Constellations et facteur des groupes libres

Iyari Rojas

18 avril 2021

1 Introduction

Dans un espace vectoriel rationnel, réel ou complexe, la donnée d'un cône pour l'addition, c'est a dire que ce soit une partie stable par addition et par multiplication par un scalaire positif et tel que si a et $-a$ appartient au cône alors $a = 0$, définit un ordre sur l'espace. Pour les algèbres de von Neumann on choisit comme cône les positifs autrement dit les éléments de la forme aa^*. On va choisir une relation d'équivalence transformer ce cône en algèbre de Boole puis on va étendre canoniquement la relation a toute l'algèbre de von Neumann qui transformera celle ci en une nouvelle structure algébrique que j'ai appelé constellation. On montrera ensuite qu'on peut faire une construction réciproque. Enfin il sera montré une équivalence de catégories entre les deux structures. Finalement on démontrera la conjecture sur les facteurs des groupes libres appelée "free group factor isomorphism problem" en montrant que $L\mathbb{F}_3$ est isomorphe à $L\mathbb{F}_2$.

Définition 1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ est une algèbre de Boole si B est un ensemble, $\wedge$ et $\vee$ sont des opération binaires associatives commutatives, $\neg$ est une opération unaire involutive et $0, 1$ sont des constantes. Ces opérations doivent vérifier les relations suivantes :
$x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x$
$0 \wedge x = 0$,$1 \vee x = 1$
$x \vee x = x, x \wedge x = x$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
[4]

Définition 2. $\mathbb{U}_n = \{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta^n = 1\}$

Remarque 3. Soit B une algèbre de Boole, si on associe 0 et 1 en un élément e alors on peut retrouver l'algèbre de Boole originelle a partir de ça

Preuve: on enleve e et on rajoute 0 et 1 comme minimum et maximum. Si $a \wedge b = e$ avec a, b differents de e alors on dit que $a \wedge b = 0$, si $a \vee b = e$ avec a, b différents de e alors $a \vee b = 1$. On pose $0 \wedge 1 = 0$ et $0 \vee 1 = 1$ ∎

Définition 4. Une constellation est $(S, I, ., ^*, \mathbb{U}_8, 0)$, tel que $(S, ., 1)$ soit un monoïde et l'étoile est une opération unaire involutive définie sur S, 0 appartient à S et est absorbant, $0^* = 0$. $I = \{aa^*\} \subset S$ est muni d'un ordre , il faut que I avec cet ordre soit une algèbre de Boole complète, les éléments de I doivent être idempotents. On doit avoir $\mathbb{U}_8 \subset S$ Il doit aussi être vérifié que si $a, b \in I$ commutent, alors $a \wedge b = a.b$ ($\wedge$ est la borne inférieure). S doit verifier aussi la relation suivante (pour $a, b \in S$, $\lambda, \varphi \in \mathbb{U}_8$) :
$(a.b)^* = b^*.a^*$
$\lambda^* = \overline{\lambda}$
$\lambda.a = a.\lambda$
$\lambda.\varphi = \lambda\varphi$
Il faut aussi que pour tout u unitaire, $u.I$ soit une algèbre de Boole de telle sorte que la multiplication par u de I dans $u.I$ soit un morphisme d'algèbre de Boole. L'inverse d'un élément inversible est son étoilé. Pour tout p dans l'algèbre de Boole I on associe un unitaire u_p qui vérifie $u_p p = p = p u_p$ et $u_p.\neg p = i\neg p = \neg p.u_p$ avec $u_0 = i$ et $u_1 = 1$, on pose $S_4 = \{u_p, u_p^* | p \in I\}$

Remarque 5. En dimension 1 on a une analogie avec le symbole du yin et du yang avec les huits trigrammes. Si on regarde par exemple $\{-1, 0, 1\}$ on peut dire que $0 = e$ et par la remarque on obtiens l'algèbre de Boole a 4 éléments.



Exemple 6. $S = \mathbb{U}_8 \cup \{0\}$ avec $I = \{0, 1\}$
S^n avec I^n

2 Construction d'une Constellation

On va définir une relation d'équivalence sur les positifs d'une algèbre de von Neumann qui par le quotient la transformera en algèbre de Boole. Puis on étend la relation à toute l'algèbre de von Neumann et le quotient sera une constellation.

Définition 7. Soit E une algèbre de von Neumann tel que C soit le cône des positifs. On met sur E l'ordre $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in C$.

Définition 8. On appelera complété d'un ensemble partiellement ordonné (poset) le complété de McNeille-Dedekind, c'est le plus petit (tout morphisme dans un treillis complet se factorise par l'unique plongement du poset dans son complété) treillis complet qui contient le poset [1]. On note $\mathcal{J}$ le treillis complété de C.

Lemme 9. *On a* $x + \bigwedge\{a_i\} = \bigwedge\{x + a_i\}$, $x + \bigvee\{a_i\} = \bigvee\{x + a_i\}$.

Preuve: On a $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$
En effet, $\bigwedge\{a_i\} \leqslant a_j$ pour tout j, donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant x + a_j$ donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$. Soit $d \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$ donc pour tout i, $d \leqslant x + a_i$ et $x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x - x \leqslant a_i$ et $d \leqslant d \vee x \leqslant x + \bigwedge\{a_i\}$. De même pour l'énoncé dual. ■

On définit la relation d'équivalence sur C (les positifs), $\simeq : x \simeq y \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, x = \lambda.y$, λ réel. On définit la relation d'équivalence $\sim$ comme étant l'intersection de toutes les relations d'équivalences compatibles avec l'addition qui contiennent $\simeq$.

Puis on prend le complété des classes d'équivalences comme dans [5] (théorème 2.7) (pour que les chaînes aient une borne sup), la relation d'équivalence engendrée on la notera toujours $\sim$. On prend ce complété pour avoir un projecteur dans chaque classe d'équivalence. Et sur $C/\sim$, $[x] \leqslant [y]$ ssi $\exists [a] \in C/\sim, [a] + [x] = [y]$.

Lemme 10. *Si* $f \in C$ $f \sim f^2$.

Preuve: On va montrer que tout élément de C est équivalent à un projecteur. Soit un élément $a \in C$, on considère l'algèbre A engendré par a, elle est commutative, donc a est limite de combinaison linéaires de projecteurs dans A et une combinaison linéaire de projecteurs dans A est équivalent à un projecteur car A est commutative ■

Corollaire 11. *On a que* $a \sim s(a)$ *où* s *est le support [7] page 25,*

On note $(I, \prec)$ le treillis complété de $C/\sim$. On note $\curlyvee$ et $\curlywedge$ la borne supérieure et la borne inférieure.

Proposition 12. I *est un quotient de* $\mathcal{J}$

Preuve: On a la surjection canonique de C dans $C/\sim$ donc une application surjective $\mathcal{J} \to I$. La surjection canonique peut être définie comme la fonction support qui est croissante. On prolonge s de telle sorte qu'elle soit croissante sur $\mathcal{J}$. Soit une famille c_i d'éléments de C, on a $c_i \leqslant \bigvee c_i$ donc $s(c_i) \leqslant s(\bigvee c_i)$ donc $\bigvee s(c_i) \leqslant s(\bigvee c_i)$. On remplace c_i par $c_i/||c_i||$, ça ne change pas le support donc $c_i \sim c_i/||c_i||$ Et
Soit $m \in C$, tel que $\bigvee s(c_i) \leqslant m$ alors $c_i \leqslant s(c_i) \leqslant m$ donc $\bigvee c_i \leqslant m$ donc $s(\bigvee c_i) \leqslant m$. Donc $\bigvee s(c_i) = s(\bigvee c_i)$ pour $c_i \leqslant 1$ donc :
Si $a_i \sim b_i$ pour tout i et a_i, b_i dans C, alors $a_i, b_i \in [c_i]$ avec $c_i \leqslant 1$ dans C, donc $\bigvee a_i, \bigvee b_i \in [\bigvee c_i]$ donc $\bigvee a_i \sim \bigvee b_i$

Comme précédemment $\bigwedge c_i \leqslant c_i$ donc $s(\bigwedge c_i) \leqslant s(c_i)$ donc $s(\bigwedge c_i) \leqslant \bigwedge s(c_i)$ si $d \leqslant \bigwedge s(c_i)$ alors $d \leqslant s(c_i) \leqslant c_i + s(c_i)$ on remplace $c_i + s(c_i)$ par d_i on a donc $s(d_i) = s(c_i)$ donc $d \leqslant s(\bigwedge d_i)$, donc $\bigwedge s(d_i) = s(\bigwedge d_i)$ pour $d_i \geqslant 1$ comme précédemment on a la compatibilité de la borne inférieure avec la relation d'équivalence. ■

Corollaire 13. $C/\sim$ *est complet.*

Preuve: Soit $\{c_i\}$ des éléments de C, on définit $\bigvee_i s(c_i) := s((\bigvee_i c_i) \wedge 1)$, dans C les sup quelconque bornés sont définis Théorème 1.7.4 [7], pour l'inf on pose $\bigwedge s(c_i)$ le support du sup des éléments plus petit que tout les c_i, ils sont bornés. ■

Proposition 14. $\mathcal{J}$ *est un monoïde régulier*

Preuve: On symétrise le monoïde $\mathcal{J}$. Soit $a, b, c \in \mathcal{J}$ tel que $a + c = b + c$, soit (c_n) une suite dans C telle que $sup(c_n) = c$. Comme les éléments de C sont régulier, C s'injecte dans le symétrisé. on considère $sup(a + c - c_n) = sup(b + c - c_n)$ qui donne $a = b$ à la limite. Pareil pour l'inf, en effet les éléments de $\mathcal{J}$ s'écrivent sup ou inf d'éléments de C d'après [8] Proposition 5.3.7, page 121 ■

Proposition 15. *Si* $a, b, c \in \mathcal{J}$ *alors* $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$

Preuve: Comme $\mathcal{J}$ est un monoïde régulier on prend son groupe symétrisé et on prend l'ordre $a \leqslant b$ ssi $b - a \in \mathcal{J}$. $a \leqslant b \Rightarrow b - c + c - a \in \mathcal{J}$ donc $a + c \leqslant b + c$ et inversement. ■

Proposition 16. *Pour tout* $a, b \in \mathcal{J}$ $(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b$.

Preuve: Soit a, b dans $\mathcal{J}$. On pose $d = a + b - (a \vee b) \in \mathcal{J}$ Soit $n \in \mathcal{J}$ $n \leqslant a, b \Leftrightarrow n + a, n + b \leqslant a + b \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a, b \leqslant a + b - n \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a \vee b \leqslant d + (a \vee b) - n \Leftrightarrow n \leqslant d$ ■

Corollaire 17. $\mathcal{J}$ *et* I *sont distributifs.*

Preuve: On utilise la caractérisation suivante, si $(a \wedge b = a \wedge c$ et $a \vee b = a \vee c)$ implique $b = c$ alors le treillis est distributif. Donc $\mathcal{J}$ est distributif par les propositions 14, 15, 16.. I est distributif comme quotient de $\mathcal{J}$ ■

Définition 18. On définit la négation sur I comme $\neg a = sup\{y | y \curlywedge a = 0\}$

Théorème 19. I *est une algèbre de Boole complète.*

Preuve: Avec les résultats précédents on a que c'est un treillis distributif complet. Comme a commute avec $1-a$ on a que $\neg a = 1-a$ en effet on a que $\neg a \curlywedge a = 0$ et $\neg a \curlyvee a = 1-a+a = 1$ dans C (en regardant dans la sous algèbre commutative engendrée par a et $1-a$) donc c'est vrai dans le quotient. Et $\neg(a \curlyvee b) = sup\{y | (y \curlywedge a) \curlyvee (y \curlywedge b) = 0\} = sup\{y | y \curlywedge a = 0$ et $y \curlywedge b = 0\} = sup\{y | y \leqslant \neg a$ et $y \leqslant \neg b\}$ donc $\neg(a \curlyvee b) = (\neg a) \curlywedge (\neg b)$ et la négation est une involution donc on a l'autre loi de De Morgan. ■

Définition 20. On définit la relation d'équivalence sur les projecteur, p, q sont équivalents si $p \sim q$ où $\sim$ est la relation précédente ainsi dans une classe il n'y a que des projecteurs. Ainsi $a = u - v + i(u' - v')$ est équivalent à $b = s - t + i(s' - t')$ (les composantes de a, b sont des projecteurs et $uv = vu = 0 = u'v' = v'u'$ et $st = ts = 0 = s't' = t's'$) si $u \sim s, v \sim t, u' \sim s'$ et $v' \sim t'$

On définit l'ensemble $M := \{p - p' + i(q - q') | p, p', q, q'$ projecteurs et c'est l'écriture canonique en positifs$\}$ On se place dans cet ensemble à chaque fois. On définit la somme $p - p' + i(q - q') + u - u' + i(v - v') = a - b + i(a' - b')$ où on a la dernière écriture est celle canonique. Puis on se ramène à M en prenant le support de chaque positif car si $ab = 0$ on a que $s(a)s(b) = 0$ Pour le produit, on fait le produit de deux éléments de M et on se ramène à M comme précédemment avec les projecteurs dans la classe. L'étoile passe au quotient

Proposition 21. *Le produit passe au quotient*

Preuve: Soit deux projecteurs p, q équivalents, $p = \sum_i \lambda_i . f_i$ et $q = \sum_i \mu_i f_i$ avec les mêmes f_i donc pour tout c, cp est équivalent à cq ■

Proposition 22. *Si une classe est inversible alors son étoilé est son inverse.*

Preuve: Soit $[x]$ une classe inversible, $[x^*]$ est aussi inversible donc $[xx^*]$ est inversible et positif et la seule classe inversible positive d'une algèbre de von Neumann est la classe de 1. En effet pour tout projecteur different de 1 disons p on a $(1 - p)p = 0$ ■

Théorème 23. *Le quotient de* M *par cette relation d'équivalence est une constellation.*

Preuve: Si deux projecteurs commutent en considérant la sous algèbre commutative engendrée par ces deux éléments on a qu'ils sont de borne inférieure leur produit.

Si $p \in I$ alors $u_p = p + i\neg p$ est unitaire d'ordre 4 et $u_p p = p = p u_p$ et $u_p . \neg p = i\neg p = \neg p . u_p$. ■

3 Construction d'une algèbre de von Neumann

En utilisant S_4 dont mes élément verifient que $u_p + u_p^* = 2p$ on définit la multiplication puis par un procédé semblable aux valuation dans la théorie des nombres on va définir la norme.

Définition 24. On note S_4 les unitaires d'ordre 4

Théorème 25. *On peut construire une algèbre de von Neumann à partir d'une constellation*

Preuve: Soit (S, I) une constellation, soit $(G, +, 0)$ le groupe abélien libre qui a pour générateurs tous les éléments par $S_4.I$. On définit le quotient A de $\mathbb{C} \otimes G$ par $\neg a \vee b = 1 - a + a \wedge b$ et $a \wedge b + a \vee b = a + b$ pour $a, b \in I$ qui commutent.

Les positifs ($:= A_+$) vont être le cône engendré par I (combinaisons linéaires a coefficients positifs). Ainsi on a définit l'addition. On definit l'ordre avec ce cône.

Pour trouver le produit en décomposant en combinaison linéaire de positifs on se ramène à définir le produit entre un élément de I et un élément $u \in S_4$. La multiplication par $u \in S_4$ de I dans $u.I$ est un isomorphisme d'algèbre de Boole car u est inversible. Un ulrafiltre est envoyé sur un ultrafiltre.

Par linéarité on définit $u.b$ où $b \in I$ et $u \in S_4$. En effet si $(b) = \bigcap_i F_i$ (avec (b) le filtre engendré par b et F_i des ultrafiltres) on définit $(u.b) = \bigcap_i u.F_i$ cela fait sens car la multiplication par u est un isomorphisme d'algèbre de Boole de I dans $u.I$. Encore par linéarité on définit $u.x$ où x est combinaison linéaire de projecteurs.

Montrons que $p + i(1 - p) \in S_4$ avec $p \in I$, si $u \in S_4$, on choisit u tel que $up = p = pu$ et $u(1-p) = i(1-p) = (1-p)u$, ce u vérifie $u(p-i(1-p)) = 1 = (p-i(1-p))u$ donc $u = p+i(1-p)$. Donc les projecteurs sont combinaison linéaire d'éléments de S_4.

Ainsi on peut définir $x.y$ avec x, y combinaison linéaires des projections. La multiplication est distributive.

Lemme de Gauss : Soit $a, b, c \in A_+$ tel que $a \leqslant b + c$, si $a \wedge b = 0$ alors $a \leqslant c$

Preuve du lemme de Gauss : On étent l'ordre au groupe du monoïde A_+ en le posant comme cône des positifs, $a \leqslant b + c$ donc $a - c \leqslant b$ et $a - c \leqslant a$ donc $a - c \leqslant 0$ donc $a \leqslant c$

Pour tout élément $a \in I - \{0\}$ on appelle niveau de a de $f \in A_+$, $n_a(f) = sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ | \lambda.a \leqslant f\}$ si il existe. On définit le niveau d'un ultrafiltre F de l'talgèbre de Boole I. comme $n_F(f) = inf\{n_a(f) | a \in F\}$. C'est le même principe que les valuations en théorie des nombres

On appelle A_+^1 les éléments f de A_+ pour lesquels $n_F(f)$ existe pour tout ultrafiltre F. Soit $x \in A_+$ tel que il existe $\mu \geqslant 0$ tel que $x \leqslant \mu.1$ donc pour a dans un ultrafiltre $n_a(x) \leqslant \mu$ car si $i \leqslant j$ avec $i, j \in A_+$, $a \in I - \{0\}$, $n_a(i) \leqslant n_a(j)$ et $n_a(\mu.1) = \mu$, en effet $\mu(1 - a) \geqslant 0$ donc $\mu.a \leqslant \mu.1$ et si $(\mu + \epsilon).a \leqslant \mu.1$, $\epsilon \leqslant \mu$, $\mu(1 - a) \geqslant \epsilon.(1 - a), \epsilon.a$ donc $\mu(1 - a) \geqslant \epsilon.1$ donc $0 = \mu((1 - a) \wedge a) \geqslant \epsilon.a$ absurde, et si $\mu \leqslant \epsilon$, $\mu(1 - a) \geqslant \epsilon.a$ donc $(1 - a) \geqslant \epsilon/\mu.a \geqslant a$ donc $1 = (1 - a) \vee a = 1 - a$ donc $a = 0$ absurde. Ainsi comme pour p projecteur $p \leqslant 1$ on a $p + q \leqslant 2$ donc les combinaison linéaires à coefficients positifs sont dans A_+^1

Donc $A_+ = A_+^1$

Alors $||p|| = sup\{n_F(p) | F \text{ ultrafiltre}\}$ pour $p \in A_+$. Pour la norme sur les autres éléments on utilise l'axiome de C^*-norme. C'est séparé trivialement.

On a si $a \in A_+^1$ que $a \leqslant ||a||.1$. Montrons que si $a \leqslant b$, $a, b \in A_+$ alors $||a|| \leqslant ||b|| : a \leqslant b \leqslant ||b||.1$ donc $||a|| \leqslant ||b||$

On prolonge le niveau d'un ultrafiltre en permettant les niveaux négatifs, on note A^1 la partie des autoadjoints tel que le niveau positif ou négatif soit défini pour tout ultrafiltre, ainsi comme un élément de A^1 ne dépend que des niveaux pour tout les ultrafiltres donc pour $y \in A^1$, on peut lui associer la fonction $f_y : F \mapsto n_F(y)$, alors $f_x \leqslant f_y$ ssi $x \leqslant y$, en effet $n_a(x \wedge y).a \leqslant x \wedge y$ donc $n_a(x \wedge y) \leqslant min(n_a(x), n_a(y))$ et comme $n_a(x).a \leqslant x$ et $n_a(y).a \leqslant y$ donc $min(n_a(x), n_a(y)) \leqslant n_a(x \wedge y)$ donc il y a égalité. Montrons que f_y est continue pour la topologie de l'espace de Stone [9] : la fonction $Y : a \mapsto Y(a) := \{n_F(y) | a \in F\}$ est croissante et est un morphisme de treillis en effet si $x \vee x' \in F$ alors $x \in F$ ou $x' \in F$ et si $a \in F$ alors $\neg a \notin F$ donc I se plonge dans l'ensemble des parties de $Y(1)$ Soit un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$.

Pour tout $F \in B := \{F \text{ ultrafiltre } n_F(y) \in U\}$, alors comme U est ouvert, on a que il existe un petit intervalle ouvert inclu dans U qui a pour milieu $n_F(y)$ de longueur $2/n$ pour n entier. Comme $n_F(y) = inf_{a \in F} n_a(y)$ alors il existe un $b_F^n \in F$ tel que $n_F(y) \leqslant n_{b_F^n}(y) < n_F(y) + 1/n$ donc dans l'intervalle. On a si $b_F := \bigwedge_n b_F^n$ que $n_{b_F}(y) = n_F(y)$.

On a que $\bigcup_{F \in B} Y(b_F) = Y(\bigvee_{F \in B} b_F) = \{n_G(y) | \bigvee_{F \in B} b_F \in G\}$ on a que si $n_G(y)$ appartient à cet ensemble alors $n_G(y) \leqslant n_{\bigvee_{F \in B} b_F}(y)$. Et on a aussi $\bigcap_{F \in B} Y(b_F) = Y(\bigwedge_{F \in B} b_F) = \{n_G(y) | G$ ultrafiltre, $\bigwedge_{F \in B} b_F \in G\}$ Si $n_G(y)$ est dans ce dernier ensemble alors $n_G(y) \leqslant n_{\bigwedge_{F \in B} b_F}(y)$. Donc si on pose $\bigvee_{F \in B} b_F \wedge \neg(\bigwedge_{F \in B} b_F) = s$ Si $n_G(y) \in Y(s)$ alors $n_{\bigvee_{F \in B} b_F}(y) \geqslant n_G(y) \geqslant n_{\bigwedge_{F \in B} b_F}(y)$ donc $n_G(y) \in U$ ssi $n_G(y) \in Y(s)$ et l'image réciproque de $Y(s)$ par f_y est $\{F \text{ ultrafiltre } | s \in F\}$

qui est un ouvert.

On a que $f : y \mapsto f_y$ est surjective de A^1 dans les fonctions continues de l'espace de Stone de I dans $\mathbb{R}$. Montrons le, soit g une telle fonction, alors si $a \in I - \{0\}$, $a \mapsto X_a := sup\{g(F)|a \in F\}$ est croissante cette fonction est bien définie car l'image d'un compact par une fonction continue est compact et l'espace de Stone est compact, on pose $n_a(x) = X_a$ donc $X_a.a \leqslant x$ pour tout $a \in I$ donc on a le niveau pour tout élément donc on a x.

On a que il existe z tel que $f_z = |f_y|$ on définit $z := |y|$, on a $|y| \geqslant y$ et $|y|$ positif. Montrons que $|-y| = |y|$: $n_a(-y).a \leqslant -y$ et $n_a(y).a \leqslant y$ on en déduit que $n_a(y) \leqslant -n_a(-y)$ donc $|y| \leqslant |-y|$ pour tout y donc pour son opposé, donc $|y| = |-y|$.

et $f_{-y} \leqslant f_{|-y|} = f_{|y|}$ donc $|y| - y$ et $|y| + y$ sont positifs et $(|y| - y)(|y| + y) = |y|^2 - y^2 = 0$. On appelle $(|y| + y)/2 = y^+$ et $(|y| - y)/2 = y^-$.

Montrons que A^1 est égal à l'espace réel engendré par $A_+ := A^*$. Soit $x \in A^1$ on a $|x| \in A_+$ donc les niveaux pour tout les atomes sont bornés. Donc x est différence de deux éléments de A_+ donc il est dans A^*. Soit $x \in A^*$ il s'écrit différence de deux éléments de A_+, $y - z$ chacun a les niveaux définis pour tout atome et $-(||y||.1 + ||z||.1) \leqslant -y - z \leqslant y - z \leqslant y + z \leqslant ||y||.1 + ||z||.1$ donc les niveaux de x sont définis pour tout atome donc $x \in A^1$ Pour y positif on définit $t := \sqrt{y}$ tel que $f_t = \sqrt{f_y}$ et $s := t^2$ tel que $f_s = f_t^2$, on a $f_s = f_y$ donc $s = y$ donc $t^2 = y$ et $t = \sqrt{y}$.

On a que si $yz = zy$ où z, y autoadjoint alors on pose $l := y * z$ l'élément qui vérifie $f_l = f_y f_z$, l'opération définie par l est associative commutative a le même neutre, on a que comme $f_x^2 = f_{x^2}$ on a que les carrés correspondent. Montrons que $f_{x+y} = f_x + f_y$ on a $(n_a(x) + n_a(y)).a \leqslant x + y$ donc $n_a(x) + n_a(y) \leqslant n_a(x + y)$, donc $n_a(x - y) + n_a(y) \leqslant n_a(x)$ en remplaçant y par $-y$ on a $n_a(x + y) \leqslant n_a(x) + n_a(y)$ donc on a égalité car $n_a(-y) = -n_a(y)$ en effet l'opposé de f_y inverse partie positive et partie négative. Donc on a que $n_a(x + y) = n_a(x) + n_a(y)$.

L'opération $*$ est donc distributive sur l'addition et les carrés correspondent donc $(x+y)*(x+y) = (x+y).(x+y)$ donc $x.y = x * y$

Soit y autoadjoint, y inversible implique $f_{y^{-1}} f_y = f_{y^{-1}y} = f_1 = 1$ implique f_y inversible et si y n'est pas inversible pour tout $u \geqslant 0$, $uy \neq 1$ (car si il y a un inverse à gauche a c'est un inverse a droite par adjonction) donc $f_u f_y \neq 1$ et f_y non inversible. On a que si $f_y \geqslant 0$ s'annule en un ultrafiltre alors elle n'est pas inversible. Ainsi $f_y - \lambda.1$ est non inversible ssi il existe F tel que $\lambda = n_F(y)$, l'image de f_y est donc le spectre de y en effet si $\lambda = n_F(y)$, $n_F(y - \lambda.1) = 0$. Par la démonstration habituelle on a que le spectre d'un produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Pour la preuve que pour tout $x \in A$, xx^* est positif on se réfèrera au livre de Dixmier fin de page 13 début de page 14 [3]

L'homogénéité se déduit de l'axiome de C^*-norme. Montrons la sous multiplicativité :
Soit $a, b \in A$ $||ab||^2 = ||abb^*a^*||$, comme $bb^* \leqslant ||bb^*||.1$, on a la sous multiplicativité. Montrons la sous additivité :
Montrons le d'abord pour les positifs :
$f + g \leqslant ||f||.1 + ||g||.1$ donc c'est bon
$||a + b||^2 = ||aa^* + bb^* + ab^* + ba^*||$. Par l'identité $0 \leqslant (a + b)(a + b)^* = aa^* + bb^* + ab^* + ba^*$ on a $-(ab^* + ba^*) \leqslant aa^* + bb^*$
Et par l'identité $0 \leqslant (a - b)(a - b)^* = aa^* + bb^* - ab^* - ba^*$ on a $ab^* + ba^* \leqslant aa^* + bb^* = z$
Donc $ab^* + ba^* = x$ avec x autoadjoint.
On a $||z + x|| \leqslant ||z|| + ||x||$ montrons le :

Donc comme $x = x^+ - x^-$ est autoadjoint et $x^+ \wedge x^- = 0$ on a par le lemme de Gauss que $x^- \leqslant z$. $||z + x^+ - x^-|| \leqslant ||z - x^-|| + ||x^+|| \leqslant ||z|| + ||x^+|| \leqslant ||z|| + ||x^+ - x^-||$ car $||x^+ - x^-|| = max(||x^+||, ||x^-||)$

Donc $||a + b||^2 \leqslant ||aa^*|| + ||bb^*|| + ||ab^* + ba^*||$
On a $(ab^* + ba^*)^2 = ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^* \geqslant 0$
et $(ab^* - ba^*)(ba^* - ab^*) = -ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* - ba^*ba^* \geqslant 0$
Si $ab^*ab^* + ba^*ba^* = x' - y'$ Donc par lemme de Gauss et que $x' \wedge y' = 0$, $x' \vee y' = x' + y' \leqslant ab^*ba^* + ba^*ab^*$
Ainsi $||ab^* + ba^*||^2 = ||ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^*||$. Comme précédement $||ab^* + ba^*||^2 \leqslant 4||a||^2||b||^2$ en prenant $z = ab^*ba^* + ba^*ab^*$ et $x = x' - y'$ et en remarquant que comme x est autoadjoint, $||x|| = |||x|||$ et que $|x| \leqslant z$. C'est pourquoi on a l'inégalité triangulaire.

On complète pour la norme, on obtient une C^*-algèbre, on la plonge dans un $B(\mathcal{H})$ puis ensuite on complète pour la topologie faible. ∎

4 Equivalence de catégories entre les constellation et les algèbres de von Neumann

Théorème 26. *On a un foncteur F de la catégorie des constellations vers celle des algèbres de von Neumann. Ce foncteur est une équivalence de catégories. Sur les objets on utilise les constructions précédentes. On considère comme flèche les morphismes d'algèbres de von Neumann et les morphismes de constellations*

Preuve: Les normes dans les deux constructions correspondent. Dans une algèbre de von Neumann les relations qui définissent A ne sont vérifiées que quand les deux éléments commutent. Soit M une algèbre de von Neumann, la constellation de M, S. Les positifs de M sont limite de somme de projecteurs et ces projecteurs sont limites de combinaison linéaire à coefficient strictement positif des éléments de l'algèbre de Boole de S, $\lambda.p + \mu.q$ (p, q projecteurs) va être retrouvé comme $f_{\lambda.p+\mu.q}$ donc l'algèbre de von Neumann de S est isomorphe à M.

Soit S une constellation, l'algèbre de von Neumann de celle ci M et S' la constellation de M. Les autoadjoint de M sont les f_y défini sur les ultrafiltres de l'algèbre de Boole de S pour y autoadjoint donc l'algèbre de Boole de S' est isomorphe a celle de S. Et le S_4 de S est identique aux $u_p = p + i\neg p$ dans M donc c'est le même que le S_4 de S'. On a la décomposition en projecteurs des éléments de M. On peut définir le produit comme pour la construction d'une constellation vers une algèbre de von Neumann car on viens d'une constellation : si $x = a - b + ic - id$ combinaison linéaire de projecteurs on définit $p.x$ comme $(u_p + u_p^*).x$ ainsi on retombe sur la même constellation.

Ainsi les deux constructions sont reciproques l'une de l'autre.

Soit (B, I) et (B', I') deux constellations et soit $h : B \to B'$ un morphisme de constellation. h est un morphisme d'algèbres de Boole complète $I \to I'$. Donc à une fonction de $S(I) \to \mathbb{R}_+$ ($S(I)$ est l'espace de Stone de I) continue comme on a une fonction continue $h^* : S(I') \to S(I)$ (par la dualité de Stone) on a une fonction continue de $S(I') \to \mathbb{R}_+$ ainsi on envoie un positif de l'algèbre de von Neumann de B sur un positif de l'algèbre de von Neumann de B' autrement dit $f_x \circ h^* = g_{F(h)(x)}$ où g est l'analogue de f pour B', comme f est additive on a $F(h)$ est linéaire. Montrons que $F(h)$ conserve le produit. On a que pour un projecteur p, $F(h)(p) = h(p)$ donc $F(h)(p.p') = h(p.p') = h(p)h(p') = F(h)(p)F(h)(p')$ donc $F(h)$ conserve le produit par linéarité. Donc on a un morphisme de $F(B)$ dans $F(B')$.

Si on a deux morphismes de constellation $f, g : B \to B'$ tel que $F(f) = F(g) : F(B) \to F(B')$, alors $F(f)$ et $F(g)$ correspondent sur les positifs donc sur toute l'algèbre de von Neumann donc par la construction de la section 2 on trouve que que $f = g$

Soit g un morphisme d'algèbre de von Neumann. On a que $F(B)_+ \to F(B')_+$ car un morphisme d'algèbres de von Neumann envoie un positif sur un positif, ainsi g est croissante et comme g est linéaire elle conserve l'unique décomposition en positifs, et si a, b positifs $a \sim b \Rightarrow g(a) \sim g(b)$. Et un projecteur est envoyé sur un projecteur, donc c'est un foncteur plein. ∎

5 Démonstration d'une conjecture

On va démontrer que les algèbres de von Neumann des groupes libres $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ sont isomorphes.

Remarque 27. Il n'existe qu'une seule algèbre de Boole sans atomes dénombrable (chapitre 16 [4])

Remarque 28. Une algèbre de von Neumann de dimension finie a pour constellation une qui a une algèbre de Boole atomique et complète (on les appellera les algèbre de Boole de type I_n)

Définition 29. Soit I et I' deux algèbres de Boole, on définit $I \otimes I' := I^* \times I'^* \cup \{0\}$ où $A^* = A - \{0\}$. Si une algèbre de Boole ne se factorise pas par produit tensoriel avec deux algèbre de Boole non atomique on dit qu'elle est simple. On dit que I est facteur tensoriel de A si il existe une sous algèbre I' non de type I_n de A tel que $I \otimes I' = A$.

Lemme 30. *Soit B l'algèbre de Boole des intervalles de $(0,1)$ quotienté par les parties de mesure nulle. Alors si A est une sous algèbre de Boole de B isomorphe à B alors $A = B$*

Preuve: Comme une sous algèbre de Boole définit une relation d'équivalence sur les ultrafiltres et c'est presque partout pour que ce soit une sous algèbre stricte il faut que la relation fasse qu'une classe soit mesurable de mesure non nulle donc c'est un atome absurde. ■

Corollaire 31. *L'algèbre de Boole B des intervalles de $(0,1)$ quotienté par les parties de mesure nulle est simple*

Preuve: Si $B = I \otimes I'$, I et I' sont des sous algebres de B et $I \cap I' = \{0,1\}$. Une des deux sous algèbre est sans atomes. Comme B est égale à son complété et complété de $I \otimes I'$ est complété de I, $\otimes$ complété de I' ; on a que un ces deux facteurs tensoriel est isomorphe à B disons I donc $I = B$ donc $B = B \otimes I'$, donc $B^* = B^* \times I'^*$ donc $I' = \{0,1\}$ ■

Lemme 32. *L'algèbre complétée de l'algèbre de Boole sans atomes dénombrable (isomorphe aux réunion d'intervalles de $(0,1)$ quotienté par les ensembles de mesure nulle) est un groupe compact avec comme norme la mesure et comme opération la différence symétrique*

Preuve: la différence symétrique est une application continue et d'une suite d'éléments on prend la limite sup ■

Lemme 33. *Si une algèbre de Boole B est celle complétée de l'algèbre de Boole sans atomes dénombrable et est simple alors c'est les intervalles de $(0,1)$ quotienté par les parties de mesure nulle, B_0*

Preuve: par un isomorphisme entre B et B_0 on ramène la topologie et la norme de B_0 dans B. La norme définit une distance sur B. On pose Ω les ultrafiltres de B les événements sur Ω : $\mathcal{F}_0 = B$ et la fonction de probabilité $P = |.| : B \mapsto [0,1]$. On pose $d(x,y) = inf\{|a||(a)$ est un idéal de B qui contient x et $y\}$. On prend la topologie engendrée par d, c'est B, et $P(\Omega) = 1$ et Ω est compact car c'est l'espace de Stone.

Donc en prenant $\mathcal{F}$ la complétion de $\mathcal{F}_0$. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité standard d'après [2] Sect. 1. donc c'est une puissance de $(0,1)$ avec la mesure de Lebesgue donc $B = B_0 \otimes B_0 \otimes ...$ donc si B est simple alors c'est B_0. ■

Lemme 34. *Si M est une algèbre de von Neumann de type II_1 et A est une sous algèbre de von Neumann alors si l'algèbre de Boole I_M de la constellation de M se factorise en produit tensoriel par l'algèbre de Boole I_A de la constellation de A alors il existe une algèbre de von Neumann B tel que $M \simeq A\overline{\otimes}B$*

Preuve: Si $I_M \simeq I_A \otimes I'$ on a pour $p, a_i \in I_M$, $u_p \in S_4^M$, si $u_p.(\bigvee a_i) = \bigvee u_p.a_i$ de meme pour $\bigwedge$. $p = p_A \otimes p'$, $a_i = a_i^A \otimes a_i'$, on pose $u_p = u_{p_A} \otimes u_{p'}$ car
$u_{p_A \otimes p'}(p_A \otimes p') = (u_{p_A} \otimes u_{p'})(p_A \otimes p')$ et
$u_{p_A \otimes p'}.\neg(p_A \otimes p') = i\neg(p_A \otimes p') = (u_{p_A} \otimes u_{p'}).\neg(p_A \otimes p')$ donc
Donc $u_{p_A \otimes p'} = (p_A \otimes p') + i\neg(p_A \otimes p') = u_{p_A} \otimes u_{p'}$.
Car $\neg(p_A \otimes p') = \neg p_A \otimes \neg p'$ (on le démontre a la suite)
Donc $S_4^M \simeq S_4^{I_A} \otimes S_4^{I'}$ (on a transporté l'ordre des projecteurs sur S_4) et
$u_p.(\bigvee a_i) = (u_{p_A}.\bigvee a_i^A) \otimes (u_{p'}.\bigvee a_i')$
$= \bigvee(u_p.a_i) = (\bigvee(u_{p_A}.a_i^A)) \otimes (\bigvee u_{p'}.a_i')$ Avec $u_{p_A}.\bigvee a_i^A = \bigvee(u_{p_A}.a_i^A)$, donc en soustrayant les deux :
$u_{p'}.\bigvee a_i' = \bigvee u_{p'}.a_i'$, de même pour la borne inférieure, c'est bon pour la négation aussi. Donc pour tout $u \in S_4^{I'}$, uI' est isomorphe à I', donc l'algèbre de von Neumann B construite a partir de $S_4^{I'}.I'$ vérifie $M \simeq A\overline{\otimes}B$, on vérifie bien que si $M \simeq A\overline{\otimes}B$ alors l'algèbre de Boole de la constellation de M est le produit tensoriel de l'algèbre de Boole de la constellation de A et de l'algèbre de Boole de la constellation de B, car $a \otimes b \leqslant c \otimes d$ ssi $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$. Montrons le $a \otimes b \leqslant c \otimes d \Rightarrow (a = c$ et $b \leqslant d)$ ou $(a \leqslant c$ et $b = d) \Rightarrow a \leqslant c$ et $b \leqslant d$. Et si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a \otimes b \leqslant a \otimes d \leqslant c \otimes d$.
k Mq $(1 \otimes 1) - (p_A \otimes p') = \neg p_A \otimes \neg p'$ cela découle de $\neg a = sup\{z | z \wedge a = 0\}$ et du fait que quand deux éléments commutent leur borne inférieure est leur produit. En effet par la dernière définition, $\neg(p_A \otimes p') = (1 - p_A) \otimes (1 - p')$ et ce dernier commute avec $(1 \otimes 1) - (p_A \otimes p')$ donc

leur borne inférieure est leur produit qui est égal à $(1-p_A)\otimes(1-p')$ donc ce dernier est plus petit que $(1\otimes 1)-(p_A\otimes p')$ et $p_A\otimes p'$ multiplié avec $(1\otimes 1)-(p_A\otimes p')$ est égal à 0 qui est leur borne inférieure car ils commutent donc $(1\otimes 1)-(p_A\otimes p')$ est plus petit que $(1-p_A)\otimes(1-p')$ par la définition rappelée précédemment donc ils sont égaux. ■

Théorème 35. *Sous l'hypothèse du continu, $L\mathbb{F}_2 = L\mathbb{F}_3$ (les algèbre de von Neumann des groupes libres à 2 et 3 générateurs)*

Preuve: $l^2(\mathbb{F}_2)$ et $l^2(\mathbb{F}_3)$ sont séparables. $\{\lambda_g | g \in \mathbb{F}_2 \text{ ou } \mathbb{F}_3\}$ où λ est la représentation régulière est dénombrable. Le I de la constellation de leur algèbre de von Neumann n'ont pas d'atomes car les algèbre de von Neumann sont des facteurs II_1. L'algèbre de Boole de la constellation est donc sans atome et complète de cardinal continu (car engendré une partie dense dénombrable) donc c'est l'algèbre de Boole complétée de l'unique algèbre de Boole sans atome dénombrable. Comme $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_3$ soit B_3, l'algèbre de Boole de la constellation de $L\mathbb{F}_3$ a comme sous algèbre de Boole une isomorphe à B_2 l'algèbre de Boole de $L\mathbb{F}_2$ Comme $L\mathbb{F}_3$ et $L\mathbb{F}_2$ sont premiers [6] page 303, B_2 et B_3 sont simples car sinon ce serait une puissance tensorielle de B_0 et B_0 n'est pas de type I_n. B_3 et B_2 sont l'algèbre de Boole des intervalles de $(0,1)$ car elle sont isomorphe aux intervalles de $(0,1)$ et simples. Donc B_2 est isomorphe à une sous algèbre de B_3 et comme B_2 est simple la seule possibilité c'est que B_2 soit sous algèbre de Boole de B_3 puis que il n'y a q'une seule algèbre isomorphe à B_0 simple. Donc d'après le lemme 29 comme B_2 et B_3 sont isomorphes, donc elles sont égales. Donc les S_4 des constellations des deux groupes sont égaux et comme $S_4^{\mathbb{F}_2}.B_2 \subset S_4^{\mathbb{F}_3}.B_3$ on a $L\mathbb{F}_2 = L\mathbb{F}_3$

■

Références

[1] Banaschewski and Bruns. Categorical characterization of the macneille completion.

[2] de la Rue. *Espaces de Lebesgue.*

[3] Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs représentations.*

[4] Givant and Halmos. *Introduction to Boolean algebras.* Springer.

[5] George Markowsky. *Bases for Chain-complete Posets.*

[6] Anantharaman Popa. *An introduction to II_1 factors.* https ://www.idpoisson.fr/anantharaman/publications/IIun.pdf.

[7] Shoichiro Sakai. *C*-Algebras and W*-algebras.* Springer, 1971.

[8] Schröder Siegfried. *Ordered Sets : An Introduction.*

[9] M. Stone. The theory of representations of boolean algebras.