16 | Isométries du plan euclidien

1 TRANSLATIONS ET SYMÉTRIES CENTRALES DU PLAN EUCLIDIEN

La définition d'une translation de vecteur $\vec{V}$, du plan que nous avons donnée en classe de Quatrième (livre de Quatrième, chap. 21, § 4) s'applique encore dans le cas où ce plan est Euclidien. Rappelons cette définition.

La translation $t_{\vec{v}}$ est l'application de Π dans Π définie par :

Pour deux points quelconques M et M′ de Π :

$$M' = t_{\vec{v}}(M)$$

si et seulement si : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.

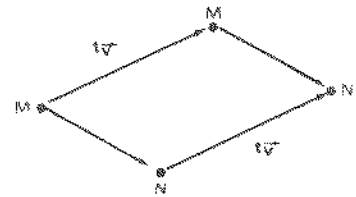


fig. 1

Alors si N est un autre point du plan et $N' = t_{\vec{v}}(N)$,

de : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{V}$

on déduit : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

et en intervertissant les points moyens : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

et deux vecteurs égaux ayant même module : $\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{M'N'}\right\|$.

d désignant la distance Euclidienne : $d(M, N) = d(M', N')$.

Ainsi pour deux points quelconques M et N du plan Euclidien, si M′ et N′ sont les images de ces deux points par la translation $t_{\vec{v}}$, on a : $d(M, N) = d(M', N')$.

Nous traduirons cette propriété en disant que toute translation du plan Euclidien conserve la distance (sous-entendu : de deux points).

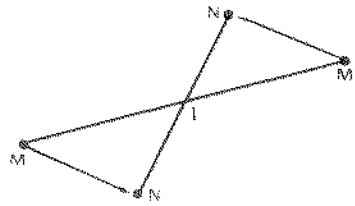
Une symétrie de centre I est définie dans le plan Euclidien comme nous l'avons fait en classe de Quatrième dans un plan quelconque (livre de Quatrième, chap. 20, § 1). Rappelons cette définition.

La symétrie centrale S_I est l'application de Π dans Π définie par :

Pour deux points quelconques M et M′ de Π :

$$M' = S_I(M) \quad \text{si et seulement si :} \quad \text{I est milieu de } (M, M').$$

fig. 2



Alors si N est un autre point du plan et $N' = S_I(N)$.

I étant milieu commun à (M, M') et (N, N'), (M, N, M', N') est un parallélogramme donc :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{N'M'} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{M'N'},$$

dans le plan Euclidien cette relation entraîne :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|-\overrightarrow{M'N'}\right\| = \left\|\overrightarrow{M'N'}\right\| \quad \text{ou encore} \quad d(M, N) = d(M', N').$$

Comme une translation, une symétrie centrale conserve la distance.

On a prouvé en classe de Quatrième, que les translations et les symétries centrales sont des bijections du plan et cela est encore vrai si ce plan est Euclidien. L'étude faite dans ce paragraphe prouve que :

Les translations et les symétries centrales du plan Euclidien sont des bijections de ce plan qui conservent la distance.

2 ISOMÉTRIES DU PLAN EUCLIDIEN

DÉFINITION **On appelle isométrie du plan Euclidien, toute application de ce plan dans lui même qui conserve la distance.**

Donc pour une application i du plan Euclidien Π dans Π.

Dire que i est une isométrie signifie que :

Pour deux points quelconques M et N de Π : $d(i(M), i(N)) = d(M, N)$.

Nous avons donc démontré au paragraphe précédent :

THÉORÈME **Les translations et les symétries centrales du plan Euclidien sont des isométries.**

Première conséquence de la définition d'une isométrie.

Si i est une isométrie et M et N deux points quelconques du plan Euclidien de

$$d(M, N) = d(i(M), i(N))$$

on déduit que $d(M, N) = 0$ si et seulement si $d(i(M), i(N)) = 0$

et $d(M, N) \neq 0$ si et seulement si $d(i(M), i(N)) \neq 0$

on a donc

THÉORÈME **Si M et N sont deux points quelconques du plan Euclidien et i une isométrie**

$$M \neq N \longrightarrow i(M) \neq i(N)$$

ou encore :

$$i(M) = i(N) \longrightarrow M = N$$

3 IMAGES PAR UNE ISOMÉTRIE DE LA RÉUNION ET DE L'INTERSECTION DE DEUX PARTIES DU PLAN

Soit f une application de source **E** et de but **F**.

Rappelons que si **S** est une partie de **E**, $f(\mathbf{S})$ désigne l'ensemble des images par f des éléments de **S**, donc si **S** est vide $f(\mathbf{S})$ est vide.

Ainsi $f(\varnothing) = \varnothing$.

Soient maintenant **S** et **T** deux parties de E. Comparons les deux ensembles :

$$f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) \quad \text{et} \quad f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$$

Pour tout élément x de $\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$: $x \in \mathbf{S}$ ou $x \in \mathbf{T}$
alors $f(x) \in f(\mathbf{S})$ ou $f(x) \in f(\mathbf{T})$

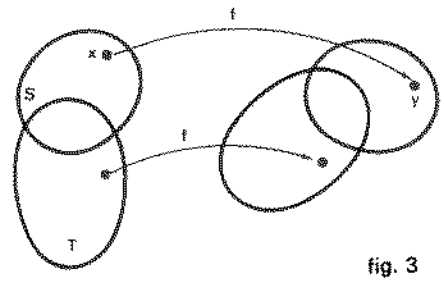


fig. 3

donc

$$f(x) \in f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T});$$

ainsi tout élément de $\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ a son image dans $f(S) \cup f(T)$

Autrement dit : $f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$

Réciproquement, pour tout élément y de $f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$:

$$y \in f(\mathbf{S}) \quad \text{ou} \quad y \in f(\mathbf{T})$$

ce qui signifie que y est l'image par f d'un élément x de **S** ou y est l'image par f d'un élément x' de **T**.

Ainsi tout élément y de $f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$ est élément de $f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T})$ c'est-à-dire :

$$f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T})$$

comme on a déjà vu que

$$f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$$

on a donc : $f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T})$

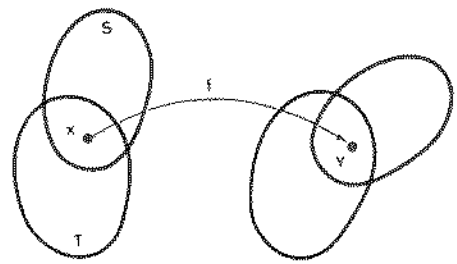


fig. 4

Comparons maintenant :

$$f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \quad \text{et} \quad f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$$

Si : $\mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \varnothing$ $\quad f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = f(\varnothing) = \varnothing$

Si $\mathbf{S} \cap \mathrm{T} \neq \varnothing$, pour tout élément x de $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$, $x \in \mathbf{S}$ et $x \in \mathbf{R}$
donc

$$f(x) \in f(\mathbf{S}) \quad \text{et} \quad f(x) \in f(\mathbf{T}) \quad \text{donc} \quad f(x) \in f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$$

Ainsi tout élément de $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ a son image dans $f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$
c'est-à-dire que

$$f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$$

Considérons l'application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels dans lui-même qui est telle que $f(x) = 0$ chaque fois que x est pair et $f(x) = 1$ chaque fois que x est impair.

Soit $\mathbf{S} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathbf{T} = \{3, 4, 5\}$

quels sont les ensembles

$$f(\mathbf{S}) \quad , \quad f(\mathbf{T}) \quad , \quad f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \quad \text{et} \quad f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T}) \quad ,$$

les deux derniers sont-ils égaux ?

Nous voyons sur cet exemple que l'inclusion $f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$ peut être stricte.

THÉORÈME **Si S et T sont deux parties de la source d'une application f on a :**

$$f(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = f(\mathbf{S}) \cup f(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad f(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subset f(\mathbf{S}) \cap f(\mathbf{T})$$

la deuxième inclusion pouvant être stricte.

En appliquant ces résultats à une isométrie i du plan Euclidien on obtient pour deux parties S et T du plan

$$i(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = i(\mathbf{S}) \cup i(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad i(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subset i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$$

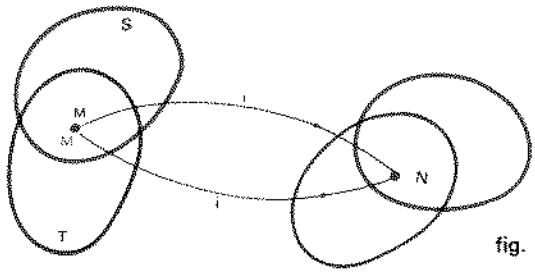


fig. 5

Mais dans ce cas
pour tout élément N de $i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$ on a :

$$\mathbf{N} \in i(\mathbf{S}) \quad \text{et} \quad \mathbf{N} \in i(\mathbf{T})$$

ce qui signifie qu'il existe un point M de S qui a pour image N et qu'il existe un point M' de T qui a pour image N donc :

$$\mathbf{N} = i(\mathbf{M}) = i(\mathbf{M}')$$

or d'après la propriété vue à la fin du paragraphe 2

$$i(\mathbf{M}') = i(\mathbf{M}) \quad \text{entraîne} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

Donc $\mathbf{N} = i(\mathbf{M})$ avec $\mathbf{M} \in \mathbf{S}$ et $\mathbf{M} \in \mathbf{T}$ soit $\mathbf{M} \in \mathbf{S} \cap \mathbf{T}$

Ainsi tout élément $i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$ est l'image d'un élément de $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ c'est-à-dire :

$$i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T}) \subset i(\mathbf{S} \cap \mathbf{T})$$

ce qui avec $i(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) \subset i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$ déjà vue donne : $i(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$

THÉORÈME **Si S et T sont deux parties du plan Euclidien et i une isométrie on a**

$$i(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = i(\mathbf{S}) \cup i(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad i(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = i(\mathbf{S}) \cap i(\mathbf{T})$$

PROPRIÉTÉS DE L'ISOMÉTRIE

Soient A', B' et C' les images par une isométrie i de trois points A, B et C.

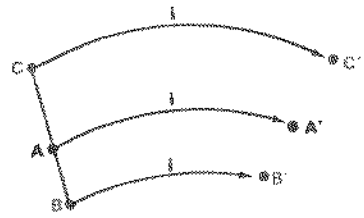


fig. 6

a) Si les points A, B et C sont alignés on a d'après le paragraphe 3 du chapitre 14

$$d(B, C) = d(A, B) + d(A, C) \quad \text{ou} \quad d(B, C) = |d(A, B) - d(A, C)|$$

en remplaçant $d(B, C)$, $d(A, B)$ et $d(A, C)$ par les nombres $d(B', C')$, $d(A', B')$ et $d(A', C')$ qui leurs sont respectivement égaux, on obtient :

$$d(B', C') = d(A', B') + d(A', C') \quad \text{ou} \quad d(B', C') = |d(A', B') - d(A', C')|$$

ce qui d'après le résultat du chapitre cité ci-dessus entraîne l'alignement des trois points A', B' et C'.

b) Si maintenant les trois points A, C et B ne sont pas alignés on a

$$|d(A, B) - d(A, C)| < d(B, C) < d(A, B) + d(A, C)$$

et en raisonnant comme dans le cas précédent

$$|d(A', B') - d(A', C')| < d(B', C') < d(A', B') + d(A', C')$$

ce qui prouve que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

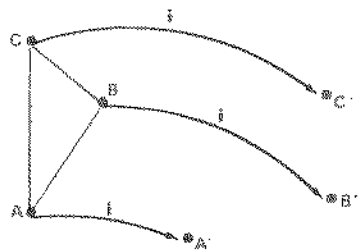


fig. 7

Une isométrie transforme donc trois points alignés en trois points alignés, et trois points non alignés en trois points non alignés.

Soit (I, J) le repère d'une graduation Euclidienne d'une droite Δ, soient I' et J' les images de I et J par une isométrie i, on a alors

$$d(I', J') = d(I, J) = I$$

donc (I', J') est le repère d'une graduation Euclidienne g' de la droite $\Delta' = (I'J')$.

Si M est un point quelconque de Δ et $M' = i(M)$, I, J et M étant alignés, il en est de même de I', J' et M' donc $M' \in \Delta'$.

De $$d(I, M) = |g(M) - g(I)| = |g(M)|$$

on déduit puisque i conserve la distance

$$d(I', M') = |g'(M') - g'(I')| = |g'(M')| = d(I, M) \qquad \text{donc} \qquad |g(M)| = |g'(M')|$$

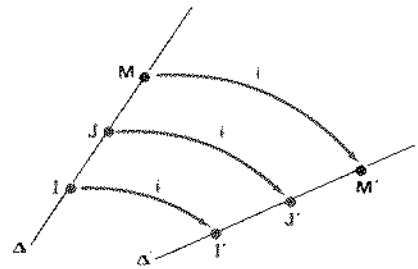


fig. 8

Les deux nombres réels $g(M)$ et $g'(M')$ qui ont même valeur absolue sont donc égaux ou opposés.

Cherchons quels sont les points M de Δ, tels que $g'(M') = -g(M)$. De $d(J, M) = d(J', M')$ on déduit

$$|g(M) - 1| = |g'(M') - 1| = |-g(M) - 1| \quad ,$$

les deux nombres $(g(M) - 1)$ et $(-g(M) - 1)$ qui ont même valeur absolue sont alors égaux ou opposées, c'est-à-dire :

$g(M) - 1 = g(M) + 1$ ce qui est impossible car cela entraînerait $-1 = 1$

ou

$g(M) - 1 = -g(M) - 1$ ce qui entraîne $g(M) + g(M) = -1 + 1$

c'est-à-dire

$$2.g(M) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(M) = 0$$

M est alors en I on a bien en effet

$$-g'(I') = 0 = g(I)$$

Pour tous les points autres que I on a donc : $g'(M) = g(M')$ et cette relation est vérifiée aussi pour I car $g'(I') = 0 = g(I)$.

Donc si (I, J) est le repère d'une graduation Euclidienne g d'une droite Δ et i une isométrie (i (I), i (J)) est le repère d'une graduation Euclidienne g' et tout point M de Δ est tel que : i (M) appartient à la droite contenant i (I) et i (J) de plus

$$g'(i(M)) = g(M)$$

Si U est le barycentre des points M et N affectés des coefficients a et b tels que $a + b \neq 0$, on a :

$$g(U) = \frac{a.g(M) + b.g(N)}{a + b}$$

si U', M', N' sont les images de U, M et N par l'isométrie i, en remplaçant dans la relation précédente g (U), g (M) et g (N) par les nombres g' (U'), g' (M') et g' (N') qui leurs sont respectivement égaux on obtient :

$$g'(U') = \frac{a.g'(M') + b.g'(N')}{a+b} .$$

autrement dit i (U) est le barycentre des points i (M) et i (N) affectés des coefficients a et b.

En particulier si $a = b = 1$, l'image par une isométrie i du milieu de deux points M, N est le milieu de (i (M), i (N)).

Si (M, N, P, Q) est un parallélogramme, l'image i (S) du point S, milieu commun à (M, P) et (N, Q), est milieu de (i (M), i (P)) et (i (N), i (Q)).

(i (M), i (N), i (P), i (Q)) est donc un parallélogramme.

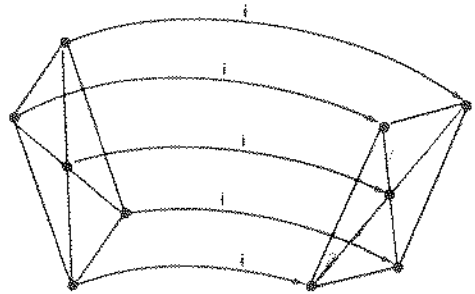


fig. 9

Soient A, B, C et D quatre points, et k un nombre réel vérifiant la relation : $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$. On a vu, en classe de Quatrième que cela signifie qu'il existe une droite Δ et trois points M, N, P de cette droite, tels que :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CD}$$

et que pour toute graduation de cette droite $\overline{MP} = k.\overline{MN}$, en particulier pour une graduation Euclidienne g
on a :

$$g(P) - g(M) = k.(g(N) - g(M)) \qquad (1)$$

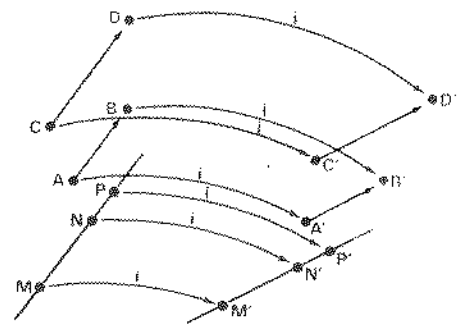


fig. 10

Si A', B', C', D', M', N', P' sont les images par une isométrie i des points A, B, C, D, M, N, P les points M', N' et P' appartiennent à une même droite Δ' et si g' est la graduation de Δ', dont le repère est l'image par i du repère de g.

On a pour tout point T de Δ : $g'(i(T)) = g(T)$, et la relation (1) devient :

$$g'(P') - g'(M') = k.[g'(N') - g'(M')] \quad \text{soit} \quad \overline{M'P'} = k.\overline{M'N'}$$

(M, N, B, A) et (M, P, D, C) étant deux parallélogrammes il en est de même de

(M', N', B', A') et (M', P', D', C') donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{C'D'}$

la relation $\overrightarrow{M'P'} = k.\overrightarrow{M'N'}$ se traduit donc par $\overrightarrow{C'D'} = k.\overrightarrow{A'B'}$.

THÉORÈME

Si quatre points A, B, C et D sont tels qu'il existe un nombre réel k, vérifiant la relation : $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$, leurs images A', B', C' et D' par une isométrie i vérifient la relation :

$$\overrightarrow{C'D'} = k.\overrightarrow{A'B'}$$

5 IMAGE D'UNE DROITE PAR UNE ISOMÉTRIE

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si (I, J) est le repère d'une graduation Euclidienne d'une droite Δ, et si i est une isométrie, pour tout point M de Δ, $i(M)$ appartient à la droite Δ' qui contient les deux points $i(I)$ et $i(J)$, que $(i(I), i(J))$ est le repère d'une graduation Euclidienne g' de la droite Δ' et que $g'(i(M)) = g(M)$; donc si M décrit toute la droite Δ, son abscisse $g(M)$ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et alors le point $i(M)$ dont l'abscisse dans la graduation g' de Δ' parcourt $\mathbb{R}$, décrit donc toute la droite Δ'. L'ensemble des images des points de Δ, est donc la droite Δ'.

Autrement dit : $i(\Delta) = \Delta'$.

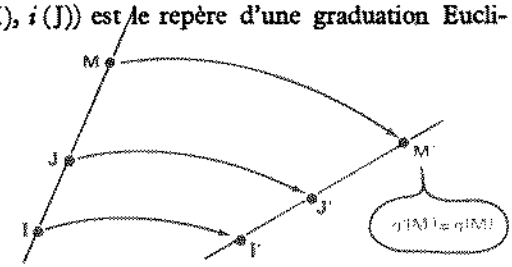


fig. 11

Si maintenant M appartient à une demi-droite fermée d'origine A, en appelant B, le point de cette demi-droite, tel que (A, B) est le repère d'une graduation Euclidienne g de (AB). Si $A' = i(A)$ et $B' = i(B)$ et g' la graduation de repère (A', B'), pour tout point M de la demi-droite [A, B), le point $i(M)$ appartient à la droite (A'B') et $g'(i(M)) = g(M)$ montre que, quand M décrit la demi-droite [A, B), $g(M)$ décrit l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs, et alors, il en est de même de $g'(i(M))$, donc $i(M)$ décrit la demi-droite [A', B'); ce qui prouve que :

$$i([A, B)) = [i(A), i(B)).$$

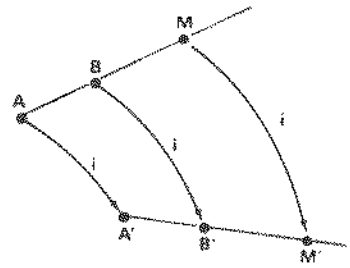


fig. 12

Si maintenant M appartient à un segment de droite [A, C] en appelant B le point de la demi-droite [A, C) tel que (A, B) soit le repère d'une graduation Euclidienne g, et en reprenant les mêmes notations que ci-dessus. Quand M décrit le segment [A, C], son abscisse g (M) décrit l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et g (C) ($0 \leqslant g(M) \leqslant g(C)$), mais alors il en est de même de g' (i (M)) ce qui montre que i (M) décrit le segment [i (A), i (C)], autrement dit :

$$i([A, B]) = [i(A), i(B)].$$

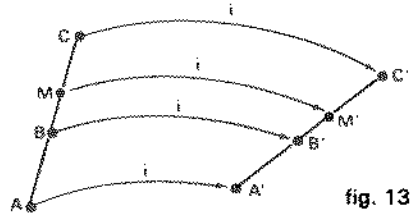


fig. 13

THÉORÈME

L'image par une isométrie d'une droite, est une droite.

L'image par une isométrie d'une demi-droite, est une demi-droite dont l'origine est l'image de l'origine de la première.

L'image par une isométrie d'un segment de droite, est un segment de droite dont les extrémités sont les images des extrémités du premier.

Soient deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2, A, B deux points de Δ_1, C un point de Δ_2; le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ appartient à Δ_2. Si i est une isométrie et A', B', C', D' les images qu'elle donne de A, B, C et D, on a : $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'B'}$; les droites $i(\Delta_1)$ et $i(\Delta_2)$ qui contiennent les bi-points équipollents (A', B') et (C', D') sont donc parallèles.

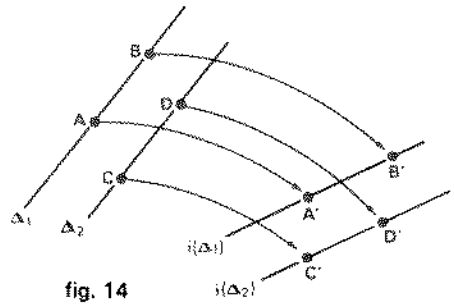
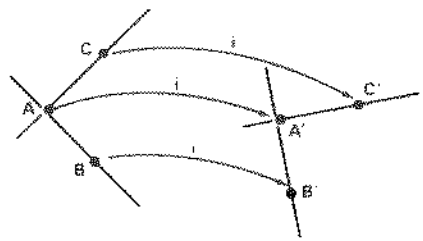


fig. 14

Supposons maintenant que les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires, soit A leur point d'intersection, B un point de Δ_1 tel que d (A, B) = 1, et C un point de Δ_2 tel que d (A, C) = 1. Si A', B', C' sont les images de A, B, C par une isométrie i on a :

$$d(A', B') = d(A, B)\ ,\ d(A', C') = d(A, C)\ ,$$
$$d(B', C') = d(B, C)\ ,$$

fig. 15



comme $\Delta_1 \perp \Delta_2$ on a : $[d(B, C)]^2 = [d(A, B)]^2 + [d(A, C)]^2$
donc : $[d(B', C')]^2 = [d(A', B')]^2 + [d(A', C')]$
ce qui prouve que $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{A'B'}$ donc que les droites $i(\Delta_1)$ et $i(\Delta_2)$ sont orthogonales.

THÉORÈME **Les images que donne une isométrie de deux droites parallèles, sont deux droites parallèles; les images qu'elle donne de deux droites orthogonales sont deux droites orthogonales.**

Dans la démonstration précédente on a prouvé que si trois points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ et $d(A, B) = d(A, C) = 1$, alors leurs images A', B' et C' par une isométrie i vérifient aussi les relations $\overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{A'C'}$, $d(A', B') = d(A', C') = 1$.

Donc si trois points A, B et C sont tels que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé, leurs images A', B', C' par une isométrie, sont telles que $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est un repère orthonormé.

THÉORÈME **Les images que donne une isométrie de trois points déterminant un repère orthonormé sont trois points déterminant un deuxième repère orthonormé.**

6 DÉTERMINATION D'ISOMÉTRIES A L'AIDE DE REPÈRES ORTHONORMÉS

Nous venons de voir que si les trois points A, B et C sont tels que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est repère orthonormé et A', B', C' leurs ima ges par une isométrie i alors $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est aussi un repère orthonormé.

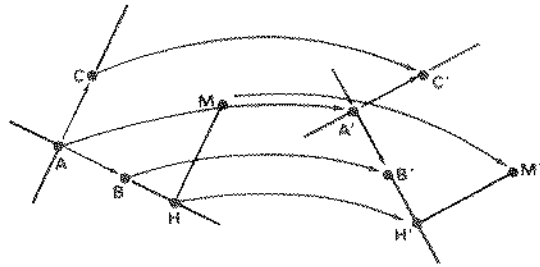


fig. 16

Pour tout point M du plan si (x, y) sont les coordonnées de ce point dans le repère

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{on a} \quad \overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$$

soit alors H le point tel que $\overrightarrow{AH} = x.\overrightarrow{AB}$.

On a alors

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH} = y.\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{HM}$ est donc parallèle à $\overrightarrow{AC}$

si $\quad H' = i(H) \quad$ et $\quad M' = i(M)$

de $\quad \overrightarrow{AH} = x.\overrightarrow{AB} \quad$ et $\quad \overrightarrow{HM} = y.\overrightarrow{AC}$,

on déduit : $\quad \overrightarrow{A'H'} = x.\overrightarrow{A'B'} \quad$ et $\quad \overrightarrow{H'M'} = y.\overrightarrow{A'C'}$

Comme $\quad \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'H'} + \overrightarrow{H'M'} \quad$ on a donc $\quad \overrightarrow{A'M'} = x.\overrightarrow{A'B'} + y.\overrightarrow{A'C'}$

L'image du point M de coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est le point M' de coordonnées (x, y) mais cette fois dans le repère orthonormé $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Réciproquement, étant donnés deux repères orthonormés $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ étudions l'application f de Π dans Π, qui au point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ fait correspondre le point M' qui a les mêmes coordonnées (x, y) mais dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Soient M_1 et M_2 deux points dont les coordonnées dans le premier repère sont (x_1, y_1) et (x_2, y_2), ces deux couples représentent donc les coordonnées de $f(M_1)$ et $f(M_2)$ dans le second repère; calculons la distance $d(f(M_1), f(M_2))$ en utilisant le second repère orthonormé on a

$$d(f(M_1), f(M_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

en utilisant cette fois le premier repère orthonormé on a

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{donc} \qquad d(M_1, M_2) = d(f(M_1), f(M_2))$$

l'application f conserve donc la distance; ce qui prouve que c'est une isométrie.

Remarquons que A ayant pour coordonnées (0, 0) dans le premier repère, son image $f(A)$ est le point de coordonnées (0, 0) dans le second repère, c'est-à-dire que $f(A) = A'$.

Quels sont les points $f(B)$, et $f(C)$?

Ainsi f est une isométrie qui transforme les points A, B et C en A', B' et C' et c'est la seule puisque dans ce cas l'image M est déterminée de manière unique.

THÉORÈME

Étant donnés six points A, B, C, A', B', C' tels que

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad (A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$$

sont deux repères orthonormés du plan Euclidien, il existe une isométrie unique i telle que

$$i(A) = A' \quad , \quad i(B) = B' \quad \text{et} \quad i(C) = C' \quad ,$$

cette isométrie est l'application qui transforme le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en le point M' qui a dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ les mêmes coordonnées (x, y).

Ce que nous venons de voir dans ce paragraphe prouve aussi, que pour tout point M' du plan, si (x', y') sont les coordonnées de ce point M' dans le repère $(O', \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ il existe un unique point M du plan tel que $M' = i(M)$, à savoir le point M dont les coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont (x', y'), ce qui prouve qu'une isométrie est une bijection du plan sur lui-même.

THÉORÈME **Toute isométrie du plan est bijective.**

IMAGES D'UN DEMI-PLAN ET D'UN CERCLE PAR UNE ISOMÉTRIE

Étudions l'image que donne une isométrie i d'un demi-plan fermé.
Soient A et B deux points du bord de ce demi-plan tels que : $d(A, B) = 1$.
Soit alors C le point de ce demi-plan, tel que : $d(A, C) = 1$ et $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$

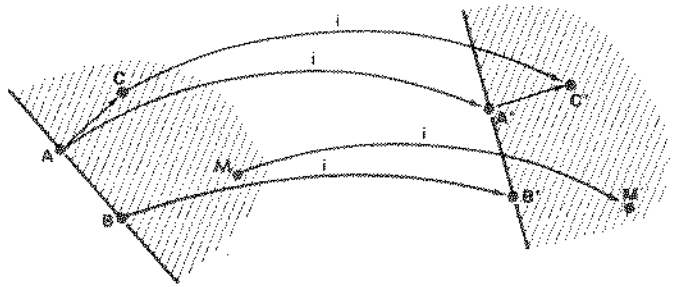


fig. 17

Pour qu'un point M appartienne à ce demi-plan [AB, C) il faut et il suffit que son ordonnée y soit positive ou nulle. Si A', B', C' et M' sont les images de A, B, C et M par l'isométrie on sait que le point M' a dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ le même couple (x, y) de coordonnées que M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Donc quand M parcourt le demi-plan [AB, C), le couple (x, y) de ses coordonnées dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ parcourt l'ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ produit cartésien de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs. Mais le couple des coordonnées de M' dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ parcourt le même ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ donc M' parcourt le demi-plan [A'B', C').

Autrement dit l'image du demi-plan [AB, C) est le demi-plan [A'B', C').

THÉORÈME **L'image par une isométrie d'un demi-plan fermé est un demi-plan fermé, dont le bord est l'image que donne l'isométrie de la droite bordant le premier.**

Soit $\mathbf{C}(A, r)$ le cercle de centre A et de rayon r et i une isométrie plan. Pour tout point M de ce cercle on a : $d(A, M) = r$, si $M' = i(M)$ et $A' = i(A)$

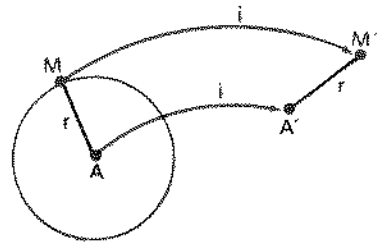


fig. 18

on a :

$$d(A', M') = d(A, M) \quad \text{donc} \quad d(A', M') = r$$

et M' appartient au cercle $\mathbf{C}(A', r)$ de centre A' et de rayon r.

Tout point du cercle $\mathbf{C}(A, r)$ a ainsi son image qui appartient à $\mathbf{C}(A', r)$, autrement dit

$$i(\mathbf{C}(A, r)) \subset \mathbf{C}(A', r)$$

Réciproquement, pour tout point N′ de $\mathbf{C}(A', r)$ on a $d(C', N') = r$, i étant bijective il existe un point N du plan tel que : $i(N) = N'$
mais de : $d(A, N) = d(A', N')$ on déduit :

$$d(A, N) = r \quad \text{et} \quad N \in \mathbf{C}(A, r)$$

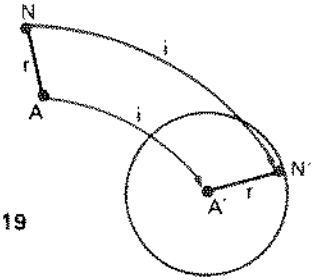


fig. 19

Ainsi tout point de $\mathbf{C}(A', r)$ est l'image d'un point de $\mathbf{C}(A, r)$, autrement dit

$$\mathbf{C}(A', r) \subset i(\mathbf{C}(A, r))$$

ce qui avec l'inclusion réciproque déjà vue montre que

$$i(\mathbf{C}(A, r)) = \mathbf{C}(A', r)$$

THÉORÈME

Une isométrie plane, transforme un cercle, en un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre du premier.

$$i(\mathbf{C}(A, r)) = \mathbf{C}(i(A), r)$$

Étudions l'image que donne une isométrie i du disque ouvert $\mathbf{D}(A, r)$ de centre A et de rayon r.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, pour tout point M de D (A, r) on a

$d(A, M) < r$ et comme $d(A', M') = d(A, M)$
$d(A', M') < r$ donc $M' \in \mathbf{D}(A', r)$
Ainsi : $i(\mathbf{D}(A, M)) \subset \mathbf{D}(A', r)$

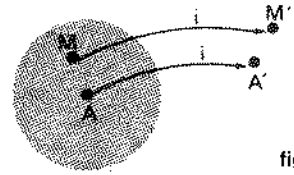


fig. 20

En vous inspirant de la démonstration du théorème précédent démontrez que

$$\mathbf{D}(A', r) \subset i(\mathbf{D}(A, r))$$

On a donc : $i(\mathbf{D}(A, r)) = \mathbf{D}(A', r)$

THÉORÈME **Une isométrie plane transforme un disque ouvert en un disque ouvert de même rayon et dont le centre est l'image du centre du premier.**

$$i(\mathbf{D}(A, r)) = \mathbf{D}(i(A), r)$$

Quelle est l'image du disque fermé de centre A et de rayon r?

EXERCICES

1. Si A, B, C, D sont quatre points du plan, tels que (AB) // (CD) d (A, B) = d (C, D) et B et D sont situés dans deux demi-plans distincts de bord (AC) : démontrer que (A, B, C, D) est un parallélogramme.

2. Si (x, y) est le couple des coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Calculer en fonction de x et y les coordonnées (x', y') de l'image M' du point M par la symétrie centrale S dont le centre est le point A de coordonnées (1, − 2).

b) Calculer en fonction de (x, y) les coordonnées (x'', y'') de l'image M'' du point M' par la translation t de vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (3, − 1). Montrer que quand M varie le milieu de (M, M'') est un point fixe ; en déduire la nature de la transformation $t \circ S$.

3. k étant un nombre réel différent de 0 soit h_k l'application du plan dans lui-même définie par $M' = h_k(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

a) Quels sont les points fixes de h_k (c'est-à-dire les points M tels que $M = h_k(M)$) h_k est-elle bijective? quelle est la réciproque de h_k?

b) Comparer d (M, N) et d $(h_k(M), h_k(N))$. Démontrer que si i est une isométrie $h_k \circ i \circ h_k^{-1}$ est aussi une isométrie.

c) Démontrer que la composition donne à l'ensemble des h_k obtenus avec toutes les valeurs possibles du réel non nul k, une structure de groupe commutatif.

4. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, soit f l'application qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' dont les coordonnées (x', y') sont données par $x' = 1 - y$ et $y' = x - 2$

a) f est-elle bijective? Quels sont les points fixes de f (tels que : $M = f(M)$). Si C est un tel point, vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CM'}$ sont orthogonaux.

b) Si M_1 et M_2 sont deux points comparer d (M_1, M_2) et d $(f(M_1), f(M_2))$. Que peut-on en déduire pour l'application f?

c) Quelles sont les images de la droite d'équation $x = 3$; quelle est celle de la droite d'équation $y = x$?

5. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan étant orthonormé, soit f l'application qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' dont les coordonnées (x', y') vérifient $x' = 1 - y$ et $y' = 1 - x$

a) f est-elle bijective? quel est l'ensemble E des points fixes de f (tels que $M = f(M)$).

b) Démontrer que quand M varie le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste orthogonal au vecteur fixe $\vec{V}$ de coordonnées (1, − 1) et que le milieu de (M, M') appartient à E. Quelle est la transformation $f \circ f$?

6. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormé l'application f qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') avec $x' = 3 - y$ et $y' = -1 - x$ est-elle bijective? admet-elle des points fixes (voir ci-dessus) f est-elle une isométrie.

7. f est l'application qui au point M de coordonnées (x, y) en R.O.N. fait correspondre le point M' (x', y') avec

$$x' = \frac{1}{13}(6 + 12x - 5y) \qquad y' = \frac{1}{13}(-4 + 5x + 12y)$$

Quels sont les points fixes de f, comparer d (M_1, M_2) et d $(f(M_1), f(M_2))$ f est-elle une isométrie?

8. Reprendre les mêmes questions que dans l'exercice précédent avec cette fois :

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + x + y) \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2 + x - y)$$

2

9. On appelle max (a, b) le plus grand des deux nombres a et b et min (a, b) le plus petit. Si f est l'application qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M′ de coordonnées (x', y'), avec :

$$x' = \max(x, y) \quad \text{et} \quad y' = \min(x, y)$$

Si A a pour coordonnées $(1, 0)$, B $(0, 1)$, C $(2, 0)$ et D $(0, -1)$

a) Quelles sont les images des segments de droite [B, D] et [O, C]?
Comparer

$$f([B, D] \cap [O, C]) \quad \text{et} \quad f([B, D]) \cap f([O, C])$$

b) Comparer

$$f([B, D] - [O, C]) \quad \text{et} \quad f([B, D]) - f([O, C])$$

10. Si i est une isométrie et E et F deux parties du plan, comparer les deux ensembles $i(E - F)$ et $i(E) - i(F)$.

3

11. L'image par une isométrie i du centre de gravité G d'un triangle (A, B, C) est-elle centre de gravité du triangle $(i(A), i(B), i(C))$?

12. Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et i une isométrie.

a) Démontrer que $i^{-1} \circ t \circ i$ est une translation; quel est le vecteur de cette translation? (On appellera C et D les images de A et B par l'isométrie i^{-1}).

b) Si on appelle f l'application de l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations planes dans $\mathcal{T}$ définie par $f(t) = i^{-1} \circ t \circ i$, f est-elle bijective?
Comparer

$$f(t \circ t') \quad \text{et} \quad f(t) \circ f(t')$$

4

13. Si C est une partie convexe (voir chap. 15, ex. 16) du plan et i une isométrie, démontrer que $i(C)$ est une partie convexe du plan.

5

14. Si E est une partie du plan et i une isométrie, comparer l'image par i du complémentaire dans le plan de E au complémentaire dans le plan de $i(E)$.

15. Si f est l'application qui au point M de coordonnées (x, y), fait correspondre le point M′ de coordonnées (x', y'), avec $x' = x^2$ et $y' = y^2$.

a) L'application f est-elle une bijection du plan sur lui-même? Deux points distincts M_1 et M_2 sont-ils toujours transformés par f en deux points distincts? (Si non, donner un exemple). Quels sont les points fixes $(M = f(M))$ de f?

b) Quelle image f donne-t-elle du cercle de centre O et de rayon 1. (Le repère du plan est supposé orthonormé.)

c) Si E désigne le demi-plan fermé d'abscisse positive, dont le bord est l'axe (OY) préciser puis comparer les deux ensembles

$$f(\mathcal{C}_\pi(E)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\pi(f(E))$$

16. Si une isométrie i est telle que deux points donnés A et B ont des images A′ et B′ vérifiant $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ cette isométrie est-elle nécessairement une translation?

17. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A, B, C et D ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ est une base orthonormée.

b) Calculer à l'aide des coordonnées (x, y) du point M, les coordonnées (x', y') de l'image M′ du point M par l'isométrie i telle que : $i(O) = O$, $i(A) = C$ et $i(B) = D$.

17 La symétrie orthogonale et le groupe des isométries

I ISOMÉTRIES ADMETTANT DEUX POINTS FIXES DISTINCTS

L'identité du plan Euclidien est évidemment une isométrie, car pour deux points quelconques M et N de Π :

$$d(\mathrm{Id}_\pi(M), \mathrm{Id}_\pi(N)) = d(M, N)$$

On appelle point fixe d'une isométrie i, un point F tel que : $i(F) = F$.

Tout point du plan est donc un point fixe de Id_π.

Proposons-nous de trouver toutes les isométries i admettant deux points fixes distincts donnés A et B; autrement dit telles que :

$$i(A) = A \qquad \text{et} \qquad i(B) = B$$

Si i est une telle isométrie, pour tout point M de la droite Δ qui contient A et B, il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$.

Si $M' = i(M)$ comme $A = i(A)$ et $B = i(B)$ on obtient :

$$\overrightarrow{AM'} = k.\overrightarrow{AB} \quad , \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} \quad ,$$

M et M' sont alors confondus, autrement dit, tout point M de Δ est tel que : $i(M) = M$.

Ainsi si une isométrie i admet deux points fixes distincts, tout point aligné avec ces deux points, est fixe pour cette isométrie.

Si C est un point non aligné avec A et B, deux cas sont alors à envisager :

1° ou l'image C' du point C est confondue avec C ($i(C) = C$).

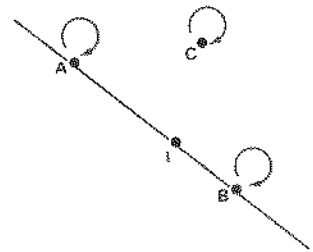


fig.1

Alors pour tout point M du plan, si $M' = i(M)$ on a :

$$d(i(A), i(M)) = d(A, M) \qquad \text{donc} \qquad d(A, M') = d(A, M)$$

et de même :

$$d(B, M') = d(B, M) \qquad \text{et} \qquad d(C, M') = d(C, M)$$

En supposant M′ distinct de M; A, B et C qui sont équidistants de M et M′ appartiendraient à la médiatrice de (M, M′) et seraient alignés, ce qui condredit le fait que C n'est pas aligné avec A et B. L'hypothèse $i(M) \neq M$ entraînant une contradiction est donc fausse, et pour tout point M du plan : $i(M) = M$.

L'isométrie i qui admet les trois points fixes non alignés A, B et C est donc Id_π.

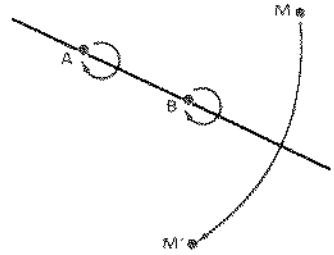


fig. 2

2° Ou C ≠ C′, alors pour tout point M non aligné avec A et B si $M' = i(M)$ on a $M' \neq M$, sinon d'après le 1° :

$$i = Id_\pi \qquad \text{et} \qquad C = C' \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse, alors

$$d(i(A), i(M)) = d(A, M) \qquad \text{donc} \qquad d(A, M') = d(A, M)$$

et A appartient à la médiatrice de (M, M′); de même B appartient à la médiatrice de (M, M′), la droite (AB) est donc la médiatrice de (M, M′).

Que M appartienne ou non à la droite Δ qui contient A et B, $i(M)$ est alors le symétrique de M par rapport à la projection orthogonale de M sur Δ.

DÉFINITION **On appelle symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, l'application S_Δ du plan Euclidien dans lui-même qui donne pour image d'un point quelconque M, le symétrique de ce point par rapport à la projection orthogonale de M sur Δ.**

Cherchons les points fixes d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ; pour que $S_\Delta(M) = M$, il faut et il suffit que le milieu de ces deux points soit confondu avec M, il faut donc et il suffit que M soit confondu avec sa projection orthogonale sur Δ, ce qui a lieu, si et seulement si : $M \in \Delta$.

L'ensemble des points fixes de la symétrie orthogonale S_Δ est la droite Δ;

si $M' = S(M)$ et H la projection orthogonale de M sur Δ, H est aussi la projection orthogonale de M′ sur Δ, et M est symétrique de M′ par rapport à H

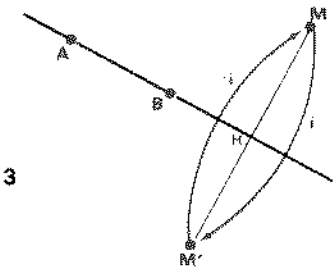


fig. 3

donc : $M = S_\Delta(M')$, ce qui prouve que pour tout point M du plan $S_\Delta(S_\Delta(M)) = M$ autrement dit : $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_\pi$, S_Δ est involutive, donc bijective.

Soit (O, U) le repère d'une graduation Euclidienne de Δ. Si on désigne par $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OU}$ on a $\|\vec{u}\| = 1$. On sait qu'il existe un vecteur $\vec{v}$, tel que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit un repère orthonormé.

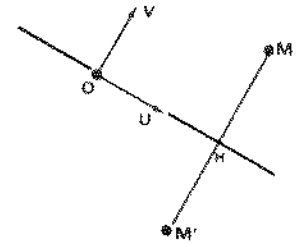


fig. 4

Soient alors (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M du plan; si H est la projection orthogonale de M sur Δ, l'ordonnée de H est nulle, en désignant par h l'abscisse de ce point, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HM}$ sont $(x - h, y)$ comme $\overrightarrow{HM}$ est nul ou de même direction que $\vec{v}$, il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{HM} = k.\vec{v}$, les coordonnées de $\overrightarrow{HM}$ sont $(0, k)$ donc

$$x - h = 0 \quad \text{et} \quad h = x \ ,$$

les coordonnées de H sont donc $(x, 0)$; si (x', y') sont les coordonnées du point $M' = S_\Delta(M)$.

H milieu de (M, M') est équivalent à :

$$\frac{x + x'}{2} = x \quad \text{et} \quad \frac{y + y'}{2} = 0$$

donc à :

$$x + x' = 2x \quad \text{et} \quad y + y' = 0$$

ce qui est vérifié si et seulement si :

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = -y$$

Finalement $M' = S_\Delta(M)$ si et seulement si : $\begin{cases} x' = x \\ \text{et} \\ y' = -y \end{cases}$

ÉXERCICE

En utilisant les formules ci-dessus

a) Retrouvez les points fixes de S_Δ

b) Calculez les coordonnées de $M'' = S_\Delta(M')$. Quelle propriété de S retrouve-t-on ainsi ?

c) Quelles sont les coordonnées du symétrique de M par rapport à la perpendiculaire en O à Δ ?

Si (x_1, y_1) sont les coordonnées d'un point M_1 et (x_2, y_2) celles de M_2
(x'_1, y'_1) les coordonnées de $M'_1 = S(M_1)$ et (x'_2, y'_2) celles de $M'_2 = S(M_2)$ on a

$$x'_1 = x_1 \quad ; \quad y'_1 = -y_1 \quad , \quad x'_2 = x_2 \quad ; \quad y'_2 = -y_2$$

donc

$$d(M'_1, M'_2) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = d(M_1, M_2).$$

S_Δ conserve la distance, S_Δ est donc une isométrie.

THÉORÈME

Une symétrie orthogonale S_Δ est une isométrie involutive, qui admet tous les points de la droite Δ pour points fixes.

Les résultats de ce paragraphe peuvent s'énoncer :

THÉORÈME

L'identité du plan est la seule isométrie qui admet trois points fixes non alignés.

La seule isométrie, autre que l'identité, qui admet deux points fixes distincts A et B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).

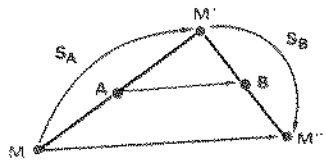
2 COMPOSÉE D'ISOMÉTRIES PARTICULIÈRES

a) On a vu en classe de Quatrième, que si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}} \qquad \text{et} \qquad t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$$

b) Étudions la composée de deux symétries centrales de centres A et B. Pour tout point M du plan : $M' = S_A(M)$ signifie que : A est milieu de (M, M') $M'' = S_B(M')$ signifie que B est milieu de (M', M'')

fig. 5



alors

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{AM'} + 2\,\overrightarrow{M'B} = 2\left(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B}\right) = 2\,\overrightarrow{AB}$$

donc

$$M'' = (S_B \circ S_A)(M) \qquad \text{si, et seulement si :} \qquad M'' = t_{\overrightarrow{2AB}}(M)$$

pour tout point M :

$$S_B \circ S_A(M) = t_{\overrightarrow{2AB}}(M) \qquad \text{autrement dit} \qquad S_B \circ S_A = t_{\overrightarrow{2AB}}$$

Quelle est la transformation $S_A \circ S_B$? $S_A \circ S_B$ est-elle égale à $S_B \circ S_A$?

D'après *b*) $S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$; donc si on choisit le point B tel que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{v}$ on a $t_{\vec{v}} = S_B \circ S_A$

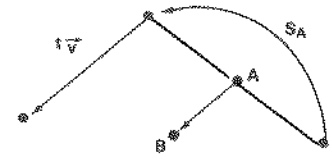


fig. 6

alors : $t_v \circ S_A = (S_B \circ S_A) \circ S_A = S_B \circ (S_A \circ S_A)$

et comme S_A est involutive $S_A \circ S_A = Id_\pi$

donc : $t_v \circ S_A = S_B \circ Id_\pi = S_B$

Quelle est la nature de $S_A \circ t_{\vec{v}}$? est-ce que $t_{\vec{v}} \circ S_A = S_A \circ t_{\vec{v}}$?

d) Étudions la composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires Δ et Δ'.

Choisissons un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où O est le point d'intersection de Δ et Δ' $\vec{u}$ a même direction que Δ et $\vec{v}$ même direction que Δ'.

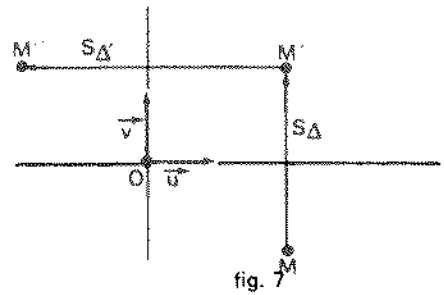


fig. 7

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque M du plan

(x', y') celles du point $M' = S_\Delta(M)$

et (x'', y'') celles de $M'' = S_{\Delta'}(M')$

On a

$$\left\{\begin{matrix} x' = x \\ y' = -y \end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{matrix} x'' = -x' \\ y'' = y \end{matrix}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{matrix} x'' = -x \\ y'' = -y \end{matrix}\right.$$

Alors

$$\overrightarrow{OM''} = x''\vec{u} + y''\vec{v} = -x\vec{u} - y\vec{v} = -(x\vec{u} + y\vec{v}) = -\overrightarrow{OM}$$

O est donc le milieu de (M, M''), si S_O est la symétrie centrale de centre O.

Pour tout point M du plan : $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = S_O(M)$ et $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = S_O$.

Est-ce que $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$?

THÉORÈME

La composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires, est une symétrie centrale, dont le centre est le point d'intersection des deux droites.

e) Soit O un point d'une droite Δ, étudions $S_O \circ S_\Delta$.

On sait d'après le théorème précédent, que si Δ′ est la droite contenant O et perpendiculaire à Δ,

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = S_O$$

donc $S_O \circ S_\Delta = (S_{\Delta'} \circ S_\Delta) \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ (S_\Delta \circ S_\Delta)$

et comme

$$S_\Delta \circ S_\Delta = \mathrm{Id}_\pi \qquad S_O \circ S_\Delta = S_\Delta \circ \mathrm{Id}_\pi = S_{\Delta'}$$

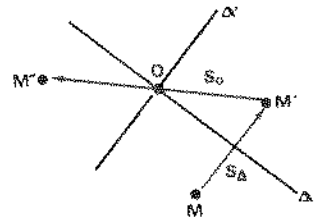


fig. 8

Quelle est $S_\Delta \circ S_O$? est-elle égale à $S_O \circ S_\Delta$?

Est-ce que la composition donne à l'ensemble $\{\mathrm{Id}_\pi, S_O, S_\Delta, S_{\Delta'}\}$ une structure de groupe commutatif?

f) Δ et Δ′ sont à présent deux droites parallèles; étudions $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$

pour tout point M du plan si H est la projection orthogonale de M sur Δ et $M' = S_\Delta(M)$ alors H est milieu de (M, M′).

Si H′ est la projection orthogonale de M′ sur Δ′ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$, H′ est milieu de (M′, M″). Les droites Δ et Δ′ étant parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre, il en est donc ainsi de la projetante de M sur Δ qui contenant M′ est aussi projetante de M′ sur Δ′, et porte donc les cinq points M, H, M′, H′, M″.

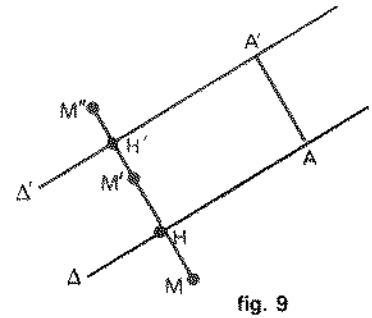


fig. 9

On a

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} = 2\left(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'H'}\right) = 2\overrightarrow{HH'}$$

Si A est un point de Δ et A′ sa projection orthogonale sur Δ′, si les droites Δ et Δ′ sont distinctes, $H' \neq H$ et $A' \neq A$ les droites (HH′) et (AA′) ont même direction orthogonale à celle qui est commune à Δ et Δ′; H, A et A′ n'étant pas aligné (H, H′, A′, A) est donc un parallélogramme et $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AA'}$.

$$\text{Finalement} \cdot \overrightarrow{MM''} = 2.\overrightarrow{AA'} \qquad \text{et} \qquad M'' = t_{\overrightarrow{2AA'}}(M)$$

Ainsi pour tout point M du plan : $S \circ S(M) = t_{\overrightarrow{2AA'}}(M)$; autrement dit : $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{2AA'}}$.

Quelle est $S_\Delta \circ S_{\Delta'}$? est-ce que $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$? Que se passe-t-il quand $\Delta = \Delta'$?

g) Étant donné un vecteur $\vec{v}$ de direction orthogonale à celle d'une droite Δ étudions la composée $t_{\vec{v}} \circ S_\Delta$.

On a vu en *f*), que si A est un point de Δ et A' un point tel que A soit la projection de A' sur Δ, si Δ' est la parallèle à Δ contenant A' :

$$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{AA'}}$$

on peut alors choisir le point A' tel que :

$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{v}$ alors $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{\vec{v}}$

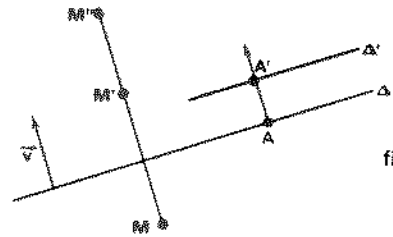


fig. 10

donc

$$t_{\vec{v}} \circ S_\Delta = (S_{\Delta'} \circ S_\Delta) \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ (S_\Delta \circ S_\Delta) = S_{\Delta'} \circ \mathrm{Id}_\pi = S_{\Delta'}.$$

Dans tous les exemples de ce paragraphe on a vérifié que la composée de deux isométries est une isométrie ; proposons-nous maintenant de savoir si cela est vrai quel que soit le choix des deux isométries.

3 LE GROUPE DES ISOMÉTRIES

Soient i et i' deux isométries du plan Euclidien.
Pour deux points quelconques M et N du plan, on a :

$$d\,(i\,(M), i\,(N)) = d\,(M, N)$$

et $d\,(i'\,(i\,(M)), i'\,(i\,(N)) = d\,(i\,(M), i\,(N))$

donc : $d\,(i' \circ i\,(M), i' \circ i\,(N)) = d\,(M, N)$;

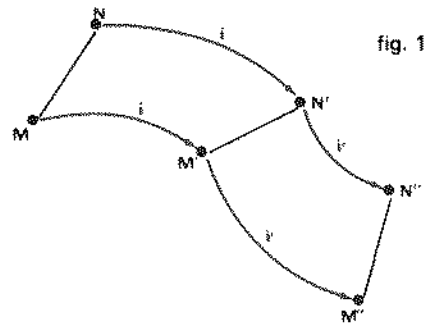


fig. 11

autrement dit : $i' \circ i$ conserve la distance, c'est donc une isométrie.

Ainsi la composée de deux isométries du plan est une isométrie. La composition est donc une loi de composition interne dans l'ensemble des isométries.

Si i est une isométrie elle est bijective et admet une application réciproque i^{-1}. On sait que

$$M' = i^{-1}\,(M) \qquad \text{signifie que} \qquad M = i\,(M')$$

Pour deux points quelconques M et N du plan
si : $M' = i^{-1}(M)$ et $N' = i^{-1}(N)$
on a : $M = i(M')$ et $N = i(N')$

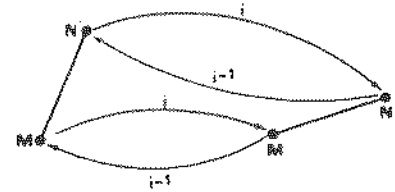


fig. 12

donc puisque i conserve la distance : $d(i(M'), i(N')) = d(M', N')$
ce qui devient : $d(M, N) = d(i^{-1}(M), i^{-1}(N))$
i^{-1} qui conserve la distance est donc une isométrie.

On a vu que l'identité de Π est une isométrie, et cette isométrie est neutre pour la composition car pour toute isométrie i : $i \circ Id_\pi = Id_\pi \circ i = i$
Si i est une isométrie i^{-1} est une isométrie vérifiant : $i \circ i^{-1} = i^{-1} \circ i = Id_\pi$
autrement dit i^{-1} est symétrique de i pour la composition.

Si on remarque que A et B étant deux points distincts et S_A, S_B étant les symétries centrales de centres A et B on a :

$$S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}} \quad \text{et} \quad S_A \circ S_B = t_{2\overrightarrow{BA}}$$

de $A \neq B$ on déduit : $2\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ donc :

$$2\overrightarrow{AB} \neq 2\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad t_{2\overrightarrow{AB}} \neq t_{2\overrightarrow{BA}} \quad \text{et} \quad S_A \circ S_B \neq S_B \circ S_A$$

La composition n'est pas une loi commutative dans l'ensemble des isométries.
Nous avons ainsi prouvé :

THÉORÈME

La composition donne à l'ensemble des isométries planes une structure de groupe non commutatif.

A DÉTERMINATION D'UNE ISOMÉTRIE PAR L'IMAGE QU'ELLE DONNE D'UN TRIANGLE

Soient A, B, C trois points non alignés et A', B', C' trois points tels que :

$$d(A', B') = d(A, B) \quad , \quad d(B', C') = d(B, C) \quad \text{et} \quad d(C', A') = d(C, A) \quad ,$$

alors la relation : $|d(A, B) - d(A, C)| < d(B, C) < d(A, B) + d(A, C)$

entraîne : $|d(A', B') - d(A', C')| < d(B', C') < d(A', B') + d(A', C')$

ce qui prouve que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

Soit U le point de la demi-droite [A, B) tel que $d(A, U) = 1$

et U′ le point de la demi-droite [A′, B′) tel que $d(A', U') = 1$

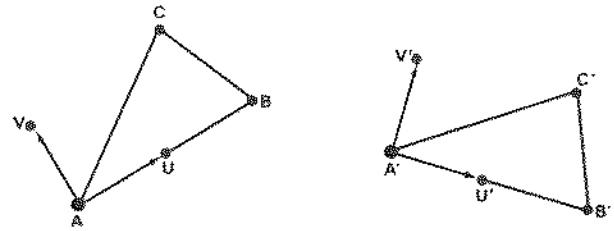


fig. 13

Soient V et V′ les points tels que $(\overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AV})$ et $(\overrightarrow{A'U'}, \overrightarrow{A'V'})$

soient deux bases orthonormées le point V appartenant au demi-plan [AB, C) et V′ appartenant au demi-plan [A′B′, C′),

Il existe une isométrique i telle que : $A' = i(A)$ $U' = i(U)$ et $V' = i(V)$

appelons C″ l'image de C par cette isométrie.

C appartenant au demi-plan]AU, V),a donc dans le repère $(A, \overrightarrow{AU}, \overrightarrow{AV})$ une ordonnée strictement positive, son image C″ a donc dans le repère (A′, A′U′, A′V′) la même ordonnée strictement positive,donc C″ appartient au demi-plan ouvert]A′U′, V′) de plus

$$d(A', C'') = d(A, C) \quad \text{et} \quad d(B', C'') = d(B, C) \ ,$$

comme par hypothèse: $d(A', C') = d(A, C)$ et $d(B', C') = d(B, C)$

on a donc: $d(A', C'') = d(A', C')$ et $d(B', C'') = d(B', C')$

Supposons alors que C″ et C soient distincts, des dernières relations on déduit que A′ et B′ appartiendraient à la médiatrice de (C′, C″) ces deux points seraient dans deux demi-plans ouverts distincts de même bord (A′B′) ce qui contredirait le fait que $C'' \in]A'U', V')$

$$\text{donc . C′ et C″ sont confondus} \quad \text{et} \quad C' = i(C)$$

Le raisonnement que nous venons de faire prouve qu'il existe au moins une isométrie qui transforme les points A, B, C en A′, B′ et C′.

Cherchons à voir si cette isométrie est la seule.

Soit donc i' une autre isométrie telle que : $A' = i'(A)$ $B' = i'(B)$ et $C' = i'(C)$

Nous savons que l'application réciproque i^{-1} de i est une isométrie; de plus

$i^{-1}(i'(A)) = i^{-1}(A') = A$ de même $i^{-1}(i'(B)) = B$ et $i^{-1}(i'(C)) = C$

l'isométrie $i^{-1} \circ i'$ admet donc les trois points fixes non alignés A, B et C; d'après un résultat connu l'identité est la seule isométrie ayant cette propriété, donc

$$i^{-1} \circ i' = \mathrm{Id}_\pi \quad \text{et} \quad i = i \circ (i^{-1} \circ i') = (i \circ i^{-1}) \circ i' = \mathrm{Id}_\pi \circ i' = i'$$

$i = i'$ et i est donc la seule isométrie transformant A, B et C en A', B' et C'.

THÉORÈME

Étant donnés six points, A, B, C, A', B', C' tels que : A, B, C ne sont pas alignés et $d(A', B') = d(A, B)$, $d(B', C') = d(B, C)$ et $d(C', A') = d(C, A)$; il existe une isométrie unique i telle que :

$$A' = i(A) \quad , \quad B' = i(B) \quad , \quad \text{et} \quad C' = i(C).$$

On dit que deux isométries i et i' coïncident sur {A, B, C} si $i(A) = i'(A)$, $i(B) = i'(B)$ et $i(C) = i'(C)$.

La démonstration précédente permet d'obtenir le résultat :

THÉORÈME

Deux isométries qui coïncident sur un ensemble de trois points non alignés, sont égales.

5 DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMÉTRIE EN SYMÉTRIES ORTHOGONALES

Soit i une isométrie différente de Id_π, il existe donc un point A tel que $i(A) \neq A$; désignons par A' le point $i(A)$.

Désignons par S_1 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de (A, A').

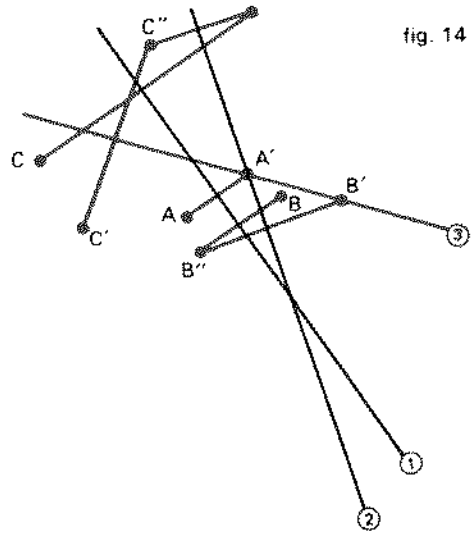


fig. 14

Alors, ou bien $i = S_1$

ou bien $i \neq S_1$, et dans ce cas comme $A' = S_1(A)$

il existe un point B distinct de A tel que : $i(B) \neq S_1(B)$.

Posons : $B'' = S_1(B)$ et $B' = i(B)$

donc $B' \neq B''$

i conservant la distance on a : $d(A, B) = d(A', B')$

S_1 conservant la distance $d(A, B) = d(A', B'')$

donc $d(A', B') = d(A', B'')$

le point A' appartient donc à la médiatrice de (B', B'').

Désignons par S_2 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de (B', B'') on a alors

$$A' = S_2(A') \quad \text{et} \quad B' = S_2(B'')$$

et

$$A' = S_2 \circ S_1(A) \quad \text{et} \quad B' = S_2 \circ S_1(B)$$

Alors, ou bien $i = S_2 \circ S_1$
ou bien $i \neq S_2 \circ S_1$ alors si C est un point n'appartenant pas à la droite (AB) les deux isométries i et $S_2 \circ S_1$ ne peuvent d'après le paragraphe 5, coïncider sur $\{A, B, C\}$

$$\text{donc: } i(C) \neq S_2 \circ S_1(C) \quad ,$$

$$\text{en posant: } C' = i(C) \quad \text{et} \quad C'' = S_2 \circ S_1(C)$$

on a puisque i et $S_2 \circ S_1$ conservent la distance

$$d(A', C') = d(A, C) \quad , \quad d(A', C'') = d(A, C) \quad \text{donc} \quad d(A', C') = d(A', C'')$$

de même

$$d(B', C') = d(B, C) \quad \text{et} \quad d(B', C'') = d(B, C) \quad \text{donc} \quad d(B', C') = d(B', C'')$$

A' est donc équidistant des points C' et C'' et il en est de même de B'; la droite $(A'B')$ est donc la médiatrice de (C', C''); si on édsigne par S_3 la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de (C', C'') on a

$$C' = S_3(C'') \quad B' = S_3(B') \quad \text{et} \quad A' = S_3(A')$$

donc

$$C' = S_3(S_2 \circ S_{1(C)}) \quad , \quad B' = S_3(S_2 \circ S_{1(B)}) \quad \text{et} \quad A' = S_3(S_2 \circ S_{1(A)})$$

autrement dit

$$i(A) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(A) \quad , \quad i(B) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(B) \quad \text{et} \quad i(C) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(C)$$

les deux isométries i et $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ qui coïncident sur l'ensemble de trois points non alignés $\{A, B, C\}$ sont alors égales.

En résumé on a

$$i = S_1 \quad \text{ou} \quad i = S_2 \circ S_1 \quad \text{ou} \quad i = S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

THÉORÈME

Toute isométrie du plan Euclidien, est égale, soit à l'identité, soit à une symétrie orthogonale, soit à la composée de deux ou trois symétries orthogonales.

EXERCICES

1. Si S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, démontrer que l'image d'une droite Δ' par S est une droite Δ'' qui coupe Δ' en un point de Δ, ou bien qui est parallèle à Δ'.

2. Si S et S′ sont les symétries orthogonales par rapport à deux droites Δ et Δ', alors si S ∘ S′ est l'identité on a $\Delta = \Delta'$.

3. Une application f du plan dans le plan transforme un point quelconque M de coordonnées (x, y) dans un R.O.N. en un point M′ de coordonnées (x', y') données par :

$$x' = \frac{1}{13}(5x + 12y) \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{1}{13}(12x - 5y)$$

a) Si M_1 et M_2 sont deux points du plan de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2), comparer les distances $d(M_1, M_2)$ et $d(f(M_1), f(M_2))$. Que peut-on en conclure pour f?

b) Quel est l'ensemble F des points fixes de f (points M tels que : $M = f(M)$).

c) Montrer que quand M varie le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, reste orthogonal au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (3, 2). Que peut-on dire de la direction de ce vecteur et de E?
Démontrer que le milieu de (M, M′) appartient à E. Quelle est la nature de l'application f.

4. Formule traduisant en B.O.N. la symétrie orthogonale S par rapport à la droite Δ d'équation $y = 3x$.

a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$; A étant le point d'abscisse 1 de Δ? Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OH}$, H étant le point d'abscisse k de Δ. Si M est un point de coordonnées (x, y) du plan, pour quelle valeur de k le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est-il orthogonal à $\overrightarrow{OA}$?

b) Quelles sont les coordonnées de la projection orthogonale de M sur Δ?
Quelles sont les coordonnées du point M′ symétrique de M par rapport à la droite Δ?

5. En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver les expressions des coordonnées (x', y') de l'image M′ du point M de coordonnées connues (x, y) par la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite qui a en repère orthonormé l'équation : $y = -2x$.

6. Si S est la symétrie par rapport à (OX), S′ la symétrie de l'exercice 4 et S″ celle de l'exercice 5, en raisonnant comme dans l'exercice 3, montrer que S″ ∘ S′ ∘ S est une symétrie par rapport à une droite. (On commencera par exprimer les coordonnées de S″ ∘ S′ ∘ S (M) en fonction des coordonnées (x, y) de M).

7. Si un ensemble de trois points distincts est sa propres image par chacune des symétries orthogonales S et S′ dont les axes sont perpendiculaires, alors un de ces trois points est milieu des deux autres.

8. Le plan est rapporté à un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient A le point de coordonnées $(0, a)$ $a \neq 0$ et B le point de coordonnées $(b, 0)$, $b \neq 0$. Calculer l'ordonnée y du point M d'abscisse a tel que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$, vérifier que $d(A, M) = d(A, B)$.
Si C et N sont les symétriques de B et M par rapport à l'axe OY, montrer que $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{CM}$ et $d(B, N) = d(C, M)$.

2

9. Si S est une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ et C la symétrie centrale de centre A, démontrer que la composée S o C de ces deux symétries peut se mettre, et cela d'une manière unique, sous la forme t o S', où S' est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ' et t une translation de vecteur $\vec{V}$ parallèle à Δ. (On utilisera les résultats du § 2 *d* et du § 2 *f*, et on démontrera l'unicité de cette décomposition en montrant que Δ' est l'ensemble des milieux des couples (M, M') où M' = S o C (M)).

10. La composition donne-t-elle à la réunion de l'ensemble des symétries orthogonales dont les axes ont une même direction δ, et de l'ensemble des translations de vecteurs orthogonaux à δ une structure de groupe? de groupe commutatif?
(On utilisera les résultats des § 2 *f* et *g*.)

3

11. La composition donne-t-elle à l'ensemble des isométries qui admettent un même point fixe A, une structure de groupe? de groupe commutatif?

12. Si E est un ensemble de points, l'ensemble F des isométries *i* telles que *i* (E) = E a-t-il une structure de groupe pour la composition?
Quel est l'ensemble F quand E est l'ensemble de deux points distincts {A, B}?

13. La composition donne-t-elle à l'ensemble des isométries involutives une structure de groupe?

4

14. Si une isométrie *i* donne de trois points non alignés A, B et C des images A', B' et C' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, *i* est-elle une translation?

15. Si une isométrie *i* donne de trois points non alignés A, B et C des images A', B' et C' telles que $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = -\overrightarrow{AC}$ quelle est la nature de cette isométrie?

16. Si deux triangles (A, B, C) et (A', B', C') sont tels que (AB) $\perp$ (AC), (A'B') $\perp$ (A'C') d (A, B) = d (A', B') et d (B, C) = d (B', C') démontrer qu'il existe une isométrie *i*, telle que

$$A' = i(A) \quad , \quad B' = i(B) \quad \text{et} \quad C' = i(C)$$

17. Si (AH) est la hauteur et (AM) la médiane d'un triangle (A, B, C), et (A'H') la hauteur (A'M') la médiane d'un triangle (A', B', C') et d (B, C) = d (B', C'), d (A, H) = d (A', H') d (A, M) = d (A', M') montrer en utilisant l'exercice précédent qu'il existe une isométrie qui transforme {A, B, C} en {A', B' C'}.

18. Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que : d (A B) = d (A'B') et (AA') $\not\parallel$ (BB'). Démontrer qu'il existe un point M (qu'on demande de construire) et une isométrie *i* tels que M = *i* (M), A' = *i* (A) et B' = *i* (B).

19. Démontrer en s'inspirant du raisonnement fait au § 6 qu'une isométrie qui admet un unique point fixe A, peut être décomposée sous la forme $S \circ S'$ où S et S' sont deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis.

20. Il s'agit dans cet exercice de prouver que la composée $S' \circ S$ de deux symétries orthogonales d'axes Δ et Δ' ne peut être une symétrie orthogonale S'' d'axe Δ''.

a) Prouver l'assertion précédente quand $\Delta \mathbin{/\!/} \Delta'$.

b) On suppose maintenant que Δ et Δ' ne sont pas parallèles et A est leur point commun. En utilisant l'image d'un point B distinct de A sur Δ, montrer que $S' \circ S = S''$ entraînerait $\Delta' = \Delta''$ et $S' = S''$; en déduire une contradiction sur S.

c) Déduire de ce qui précède que la composée de deux symétries orthogonales d'axes distincts ne peut avoir plus d'un point fixe. On prouvera d'abord que la composée de trois symétries orthogonales ne peut être l'identité.

21. Si S, S' et S'' sont trois symétries orthogonales d'axes Δ, Δ' et Δ'', telles que $S'' \circ S' \circ S$ soit une symétrie orthogonale S''' d'axe Δ''', alors si $\Delta \neq \Delta''$

a) ou bien Δ et Δ' sont sécantes en un point A et alors $A \in \Delta''$ (raisonner par l'absurde).

b) ou bien $\Delta \mathbin{/\!/} \Delta'$ et alors $\Delta'' \mathbin{/\!/} \Delta$.

22. Si i est une isométrie involutive ($i \circ i = \mathrm{id}_\pi$) distincte de l'identité de π A étant un point et $A' = i(A)$:

a) démontrer que le milieu U de (A, A') est un point fixe de i;

b) si U est le seul point fixe de i, démontrer que i est la symétrie de centre U;

c) si i admet un deuxième point fixe V distinct de U, quelle est l'isométrie i?

d) Énumérez toutes les isométries involutives.