prenant la partie réelle de (10.15) il vient

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\left(u_m(t), u_m(t)\right) \leqslant \operatorname{Re} a\left(f(t), u_m(t)\right)$$

d'où l'on déduit que

(10.17) u_m demeure dans un borné de $L^\infty(0, T ; H_0^1(\Omega))$.

4) Reste à obtenir une estimation sur u_m'.

On vérifie d'abord que $| u_m'(0) | \leqslant$ constante ([2]).

Puis on dérive (10.9) en t. Par le même genre de calcul que pour établir (10.16) on vérifie que

(10.18) $$\operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t)\right), u_m'(t)\right) \geqslant 0$$

d'où l'on déduit que

(10.19) u_m' demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

5) On passe alors à la limite sans difficulté, avec les méthodes des n[ros] précédents.

6) L'unicité est immédiate : il suffit de noter que

(10.20) $$\operatorname{Re}\left(|u|^\rho u - |v|^\rho v, u - v\right) \geqslant 0 \quad \forall u, v \in L^p(\Omega). \blacksquare$$

([1]) On pourrait ici obtenir des estimations supplémentaires.
([2]) On utilise ici l'hypothèse « $u_0 \in L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ ».

11. ÉQUATIONS NON LINÉAIRES SUR DES VARIÉTÉS SANS OU AVEC BORD

11.1 Position des problèmes

Soit toujours un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, borné, de frontière Γ et

$$Q = \Omega \times]0, T[\,, \Sigma = \Gamma \times]0, T[\,.$$

Problème 11.1.

On cherche une fonction $w = w(x, t)$ définie dans Q, et vérifiant

$$(11.1) \qquad \Delta w = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) \text{ (1) dans } Q\,,$$

avec

$$(11.2) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} + |\, w \,|^\rho\, w = f \text{ sur } \Sigma\,,$$

(où $\rho > 0$ donné, f donné sur Σ, $\partial/\partial n$ = dérivée normale à Γ dirigée vers *l'extérieur* de Ω), et avec la *condition initiale* :

$$(11.3) \qquad w(x, 0) = w_0(x)\,, x \in \Gamma\,. \blacksquare$$

Remarque 11.1.

Il n'intervient de dérivation en t que dans (11.2). ▮

Remarque 11.2.

On montrera dans la suite (n^{ro} 11.2) comment le Problème 11.1 se formule en un problème non linéaire d'évolution sur la variété Γ. ▮

Formulons deux problèmes de même type, mais cette fois « hyperboliques » (le Problème 11.1 étant, comme on verra, parabolique) :

Problème 11.2.

On cherche encore w satisfaisant à (11.1), avec cette fois

$$(11.4) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial n} + |\, w \,|^\rho\, w = f \text{ sur } \Sigma$$

et les conditions initiales :

$$(11.5) \qquad w(x, 0) = w_0(x)\,, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1(x)\,, \quad x \in \Gamma\,. \blacksquare$$

(1) Il n'y a donc *pas de dérivées en t* dans l'opérateur différentiel.

Problème 11.3.

On cherche w satisfaisant à (11.1) avec

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial n} + \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial w}{\partial t} = f \text{ sur } \Sigma, \tag{11.6}$$

et les conditions (11.5).

11.2 Formulation sur la variété Γ

11.2.1 *Opérateur* $\mathscr{A}$.

Pour $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ désignons par Φ *la* solution de

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Phi = \varphi \text{ sur } \Gamma; \end{cases} \tag{11.7}$$

$\Phi \in H^1(\Omega)$ et on peut (cf. LIONS-MAGENES [1]) définir $\partial\Phi/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$; on définit alors :

$$\mathscr{A}\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad \mathscr{A} \in \mathscr{L}\left(H^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma)\right). \tag{11.8}$$

On désigne par $(\varphi, \psi)_\Gamma$ les intégrales et produits scalaires *sur* Γ.
On a :

$$\begin{cases} \text{pour } \lambda > 0 \text{ quelconque, il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ (\mathscr{A}\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda \| \varphi \|^2_{L^2(\Gamma)} \geqslant \alpha \| \varphi \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \end{cases} \tag{11.9}$$

En effet

$$\int_\Omega (-\Delta\Phi)\, \Phi \, dx = 0 = -(\mathscr{A}\varphi, \varphi)_\Gamma + \int_\Omega |\operatorname{grad} \Phi|^2 \, dx$$

et donc

$$(\mathscr{A}\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda \| \varphi \|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Omega |\operatorname{grad} \Phi|^2 \, dx + \lambda \int_\Gamma \Phi^2 \, d\Gamma \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_1 \| \Phi \|^2_{H^1(\Omega)} \geqslant \alpha \| \Phi|_\Gamma \|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad \blacksquare$$

11.2.2 *Formulation sur* Γ.

Si l'on pose dans l'un quelconque des Problèmes du n$^{\text{ro}}$ 11.1

$$w(t)|_\Gamma = u(t) \tag{11.10}$$

alors $\dfrac{\partial w}{\partial n}(t) = \mathscr{A}u(t)$ et donc le Problème 11.1 devient le suivant : on cherche une fonction $u(t)$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{A}u + |u|^\rho u = f \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\,, \tag{11.11}$$

$$u(0) = w_0 \text{ donné sur } \Gamma\,. \tag{11.12}$$

De même le Problème 11.2 devient le suivant : on cherche une fonction $u(t)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathscr{A}u + |u|^\rho u = f \text{ sur } \Sigma\,, \tag{11.13}$$

$$u(0) = w_0\,, u'(0) = w_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma\,, \tag{11.14}$$

et le Problème 11.3 devient le problème analogue, avec (11.13) remplacée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathscr{A}u + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial u}{\partial t} = f\,. \tag{11.15}$$

Remarque 11.3 Il s'agit maintenant de problèmes sur la variété Γ, $\mathscr{A}$ étant d'ailleurs un opérateur pseudo-différentiel sur Γ. ▮

11.3 Résultats

On a d'abord les trois résultats suivants :

Théorème 11.1. — *On suppose f donnée dans $L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ et w_0 donné dans $L^2(\Gamma)$.*

Il existe une fonction u et une seule telle que

$$u \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) \cap L^{\rho+2}(\Sigma)\,, \tag{11.16}$$

et vérifiant (11.11) (11.12).

Théorème 11.2. — *On suppose f donné dans $L^2(\Sigma)$, $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $w_1 \in L^2(\Gamma)$.*

Il existe une fonction u telle que

$$u \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Gamma))\,, \tag{11.17}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)) \tag{11.18}$$

et vérifiant (11.13) (11.14).

Théorème 11.3. — *On suppose que*

$$f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))\,, f' \in L^2(\Sigma)\,, \tag{11.19}$$

$$w_0 \in H^1(\Gamma)\,, \tag{11.20}$$

$$w_1 \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^{2(\rho+1)}(\Gamma)\,. \tag{11.21}$$

Alors il existe une fonction u et une seule solution de (11.15) *avec* (11.14) *e*

(11.22) $$u \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma)),$$

(11.23) $$u' \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)),$$

(11.24) $$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)). \blacksquare$$

Nous allons seulement donner l'essentiel de la Démonstration du Théorèm 11.1. Une autre démonstration du Théorème 11.1 résultera de l'usage de l méthode de monotonie, étudiée au Chapitre 2 (on trouvera d'ailleurs au Chap. nro 4 une situation plus générale).

Démonstration du Théorème 11.1.

1) On choisit d'abord s de façon que

(11.25) $$H^s(\Gamma) \subset L^p(\Gamma), \quad p = \rho + 2, \quad \text{et} \quad s \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

$\left(\text{Il suffit de prendre } s \text{ de façon que } \frac{1}{2} - \frac{s}{n-1} \leqslant \frac{1}{p} \text{ et } s \geqslant 1.\right)$
On choisit alors *la base spéciale* w_j définie par

(11.26) $$(w_j, v)_{H^s(\Gamma)} = \lambda_j(w_j, v)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall v \in H^s(\Gamma).$$

2) On définit la solution approchée u_m par

$$u_m(t) \in [w_1, ..., w_m],$$

(11.27) $$\begin{cases} (u_m'(t), w_j)_\Gamma + (\mathscr{A}u_m(t), w_j)_\Gamma + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j)_\Gamma = \\ \qquad = (f(t), w_j)_\Gamma, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases}$$

(11.28) $$u_m(0) = w_{0m} \in [w_1, ..., w_m] \to w_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit aussitôt l'existence de u_m dans $[0, T]$ avec les estimations :

(11.29) $$\begin{cases} u_m \in \text{borné de } L^p(\Sigma), \\ u_m \in \text{borné de } L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)). \end{cases}$$

3) On obtient maintenant une estimation sur u_m' grâce au fait que la base $\{ w_j \}$ est « spéciale ». On désigne par P_m l'opérateur de projection de

$$L^2(\Gamma) \to [w_1, ..., w_m];$$

alors

(11.30) $$u_m' = -P_m \mathscr{A} u_m - P_m(|u_m|^\rho u_m) + P_m f,$$

P_m est borné de $H^{-s}(\Gamma) \to H^{-s}(\Gamma)$, donc de $H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-s}(\Gamma)$ et de $L^{p'}(\Gamma) \to H^{-s}(\Gamma)$ (car on a (11.25)). Comme $\mathscr{A}u_m$ (resp. $|u_m|^\rho u_m$) demeure dans un borné de $L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ (resp. $L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Gamma))$), on déduit de (11.30) que

$$u_m' \text{ demeure dans un borné de } L^{p'}(0, T; H^{-s}(\Gamma)). \tag{11.31}$$

On utilise alors le Théorème 5.1 avec :

$$p_0 = 2, \quad B_0 = H^{1/2}(\Gamma),$$
$$p_1 = p', \quad B_1 = H^{-s}(\Gamma), \quad B = L^2(\Gamma)$$

(l'injection de $H^{1/2}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est compacte).

On en déduit que l'on peut extraire une suite u_μ telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^p(\Sigma) \text{ faible et dans } L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \text{ faible}$$

et aussi $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma))$ weak star, et dans $L^2(\Sigma)$ *fort* et p. p.

On passe alors à la limite par le procédé habituel.

4) L'unicité est immédiate. ▮

Remarque 11.4.

On a un résultat de régularité en les « variables d'espace » sur Γ.
Si $f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Omega))$ dans le Problème 11.1, alors la solution u vérifie

$$u \in L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^1(\Gamma)). \tag{11.32}$$

On note pour cela que (pour des fonctions assez régulières) :

$$(\mathscr{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma \geqslant 0. \tag{11.33}$$

En effet, en utilisant la définition de $\mathscr{A}u$, on introduit Φ solution de

$$-\Delta\Phi = 0, \quad \Phi|_\Gamma = u;$$

alors

$$(-\Delta\Phi, |\Phi|^\rho \Phi) = 0 = -(\mathscr{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\Phi|^\rho\Phi)\,dx$$

donc

$$(\mathscr{A}u, |u|^\rho u)_\Gamma = (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\Phi|^\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)^2 dx, \tag{11.34}$$

d'où (11.33) en particulier.
Si l'on choisit alors dans (11.27) les w_j de façon que

$$\mathscr{A}w_j = \lambda_j w_j \tag{11.35}$$

(ce qui est différent, en général, des w_j définis par (11.26)), on obtient

$$(u'_m, \mathscr{A}u_m)_\Gamma + \| \mathscr{A}u_m(t) \|^2_{L^2(\Gamma)} + (|u_m|^\rho u_m, \mathscr{A}u_m) = (f, \mathscr{A}u_m)$$

d'où l'on déduit, grâce à (11.33), que u_m demeure dans un borné de

$$L^\infty(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^2(0, T; H^1(\Gamma)).$$

On n'a plus (en général) d'estimation sur u'_m (1), mais on peut passer à la limite par la méthode de monotonie (Chap. 2). ▮

Remarque 11.5.

Par le même genre de méthode qu'au Théorème 1.2 on montrera que si ρ vérifie

$$(11.36) \qquad \rho \leqslant \frac{1}{n-2}, \quad (\rho \text{ quelconque si } n = 2),$$

il y a unicité de la solution dans le Théorème 11.2 (2).

Le point essentiel pour la démonstration est le suivant : si u et v sont deux solutions et si $w = u - v$, $\Phi = (|u|^\rho u - |v|^\rho v) \dfrac{1}{u-v}$, on a :

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant \| w'(t) \|_{L^2(\Gamma)} \| w(t) \|_{L^{q_1}(\Gamma)} \| \Phi(t) \|_{L^r(\Gamma)}$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} \, (H^{1/2}(\Gamma) \subset L^{q_1}(\Gamma)), \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r} = 1,$$

donc

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant c \| w'(t) \|_{L^2(\Gamma)} \| w(t) \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \times \\ \times \left[\left(\int_\Gamma |u|^{\rho r} \mathrm{d}\Gamma \right)^{1/r} + \left(\int_\Gamma |v|^{\rho r} \mathrm{d}\Gamma \right)^{1/r} \right]$$

et comme $\rho r = 2\rho(n-1) \leqslant q_1$ d'après (11.36), on en déduit que

$$|(\Phi w, w')_\Gamma| \leqslant c \| w'(t) \|_{L^2(\Gamma)} \| w(t) \|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \ ▮$$

11.4 Cas avec bord

Un opérateur « de même nature » que l'opérateur défini en (11.8) est le suivant :

$$(11.37) \qquad \mathscr{A}u = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x_i - \xi} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \, \mathrm{d}\xi \quad (3)$$

(1) On peut obtenir une estimation sur une *dérivée fractionnaire en t* de u_m (comme au nro 6.5) si ρ n'est « pas trop grand ».

(2) Si (11.36) n'a pas lieu, le problème de l'unicité dans le Théorème 11.2 est ouvert.

(3) On prend $n - 1$ au lieu de n et Γ au lieu de Ω pour préciser l'analogie avec les considérations précédentes.

(les intégrales sont les valeurs principales) pour u définie dans

$$\Gamma =]-1, 1[^{n-1}.$$

L'opérateur $\mathscr{A}$ est un opérateur elliptique d'ordre 1. On aura des résultats analogues aux précédents, relatifs à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{A}u + |u|^{\rho} u = f, \text{ etc.},$$

pourvu de remplacer $H^{1/2}(\Gamma)$ par $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ (cf. LIONS-MAGENES [1], Théorème 11.7, Chap. 1). ▌

12. ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRE DÉGÉNÉRÉES

12.1 Position du problème (cf. aussi Chap. 2, n$^{\text{ro}}$ 3).

On cherche une fonction u telle que

$$(12.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

où p est donné > 2, avec les conditions aux limites et initiales :

$$(12.2)\qquad u = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

$$(12.3)\qquad u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega.$$

Remarque 12.1.

Des problèmes du type précédent interviennent dans de nombreuses applications : théorie de la chaleur, diffusion des gaz, etc. L'équation (12.1) *dégénère* pour $u = 0$, d'où la terminologie adoptée pour ce numéro. ▌

Estimation a priori.

Si l'on multiplie les deux membres de (12.1) par u et qu'on intègre par parties, on obtient

$$(12.4)\qquad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 + M(u(t))^p = (f(t), u(t))$$

où l'on a posé

$$(12.5)\qquad M(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |v|^{p-2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

La fonction $v \to M(v)$ *n'est pas* une norme, et par conséquent *l'usage* des estimations *a priori* correspondant à (12.4) nécessite quelques développements, dont le principal est une généralisation du Théorème de compacité 5.1.

Remarque 12.2.

Naturellement, on prend l'équation (12.1) comme « modèle ». La méthode ci-après s'applique à de nombreuses autres situations. Nous renvoyons à DUBINSKII [1] [2].

12.2 Un résultat supplémentaire de compacité

Les *données* dans le Théorème 5.1 sont :

(i) les espaces de Banach $B_0 \subset B \subset B_1$, l'injection $B_0 \to B$ étant *compacte* ;
(ii) l'espace des $v \in L^{p_0}(0, T ; B_0)$ tels que $dv/dt \in L^{p_1}(0, T ; B_1)$.

Dans la situation présente, on remplace l'espace de Banach B_0 par un *ensemble* S, muni d'une fonction $v \to M(v)$ de $S \to \mathbf{R}_+$, avec

$$S \subset B \subset B_1, \; M(v) \geqslant 0 \text{ sur } S, \; M(\lambda v) = |\lambda| M(v), \tag{12.6}$$

$$\text{l'ensemble } \{ v \mid v \in S, \; M(v) \leqslant 1 \} \text{ est relativement compact dans } B. \tag{12.7}$$

On considère ensuite *l'ensemble* $\mathscr{F}$ (qui « remplace » les *ensembles bornés* de l'espace défini au (ii)) :

$$\begin{cases} \mathscr{F} = \{ v \mid v \text{ localement sommable sur }]0, T[\text{ à valeurs dans } B_1, \\ \displaystyle\int_0^T M(v(t))^{p_0} \, dt \leqslant C_1, \\ v' \in \text{borné de } L^{p_1}(0, T; B_1) \} . \end{cases} \tag{12.8}$$

On a alors le résultat suivant (DUBINSKII [2]) :

Théorème 12.1. — *On suppose que* (12.6) (12.7) *ont lieu, et que dans* $\mathscr{F}$ *défini en* (12.8), *on a* : $1 < p_i < \infty$, $i = 0,1$. *Alors* $\mathscr{F} \subset L^{p_0}(0, T ; B)$ *et* $\mathscr{F}$ *est relativement compact dans* $L^{p_0}(0, T ; B)$.

Remarque 12.3.

Prenant $S = B_1$ et $M(v) = \| v \|_{B_1}$ le Théorème 12.1 redonne le Théorème 5.1. Il nous a paru utile de séparer les deux résultats ; on notera d'ailleurs que la méthode suivie dans ce numéro est sur un point différente de celle du n° 5.

Démonstration du Théorème 12.1.

Admettons un instant le Lemme suivant (variante du Lemme 5.1) :

Lemme 12.1. — *Sous l'hypothèse* (12.7), $\forall \eta > 0$, *il existe* c_η *telle que*

$$\| u - v \|_B \leqslant \eta [M(u) + M(v)] + C_\eta \| u - v \|_{B_1}, \quad \forall u, \quad v \in S. \tag{12.9}$$

Soit alors une suite u_n de $\mathscr{F}$. On veut montrer que l'on peut en extraire une suite de Cauchy dans $L^{p_0}(0, T ; B)$. Grâce à (12.9) il suffit de montrer que l'on peut en extraire une suite de Cauchy dans $L^{p_0}(0, T; B_1)$. En effet, on déduit de (12.9) que $\forall \eta$ il existe c_η telle que

$$\int_0^T \| u_{n+m}(t) - u_n(t) \|_B^{p_0} \, \mathrm{d}t \leqslant \eta \int_0^T [M(u_{n+m}(t))^{p_0} + M(u_n(t))^{p_0}] \, \mathrm{d}t + \\ + c_\eta \int_0^T \| u_{n+m}(t) - u_n(t) \|_{B_1}^{p_0} \, \mathrm{d}t ,$$

d'où le résultat.

On va en fait démontrer davantage, à savoir :

(12.10) on peut extraire une suite u_μ telle que $u_\mu \to u$ dans $C^0([0, T]; B_1)$.

En effet :

1) pour presque tout t (disons pour $t \notin Z$, mesure $(Z) = 0$), on peut extraire une sous-suite (*dépendant de* t) telle que

(12.11) $$M(u_k(t)) \leqslant K_t < \infty$$

(par l'absurde ; sinon il existe un ensemble E de mesure > 0 tel que

$$M(u_n(t))^{p_0} \to \infty \quad \forall t \in E$$

et alors

$$\int_0^T M(u_n(t))^{p_0} \, \mathrm{d}t \geqslant \int_E M(u_n(t))^{p_0} \, \mathrm{d}t \to \infty$$

ce qui contredit (12.8)) ;

2) d'après (12.7) et (12.11) (et l'homogénéité de $M(v)$) on peut donc pour chaque $t \notin Z$ extraire une sous-suite (dépendant de t) telle que

(12.12) $$u_k(t) \to u(t) \text{ dans } B_1 \textit{ fort} ;$$

3) soit $\{ t_1, t_2, \ldots \}$ une suite dense dans $[0, T]$, $t_i \notin Z$; d'après (12.12) et le procédé diagonal, on peut extraire une suite u_μ telle que

(12.13) $$u_\mu(t_i) \to u(t_i) \text{ dans } B_1 \text{ fort}, \ \forall i ;$$

4) mais $\forall t \in [0, T]$:

$$\| u_\mu(t_i) - u_\mu(t) \|_{B_1} = \left\| \int_t^{t_i} u'_\mu(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right\|_{B_1} \leqslant \\ \leqslant | t_i - t |^{1/p'_1} \left(\int_t^{t_i} \| u'_\mu(\sigma) \|_{B_1}^{p_1} \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1/p_1} \leqslant c \, | t_i - t |^{1/p'_1}$$

ce qui joint à (12.13) et à la densité de la suite t_i montre que u_μ converge uniformément dans B_1 sur $[0, T]$, d'où le résultat (12.10).

On a donc démontré le Théorème, sous réserve de la

Vérification du Lemme 12.1.

Le raisonnement est analogue à celui du Lemme 5.1. Si (12.9) n'est pas vrai, il existe η_0 et deux suites u_n $v_n \in S$ telles que

$$\| u_n - v_n \|_B \geqslant \eta_0[M(u_n) + M(v_n)] + n \| u_n - v_n \|_{B_1} .$$

Introduisons :

$$\tilde{u}_n = \frac{u_n}{M(u_n) + M(v_n)}, \quad \tilde{v}_n = \frac{v_n}{M(u_n) + M(v_n)} .$$

Alors

$$\| \tilde{u}_n - \tilde{v}_n \|_B \geqslant \eta_0 + n \| \tilde{u}_n - \tilde{v}_n \|_{B_1} , \tag{12.14}$$

$$M(\tilde{u}_n) \leqslant 1 , \quad M(\tilde{v}_n) \leqslant 1 . \tag{12.15}$$

D'après (12.15) et l'hypothèse (12.7), on peut extraire deux suites $\tilde{u}_\mu$, $\tilde{v}_\mu$ telles que

$$\tilde{u}_\mu \to u , \quad \tilde{v}_\mu \to v \text{ dans } B \text{ fort} . \tag{12.16}$$

Mais (12.14) donne

$$\| \tilde{u}_\mu - \tilde{v}_\mu \|_{B_1} \leqslant \frac{c}{\mu}$$

et donc $u = v$. Donc $\tilde{u}_\mu - \tilde{v}_\mu \to 0$ dans B fort, ce qui contredit (12.14). ▮

Exemple d'application du Théorème 12.1.

Pour appliquer le Théorème 12.1 on utilisera la

Proposition 12.1. — *Soit*

$$S = \{ v \mid | v |^{(p-2)/2} v \in H_0^1(\Omega) \} \tag{12.17}$$

et soit $M(v)$ *donné par* (12.5). *Alors* (12.7) *a lieu avec*

$$B = L^p(\Omega) \ (^1) . \tag{12.18}$$

Démonstration.

Notons tout d'abord que

$$M(v) = \left(\frac{4}{p^2}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (| v |^{(p-2)/2} v)\right)^2 dx\right)^{1/p} . \tag{12.19}$$

Posons : $\beta(v) = | v |^{(p-2)/2} v$. Si v_n est une suite de S, $\beta(v_n)$ demeure dans

(1) Ce que l'on peut d'ailleurs améliorer ; cf. la Démonstration.

un borné de $H_0^1(\Omega)$ donc de $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ (ou q fini quelconque si $n = 2$), donc v_n demeure dans un borné de $L^{pq/2}(\Omega)$ et comme l'injection de $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte, on peut extraire une suite v_μ telle que

$$v_\mu \to v \text{ dans } L^{pq/2}(\Omega) \text{ faible}, \tag{12.20}$$

$$\beta(v_\mu) \to \chi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p. p.} \tag{12.21}$$

Il résulte de la monotonie de $\lambda \to \beta(\lambda)$ et de (12.21) que

$$v_\mu \to \beta^{-1}(\chi) \quad \text{p. p.},$$

donc (Lemme 1.3) $v_\mu \to \beta^{-1}(\chi)$ dans $L^{pq/2}(\Omega)$ faible et $\beta^{-1}(\chi) = v$. Donc $v_\mu \to v$ dans $L^{pq/2}(\Omega)$ faible et p. p. Ce qui entraîne que $v_\mu \to v$ dans $L^s(\Omega)$ *fort* $\forall s < pq/2$ (donc en particulier pour $s = p$) ; en effet, d'après le théorème d'Egorov, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $E \subset \Omega$, avec mesure $(E) \leqslant \varepsilon$, tel que $v_\mu \to v$ uniformément dans $\complement E$; alors

$$\int_\Omega | v_\mu - v |^s \, dx = \int_{\complement E} | v_\mu - v |^s \, dx + \int_E | v_\mu - v |^s \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\complement E} | v_\mu - v |^s \, dx + \left(\int_E | v_\mu - v |^{pq/2} \, dx \right)^\theta \varepsilon^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{2s}{pq},$$

d'où le résultat. ∎

12.3 Résolution du problème

On est maintenant en mesure de montrer le

Théorème 12.2. — *Soit f donné dans $L^{p'}(Q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et u_0 donné dans $L^2(\Omega)$. Il existe alors une fonction u et une seule telle que*

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{12.22}$$

$$| u |^{(p-2)/2} u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{12.23}$$

$$u' \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \tag{12.24}$$

et u vérifiant (12.1) (12.3).

Démonstration de l'existence.

1) On va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin avec une *base spéciale.* On choisit r de façon que

$$\varphi \in H_0^r(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} \in L^p(\Omega). \tag{12.25}$$

On prendra

(12.26) $$r = \left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{n}{p} + 2;$$

en effet, on a alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j} \in H_0^{\left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{n}{p}}(\Omega)$$

et donc on a (12.25) d'après J. PEETRE [1].

On prend alors pour w_j les fonctions propres :

(12.27) $$(w_j, v)_{H_0^r(\Omega)} = \lambda_j(w_j, v) \qquad \forall v \in H_0^r(\Omega)$$

et on définit $u_m(t)$ par :

(12.28) $$\begin{cases} u_m(t) \in [w_1, \ldots, w_m]\,, \\ \left(u_m'(t), w_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, u_m\,|^{p-2}\, D_i\, u_m\, D_i\, w_j\, \mathrm{d}x = \left(f(t), w_j\right), \\ 1 \leqslant j \leqslant m\,, \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega)\,. \end{cases}$$

2) On déduit de (12.28) que

(12.29) $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\, u_m(t)\,|^2 + \frac{4}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(D_i(|\, u_m\,|^{(p-2)/2}\, u_m)\right)^2 \mathrm{d}x = \left((f(t), u_m(t)\right)$$

d'où :

(12.30) u_m demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,

(12.31) $|\, u_m\,|^{(p-2)/2}\, u_m$ demeure dans un borné de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

3) *Estimation sur* u_m'.

La forme

$$v \to \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, u\,|^{p-2}\, D_i\, u\, D_i\, v\, \mathrm{d}x = a(u, v)$$

s'écrit

(12.32) $$a(u, v) = \left(g(u), v\right), \quad \left\|\, g(u)\,\right\|_{H^{-r}(\Omega)} \leqslant c\, \|\, u\,\|_{L^p(\Omega)}^{p-1};$$

en effet

$$a(u, v) = -\frac{1}{(p-1)}\int_\Omega |\, u\,|^{p-2}\, u\, \Delta v\, \mathrm{d}x,$$

donc

$$| a(u, v) | \leqslant \frac{1}{(p-1)} \| \, | u |^{p-2} u \, \|_{L^{p'}(\Omega)} \| \Delta v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \big(\text{d'après } (12.25)\big) \, c \, \| u \|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \| v \|_{H_0^r(\Omega)}$$

d'où (12.32).

Alors (12.28) s'écrit

(12.33) $\quad \big(u_m'(t) - g(u_m(t)) - f(t), w_j\big) = 0 \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m \,,$

où

$$\| g(u_m(t)) \|_{H^{-r}(\Omega)} \leqslant c \, \| u_m(t) \|_{L^p(\Omega)}^{p-1}$$

et où, par conséquent, d'après (12.31) (ce point n'est pas optimal mais suffit pour la suite) :

(12.34) $\quad g\big(u_m(t)\big)$ demeure dans un borné de $L^{p'}(0, T ; H^{-r}(\Omega))$.

Soit P_m le projecteur orthogonal $\big($dans $L^2(\Omega)\big)$ sur $[w_1, \ldots, w_m]$; P_m est borné dans $\mathscr{L}\big(H_0^r(\Omega) ; H_0^r(\Omega)\big)$ et $\mathscr{L}\big(H^{-r}(\Omega) ; H^{-r}(\Omega)\big)$ et donc (12.33) qui s'écrit : $u_m = P_m\big(g(u_m') + f\big)\big)$ et (12.34) entrainent que

(12.35) $\quad u_m'$ demeure dans un borné de $L^{p'}\big(0, T ; H^{-r}(\Omega)\big)$.

4) On peut maintenant appliquer le Théorème 12.1 avec S donné par (12.17) et $M(v)$ par (12.5) $\left(\text{de sorte que } (12.31) \text{ équivaut à } \int_0^T M(u_m(t))^p \, dt \leqslant c\right)$, avec $B_1 = H^{-r}(\Omega)$ et $p_1 = p'$ et enfin avec $B = L^p(\Omega)$ (ce qui est loisible d'après la Proposition 12.1). Donc on peut extraire une suite u_μ telle que

(12.36) $\quad u_\mu \to u$ dans $L^\infty\big(0, T ; L^2(\Omega)\big)$ faible,

(12.37) $\quad u_\mu \to u$ dans $L^p(0, T ; L^p(\Omega))$ fort et p. p.

(12.38) $\quad \beta(u_\mu) = | u_\mu |^{(p-2)/2} u_\mu \to \chi$ dans $L^2\big(0, T ; H_0^1(\Omega)\big)$ faible.

Grâce à (12.34) on a $\chi = | u |^{(p-2)/2} u$ et on voit alors par les procédés habituels que u est solution du problème.

Par ailleurs, de (12.23) résulte que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(| u |^{p-2} u\big) = (p-1)\left(| u |^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) | u |^{(p-2)/2} \in L^{p'}(Q)$$

et donc

$$u' = f - \frac{1}{(p-1)} \Delta\big(| u |^{p-2} u\big) \in L^{p'}\big(0, T ; W^{-1,p'}(\Omega)\big) . \; \blacksquare$$

Démonstration de l'unicité. (P. A. RAVIART [2]).

Soient u_1 et u_2 deux solutions, $w = u_1 - u_2$. On a :

$$w' - \frac{1}{(p-1)} \Delta(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) = 0$$

et prenant le produit scalaire par $(-\Delta)^{-1} w$ et vérifiant que les produits sca laires ont un sens :

$$(12.39) \quad (w', w)_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{(p-1)} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

(où $(f, g)_{H^{-1}(\Omega)} = (f, (-\Delta)^{-1} g))$.

Comme (*monotonie* de $\lambda \to |\lambda|^{p-2} \lambda$) :

$$(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, u_1 - u_2) \geqslant 0,$$

on déduit de (12.39) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| w(t) \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant 0$$

donc $w = 0$. ▮

Remarque 12.4.

On verra une autre démonstration de ce Théorème (dans un cadre un peu plus général) au Chapitre 2, n^ro 3.2. ▮

13. PROBLÈMES

13.1 Peut-on dans le Théorème 1.2 supprimer la condition (1.49) ?

13.2 A-t-on un résultat analogue au Théorème 2.2 pour les équations du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - u^{1+\alpha} = 0\ ?$$

(Sans le terme $- u^{1+\alpha}$, ces équations sont étudiées au n^ro 8 et au Chap. 2).

13.3 A-t-on pour l'équation (par exemple)

$$u'' - \Delta u + (u')^3 = f$$

des résultats analogues à ceux indiqués brièvement à la Remarque 1.6 relatifs à l'équation $u'' - \Delta u + u^3 = f$?

13.4 Y a-t-il unicité dans le Théorème 4.1 ?

13.5 Si l'on considère un système du type Cauchy-Kowaleska « attaché » au système (4.2) (4.3), de la forme

$$\begin{cases} u_1'' + a_1 \Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f, \\ \varepsilon_1 u_2'' + \varepsilon_2 u_2' + a_2 \Delta^2 u_2 + [u_1, u_1] = 0, \quad \varepsilon_i \geqslant 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0, \end{cases}$$

ce système (où l'on rajoute des conditions initiales sur u_2) est-il bien posé et la solution de ce système (si elle existe !) est-elle une approximation des systèmes (4.2) (4.3) ? Pour des résultats positifs de ce genre, cf. Chapitre 4, n° 4.

13.6 Y a-t-il unicité dans le Théorème 6.1 ?

13.7 Si dans la méthode du n^{ro} 6.4 on prend pour w_j une « base » quelconque (et non la base spéciale utilisée), la méthode de Faedo-Galerkin est-elle néanmoins convergente ? (Un problème analogue se pose chaque fois qu'on a utilisé une « base spéciale »).

13.8 Que se passe-t-il dans la situation du n^{ro} 6.9 lorsque $\nu \to 0$ sans changer les conditions aux limites ?

13.9 Les problèmes « rétrogrades » (i. e. après inversion du sens du temps) sont généralement « mal posés » (ou du moins *on pense* qu'ils sont « mal posés »). Peut-on :

(i) montrer qu'ils sont mal posés ;

(ii) obtenir une propriété remplaçant *l'unicité rétrograde* du cas parabolique linéaire ?

13.10 (Comme le problème précédent, ce problème se pose pour tous les exemples considérés dans ce Chapitre et également ceux des Chapitres suivants). On considère un problème non linéaire écrit symboliquement :

$$u' + \mathscr{A}(u) = 0$$

avec $u(0) = u_0$. Lorsque u_0 parcourt l'espace des données initiales que peut-on dire de l'*ensemble* parcouru par $u(T)$?

13.11 Peut-on étudier la nature (par ex. l'entropie métrique) des ensembles de conditions initiales pour lesquels un problème donné est « bien posé » ?

14. COMMENTAIRES

Comme il est indiqué dans le texte, l'équation (1.1) intervient en Mécanique Quantique Relativiste. Outre les indications bibliographiques du texte, signalons le travail de Jörgens [1] où cet A. établit, pour le problème de Cauchy, un théorème d'existence et d'unicité plus fort que le Théorème 1.2, après avoir transformé le problème en une équation intégrale équivalente (utilisant la solution élémentaire de l'opérateur des ondes) et les travaux de I. Segal [1] [2] [3], Brodsky [1], Strauss [2] [4].

Signalons aussi le travail BROWDER [2]. Le Théorème 1.3 est dû à SATHER [1] [2], auquel nous renvoyons pour des propriétés supplémentaires de régularité.

La méthode d'approximation par des équations différentielles, utilisée dans tout ce Chapitre, a été introduite, dans les problèmes d'évolution hyperboliques linéaires par S. FAEDO [1], dans les problèmes d'évolution paraboliques linéaires par J. W. GREEN [1] et *dans les problèmes non linéaires*, où la méthode joue un rôle absolument fondamental, par E. HOPF [1] à propos des équations de Navier-Stokes (cf. n° 6). Cette méthode (jointe à une discrétisation en la variable de temps) est utilisée dans les applications numériques (cf. DOUGLAS-DUPONT [1], B. WENDROFF [1]).

Les résultats du n° 1.8 semblent nouveaux. Un résultat analogue au Théorème 1.6 mais avec plus d'hypothèses de régularité sur f, u_0, u_1 a été donné par SATHER [1] (Théorème 5.1). La méthode suivie dans la démonstration du Théorème 1.6 est celle de LIONS-STRAUSS [1], Lemma 2.1, adaptation d'une méthode donnée dans LIONS-PRODI [1] pour les équations de Navier-Stokes.

Le Théorème 2.1 est dû à SATTINGER [2] (cf. aussi cet A. [1], et pour le résultat de non existence KELLER [1]) (pour l'exposé du Théorème 2.1 nous avons utilisé une remarque de FUJITA, communication personnelle).

Le Théorème 2.2 est dû à FUJITA (cf. [1], [2]) où l'on trouvera des résultats supplémentaires ; cet A. montre la non-existence de solutions usuelles ; nous avons un peu étendu le résultat au cas de solutions faibles.

On trouvera un autre résultat de non-existence pour équations paraboliques non linéaires (et utilisant encore la convexité) dans KAPLAN [1], § 6.

Pour des résultats de non existence dans des équations hyperboliques non linéaires, cf. N. J. ZABUSKY [2], P. D. LAX [2], R. C. MAC CAMY — V. J. MIZEL [1].

Les résultats du n° 3 sont dus à LIONS-STRAUSS [1], où l'on trouvera des résultats complémentaires (cf. aussi dans cette direction, MIZOHATA-YAMAGUTI [1] [2], ARIMA-HASEGAWA [1]).

A des détails techniques près, les résultats du n° 4.1 sont dus à MOROZOV [1], VOROVIC [1]. Le cas stationnaire (n°s 4.3, 4.4), dont on ne présente dans le texte que les rudiments, a donné lieu à de nombreux travaux. Les équations considérées (équations de VON KARMAN), étudiées en particulier dans les travaux de M. S. BERGER [3] [4] [5], BERGER-FIFE [1], FIFE [1], conduisent au *problème de valeurs propres pour opérateurs non linéaires* (consulter BERGER [1] [2] et une étude générale dans F. BROWDER [1] [7]) ; on utilise alors les techniques des variétés de dimension infinie (nous renvoyons à PALAIS [1]) et la théorie de LJUSTERNIK-SCHNIRELMAN (cf. BROWDER [1] [7], PALAIS, *loc. cit.*, J. SCHWARTZ [1]) cf. aussi BAZLEY-ZWAHLEN [1]. On trouvera d'autres résultats de régularité que le Théorème 4.4 dans KNIGHTLY [2]. Signalons également les équations de nature parabolique

$$u_1' + a_1 \Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f_1 ,$$
$$u_2' + a_2 \Delta^2 u_2 + [u_1, u_1] = f_2 ,$$

d'étude plus simple que le système du texte, et pour lesquelles nous renvoyons à DUBINSKY [4].

L'étude des problèmes aux limites non linéaires *dépend du domaine*, et cela est lié à la théorie des valeurs propres pour les problèmes non linéaires et à la théorie de la stabilité. Cf. I. M. GELFAND [1], H. FUJITA [3] ; pour le cas des équations différentielles ordinaires (non linéaires), cf. BAILEY et WALTMAN [1], BAILEY, SHAMPINE et WALTMAN [1], H. B. KELLER [1], LASOTA-OPIAL [1], L. F. SHAMPINE [1].

Les résultats du n° 5 sont loin d'être optimaux, mais ils suffisent pour notre objet. Des théorèmes plus complets, dus à J. P. AUBIN [1] utilisent des résultats de compacité de LIONS-PEETRE [1]. Le Théorème 5.2 a été donné dans LIONS [14], 1re éd. Chapitre 4. La méthode d'estimation donnée au n° 5.3 a été introduite, à propos des équations de Navier-Stokes dans LIONS [3], et utilisée sur cet exemple, dans LIONS-STRAUSS [1] (où l'on trouvera aussi l'étude du cas où Ω n'est pas borné). Il faut signaler ici les résultats de compacité dans L^1 de De GIORGI [3], FLEMING [6], utilisant CESARI [6], résultats essentiels dans la théorie des systèmes hyperboliques de lois de conservation.

Les nros 6 et 7 qui traitent des Equations de Navier-Stokes, n'ont *nullement* pour objet de présenter un *état complet* de la situation ; on a tâché de dégager seulement quelques résultats significatifs ; d'autres résultats, pour des « modèles » différents seront donnés au Chapitre 2, et d'autres résultats encore, relevant d'autres méthodes, seront donnés aux Chapitres 3 et 4. Les résultats de base de la théorie sont dûs aux travaux classiques de LERAY [1] [2] [3]. Un exposé général de la question est donné dans LADYZENSKAYA [1] ; nous avons suivi ici une voie peu différente, donnant sur certains points des résultats meilleurs. Le Théorème 6.1 est essentiellement dû à HOPF [1] ; nous donnons une démonstration semble-t-il plus simple et plus générale, suivant une méthode donnée dans LIONS [3] (méthode du nro 6.4) ; la méthode donnée au nro 6.4 utilisant les dérivées fractionnaires est due à l'A. ; cf. LIONS [1] [2]. Le Théorème 6.2 est dû à PRODI et l'A. ; cf. LIONS-PRODI [1] ; cf. une autre situation (revenant à un cas bidimensionnel avec singularité) dans LADYZENSKAYA [4]. Le Théorème 6.7 est dû à LADYZENSKAYA [1]. Le Théorème 6.8 est dû à G. PRODI [1] et J. SERRIN [1], où l'on trouvera d'autres résultats. De nombreux résultats d'existence locale en t de solutions fortes ont été établis ; cf. H. FUJITA — T. KATO [1], H. FUJITA — K. MASUDA [1], S. ITO [1] M. SHINBROT — S. KANIEL [1], S. KANIEL — M. SHINBROT [1], P. E. SOBOLEVSKII [1]. Des propriétés de régularité ont été établies par FOIAS et PRODI [1], MASUDA [1], C. KAHANE [1], SERRIN [2]. Voir aussi l'exposition de SIBAGAKI — RIKIMARU [1].

La démonstration de l'unicité dans le Théorème 6.11 est due à YOUDOVICH [2]. L'existence de solutions « classiques » des équations d'Euler (cas $\nu = 0$) a été démontrée par T. KATO [1].

La démonstration de (6.140) est donnée pour la commodité du lecteur. Une autre possibilité est d'utiliser les opérations de troncature (cf. Théorème 7.1, Chap. 3, § 7 de LADYZENSKAYA-OURALTSEVA-SOLONNIKOV [1] ; on utilise de façon essentielle le Théorème 6.1, Chap. 2, § 6 de cet ouvrage).

Pour l'étude du problème de Cauchy et l'extension aux équations de Navier-Stokes du Théorème de Tychonoff relatif à l'équation de la chaleur (sur le comportement à l'infini en x) cf. P. MUSTATA [1].

Pour d'autres aspects concernant les équations de Navier-Stokes, toujours dans le cas d'évolution, et utilisant le *semi-groupe non linéaire* (et éventuellement multivoque, si $n \geqslant 3$) : $u_0 \to$ solution à l'instant t (avec $f = 0$), cf. C. FOIAS — G. PRODI [2] (ces travaux étant liés à la turbulence).

Un problème analogue à celui de faire $\nu \to 0$ (nro 6.9) se rencontre souvent dans d'autres situations ; cf. en particulier O. A. OLEINIK [1], ..., [4] ; dans les travaux [1] [2] [3] cet A. utilise la « *méthode de viscosité* » — cf. Remarque 6.10, nro 6.9 — pour démontrer l'existence d'une solution — d'un type particulier — des équations hyperboliques non linéaires du premier ordre. Pour des résultats complémentaires dans cette direction, on consultera GLIMM [1], GLIMM-LAX [1], E. D. CONWAY et E. HOPF [1], E. D. CONWAY et D. SMITH [1], E. D. CONWAY et J. A. SMOLLER [1] [2], J. L. JOHNSON [1], J. L. JOHNSON et J. A. SMOLLER [1] [2]. Pour des résultats locaux pour des systèmes hyperboliques généraux, cf. J. LERAY [7], L. GÅRDING [1]. On peut aussi utiliser des méthodes du Calcul des variations ; outre certains des travaux précédents, cf. l'usage de la théorie du contrôle stochastique dans W. FLEMING [1] [5] et de la théorie des jeux dans KRUJKOV [1].

Il y a naturellement beaucoup d'équations de l'hydrodynamique qui relèvent de techniques analogues. Signalons en particulier les équations de la magnétohydrodynamique, pour l'étude desquelles nous renvoyons à DYER et EDMUNDS [1], LADYZENSKAYA et SOLONNIKOV [1], SOLONNIKOV [1], E. SANCHEZ-PALENCIA [1] [2] (et la bibliographie de ces travaux ; on réfère ici au cas d'évolution *et* au cas stationnaire).

L'étude du cas *stationnaire* des équations de Navier-Stokes est faite de façon très sommaire au nro 7. Pour l'étude de solutions « fortes » (i. e. dans des espaces plus petits que V), nous renvoyons en particulier à R. FINN [1], ..., [5], R. FINN — D. R. SMITH [1], H. FUJITA [4], S. KANIEL [1].

Pour l'unicité, on trouvera des résultats beaucoup plus élaborés que ceux de la Remarque 7.6 dans L. E. PAYNE [1].

Pour l'étude de diverses questions de stabilité, référons à BRAMBLE et PAYNE [1], PAYNE [3], J. SERRIN [6], P. H. RABINOWITZ [2], W. VELTE [1] [2] et l'exposé de R. TEMAM [5].

Comme il est indiqué dans le texte, les résultats du n^{ro} 8 sont dûs à I. M. VISIK [1] [2]. On obtiendra de nouveau ces résultats, par des méthodes plus simples, au Chapitre 2 ; mais la méthode de VISIK contient plusieurs idées qu'il nous a semblé utile d'expliciter, ces idées pouvant être utiles ailleurs.

Les équations étudiées au n^{ro} 9.1 se rencontrent en biologie (COHEN et S. I. RUBINOW [1]) ; en fait, dans ce travail, au lieu de l'équation (9.3) on a l'équation générale de l'élasticité — mais cela n'ajoute pas de difficultés autres que techniques. Pour l'unicité, on a adapté une idée de LIONS-PRODI [1].

Nous donnons au n^{ro} 9.2 deux exemples simples de problèmes couplés (le deuxième étant probablement artificiel). De nombreux problèmes couplés plus difficiles se rencontrent dans les applications ; signalons les équations couplées de Maxwell-Dirac (L. GROSS [1]) et de très nombreux problèmes de météorologie (cf. en particulier G. I. MARCHUK [1]). On trouvera l'étude du cas *stationnaire* correspondant à l'Exemple 9.1 du n^{ro} 9.2 dans A. G. ZARUBIN [1].

On donnera une autre méthode de résolution des équations de Schroedinger non linéaires (étudiées au n^{ro} 10) au Chapitre 3, n^{ro} 2.5. De nombreux autres résultats relatifs aux équations de Schrœdinger sont donnés dans POZZI [1].

Les problèmes *linéaires* du type de ceux considérés au n^{ro} 11 interviennent en hydrodynamique et ont été étudiés dans A. FRIEDMAN-M. SHINBROT [1] R. M. GARIPOV [1], LIONS-MAGENES [1], vol. 2 (Signalons à propos des équations non linéaires sur une variété le travail de DURIC [1] relatif aux équations de Navier-Stokes sur une surface de Rieman).

Les Théorèmes 12.1 et 12.2 sont dûs à DUBINSKII [2] ; on trouvera dans DUBINSKII [1] l'étude du cas stationnaire correspondant ; cf. également des résultats de régularité (pour le deuxième ordre) dans OURALTSEVA [1]. L'unicité dans le Théorème 12.2 est due à P. A. RAVIART [2]. Une autre méthode de résolution sera donnée au Chapitre 2, n^{ro} 3.2. Des problèmes dégénérés de ce type ont été étudiés par OLEINIK, KALASHNIKOV — CZOU JUI — LIN [1] et par ARONSON [1]. Le problème :

$$\left\{\begin{array}{l} u' - \frac{1}{2}\Delta(u^2) = 0\,, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma\,, \\ u(0) = u_0\,, u_0 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{14.1}$$

pourra se traiter ainsi ; on commence par résoudre le problème :

$$\tilde{u}' - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\tilde{u}|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right) = 0\,, \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, u(0) = u_0 \tag{14.2}$$

puis, par application *du principe du maximum* « faible », on montre que

$$\tilde{u} \geqslant 0\,, \quad \text{donc que} \quad u = \tilde{u} \quad \text{est solution de (14.1)}\,.$$

(Le problème (14.1) intervient également dans les applications ; cf. BAKLANOVSKAYA et HAIPOVA [1]).

Un autre exemple de problème pouvant être résolu par les méthodes de ce Chapitre est le suivant (J. M. GREENBERG [1], GREENBERG, Mac CAMY et MIZEL [1]) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0\,, \quad (\lambda > 0)\,,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0\,,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)\,,$$

E fonction continue > 0.

(Pour les intégrales d'énergie multiplier par $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial t^2$; après multiplication par $\partial u/\partial t$, observer que

$$-\int_\Omega E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\,\mathrm{d}x$$

où $\sigma(\mu) = \int_1^\mu E(\xi)\,\mathrm{d}\xi$; on pourra utiliser la base des fonctions propres de $-\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ avec les conditions de Dirichlet en 0 et 1 ([1])). Cf. aussi C. M. DAFERMOS [1].

Tous les résultats de ce chapitre ont été établis dans des espaces de Sobolev construits sur $L^p(\Omega)$. On peut avoir aussi à utiliser des espaces de Sobolev construits *sur les espaces d'Orlicz*. Nous renvoyons à I. M. VISIK [3], M. S. BERGER [6], F. BROWDER [8], DUBINSKII [6]. Cf. aussi l'étude de O'NEIL [1] sur les espaces d'ORLICZ.

On rencontre aussi dans des applications des équations à « coefficients retardés » (phénomènes d'hystérésis) ; nous renvoyons à M. ARTOLA [1] où l'on trouvera en particulier l'étude de variantes d'équations étudiées par LEVIN et NOHEL [1] ; voir en particulier les estimations utilisant les fonctions de LYAPUNOV (signalons à ce propos les travaux de SZEGO (cf. Bibliographie) sur la « construction numérique » des fonctions de LYAPUNOV).

Nous n'avons pas développé, malgré ses liens avec la compacité, la théorie de LERAY et SCHAUDER ; cf. LERAY et SCHAUDER [1], BROWDER [7], BROWDER et PETRYSMYN [1] [2] [3], J. CRONIN [1] [2], J. T. SCHWARTZ [2] et cf. des applications dans J. LERAY [6] [8], G. MIRANDA [1], L. NIRENBERG [3], E. ROTHE [1]. On pourra consulter aussi BERGER et BERGER [1].

([1]) GREENBERG [1] utilise la méthode des différences finies.

CHAPITRE 2

MÉTHODES DE MONOTONIE ET DE MONOTONIE ET COMPACITÉ

ORIENTATION

1) La lecture de ce Chapitre (à l'exception du nº 5) suppose connus a minimum les nºs 1, 3 et le début du nº 8 du Chapitre 1.

2) *L'essentiel* de la méthode de monotonie ([1]) est donné, pour les équation au nºs 1 et au début du nº 2. La théorie des opérateurs pseudo-monotone (nº 2.4) est indispensable pour la lecture des inéquations variationnelle (nº 8 et 9).

3) On peut lire indépendamment du reste du Chapitre le nº 2 (en laissan éventuellement de côté les nºs 2.5 et 2.6) et le nº 8.

4) Les exemples des nºs 3 et 4 sont importants pour la bonne compréhensio de la portée de la méthode de monotonie.

5) Le nº 5 peut éventuellement être passé ; il suppose connu le Chapitre 1 nº 6 ; on y expose sur des exemples (de variantes d'équations de NAVIER STOKES) comment utiliser *à la fois* les méthodes de monotonie et de compacité

1. ÉQUATIONS PARABOLIQUES MONOTONES

1.1 Exemple. Le cas $p > 2$

On reprend ici l'exemple traité au Chapitre 1, nº 8.
Il s'agit de trouver une fonction

$$u = u(x, t),\ x \in \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbf{R}^n,\ t \in]0, T[\,,$$

solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \tag{1.1}$$

où p est donné > 2 ([2]), avec les conditions

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\,, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x)\,,\ u_0 \text{ donnée}\,. \tag{1.3}$$

Avec les notations introduites en (8.5) (8.6), Chapitre 1, nous allons démontrer le résultat suivant, *en insistant sur la méthode* (*de monotonie*) que nous allons utiliser (puis généraliser) :

([1]) A ne pas confondre avec les méthodes utilisant la propriété, pour certains opérateurs particuliers, de conserver une structure d'ordre.

([2]) Le cas $p = 2$ correspond à l'équation classique (linéaire) de la chaleur. Le cas $1 < p < 2$ donne lieu à quelques petites complications techniques, étudiées au nº 1.5.2 ci-après.

Théorème 1.1. — *On donne* f et u_0 *avec les hypothèses*

$$f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{1.4}$$

$$u_0 \in L^2(\Omega). \tag{1.5}$$

Il existe alors une fonction u et une seule telle que

$$u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{1.6}$$

et vérifiant (1.1) *et* (1.3).

Remarque 1.1.

Posons

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{1.7}$$

On vérifie sans peine que A applique $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et que si u vérifie (1.6) alors $A(u) \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

Il résulte alors de (1.6) *et* de l'équation (1.1) que

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.8}$$

Il résulte de (1.8) que, *en particulier*, u est (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) *continue* de $[0, T] \to W^{-1,p'}(\Omega)$, de sorte que (1.3) *a un sens.* ▮

Remarque 1.2.

On peut en fait préciser la Remarque précédente : soit V un espace de Banach réflexif contenu dans un espace de Hilbert H, $V \subset H$ avec injection continue, V étant dense dans H ; identifiant H à son dual et V' désignant le dual de V, on peut alors identifier H à un sous-espace de V', de sorte que

$$V \subset H \subset V'.$$

Si on donne alors une fonction $u \in L^p(0, T; V)$ telle que $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, *la fonction u est* (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) continue de $[0, T] \to H$ *et l'application* $u \to u(0)$ est *surjective sur* H. ▮

Remarque 1.3.

La propriété (1.2) est « contenue » dans l'appartenance (p. p.) de $u(t)$ à $W_0^{1,p}(\Omega)$. ▮

1.2 Démonstration de l'existence

1.2.1 *Propriétés axiomatiques de A.*

On va dégager les *propriétés de base* [1] de l'opérateur A défini en (1.7) qui interviennent dans la méthode de monotonie :

(i) posons $V = W_0^{1,p}(\Omega)$; alors A applique V dans $V'(= W^{-1,p'}(\Omega))$, transforme les bornés de V en bornés de V' [2] et a *la propriété de continuité suivante* :

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} \forall u, v, w \in V, & \text{la fonction} \\ \lambda \to \big(A(u + \lambda v), w\big) \\ \text{est continue de } \mathbf{R} \to \mathbf{R}. \end{cases}$$

La vérification de (1.9) est immédiate. Cette propriété intervenant souvent dans la suite, on introduit la

Définition 1.1. — Tout opérateur A de $V \to V'$ ayant la propriété (1.9) est dit *hémicontinu.*

(ii) l'opérateur A vérifie :

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} \forall u, v \in V, & \text{on a :} \\ \big(A(u) - A(v), u - v\big) \geqslant 0. \end{cases}$$

On pose la

Définition 1.2. — Tout opérateur A de V dans V' ayant la propriété (1.10) est dit *monotone.*

La démonstration de (1.10) est immédiate à partir de la définition de A par (1.7). ▮

On peut rattacher les propriétés (1.9) (1.10) de A à une propriété plus générale.

Introduisons la fonctionnelle sur V :

$$\text{(1.11)} \qquad J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | D_i v |^p \, dx, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Cette fonctionnelle est *différentiable au sens de Gateaux* [3] en tout $u \in V$, i. e. il existe une application linéaire continue $v \to J'(u)v$ de $V \to \mathbf{R}$ telle que

$$\text{(1.12)} \qquad \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \big(J(u + \lambda v) - J(u)\big) = J'(u).v$$

(1) Qui seront généralisées dans la suite.

(2) On dit alors que l'opérateur A est *borné.* On a, plus précisément : $\| A(u) \|_* \leqslant c \| u \|^{p-1}$. (Rappelons que $\| \;\|$, resp. $\| \;\|_*$, est la norme dans V, resp. V').

(3) Il y a en fait davantage dans ce cas particulier.

et comme on le vérifie sans peine

$$J'(u) = A(u)\,. \tag{1.13}$$

La propriété (1.10) résulte alors de la [1]

Proposition 1.1. — *Si $v \to J(v)$ est une fonctionnelle différentiable au sens de Gateaux sur V et convexe, l'application $u \to J'(u)$ de $V \to V'$ est monotone et hémicontinue.*

Démonstration.

D'après la convexité,

$$J\big((1-\theta)\,u + \theta v\big) \leqslant (1-\theta)\,J(u) + \theta J(v) \qquad \forall \theta \in]0, 1[\,,$$

donc

$$\frac{1}{\theta}\big(J(u + \theta(v-u)) - J(u)\big) \leqslant J(v) - J(u)\,,$$

d'où

$$J'(u).(v-u) \leqslant J(v) - J(u)\,. \tag{1.14}$$

Echangeant le rôle de u et v et ajoutant on trouve

$$\big(J'(u) - J'(v)\big).(u-v) \geqslant 0\,. \blacksquare$$

Remarque 1.4.

On a une propriété *réciproque* : si J est différentiable au sens de Gateaux et si $u \to J'(u)$ est monotone hémicontinue de $V \to V'$, *alors J est convexe.* ▮

1.2.2 *Démonstration de l'existence.*

On utilise la méthode de Faedo-Galerkin. Soit $w_1 \dots w_m \dots$ une « base » de V ; on introduit $u_m(t)$ « solution approchée » du problème de la façon suivante :

$$u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m] \ (= \text{espace engendré par } w_1, \dots, w_m)\,,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \big(u'_m(t), w_j\big) + \big(A(u_m(t)), w_j\big) = \big(f(t), w_j\big)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\,, \\ u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, \dots, w_m]\,, \ u_{0m} \to u_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)\,. \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Cela définit $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Mais on note que

$$\big(A(u), u\big) \geqslant \alpha\,\|u\|^p, \quad \alpha > 0\,. \tag{1.16}$$

[1] Il est clair en effet que $J(v)$ définie en (1.11) est *convexe*.

Alors on déduit de (1.15) que (1)

$$(1.17)\quad \frac{1}{2}\,|\,u_m(t)\,|^2 + \alpha \int_0^t \|\,u_m(\sigma)\,\|^p\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_0^t \|\,f(\sigma)\,\|_*\,\|\,u_m(\sigma)\,\|\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\,|\,u_{0m}\,|^2$$

d'où l'on déduit que $t_m = T$ et que

(1.18) u_m demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V)$.

On peut donc extraire une sous-suite u_μ telle que

(1.19)	$u_\mu \to u$	dans	$L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$	faible étoile ,
(1.20)	$u_\mu \to u$	dans	$L^p(0, T; V)$	faible ,
(1.21)	$u_\mu(T) \to \xi$	dans	$L^2(\Omega)$	faible ,
(1.22)	$A(u_\mu) \to \chi$	dans	$L^{p'}(0, T; V')$	faible

(car $\|\,A(u)\,\| \leqslant c\,\|\,u\,\|^{p-1}$) et donc $A(u_m)$ (2) demeure dans un borné de $L^{p'}(0, T; V')$.

Introduisons $\tilde{u}_m(t)$, $A(u_m(t))^\sim$, ..., prolongement à **R** de $u_m(t)$, $A(u_m(t))$, ... par 0 hors de $[0, T]$; alors (1.15) donne

$$(1.23)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{u}_m(t), w_j\right) + A(u_m(t)^\sim, w_j) = (f(t)^\sim, w_j) + (u_{0m}, w_j)\,\delta(t-0) - \\ \qquad - (u_m(T), w_j)\,\delta(t-T)\,. \end{cases}$$

On peut maintenant passer à la limite dans (1.23) avec $m = \mu$ et j fixé, d'où l'on déduit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{u}, w_j\right) + (\tilde{\chi}, w_j) = (\tilde{f}, w_j) + (u_0, w_j)\,\delta(t-0) - (\xi, w_j)\,\delta(t-T) \quad \forall j$$

et par conséquent

$$(1.24)\qquad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t} + \tilde{\chi} = \tilde{f} + u_0\,\delta(t-0) - \xi\,\delta(t-T)\,.$$

(1) Où $|\quad|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$.

(2) Il faut également vérifier que A transforme les fonctions mesurables v de $[0, T] \to V$ en des fonctions mesurables de $[0, T] \to V'$. Tous les espaces sont supposés séparables et il suffit donc de montrer que $t \to (A(w(t)), w)$ est mesurable $\forall w \in V$. Or on verra (note (1) de la Définition 2.1 ci-après ; p. 179) que (sous des hypothèses d'ailleurs plus générales) A est continu de V fort dans V' faible, d'où le résultat. Plus généralement, H. BREZIS a démontré que tout opérateur continu d'un Banach F *quelconque* dans un deuxième Banach quelconque G muni de la topologie faible, transforme les fonctions mesurables à valeurs dans F dans des fonctions mesurables à valeurs dans G.

Restreignant (1.24) à $]0, T[$, on en déduit que

$$u' + \chi = f, \tag{1.25}$$

d'où $u' \in L^{p'}(0, T; V')$, donc $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens et comparant à (1.24) on en déduit que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \xi$.

On aura donc démontré *l'existence* d'une solution si l'on montre (c'est *le point crucial de la démonstration*) que

$$\chi = A(u) . \tag{1.26}$$

De la propriété (1.10) résulte que

(1.27)

$$X_\mu = \int_0^T \big(A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t)\big)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall v \in L^p(0, T; V) .$$

Or de (1.15) résulte que

$$\int_0^T \big(A(u_\mu), u_\mu\big)\, dt = \int_0^T (f, u_\mu)\, dt + \frac{1}{2} | u_{0\mu} |^2 - \frac{1}{2} | u_\mu(T) |^2$$

et donc

$$X_\mu = \int_0^T (f, u_\mu)\, dt + \frac{1}{2} | u_{0\mu} |^2 - \frac{1}{2} | u_\mu(T) |^2 - \int_0^T \big(A(u_\mu), v\big)\, dt - \\ - \int_0^T \big(A(v), u_\mu - v\big)\, dt$$

d'où (comme $\liminf | u_\mu(T) |^2 \geqslant | u(T) |^2$) :

$$\left\{ \begin{aligned} \limsup X_\mu \leqslant \int_0^T (f, u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \frac{1}{2} | u(T) |^2 - \int_0^T (\chi, v)\, dt - \\ - \int_0^T \big(A(v), u - v\big)\, dt . \end{aligned} \right. \tag{1.28}$$

Mais de (1.25) on déduit, par des intégrations par parties que

$$\int_0^T (f, u)\, dt + \frac{1}{2} | u_0 |^2 - \frac{1}{2} | u(T) |^2 = \int_0^T (\chi, u)\, dt ,$$

ce qui, joint à (1.27) (1.28), donne

$$\int_0^T \big(\chi - A(v), u - v\big)\, dt \geqslant 0 . \tag{1.29}$$

On utilise maintenant *l'hémicontinuité* pour montrer que (1.29) *entraîne* (1.26) : on prend $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, T; V)$ quelconque ; alors (1.29) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\, dt \geqslant 0$$

donc

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\, dt \geqslant 0; \tag{1.30}$$

faisant $\lambda \to 0$ dans (1.30) ([1]) on en déduit que

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall w$$

donc

$$\chi = A(u)\,. \ \blacksquare$$

Remarque 1.5.

Il faut insister sur le passage à la limite ci-dessus qui a pu, *grâce à la monotonie et l'hémicontinuité*, être effectué avec *le minimum* d'estimations *a priori*.

(Comparer au Chap. 1, n^ro^ 8, où le passage à la limite *par la méthode de compacité* a nécessité l'obtention d'estimations *a priori* supplémentaires). ▮

Remarque 1.6.

On peut assez facilement obtenir une estimation *a priori* sur u_m' en prenant pour w_j une *base spéciale* (cf. Chap. 1, n^ro^ 6.3) ; on choisit d'abord S tel que

$$\begin{cases} H_0^S(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \\ \left(\text{i. e.} \dfrac{S-1}{n} \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right). \end{cases} \tag{1.31}$$

On vérifie alors (par la même technique qu'au Chap. 1, n^ro^ 6.3) que, si l'on choisit pour $\{ w_j \}$ une base de $H_0^S(\Omega)$ formée des fonctions propres

$$(w_j, v)_{H_0^S(\Omega)} = \lambda_j (w_j, v) \qquad \forall v \in H_0^s(\Omega)\,, \tag{1.32}$$

on a :

$$u_m' \quad \text{demeure dans un borné de} \quad L^{p'}(0, T; H^{-S}(\Omega))\,. \tag{1.33}$$

Mais, comme on a vu au Chapitre 1, n^ro^ 8, cette estimation supplémentaire est *insuffisante* pour l'application de la méthode de compacité.

([1]) C'est loisible d'après le Théorème de Lebesgue.

On peut noter que si l'on choisit la base spéciale ci-dessus il est inutile de passer par (1.23) (1.24) ; il est alors immédiat que $u(0) = u_0$ et $u(T) = \xi$.

Remarque 1.7.

Le fait que la méthode de Faedo-Galerkin *converge* avec une base *quelconque* est important pour les applications, car les « bases spéciales » sont, dans la pratique, hors d'atteinte en général. ▮

1.3 Démonstration de l'unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0\,, \quad w(0) = 0\,,$$

d'où

$$(w', w) + \big(A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\big) = 0$$

et grâce à la monotonie :

$$w' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\,w(t)\,|^2 \leqslant 0\,,$$

d'où $w = 0$. ▮

1.4 Un résultat général

Nous avons souligné dans les démonstrations précédentes les hypothèses qui sont intervenues. Nous avons donc implicitement démontré le résultat suivant :

Théorème 1.2. — *Soient V, H comme dans la situation de la Remarque* 1.2 *V étant séparable* [1]. *Soit A un opérateur* (non linéaire) *de $V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :*

(1.34) *A est hémicontinu de $V \to V'$, et* $\|\,A(v)\,\|_* \leqslant c\,\|\,v\,\|^{p-1}$, [2]

(1.35) *A est monotone de $V \to V'$,*

(1.36) $\big(A(v), v\big) \geqslant \alpha\,\|\,v\,\|^p, \alpha > 0, \quad \forall v \in V (1 < p < \infty)$.

Soient f et u_0 donnés avec

(1.37) $$f \in L^{p'}(0, T; V')\,, \quad u_0 \in H\,.$$

[1] Hypothèse d'ailleurs inutile. Il suffit, dans le cas non séparable, de raisonner sur l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces de dimension finie de V.

[2] Cf. note [2] de la page 159.

Il existe alors une fonction u et une seule telle que

(1.38) $$u \in L^p(0, T; V),$$

(1.39) $$u' + A(u) = f,$$

(1.40) $$u(0) = u_0 \quad (^1).$$ ∎

Dans les applications (comme on verra dans les Exemples 1.5.1 et 1.5.2 ci-dessous), l'hypothèse (1.36) peut être trop forte. Il est utile d'introduire la *variante* suivante : on se donne sur V une semi-norme $[v]$ telle que

(1.41) il existe $\lambda > 0$ et $\beta > 0$ tels que $[v] + \lambda | v | \geqslant \beta \| v \| \quad \forall v \in V$ (2),

et on suppose que

(1.42) $$(A(v), v) \geqslant \alpha [v]^p, \ 1 < p < \infty .$$

On a alors le

Théorème 1.2 *bis*. — *Les hypothèses sont celles du Théorème* 1.2 *mais avec* (1.36) *remplacé par* (1.42) (1.41). *Alors les conclusions du Théorème* 1.2 *sont encore valables.*

Il suffit, pour la démonstration, de modifier un peu (1.17) (1.18). On arrive maintenant à

(1.43) $$\frac{1}{2} | u_m(t) |^2 + \alpha \int_0^t [u_m(\sigma)]^p \, d\sigma \leqslant \leqslant \frac{1}{2} | u_{0m} |^2 + \int_0^t \| f(\sigma) \|_* \, \| u_m(\sigma) \| \, d\sigma .$$

Mais d'après (1.41) le deuxième membre de (1.43) est majoré par

$$\frac{1}{2} | u_{0m} |^2 + c_1 \left(\int_0^t \| f(\sigma) \|_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \times \times \left[\left(\int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma \right)^{1/p} + \left(\int_0^t | u_m(\sigma) |^p d\sigma \right)^{1/p} \right] \leqslant$$

$$\leqslant c_2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma + + \frac{1}{2} c_1 \left(\int_0^t \| f(\sigma) \|_*^{p'} d\sigma \right)^{1/p'} \left[\left(\int_0^t | u_m(\sigma) |^p d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right]$$

$$\leqslant c_3 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t [u_m(\sigma)]^p d\sigma + + c_4 \left[\left(\int_0^t | u_m(\sigma) |^p d\sigma \right)^{2/p} + 1 \right]$$

(1) Noter que (1.38) (1.39) $\Rightarrow u' \in L^{p'}(0, T; V')$ et donc (1.40) a un sens (cf. Remarque 1.2).

(2) $| \ |$ désigne la norme dans H, $\| \ \|$ dans V.

et donc (1.43) donne

$$(1.44) \qquad |u_m(t)|^2 + \int_0^t [u_m(\sigma)]^p \, d\sigma \leqslant c_5 + c_5 \left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p \, d\sigma \right)^{2/p} .$$

On déduit de (1.44) que

$$|u_m(t)|^2 \leqslant c_5 + c_5 \left(\int_0^t |u_m(\sigma)|^p \, d\sigma \right)^{2/p}$$

et donc

$$|u_m(t)|^p \leqslant c_6 + c_6 \int_0^t |u_m(\sigma)|^p \, d\sigma ,$$

d'où

$$(1.45) \qquad |u_m(t)| \leqslant c_7 ,$$

ce qui joint à (1.44) donne :

$$\int_0^t [u_m(\sigma)]^p \, d\sigma \leqslant c_8$$

et grâce à (1.41) on a donc

$$\int_0^t \| u_m(\sigma) \|^p \, d\sigma \leqslant \text{constante} .$$

On achève comme à la démonstration du Théorème 1.1. ▮

Remarque 1.8.

On verra plus loin des extensions des Théorèmes 1.2 et 1.2 *bis* précédents couvrant, en particulier, des cas où *A dépend de t* (1). ▮

1.5 Applications des résultats généraux

1.5.1 *Opérateur* (1.1) *avec les conditions aux limites du type* « *Neumann* ».

On prend A donné par

$$(1.46) \qquad (A(u), v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \, dx = a(u, v) , \quad p > 2 \text{ (2)}$$

(1) On vérifiera d'ailleurs sans peine que les Théorèmes 1.2 et 1.2 *bis* s'étendent, avec la même demonstration, au cas où A dépend mesurablement de t avec les hypothèses analogues à (1.36) ou (1.42) « uniformes en t ».

(2) Le cas $1 < p < 2$ correspond au cas où l'on n'a pas nécessairement

$$W^{1,p}(\Omega) \subset H = L^2(\Omega) .$$

Cf. 1.5.2 ci-après et Chapitre 3, nro 1.

pour $u, v \in V = W^{1,p}(\Omega)$; prenant $H = L^2(\Omega)$, on vérifie que l'on est dans le cas (1.41) (1.42), avec

$$[v] = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i v|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} .$$

On peut donc appliquer le Théorème 1.2 *bis*.

On choisit $f \in L^{p'}(0, T; V')$ de la façon suivante :

$$(f(t), v) = \int_{\Omega} f_0(x, t)\, v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} g(x, t)\, v(x)\,\mathrm{d}\Gamma , \tag{1.47}$$

où

$$f_0 \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q) \tag{1.48}$$

et

$$g \in L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)); \tag{1.49}$$

dans (1.49) on utilise l'espace (cf. par exemple Lions-Magenes [3] pour ces espaces)

$$W^{-1/p', p'}(\Gamma) = \text{dual de } W^{1/p', p'}(\Gamma) , \tag{1.50}$$

où

$$W^{1/p', p}(\Gamma) = \text{espace parcouru par } v|_{\Gamma} \text{ lorsque } v \text{ parcourt } W^{1,p}(\Omega) . \tag{1.51}$$

L'équation (1.39) équivaut à

$$(u'(t)) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V \tag{1.52}$$

et on a donc *l'existence et l'unicité d'une fonction u dans* $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ *telle que l'on ait* (1.1) (avec f_0 au lieu de f), (1.3) *et*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = g \quad \text{sur} \quad \Sigma . \tag{1.53}$$

La condition (1.53) est *du type de Neumann.* ∎

Remarque 1.9.

Il faut en fait justifier (1.53) ce qui peut être fait par des méthodes analogues à celles utilisées dans Lions-Magenes [1] (1). ∎

Remarque 1.10.

Dans le problème traité au n$^{\text{ro}}$ 1.1 on peut remplacer la condition « homogène » (1.2) par

$$u = g \quad \text{sur} \quad \Sigma , \tag{1.54}$$

(1) Cf. aussi n$^{\text{ro}}$ 4 ci-après.

où g est donnée sur Σ de façon qu'il existe w vérifiant (¹)

$$(1.55)\qquad \begin{cases} w \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)), \quad w' \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \\ w|_\Gamma = g. \end{cases}$$

Si l'on introduit alors $\psi = u - w$, tout revient à chercher ψ solution de

$$(1.56)\qquad \begin{cases} \psi' + A(\psi + w) = f - w' = f_1(\in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))), \\ \psi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \psi(0) = u_0 - w(0) \in L^2(\Omega)\ (^2). \end{cases}$$

Les raisonnements utilisés pour la démonstration du Théorème 1.1 s'adaptent à cette situation (³). ▌

Remarque 1.11.

On résoudra de façon analogue le cas où l'on a une condition de Dirichlet sur $\Gamma_1 \times]0, T[$ et du type Neumann (i. e. du type (1.53)) sur $\Gamma_2 \times]0, T[$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. ▌

1.5.2 *Le cas de l'Exemple* 1.1 *avec* $1 < p < 2$.

On considère le problème du nᵒ 1.1 mais avec $1 < p < 2$. Alors on n'a pas nécessairement $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (l'inclusion n'est vraie que si $1/p - 1/n \leqslant \frac{1}{2}$) et on est alors conduit à introduire

$$(1.57)\qquad V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad H = L^2(\Omega)$$

(et alors $V' = W^{-1,p'}(\Omega) + L^2(\Omega)$).

On pose :

$$[v] = \| v \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \text{semi-norme sur } V,$$

et A étant donné par (1.7) on a (1.41) (1.42). Donc le Théorème 1.2 *bis* est applicable, *ce qui montre que les conclusions du Théorème* 1.1 *sont valables également dans le cas* $1 < p < 2$. ▌

1.5.3 *Opérateurs d'ordre* > 2.

Considérons un exemple simple d'opérateur non linéaire *d'ordre* 4. On introduit de façon générale :

$$(1.58)\qquad W^{m,p}(\Omega) = \{ v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant m \}$$

(¹) Cf. P. GRISVARD [1] [2] pour des conditions explicites sur g pour qu'il en soit ainsi.
(²) On montre que $w(0) \in L^2(\Omega)$.
(³) Noter que le « nouvel opérateur A » dans (1.56) *dépend de* t (à cause de w).

espace de Banach pour la norme

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha v \|_{L^p(\Omega)}$$

et

(1.59) $$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathscr{D}(\Omega) \quad \text{dans} \quad W^{m,p}(\Omega) .$$

Pour $u, v \in W_0^{2,p}(\Omega)$, on pose

(1.60) $$a(u, v) = \int_\Omega | \Delta u |^{p-2} \Delta u \, \Delta v \, dx ,$$

ce qui définit l'opérateur A de $V = W_0^{2,p}(\Omega) \to V'$:

(1.61) $$A(u) = \Delta(| \Delta u |^{p-2} \Delta u) .$$

Cet opérateur est égal à $J'(u)$ si

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega | \Delta u |^p \, dx$$

et on peut donc appliquer le Théorème 1.2. On a donc *l'existence et l'unicité de* $u \in L^p(0, T ; W_0^{2,p}(\Omega))$ *tel que*

(1.62) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta(| \Delta u |^{p-2} \Delta u) = f ,$$

et avec (1.3). ▮

Remarque 1.12.

On peut également considérer des systèmes d'opérateurs monotones. ▮

1.6 Résultats de régularité

Naturellement, lorsque la méthode de monotonie est applicable, *toute estimation* a priori *supplémentaire donne un résultat de régularité* ; voici un exemple (comparer au Chap. 1, n^{ro} 8) :

Théorème 1.3. — *On se place dans les hypothèses du Théorème* 1.1 *avec en outre*

(1.63) $$f, f' \in L^{p'}(Q) , \quad f(0) \in L^2(\Omega) , \quad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) , \quad A(u_0) \in L^2(\Omega).$$

Alors la solution u donnée par le Théorème 1.1 *satisfait en outre à*

(1.64) $$u' \in L^\infty(0, T ; L^2(\Omega)) ,$$

(1.65) $$| D_i u |^{(p-2)/2} D_i u' \in L^2(Q) \quad \forall i .$$

Démonstration.

On part de (1.15) [1] que *l'on dérive en t* ; on suppose que $A(u_{0m})$ demeure dans un borné de $L^2(\Omega)$ et on applique à u_m les estimations analogues à celles du n^{ro} 8.2.3, Chapitre 1. On en déduit que u_m' (resp. $|D_i u_m|^{(p-2)/2} D_i u_m'$) demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ (resp. de $L^2(Q)$) et puisque *on sait* (d'après la démonstration du Théorème 1.1) que $u_m \to u$ dans $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ faible, on en déduit (1.64) et (1.65) [2]. ∎

1.7 Somme d'opérateurs monotones

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{R}$ (pour simplifier [3]), V_i $(i = 1, ..., q)$ des espaces de Banach réflexifs, avec $V_i \subset H$, V_i dense dans H.

Soit $\| \ \|_i$ la norme sur V_i. On pose

$$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i, \quad \| v \| = \sum_{i=1}^{q} \| v \|_i . \tag{1.66}$$

On suppose V dense dans H et séparable.

On a :

$$V \subset H \subset V', \quad V_i \subset H \subset V_i' .$$

Soient A_i des opérateurs non linéaires de $V_i \to V_i'$ tels que

(1.67) A_i est hémicontinu borné de $V_i \to V_i'$, $\| A_i(v) \|_{*,i} \leqslant c \| v \|_i^{p_i - 1}$,

(1.68) A_i est monotone de $V_i \to V_i'$,

(1.69) $(A_i(v), v) \geqslant \alpha_i \| v \|_i^{p_i}$, $\alpha_i > 0$, $\forall v \in V$ (ou V_i), $1 < p_i < \infty$.

On pose

$$A(v) = \sum_{i=1}^{q} A_i(v) . \tag{1.70}$$

On démontre alors, comme pour le Théorème 1.2 (i. e. comme pour le Théorème 1.1) le résultat suivant :

Théorème 1.4. — *On suppose que* (1.67) (1.68) (1.69) *ont lieu. Soient f et u_0 donnés avec $u_0 \in H$ et*

$$f \in \sum_{i=1}^{q} L^{p_i'}(0, T; V_i'), \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1 . \tag{1.71}$$

(1) Avec une « base » w_j convenable.

(2) Utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires, on peut obtenir des résultats plus précis (H. BREZIS).

(3) Dans les cas complexes, remplacer (1.10) par

$$\mathrm{Re}\,\big(A(u) - A(v), u - v\big) \geqslant 0 .$$

Il existe une fonction u et une seule telle que

$$u \in \bigcap_{i=1}^{q} L^{p_i}(0, T; V_i), \quad u \in L^\infty(0, T; H), \tag{1.72}$$

$$u' + A(u) = f, \tag{1.73}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{1.74}$$ ∎

Remarque 1.13.

On a la même variante qu'au Théorème 1.2 *bis* : si $[\ \ ]_i$ est une s sur V_i, telle que, pour λ_i convenable,

$$[v]_i + \lambda_i |v| \quad \textit{soit équivalente à} \quad \|\ \ \|_i, \tag{1.75}$$

et si, au lieu de (1.69) on a :

$$\big(A_i(v), v\big) \geqslant \alpha_i [v]_i^{p_i}, \tag{1.76}$$

on a alors la même conclusion qu'au Théorème 1.4. ∎

Exemple 1.7.1.

On considère l'opérateur A donné par

$$A(\psi) = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right), \qquad 1 < p_i < \infty . \tag{1.77}$$

On introduit les espaces

$$W_{x_i}^{1,p_i}(\Omega) = \left\{ v \;\middle|\; v \in L^{p_i}(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{p_i}(\Omega) \right\}; \tag{1.78}$$

$W_{x_i}^{1,p_i}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\| v \|_{L^{p_i}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

On définit ensuite

$$V_i = \text{adhérence de } \mathscr{D}(\Omega) \quad \text{dans} \quad W_{x_i}^{1,p_i}(\Omega), \tag{1.79}$$

$$[v]_i = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \tag{1.80}$$

$$A_i(v) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right), \tag{1.81}$$

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \qquad (\text{donc} \quad q = n). \tag{1.82}$$

On a alors $A(v) = \sum_{i=1}^{n} A_i(v)$ et l'on est dans les conditions d'application du Théorème 1.4 (en fait de la Remarque 1.13).

On obtient donc l'*existence et l'unicité de u vérifiant*

(1.83)
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f\,,$$

(1.84)
$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T\,; L^2(\Omega)),\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(Q)\,, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma\,, \\ u(x, 0) = u_0(x)\,,\ x \in \Omega\,. \end{cases}$$ ∎

Exemple 1.7.2.

Prenons

(1.85)
$$V = \{\, v \mid v \in W^{1,p}(\Omega),\ v|_\Gamma \in L^q(\Gamma) \,\} \quad (^1)\,;$$

pour $u, v \in V$, posons

(1.86)
$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, D_i\, u\,|^{p-2}\, D_i\, u D_i\, v \,\mathrm{d}x + \\ + \beta \int_\Gamma |\, u\,|^{q-2}\, uv \,\mathrm{d}\Gamma\,, \qquad \beta > 0\,.$$

On applique alors le Théorème 1.4 et la Remarque 1.13 dans les conditions suivantes :

$$q = 2,\ V_1 = V_2 = V\,,$$

$$\left(A_1(u), v\right) = a_1(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, D_i\, u\,|^{p-2}\, D_i\, u D_i\, v \,\mathrm{d}x\,,$$

$$\left(A_2(u), v\right) = a_2(u, v) = \beta \int_\Gamma |\, u\,|^{q-2}\, uv \,\mathrm{d}\Gamma\,,$$

$$[v]_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, D_i\, v\,|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

$$[v]_2 = \left(\int_\Gamma |\, v\,|^q \,\mathrm{d}\Gamma\right)^{1/q}.$$

(1) La condition « $v|_\Gamma \in L^q(\Gamma)$ » *résulte de* « $v \in W^{1,p}(\Omega)$ » si, et seulement si,

$$\frac{1}{p} - \frac{1 - 1/p}{n - 1} \leqslant \frac{1}{q}\,.$$

On pourra prendre f (satisfaisant à (1.71)) par :

$$(1.87) \qquad \begin{cases} (f, v) = \int_\Omega f_0\, v \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma gv \,\mathrm{d}\Gamma, \\ f_0 \in L^{p'}(Q),\ g \in L^{q'}(\Sigma)\ (^1). \end{cases}$$

Alors on obtient l'*existence et l'unicité de u vérifiant*

$$(1.88) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f_0 \quad \text{dans} \quad Q,$$

$$(1.89) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) + c\,|u|^{q-2} u = g \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

$$(1.90) \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.\ \blacksquare$$

Remarque 1.14.

Tous les espaces sur Ω ou Γ introduits ci-dessus sont *séparables*. ▌

2. PROBLÈMES STATIONNAIRES

2.1 Premier résultat général

Théorème 2.1. — *Soit V un espace de Banach réflexif séparable* (²). *Soit A un opérateur de $V \to V'$ ayant les propriétés* :

(2.1) *A est borné hémicontinu* (cf. n^ro 1.2.1),

(2.2) *A est monotone,*

$$(2.3) \qquad \frac{(A(v), v)}{\|v\|} \to +\infty \quad si \quad \|v\| \to \infty.$$

Alors A est surjectif de $V \to V'$, i. e. *pour $f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que*

$$(2.4) \qquad A(u) = f.$$

Démonstration.

1) Soit $w_1 \dots w_m \dots$ une « base » de V ; on cherche $u_m \in [w_1, \dots, w_m]$, vérifiant

$$(2.5) \qquad (A(u_m), w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

L'existence de u_m suit du Lemme 4.3, Chapitre 1, en notant que

(i) $(A(u_m), u_m) - (f, u_m) \geqslant (A(u_m), u_m) - c\,\|u_m\|$

et donc, d'après (2.3), $(A(u_m), u_m) - c\,\|u_m\| \geqslant 0$ pour $\|u_m\| = \rho$, ρ assez grand ;

(ii) la fonction $v \to (A(v), v)$ est continue sur $[w_1, \dots, w_m]$ (³).

(¹) On peut plus généralement prendre $g \in L^{p'}(0, T; W^{-1/p', p'}(\Gamma)) + L^{q'}(\Sigma)$.

(²) Dans le cas non séparable, considérer, au lieu des espaces $[w_1, \dots, w_m]$, l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces de dimension finie.

(³) Les hypothèses (2.1) (2.2) entraînent que A est continu de V fort $\to V'$ faible. Cf. propriété plus générale dans (²), Définition 2.1, n^ro 2.4.

Par ailleurs (2.5) donne

$$\big(A(u_m), u_m\big) = (f, u_m) \leqslant \| f \|_{V'} \| u_m \|$$

ce qui, grâce à (2.3) montre que

$$\| u_m \| \leqslant C .$$

Comme A est borné, il en résulte que $\| A(u_m) \|_{V'} \leqslant C$.

2) On peut donc extraire une suite u_μ telle que

$$\begin{cases} u_\mu \to u & \text{dans} \quad V \text{ faible}, \\ A(u_\mu) \to \chi & \text{dans} \quad V' \text{ faible}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Passant à la limite dans (2.5) (pour $m = \mu, j$ fixé) on voit que

$$(\chi, w_j) = (f, w_j) \quad \forall j ,$$

et donc

$$\chi = f . \tag{2.7}$$

Par ailleurs, d'après (2.5), $\big(A(u_\mu), u_\mu\big) = (f, u_\mu) \to (f, u)$ et donc, d'après (2.7) :

$$\big(A(u_\mu), u_\mu\big) \to (\chi, u) . \tag{2.8}$$

On va voir que (2.6) (2.8) *et les hypothèses* (2.1) (2.2) *entraînent que*

$$\chi = A(u) \tag{2.9}$$

ce qui, joint à (2.7), montre le Théorème.

3) On part de

$$\big(A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in V . \tag{2.10}$$

Utilisant (2.6) (2.8) on peut passer à la limite dans (2.10), d'où

$$\big(\chi - A(v), u - v\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in V . \tag{2.11}$$

On raisonne alors comme à la fin de la démonstration du Théorème 1.1 pour l'existence.

On prend $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$; (2.11) donne

$$\lambda\big(\chi - A(u - \lambda w), w\big) \geqslant 0 ,$$

donc

$$\big(\chi - A(u - \lambda w), w\big) \geqslant 0 ,$$

et faisant $\lambda \to 0$: $\big(\chi - A(u), w\big) \geqslant 0 \quad \forall w \in V$, d'où (2.9). ∎

Remarque 2.1.

On peut « axiomatiser » la Démonstration précédente (et cela sera utile dans la suite). L'opérateur A est dit *avoir la Propriété* (M) *si*

(2.12) $$\text{« } u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad V \text{ faible, } A(u_\mu) \to \chi \quad \text{dans} \quad V' \text{ faible et} \\ \lim\sup\big(A(u_\mu), u_\mu\big) \leqslant (\chi, u) \text{ »} \Rightarrow \chi = A(u).$$

Le Théorème 2.1 *est valable si l'on remplace* (2.2) *par* (2.12) (en effet (2.9) résulte maintenant de (2.8) *par définition*). ▮

2.2 Un Théorème d'unicité. Applications de dualité

Naturellement l'équation (2.5) admet une solution unique si

(2.13) $$\big(A(u) - A(v), u - v\big) > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v\,.$$

Voici dans ce sens un résultat plus raffiné :

Théorème 2.2. — *On se place dans les hypothèses du Théorème* 2.1 *et on suppose en outre que* :

(2.14) *la norme* $\| v \|$ *est strictement convexe sur la sphère unité de* V,

(2.15) $$A(u) = A(v) \Rightarrow \| u \| = \| v \|\,.$$

Alors l'équation (2.4) *admet une solution unique.*

Démonstration :

1) Vérifions d'abord ceci ([1]) :

u vérifie (2.4) *si et seulement si*

(2.16) $$\big(A(v) - f, v - u\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in V\,.$$

En effet si (2.4) a lieu alors

$$\big(A(v) - f, v - u\big) = \big(A(u) - f, v - u\big) + \big(A(v) - A(u), v - u\big) = \\ = \big(A(v) - A(u), v - u\big) \geqslant 0.$$

Réciproquement si l'on a (2.16) alors prenant $v = u + \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, on a (après division par λ) :

$$\big(A(u + \lambda w) - f, w\big) \geqslant 0$$

et faisant $\lambda \to 0$ on en déduit que $\big(A(u) - f, w\big) \geqslant 0 \quad \forall w \in V$, d'où (2.4).

([1]) Remarque qui jouera un rôle essentiel dans l'étude des inéquations, cf. nro 8.9.

2) *L'ensemble des solutions de $A(u) = f$ est fermé et convexe.*

Soit E l'ensemble des solutions et, $\forall v \in V$, soit S_v l'ensemble des $u \in V$ tels que $(A(v) - f, v - u) \geqslant 0$; d'après (2.18) :

$$E = \bigcap_{v \in V} S_v$$

et comme S_v est un demi-espace fermé de V, le résultat suit.

3) Si (2.15) a lieu, l'ensemble E des solutions de (2.4) est contenu dans la *sphère* $\| u \| = \rho$, ρ convenable ; comme E est d'après 2) fermé convexe et comme on a supposé la norme $v \to \| v \|$ strictement convexe, il en résulte que E est réduit à un point. ∎

Les méthodes précédentes sont voisines de celles utilisées dans l'étude des *applications de dualité* et c'est pourquoi nous allons brièvement étudier ces applications de dualité ([1]).

Soit F un espace de Banach sur $\mathbf{R}$, de norme $\| \;\; \|$ et soit $\| \;\; \|_*$ la norme duale sur le Banach (dual) F', et soit $(\; , \;)$ le produit scalaire entre F et F'.

Soit $r \to \Phi(r)$ *une fonction continue monotone strictement croissante*

$$\text{de } \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \ \Phi(0) = 0, \ \Phi(r) \to \infty \quad \text{si} \quad r \to \infty .$$

Une application J de $F \to F'$ est dite « *application de dualité* » *relative à Φ* si les conditions suivantes ont lieu :

$$(J(u), u) = \| J(u) \|_* \| u \| \quad \forall u \in F, \tag{2.17}$$

$$\| J(u) \|_* = \Phi(\| u \|) \quad \forall u \in F. \tag{2.18}$$

Naturellement cette notion dépend de la norme choisie sur F. ∎

Exemples.

1) Si $F = L^p(\Omega)$, $\| u \| = \left(\int_\Omega | u |^p \, dx \right)^{1/p} = \| u \|_{L^p(\Omega)}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$,

alors $J(u) = | u |^{p-2} u$.

2) Si $F = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\| u \| = \left(\sum_{i=1}^n \| D_i u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$, $\Phi(r) = r^{p-1}$,

alors $J(u) = - \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)$. ∎

Avant de montrer *qu'il existe toujours* des opérateurs de dualité, vérifions des propriétés simples de J, résultant de (2.17) (2.18).

([1]) Qui seront très utiles plus loin.

Proposition 2.1. — *Toute application de dualité est monotone.*

Démonstration.

D'après (2.17) on a :

$$(2.19)\quad \big(J(u) - J(v), u - v\big) = \|J(u)\|_* \|u\| + \|J(v)\|_* \|v\| - \big(J(u), v\big) - \big(J(v), u\big).$$

Utilisons ensuite (2.18) ; posons : $\|u\| = a$, $\|v\| = b$; alors (2.19) donne :

$$(2.20)\qquad \big(J(u) - J(v), u - v\big) \geqslant \big(\Phi(a) - \Phi(b)\big)(a - b)$$

d'où le résultat. ▮

Proposition 2.2. — *Si F est strictement convexe, J est strictement monotone.*

Démonstration.

Il faut montrer que si $\big(J(u) - J(v), u - v\big) = 0$ alors $u = v$.

Il résulte déjà de (2.20) que $\|u\| = \|v\|$.

Notons que si $g \in F'$, $g \neq 0$, $\|g\|_* = \sup\limits_{\|v\|=1} (g, v)$ et si F est strictement convexe le sup. est atteint en un point *unique* de la sphère unité ; en effet le sup. est atteint sur un ensemble *convexe* de la sphère unité.

On en déduit que $u = v$. En effet, si $u \neq v$ (¹), alors $\dfrac{u}{\|u\|} \neq \dfrac{v}{\|v\|}$ (car $\|u\| = \|v\|$) et donc

$$\|J(u)\|_* = \left(J(u), \frac{u}{\|u\|}\right) > \left(J(u), \frac{v}{\|v\|}\right),$$

donc

$$\big(J(u), v\big) < \big(J(u), u\big),$$

et de même

$$\big(J(v), u\big) < \big(J(v), v\big)$$

et alors

$$0 = \big(J(u) - J(v), u - v\big) > \big(J(u), u\big) + \big(J(v), v\big) - \big(J(u), u\big) - \big(J(v), v\big) = 0,$$

ce qui est absurde. ▮

Montrons maintenant l'existence :

Proposition 2.3. — *Il existe toujours une application de dualité relative à Φ. Cette application est définie de façon unique si F' est strictement convexe.*

Démonstration.

1) Soit S la sphère unité de F. Pour $u \in S$ il existe, d'après le Théorème de HAHN-BANACH, un élément $u^* \in F'$ et un seul, tel que

$$\|u^*\|_* = 1, \quad (u^*, u) = 1 .$$

(¹) Non nuls. Si par ex. $v = 0$ alors $u = 0$.

2) On définit alors J sur F par

$$J(\lambda u) = \Phi(\lambda)\, u^*, \quad \lambda \geqslant 0, \quad u \in S, \quad u^* \text{ choisi comme en 1)}. \tag{2.21}$$

L'opérateur défini par (2.21) répond à la question. L'unicité résulte de la stricte convexité de F' (par l'absurde). ▮

Proposition 2.4. — *Soit F un espace de Banach réflexif de dual strictement convexe. L'application de dualité J relative à Φ est hémi continue.*

Démonstration.

En fait il y a plus : J est continue de $F \to F'$ faible.

Vu la construction (2.21) il suffit de vérifier que si $u_m \in S$, $u_m \to u_0(u_0 \in S)$, alors $J(u_m) \to J(u_0)$ dans F' faible.

Or $\| J(u_m) \|_* = \Phi(1)$; on peut extraire une suite u_μ telle que $J(u_\mu) \to \chi$ dans F' faible. Alors $(J(u_\mu), u_\mu) \to (\chi, u_0)$ et donc

$$\| \chi \|_* \geqslant (\chi, u_0) = \lim \left(J(u_\mu), u_\mu\right) = \lim \left\| J(u_\mu) \right\|_* \geqslant \| \chi \|_*,$$

donc

$$\begin{aligned} (\chi, u_0) &= \| \chi \|_* \| u_0 \|, \\ \| \chi \|_* &= \Phi(\| u_0 \|) \end{aligned}$$

et donc $\chi = J(u_0)$, d'où le résultat suit. ▮

Comme J est borné (d'après (2.18)) et coercif ((2.3) a lieu car $\Phi(r) \to \infty$ si $r \to \infty$), on voit, en utilisant le Théorème 2.1 (et la Proposition 2.3 pour l'existence) que l'on a le :

Théorème 2.3. — *Soit F un espace de Banach réflexif strictement convexe ainsi que son dual. Soit J l'application de dualité de $F \to F'$ relative à Φ. Pour f donné dans F', il existe u unique dans F tel que*

$$J(u) = f. \tag{2.22}$$ ▮

On peut compléter le Théorème 2.3 de la façon suivante :

Théorème 2.4. — *Soit F un espace de Banach réflexif strictement convexe ainsi que son dual. L'application $f \in F' \to u = J^{-1}(f)$ (solution de (2.22)) définit l'application de dualité de $F' \to F$ relative à Φ^{-1}.*

Démonstration.

Il suffit de remplacer u par $J^{-1}(f)$ dans (2.17) (2.18). ▮

Le Théorème 2.4 conduit naturellement aux espaces « réflexifs » *et* « strictement convexes ainsi que leur dual ». En fait, la deuxième hypothèse n'est pas une restriction essentielle, comme montre le résultat suivant dû à ASPLUND [1] auquel nous renvoyons pour la démonstration. Cf. aussi LINDENSTAUSS [1].

Théorème 2.5. — *Soit F un espace de Banach réflexif de norme $\| \ \|$. Il existe une norme $||| \ |||$ équivalente à $\| \ \|$ telle que, pour cette nouvelle norme, F soit strictement convexe ainsi que son dual muni de la norme duale de $||| \ |||$.*

On peut compléter quelque peu ce résultat :

Théorème 2.6 (cf. BREZIS-CRANDALL-PAZY [1]). — *Soit F un espace de Banach réflexif de norme $\| \ \|$. Pour tout $a > 1$ il existe une norme $\| \ \|_a$ sur F telle que :*

(i) *F soit strictement convexe ainsi que son dual (muni de la norme duale $\| \ \|_{a,*}$ de $\| \ \|_a$) ;*

(ii) $\frac{1}{a}\| \ \|_a \leqslant \| \ \| \leqslant a \| \ \|_a$, $\quad \frac{1}{a}\| \ \|_{a,*} \leqslant \| \ \|_* \leqslant a \| \ \|_{a,*}$. ▮

2.3 Exemples.

2.3.1 *Opérateur A défini en* (1.17), $1 < p < \infty$; *problème de Dirichlet.*

D'après ce qu'on a vu au n^{ro} 1 (ou encore, d'après ce qu'on vient de voir sur les applications de dualité), le Théorème 2.1 donne aussitôt : *pour f donné dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que*

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f$$

et *il y a unicité* (d'après le Théorème 2.2 ou le Théorème 2.3). ▮

2.3.2 *Problème de Dirichlet non homogène.*

Soit A défini comme en 2.3.1. *Il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ unique tel que*

$$A(u) = f \ , f \in W^{-1,p'}(\Omega) \, ,$$

$$u|_\Gamma = g \, , g \in W^{1/p',p}(\Gamma) \ (\text{cf. } (1.51)) \, .$$

En effet, on introduit $w \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $w|_\Gamma = g$ (un tel w existe d'après les hypothèses faites sur g). Introduisant $\psi = u - w$, tout revient à résoudre :

$$A(\psi + w) = f, \ \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

i. e. un problème analogue à celui du 2.3.1 *avec l'opérateur A remplacé par A_1 défini par*

$$A_1(\psi) = A(\psi + w), \quad w \text{ fixé dans } W^{1,p}(\Omega) \, .$$

On vérifie sans peine que A_1, opérateur de $W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$, possède les propriétés du Théorème 2.1, ce qui montre *l'existence* d'une solution.

Soient maintenant u_1 et u_2 deux solutions éventuelles. Alors

$$u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

et donc

$$\left(A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\right) = 0 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x$$

d'où résulte que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \qquad \forall i$$

et comme $u_1 - u_2 = 0$ sur Γ, on a $u_1 = u_2$. ▮

2.3.3 *Problème de Neumann.*

On prend maintenant

$$V = W^{1,p}(\Omega) \, ,$$

et pour $u, v \in V$ on pose

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int | D_i u |^{p-2} D_i u D_i v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega | u |^{p-2} uv \, \mathrm{d}x \, . \tag{2.23}$$

On choisit $f \in V'$ par

$$\begin{cases} (f, v) = \int_\Omega f_0 \, v \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma gv \, \mathrm{d}\Gamma \, , \\ f_0 \in L^{p'}(\Omega) \, , g \in W^{-1/p', p'}(\Gamma) \, . \end{cases} \tag{2.24}$$

On peut appliquer le Théorème 2.1 ; on en déduit *l'existence de u dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant*

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + | u |^{p-2} u = f_0 \, , \tag{2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = g \quad \text{sur} \quad \Gamma(^1) \, . \tag{2.26}$$

Il y a en outre *unicité* de la solution (application du Théorème 2.3). ▮

Remarque 2.3.

On adaptera au cas stationnaire les autres exemples donnés au n^{ro} 1. ▮

(1) On peut justifier (2.26) par les méthodes de LIONS-MAGENES [1], Chapitre 2. Cf. aussi n^{ro} 4 ci-après.

Orientation.

Comme on verra ci-après au n^ro^ 2.5 les conditions du Théorème 2.1 sont *insuffisantes* pour les « Opérateurs du Calcul des Variations » ; par contre l'hypothèse (2.12) est suffisante mais pour sa *vérification* éventuelle il est bon d'introduire une « *classe intermédiaire* » entre les opérateurs ayant les propriétés du Théorème 2.1 et ceux ayant la propriété (2.12) : c'est la classe des opérateurs *pseudo-monotones*. ∎

2.4 Les opérateurs pseudo-monotones

Définition 2.1. — Un opérateur A de $V \to V'$ est dit *pseudo-monotone* si :

(i) A est borné,

(ii) lorsque $u_j \to u$ dans V faible et $\limsup \big(A(u_j), u_j - u\big) \leqslant 0$ alors

(2.27) $$\liminf \big(A(u_j), u_j - v\big) \geqslant \big(A(u), u - v\big) \quad \forall v \in V\,(^1)\,.$$ ∎

Vérifions tout de suite qu'on a bien là une classe « intermédiaire » :

Proposition 2.5. — *On a les implications :*

« *A borné, hémicontinu, monotone* » ⇒ « *A pseudo-monotone* » ⇒
« *A a la propriété* (2.12) » (i. e. « *A est de type* (M) »).

Démonstration de la première implication.

1) Si u_j vérifie (ii) de la Définition 2.1 et si A est monotone, alors

(2.28) $$\big(A(u_j), u_j - u\big) \to 0\,.$$

En effet, d'après la monotonie,

$$\big(A(u_j), u_j - u\big) \geqslant \big(A(u), u_j - u\big) \to 0\,.$$

2) Soit $w = (1 - \theta)\,u + \theta v$, $\theta \in \,]0, 1[$; on a :

$$\big(A(u_j) - A(w), u_j - w\big) \geqslant 0\,,$$

donc

$$\theta\big(A(u_j), u - v\big) \geqslant -\big(A(u_j), u_j - u\big) + \big(A(w), u_j - u\big) - \theta\big(A(w), v - u\big)$$

(1) En fait les hypothèses (i) (sans l'hémicontinuité) et (ii) *entraînent que A est continu de V fort dans V' faible.* En effet supposons qu'il existe $u_n \to u$ dans V fort, $A(u_n)$ ne tendant pas vers $A(u)$ dans V' faible. Comme $A(u_n)$ demeure dans un borné de V', on peut extraire une suite u_μ telle que $A(u_\mu) \to f$ dans V' faible, $f \neq A(u)$. Alors

$$\limsup \big(A(u_\mu), u_\mu - u\big) = 0\,,$$

donc

$$\liminf \big(A(u_\mu), u_\mu - v\big) = (f, u - v) \geqslant \big(A(u), u - v\big) \quad \forall v \in V,$$

et donc $f = A(u)$; il y a contradiction.

d'où, grâce à (2.28) :

$$\theta \liminf \big(A(u_j), u - v\big) \geqslant -\theta\big(A(w), v - u\big),$$

d'où, divisant par θ et tenant compte de (2.28) :

$$\liminf \big(A(u_j), u_j - v\big) \geqslant \big(A(w), u - v\big), \quad w = (1-\theta)\,u + \theta v\,, \quad \forall \theta \in \,]0, 1[\,. \tag{2.29}$$

Faisant $\theta \to 0$ dans (2.29) on en déduit (2.27). ▌

Démonstration de la deuxième implication.

Soit $u_j \to u$ dans V faible, $A(u_j) \to \chi$ dans V' faible et

$$\limsup \big(A(u_j), u_j\big) \leqslant (\chi, u)\,.$$

Alors :

$$\limsup \big(A(u_j), u_j - u\big) \leqslant 0$$

et donc

$$\big(A(u), u - v\big) \leqslant \text{(d'après (2.27))} \liminf \big(A(u_j), u_j - v\big) \leqslant (\chi, u - v) \quad \forall v \in V,$$

et donc

$$\chi = A(u)\,. \ ▌$$

Il résulte alors de la Remarque 2.1 et de la Proposition 2.5 que l'on a le

Théorème 2.7. — *Soit A un opérateur pseudo-monotone vérifiant* (2.3). *Alors,* $\forall f \in V'$, *l'équation* (2.4) *admet* (*au moins*) *une solution.* ▌

Naturellement tout cela n'est pour l'instant qu'un « jeu abstrait » dont l'intérêt n'apparaîtra qu'aux 2.5 et 2.6 et, plus loin, dans l'étude des inéquations. ▌

2.5 Les opérateurs de calcul des variations. Etude axiomatique

Définition 2.2. — Soit toujours V un espace de Banach réflexif séparable. Un opérateur A de $V \to V'$ est dit du type du « *Calcul des Variations* » s'il est borné et si on peut le représenter par

$$A(v) = A(v, v)\,, \tag{2.30}$$

où $u, v \to A(u, v)$ est un opérateur de $V \times V \to V'$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall u \in V,\ v \to A(u, v) \quad \text{est hémicontinue bornée de} \\ V \to V', \quad \text{et} \quad \big(A(u, u) - A(u, v), u - v\big) \geqslant 0\,, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\forall v \in V,\ u \to A(u, v) \quad \text{est bornée hémicontinue de} \quad V \to V'\,, \tag{2.32}$$

$$(2.33)\ \begin{cases} \text{si} \quad u_\mu \to u \quad \text{dans } V \text{ faible et si} \quad \big(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u\big) \to 0 \\ \text{alors,} \quad \forall v \in V,\ A(u_\mu, v) \to A(u, v) \quad \text{dans} \quad V' \text{ faible}, \end{cases}$$

$$(2.34)\ \begin{cases} \text{si} \quad u_\mu \to u \quad \text{dans } V \text{ faible et si} \quad A(u_\mu, v) \to \psi \quad \text{dans } V' \text{ faible}, \\ \text{alors} \quad \big(A(u_\mu, v), u_\mu\big) \to (\psi, u)\,. \text{ (1)} \ \blacksquare \end{cases}$$

Un *exemple* de cette situation sera donné au nro 2.6.

Proposition 2.6. — *On a l'implication* :

« *A du calcul des variations* » $\Rightarrow$ « *A pseudo-monotone* ».

Démonstration.

Soit $u_j \to u$ dans V faible avec

$$\limsup \big(A(u_j), u_j - u\big) \leqslant 0\,. \tag{2.35}$$

1) On va d'abord montrer que l'on peut extraire une suite u_k telle que

$$X_k = \big(A(u_k, u_k) - A(u_k, u), u_k - u\big) \to 0\,. \tag{2.36}$$

En effet, on peut extraire une suite u_k telle que $A(u_k, u) \to \chi$ dans V' faible (car $A(u_j, u)$ est borné dans V') et alors, d'après (2.34), $\big(A(u_k, u), u_k\big) \to (\chi, u)$ et donc $\big(A(u_k, u), u_k - u\big) \to 0$.

Cela, joint à l'hypothèse (2.35), montre que $\limsup X_k \leqslant 0$ et comme, d'après (2.31), $X_k \geqslant 0$, on a (2.36).

2) On peut alors utiliser (2.33) ; donc

$$A(u_k, v) \to A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible} \quad \forall v \in V\,, \tag{2.37}$$

et utilisant alors (2.34) on a :

$$\big(A(u_k, v), u_k - u\big) \to 0 \quad \forall v \in V\,. \tag{2.38}$$

Comme $X_k \geqslant 0$, on a :

$$\big(A(u_k), u_k - u\big) \geqslant \big(A(u_k, u), u_k - u\big) \to 0 \quad (\text{par } (2.38))$$

ce qui, joint à (2.35) donne

$$\big(A(u_k), u_k - u\big) \to 0\,. \tag{2.39}$$

3) On utilise maintenant le fait que

$$\big(A(u_k) - A(u_k, w), u_k - w\big) \geqslant 0 \quad \forall w\,,$$

avec $w = (1 - \theta)\, u + \theta v$, $\theta \in \,]0\,,1[$; il vient

$$\theta\big(A(u_k), u - v\big) \geqslant -\big(A(u_k), u_k - u\big) + \big(A(u_k, w), u_k - u\big) + \theta\big(A(u_k, w), u - v\big)$$

et utilisant (2.39) (2.38) (2.37) on en déduit

$$\theta \liminf \big(A(u_k), u - v\big) \geqslant \theta \liminf \big(A(u_k, w), u - v\big) = \theta\big(A(u, w), u - v\big)$$

(1) Les hypothèses (2.30) ... (2.34) entraînent que A est hémicontinu.

et donc, divisant par θ et utilisant (2.39) :

$$\liminf \left(A(u_k), u_k - v\right) \geqslant \left(A(u, (1 - \theta) u + \theta v), u - v\right)$$

et faisant $\theta \to 0$, on en déduit (2.27). ▮

On déduit de la Proposition 2.6 et du Théorème 2.7 le

Corollaire 2.1. — *Soit A un opérateur du Calcul des variations* (*au sens de la Définition* 2.2). *Alors l'équation* (2.4) *admet* (*au moins*) *une solution.* ▮

2.6 Les opérateurs du calcul des variations. Exemples

2.6.1 *Construction d'un opérateur A.*

Notations.

On se place sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, borné, de frontière assez régulière. On désigne par N_1 (resp. N_2) le nombre de dérivations en x d'ordre $\leqslant m - 1$ (resp. d'ordre $= m$). Soit $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ une famille de fonctions réelles $(|\alpha| \leqslant m)$ définies sur $\Omega \times \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$, vérifiant

$$(2.40) \quad \begin{cases} \text{pour presque tout } x \in \Omega, \text{ la fonction } \eta, \xi \to A_\alpha(x, \eta, \xi) \text{ est continue} \\ \text{sur } \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2} \text{ et } \forall \eta, \xi \text{ la fonction } x \to A_\alpha(x, \eta, \xi) \text{ est mesurable.} \end{cases}$$

On pose :

$$D^k u = \{ D^\beta u, |\beta| = k \},$$
$$\delta u = \{ u, Du, \dots, D^{m-1} u \},$$
$$A_\alpha(x, \delta u, D^m v) : x \to A_\alpha\left(x, \delta u(x), D_m(x)\right).$$

On supposera :

$$(2.41) \quad \begin{cases} \text{il existe} \quad k \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{telle que} \\ |A_\alpha(x, \eta, \xi)| \leqslant c[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x)], \\ 1 < p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1. \end{cases}$$

On vérifie aussitôt ceci :

$$(2.42) \quad \begin{cases} \text{si} \quad (2.41) \text{ a lieu, alors} \quad \forall u, v \in W^{m,p}(\Omega), \text{ la fonction} \\ A_x(x, \delta u, D^m v) \quad \text{est dans} \quad L^{p'}(\Omega). \end{cases} ▮$$

Remarque 2.4.

On peut améliorer (i. e. augmenter) l'exposant de $|\eta|$ dans (2.41) (et en distinguant les exposants selon l'ordre correspondant des dérivations), tout en conservant (2.42), par utilisation du Théorème de Sobolev. ▮

Sous l'hypothèse (2.41) on peut donc, grâce à (2.42), poser $\forall u, w \in W^{m,p}(\Omega)$

$$(2.43) \quad a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u)\, D^\alpha w \, dx.$$

On introduit maintenant :

(2.44) V = sous-espace vectoriel fermé de $W^{m,p}(\Omega)$, contenant $W_0^{m,p}(\Omega)$.

La forme $w \to a(u, w)$ est linéaire continue sur V, donc s'écrit

$$a(u, w) = (A(u), w), \quad A(u) \in V' \text{ (1)} . \tag{2.45}$$

Pour $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, $A(u)$ est donné par

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_\alpha(x, \delta u, D^m u)) . \tag{2.46}$$

Remarque 2.5.

La situation est, du point de vue des conditions aux limites, l'analogue des problèmes variationnels linéaires : les conditions aux limites « stables » sont contenues dans l'appartenance à V, et les conditions aux limites complémentaires correspondent à l'usage (formel) de la formule de Green dans (2.45).

Le cas $V = W_0^{m,p}(\Omega)$ correspond au problème de Dirichlet et le cas $V = W^{m,p}(\Omega)$ correspond à un problème du type de Neumann. ▌

2.6.2 *Exemples où les hypothèses de la Définition* 2.2 *ont lieu.*

On va démontrer le

Théorème 2.8.—*On suppose que* (2.40) (2.41) *ont lieu ainsi que les hypothèses suivantes* :

$$\frac{a(v, v)}{\| v \|} \to +\infty \quad si \quad \| v \| \to \infty , \tag{2.47}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\, \xi_\alpha \frac{1}{|\xi| + |\xi|^{p-1}} \to \infty \quad si \quad |\xi| \to \infty , \\ \text{pour } x \text{ fixé p. p. dans } \Omega \text{ et pour } |\eta| \text{ borné} , \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha| = m} (A_\alpha(x, \eta, \xi) - A_\alpha(x, \eta, \xi^*))\,(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) > 0 \quad si \quad \xi \neq \xi^* , \\ \text{p. p. dans } \Omega , \quad \forall \eta . \end{cases} \tag{2.49}$$

Soit V *donné avec* (2.44) *et* A *l'opérateur de* $V \to V'$ *défini par* (2.45). *Alors*, $\forall f \in V'$, *il existe* u *dans* V *tel que*

$$A(u) = f . \tag{2.50}$$

Pour la démonstration, nous utiliserons les deux Lemmes qui suivent.

Lemme 2.1. — *Si* $u_\mu \to u$ *dans* $W^{m-1,p}(\Omega)$ *fort et* $v \in W^{m,p}(\Omega)$, *alors*

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \quad dans \quad L^{p'}(\Omega)\, fort . \tag{2.51}$$

(1) Et où (χ, v) désigne le produit scalaire entre $\chi \in V'$ et $v \in V$.

Démonstration.

Ce Lemme est un cas particulier d'un résultat plus général : considérons une fonction $x, \lambda \to f(x, \lambda)$ de $\Omega \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ qui soit du type de Caratheodory, i. e. :

$$\begin{cases} \text{pour presque tout } x \in \Omega,\ \lambda \to f(x, \lambda) \text{ est continue de } \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}\,; \\ \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{R}^d,\ x \to f(x, \lambda) \text{ est mesurable.} \end{cases}$$

Si $\varphi = \{ \varphi_1, ..., \varphi_d \}$ est un ensemble de fonctions de $\Omega \to \mathbf{R}$, on définit

$$F(x, \varphi) : x \to f\big(x, \{ \varphi_1(x), ..., \varphi_d(x) \}\big) .$$

On dit que f *opère* de

$$\prod_{i=1}^{d} L^{p_i}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad (1 \leqslant p_i, q < \infty)$$

si, $\forall \varphi \in \prod_{i=1}^{d} L^{p_i}(\Omega)$ *la fonction* $F(x, \varphi)$ *appartient à* $L^q(\Omega)$.

On sait alors (cf. M. A. KRASNOSEL'SKII [1], Théorème 2.1, p. 22) que $\varphi \to F(x, \varphi)$ est *continue* de $\prod_{i=1}^{d} L^{p_i}(\Omega) \to L^q(\Omega)$.

Le Lemme en résulte évidemment, en prenant :

$$d = N_1 \quad \text{et} \quad f(x, \lambda) = A_\alpha\big(x, \lambda, D^m v(x)\big) . \ \blacksquare$$

Lemme 2.2. — *On suppose que* (2.41) (2.48) (2.49) *ont lieu. Soit*

$$u_\mu, u \in W^{m,p}(\Omega) \quad \textit{avec} \quad u_\mu \to u \textit{ dans } \quad W^{m,p}(\Omega) \quad \textit{faible.}$$

On pose

$$F_\mu = \sum_{|\alpha|=m} \big(A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) - A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u)\big)\,(D^\alpha u_\mu - D^\alpha u) \tag{2.52}$$

et l'on suppose que (noter que $F_\mu \in L^1(\Omega)$)

$$\int_\Omega F_\mu(x)\, dx \to 0 . \tag{2.53}$$

Alors

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \textit{dans} \quad L^{p'}(\Omega)\,\textit{faible} . \tag{2.54}$$

Démonstration.

D'après (2.49) $F_\mu \geqslant 0$; donc, puisque $u_\mu \to u$ dans $W^{m-1,p}(\Omega)$ *fort* (l'injec-