Mathématiques D — Paris

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème

I

(5 points)

Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10.

1°) On effectue trois tirages successifs d'une boule dans l'urne, sans remise de la boule tirée. On suppose qu'à chaque tirage les boules restant dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées.

Déterminer les probabilités p_a et p_b pour que les nombres figurant sur les trois boules tirées soient dans l'ordre de leur tirage, les termes :

a) D'une suite géométrique croissante ;

b) D'une suite arithmétique décroissante.

2°) On effectue maintenant cinq tirages successifs avec remise de la boule tirée. On suppose toujours que les boules ont, à chaque tirage, la même probabilité d'être tirées.

a) Quelle est la probabilité q pour qu'aucun des numéros obtenus ne soit multiple de 3 ?

b) Quelle est la probabilité p_n (n entier, $1 < n < 5$) pour que le premier tirage ayant donné un numéro multiple de 3 soit celui de rang n ?

II

(4 points)

On considère dans un plan euclidien un triangle isocèle ABC (AB = AC) dont la base [BC] a pour milieu I.

1°) Construire le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et -1.

2°) Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du quadrilatère GAIB ?

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2IA^2$$

(On pourra commencer par déterminer un point particulier de cet ensemble).

Problème

(11 points)

N.B. — La notation Log désigne le logarithme népérien.

On considère la fonction réelle f_m d'une variable réelle définie par :

$$f_m(x) = \frac{e^x + m}{(e^x + 1)^2}$$

où m est un paramètre réel.

1°)a) Déterminer l'ensemble de définition D de f_m. Préciser si la fonction f_m est continue et dérivable sur D.

b) Montrer que pour $m \geqslant \frac{1}{2}$ la fonction f_m est strictement monotone.

Montrer que pour $m < \frac{1}{2}$ la fonction f_m présente un maximum dont on donnera la valeur.

c) Etudier les limites aux bornes de D et dresser dans les deux cas $\left(m \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } m < \frac{1}{2}\right)$ le tableau de variation de f_m.

2°)a) Montrer que si m_1 est strictement inférieur à m_2, on a pour tout x réel :

$$f_{m_1}(x) < f_{m_2}(x).$$

b) On désigne par C_{-1}, C_0 et C_1 les courbes représentatives des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1 dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unité 4 cm].

Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C_0.

Tracer les courbes C_{-1}, C_0 et C_1 dans le plan P. On précisera les points d'intersection avec les axes et les tangentes en ces points.

3°) On considère un point mobile M dont les coordonnées dans le plan P sont données en fonction du temps t par :

$$x = \text{Log}(\cos 2t)$$

$$y = \frac{\cos 2t}{4 \cos^4 t} \qquad \left(-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}\right).$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de la courbe C_0 que l'on précisera.

Décrire le déplacement du point sur sa trajectoire lorsque t varie de

$$-\frac{\pi}{6} \text{ à } +\frac{\pi}{6}.$$

(On ne calculera ni les coordonnées du vecteur vitesse, ni celles du vecteur accélération.)

4°)a) Vérifier que pour tout x réel on a :

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction g de la variable réelle définie par :

$$g(x) = \frac{1}{(e^x+1)^2}.$$

b) Etablir pour tout x réel l'égalité :

$$x - Log\,(e^x+1) = Log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right).$$

Etudier

$$\lim_{x \to +\infty} [x - Log(e^x+1)].$$

5°) A tout nombre α ($\alpha > 0$) on associe le nombre $S(\alpha)$ qui mesure en cm² l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_{-1} et C_1 et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Exprimer $S(\alpha)$ en fonction de α. Calculer $S(1)$ à 0,01 près par défaut.

Déterminer $\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$. En donner la valeur approchée à 0,01 près par défaut.