Constellations et facteur des groupes libres

Iyari Rojas

23 décembre 2020

1 Introduction

Dans un espace vectoriel rationnel, réel ou complexe, la donnée d'un cône pour l'addition, c'est a dire que ce soit une partie stable par addition et par multiplication par un scalaire positif et tel que si a et $-a$ appartient au cône alors $a = 0$, définit un ordre sur l'espace. Pour les algèbres de von Neumann on choisit comme cône les positifs autrement dit les éléments de la forme aa^*. On va choisir une relation d'équivalence transformer ce cône en algèbre de Boole puis on va étendre canoniquement la relation a toute l'algèbre de von Neumann qui transformera celle ci en une nouvelle structure algébrique que j'ai appelé constellation. On montrera ensuite qu'on peut faire une construction réciproque. Enfin il sera montré une équivalence de catégories entre les deux structures. Finalement on démontrera la conjecture sur les facteurs des groupes libres

Définition 1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ est une algèbre de Boole si B est un ensemble, $\wedge$ et $\vee$ sont des opération binaires associatives commutatives, $\neg$ est une opération unaire involutive et $0, 1$ sont des constantes. Ces opérations doivent vérifier les relations suivantes :
$x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x$
$0 \wedge x = 0$,$1 \vee x = 1$
$x \vee x = x, x \wedge x = x$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
[3]

Définition 2. $\mathbb{U}_n = \{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta^n = 1\}$

Définition 3. Une constellation est $(S, I, ., ^*, \mathbb{U}_8, 0)$, tel que $(S, ., 1)$ soit un monoïde et l'étoile est une opération unaire involutive définie sur S, 0 appartient à S et est absorbant, $\mathbb{U}_8$ est inclu dans S, $0^* = 0$. $I = \{aa^*\}$ est muni d'un ordre , il faut que I avec cet ordre soit une algèbre de Boole complète, les éléments de I doivent être idempotents. Il doit aussi être vérifié que si $a, b \in I$ commutent, alors $a \wedge b = a.b$. S doit verifier aussi les relations suivantes (pour $a, b \in S$,$\lambda, \varphi \in \mathbb{U}_8$) :
$(a.b)^* = b^*.a^*$
$\lambda^* = \overline{\lambda}$
$\lambda.a = a.\lambda$
$\lambda.\varphi = \lambda\varphi$
Il faut aussi que pour tout u unitaire, $u.I$ soit une algèbre de Boole de telle sorte que la multiplication par u de I dans $u.I$ soit un morphisme d'algèbre de Boole. L'inverse d'un élément inversible est son étoilé. Et pour tout $p \in I$ il existe u_p unitaire d'ordre 4 tel que $u_p p = p = p u_p$ et $u_p.\neg p = i\neg p = \neg p.u_p$ et $S_4 = \{u_p, u_p^* | p \in I\}$.

Exemple 4. $S = \mathbb{U}_8 \cup \{0\}$ avec $I = \{0, 1\}$
S^n avec I^n

Remarque 5. L'ordre sur les projecteurs d'une constellation prolonge l'ordre habituel des projecteurs ($p \leqslant q \Leftrightarrow pq = p$)

2 Construction d'une Constellation

On va définir une relation d'équivalence sur les positifs d'une algèbre de von Neumann qui par le quotient la transformera en algèbre de Boole. Puis on étend la relation à toute l'algèbre de von Neumann et le quotient sera une constellation.

Définition 6. Soit E une algèbre de von Neumann tel que C soit le cône des positifs. On met sur E l'ordre $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in C$.

Définition 7. On appelera complété d'un ensemble partiellement ordonné (poset) le complété de McNeille-Dedekind, c'est le plus petit (tout morphisme dans un treillis complet se factorise par l'unique plongement du poset dans son complété) treillis complet qui contient le poset [1]. On note $\mathcal{J}$ le treillis complété de C.

Lemme 8. *On a* $x + \bigwedge\{a_i\} = \bigwedge\{x + a_i\}$, $x + \bigvee\{a_i\} = \bigvee\{x + a_i\}$.

Preuve: On a $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$
En effet, $\bigwedge\{a_i\} \leqslant a_j$ pour tout j, donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant x + a_j$ donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$. Soit $d \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$ donc pour tout i, $d \leqslant x + a_i$ et $x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x - x \leqslant a_i$ et $d \leqslant d \vee x \leqslant x + \bigwedge\{a_i\}$. De même pour l'énoncé dual. ∎

On définit la relation d'équivalence sur C, $\simeq$: $x \simeq y \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, x = \lambda.y$, λ réel. On définit la relation d'équivalence $\sim$ comme étant l'intersection de toutes les relations d'équivalences compatibles avec l'addition qui contiennent $\simeq$. Puis on prend le complété des classes d'équivalences comme dans [4] (théorème 2.7) (pour que les chaînes aient une borne sup), la relation d'équivalence engendrée on la notera toujours $\sim$. On prend ce complété pour avoir un projecteur dans chaque classe d'équivalence. Et sur $C/\sim$, $[x] \leqslant [y]$ ssi $\exists [a] \in C/\sim, [a] + [x] = [y]$.

Lemme 9. *Si* $f \in C$ $f \sim f^2$.

Preuve: On va montrer que tout élément de C est équivalent à un projecteur. Soit un élément $a \in C$, on considère l'algèbre A engendré par a, elle est commutative, donc a est limite de combinaison linéaires de projecteurs dans A et une combinaison linéaire de projecteurs dans A est équivalent à un projecteur car A est commutative ∎

Définition 10. on définit les opération suivantes sur les projecteurs : $a \curlyvee b = s(a + b)$ où s est le support, $\neg a = 1 - a$, $a \curlywedge b = \neg(\neg a \curlyvee \neg b)$, on definit l'ordre : $a \leqslant b \Leftrightarrow s(a + b) = b$. Le premier théorème sera de démontrer qu'avec ces opérations les projecteurs forment une algèbre de Boole.

Proposition 11. *Avec ces opérations les projecteurs forment un treillis complémenté complet*

Preuve: On a $[a \curlyvee b] = [a + b] = [s(a + b)] = [a] + [b]$ donc cette opération est associative commutative idempotente a 0 comme neutre, 1 comme absorbant, $a \curlyvee \neg a = 1$, $\neg$ est involutive décroissante et on a les lois de De Morgan
Montrons qu'elle est décroissante :
Sur C si deux projecteurs p et q vérifient $p \leqslant q$ alors $p - q \in C$ donc $-(1 - p) + 1 - q \in C$ donc $1 - q \leqslant 1 - p$ Montrons une loi d'absorbtion :
Pour tout projecteurs a, c
$a \leqslant a \vee c$ donc $\neg(a \vee c) \leqslant \neg a$ donc $(\neg a) \wedge (\neg c) \leqslant \neg a$ donc pour tout projecteurs u, v, $u \curlywedge v \leqslant u$, l'autre loi d'absorbtion se déduit par les lois de De Morgan. Pour la complétude voir Théorème 1.7.4 dans [6]. ∎

On note $(I, \prec)$ le treillis $C/\sim$. On note $\curlyvee$ et $\curlywedge$ la borne supérieure et la borne inférieure. On étend de la même manière que précédemment l'addition.

Proposition 12. *I est un quotient de $\mathcal{J}$*

Preuve: On a la surjection canonique de C dans $C/\sim$ donc une application surjective $\mathcal{J} \to I$. La surjection canonique peut être définie comme la fonction support qui est croissante. On prolonge s de telle sorte qu'elle soit croissante sur $\mathcal{J}$. Soit une famille c_i d'éléments de C, on a $c_i \leqslant \bigvee c_i$

donc $s(c_i) \leqslant s(\bigvee c_i)$ donc $\bigvee s(c_i) \leqslant s(\bigvee c_i)$. On remplace c_i par $c_i/||c_i||$, ça ne change pas le support donc $c_i \sim c_i/||c_i||$ Et
$[\bigvee s(c_i)] \vee [s(\bigvee c_i)] = [\bigvee s(c_i)] + [\bigvee c_i] = [\bigvee s(c_i) \vee \bigvee c_i] = [\bigvee (s(c_i) \vee c_i)] = [\bigvee s(c_i)]$ donc $s(\bigvee s(c_i)) = \bigvee s(c_i) \geqslant s(\bigvee c_i)$
Donc $\bigvee s(c_i) = s(\bigvee c_i)$ pour $c_i \leqslant 1$ donc :
$\bigvee [c_i] = [\bigvee c_i]$ Si $a_i \sim b_i$ pour tout i et a_i, b_i dans C, alors $a_i, b_i \in [c_i]$ avec $c_i \leqslant 1$ dans C, donc $\bigvee a_i, \bigvee b_i \in [\bigvee c_i]$ donc $\bigvee a_i \sim \bigvee b_i$

Pour la négation, $s(a) = s(b)$, $a, b \in C$ implique $1 - s(a) = 1 - s(b)$ donc $a \sim b$ implique $\neg s(a) \sim \neg s(b)$. Si $a_i \sim b_i$, alors $a_i, b_i \in [c_i]$ avec $c_i \in C$ $s(\bigwedge c_i) = \neg s(\bigvee \neg s(c_i)) = \neg(\bigvee(\neg s(c_i)) = \bigwedge s(c_i)$. Ainsi comme pour le sup $\bigwedge a_i \sim \bigwedge b_i$ ■

Proposition 13. *$\mathcal{J}$ est un monoïde régulier*

Preuve: Soit $a, b, c \in \mathcal{J}$ tel que $a + c = b + c$, soit (c_n) une suite dans C telle que $sup(c_n) = c$, on considère $sup(a + c - c_n) = sup(b + c - c_n)$ qui donne $a = b$ à la limite. ■

Proposition 14. *Si $a, b, c \in \mathcal{J}$ alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$*

Preuve: Comme $\mathcal{J}$ est un monoïde régulier on prend son groupe symétrisé et on prend l'ordre $a \leqslant b$ ssi $b - a \in \mathcal{J}$. $a \leqslant b \Rightarrow b - c + c - a \in \mathcal{J}$ donc $a + c \leqslant b + c$ et inversement. ■

Proposition 15. *Pour tout $a, b \in \mathcal{J}$ $(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b$.*

Preuve: Soit a, b dans $\mathcal{J}$. On pose $d = a + b - (a \vee b) \in \mathcal{J}$ Soit $n \in \mathcal{J}$ $n \leqslant a, b \Leftrightarrow n + a, n + b \leqslant a + b \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a, b \leqslant a + b - n \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a \vee b \leqslant d + (a \vee b) - n \Leftrightarrow n \leqslant d$ ■

Corollaire 16. *$\mathcal{J}$ et I sont distributifs.*

Preuve: On utilise la caractérisation suivante, si $(a \wedge b = a \wedge c$ et $a \vee b = a \vee c)$ implique $b = c$ alors le treillis est distributif. Donc $\mathcal{J}$ est distributif par la proposition 14 et la proposition 12. I est distributif comme quotient de $\mathcal{J}$ ■

Corollaire 17. *Pour tout $a \in I$, $a \vee \neg a = 1$*

Preuve: $s(a + 1 - a) = s(1) = 1$ ■

Théorème 18. *I est une algèbre de Boole complète.*

Preuve: Avec les résultats précédents on a que c'est un treillis distributif complémenté. ■

Définition 19. Si $a = u - v + i(u' - v')$ avec $u - v$ et $u' - v'$ autoadjoint, on l'associe à $s(u) - s(v) + i(s(u') - s(v'))$
Ainsi on se ramène à l'ensemble $M := \{p - p' + i(q - q') | p, p', q, q'$ projecteurs$\}$ On se place dans cet ensemble à chaque fois. On met une relation d'équivalence dessus, $p - p' + i(q - q') \sim u - u' + i(v - v')$ ssi $p - p' = u - u'$ et $q - q' = v - v'$, il y a un unique représentant dans chaque classe qui vérifie que les parties réelles et imaginaires sont égales a leurs décomposition en différence de deux positifs de produit nul. On définit la somme $p - p' + i(q - q') + u - u' + i(v - v') = s(p + u) - s(p' + u') + i(s(q + v) - s(q' - v'))$. Pour le produit, on fait le produit de deux éléments de M et on se ramène à M comme précédemment avec le support. L'étoile passe au quotient Et $\lambda.[x] = [\lambda.x]$ pour $\lambda \in \mathbb{U}_8$.

Proposition 20. *Le produit passe au quotient*

Preuve: Montrons que l'addition passe au quotient,
On a $\mathfrak{R}(a) = (a + a^*)/2$ donc $\mathfrak{R}(a + b) = \mathfrak{R}(a) + \mathfrak{R}(b)$

Montrons maintenant la comptabilite avec le produit :
Si $a \in M$, tel que $a \sim \sum a_i$ et $a_i \in M$, $c \in I$, $(\sum a_i).c \in \sum [a_i.c] = [a.c]$ donc $a.c \sim (\sum a_i).c$ Ainsi pour $a, b, c \in M$ $a \sim b \Rightarrow a.c \sim b.c$ ■

Proposition 21. *Si une classe est inversible alors son étoilé est son inverse.*

Preuve: Soit $[x]$ une classe inversible, $[x^*]$ est aussi inversible donc $[xx^*]$ est inversible et positif et la seule classe inversible positive d'une algèbre de von Neumann est la classe de 1. En effet pour tout projecteur different de 1 disons p on a $(1 - p)p = 0$ ■

Théorème 22. *Le quotient de toute l'algèbre de von Neumann par cette relation d'équivalence est une constellation.*

Preuve: Si deux projecteurs sont se produit nul ils commutent et donc sont de borne inférieure nulle .

Si $p \in I$ alors $u_p = p + i\neg p$ est unitaire d'ordre 4 et $u_p p = p = p u_p$ et $u_p.\neg p = i\neg p = \neg p.u_p$. ■

3 Construction d'une algèbre de von Neumann

On se ramène au cas atomique puis en utilisant S_4 dont mes élément verifient que $u_p + u_p^* = p$ on définit la multiplication puis par un procédé semblable aux valuation dans la théorie des nombres on va définir la norme.

Lemme 23. *Soit (S, I) une constellation, il existe I' qui contient I tel que I' soit atomique et un ensemble $S_4'.I'$ qui contient $S_4.I$.*

Preuve: On prend comme I' l'ensemble des parties des ultrafiltres de I qui a comme sous algèbre de Boole I. On définit un ordre sur les $u_p \in S_4$: $u_p \leqslant u'_p$ ssi $p \leqslant p'$ soit un atome F de I', c'est un ultrafiltre de I,

On associe $p \in I$ à $\{q | q \geqslant p\}$ et u_p à $\{u_q | q \geqslant p\}$ On définit $u_p.F = \{u_p.f | f \in F\}$ et $u_F.p = \{u_f.p | f \in F\}$ pour F ultrafiltre et $p \in I$. Ensuite on prend le sup pour trouver les autres éléments $u_q.f$ avec $q, f \in I'$, ainsi on a definit $S_4'.I'$ qui contient $S_4.I$

■

Théorème 24. *On peut construire une algèbre de von Neumann à partir d'une constellation*

Preuve: Soit (S, I) une constellation, soit $(G, +, 0)$ le groupe abélien libre qui a pour générateurs tous les éléments par $S_4.I$ si I est atomique et $S_4'.I'$ sinon. On définit le quotient A de $\mathbb{C} \otimes G$ par $\neg a \vee b = 1 - a + a \wedge b$ et $a \wedge b + a \vee b = a + b$ pour $a, b \in I$ qui commutent. Et on associe u_0 à i, on prolonge l'étoile par antilinéarité. Les positifs ($:= A_+$) vont être le cône engendré par I (combinaisons linéaires a coefficients positifs). Ainsi on a définit l'addition. On definit l'ordre avec ce cône.

Pour trouver le produit en décomposant en combinaison linéaire de positifs on se ramène à définir le produit entre un positif et un élément $u \in S_4$. La multiplication par $u \in S_4$ de I dans $u.I$ est un isomorphisme d'algèbre de Boole car u est inversible. Soit un atome de I, a, alors $u.a$ doit être aussi un atome car un atome est toujours envoyé sur un atome par un isomorphisme d'algèbre de Boole.

Par linéarité on définit $u.b$ où b est positif et $u \in S_4$. En effet si $b = \bigvee a_i$ on définit $u.b := \bigvee u.a_i$ (le sup est dans l'algèbre de Boole $u.I$) cela fait sens car la multiplication par u est un morphisme d'algèbre de Boole de I dans $u.I$. Encore par linéarité on définit $u.x$ où x est combinaison linéaire de projecteurs.

Montrons que $p + i(1-p) \in S_4$ avec $p \in I$, si $u \in S_4$, on choisit u tel que $up = p = pu$ et $u(1-p) = i(1-p) = (1-p)u$, ce u vérifie $u(p - i(1-p)) = 1 = (p - i(1-p))u$ donc $u = p + i(1-p)$. Donc les projecteurs sont combinaison linéaire d'éléments de S_4.

Ainsi on peut définir $x.y$ avec x, y combinaison linéaires des projections. La multiplication est distributive.

Lemme de Gauss : Soit $a, b, c \in A_+$ tel que $a \leqslant b + c$, si $a \wedge b = 0$ alors $a \leqslant c$

Preuve du lemme de Gauss : On étent l'ordre au groupe du monoïde A_+ en le posant comme cône des positifs, $a \leqslant b + c$ donc $a - c \leqslant b$ et $a - c \leqslant a$ donc $a - c \leqslant 0$ donc $a \leqslant c$

Pour tout atome $a \in I$ on appelle niveau de a de $f \in A_+$, $n_a(f) = sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ | \lambda.a \leqslant f\}$ si il existe.

C'est le même principe que les valuations en théorie des nombres

On appelle A_+^1 les éléments f de A_+ pour lesquels $n_a(f)$ existe pour tout atome a. Soit $x \in A_+$ tel que il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x \leqslant \lambda.1 = \bigvee_a \lambda.a$ donc $x \wedge \lambda.a \leqslant \lambda.a$ alors $x = \bigvee_a (x \wedge \lambda.a)$, ainsi comme pour p projecteur $p \leqslant 1$ on a $p + q \leqslant 2$ donc les combinaison linéaires à coefficients positifs

sont dans A_+^1
Donc $A_+ = A_+^1$

Alors $||p|| = sup\{n_a(p)|a \text{ atome}\}$ pour $p \in A_+$. Pour la norme sur les autres éléments on utilise l'axiome de C^*-norme. C'est séparé trivialement.
On a si $a \in A_+^1$ que $a \leqslant ||a||.1$. Montrons que si $a \leqslant b$, $a, b \in A_+$ alors $||a|| \leqslant ||b|| : a \leqslant b \leqslant ||b||.1$ donc $||a|| \leqslant ||b||$

On prolonge le niveau d'un atome en permettant les niveaux négatifs, on note A^1 la partie des autoadjoints tel que le niveau positif ou négatif soit defini pour tout atome, ainsi un élément de A^1 y s'écrit $\bigvee_{a\in I} n_a(y).a - \bigvee_{a\in J}(-n_a(y)).a$ avec le premier terme positif càd $n_a(y) \geqslant 0$ pour tout $a \in I$ et $n_a(y) \leqslant 0$ pour tout $a \in J$
Comme $n_a(y).a \leqslant y$, on a $n_a(y)^2.a \leqslant y^2$ donc pour tout y autoadjoint y^2 est positif et $n_a(y^2) = n_a(y)^2$. On a que de la même manière $n_a(|y|) = |n_a(y)|$ donc $n_a(y) \leqslant n_a(|y|)$ donc $y \leqslant |y|$ et $-n_a(y) \leqslant n_a(|y|)$ donc $-y \leqslant |y|$ donc $|y|-y$ et $|y|+y$ sont positifs et $(|y|-y)(|y|+y) = |y|^2-y^2 = 0$.
On appelle $(|y| + y)/2 = y^+$ et $(|y| - y)/2 = y^-$.
Montrons que A^1 est égal à l'espace réel engendré par $A_+ := A^*$. Soit $x \in A^1$ on a $|x| \in A_+$ donc les niveaux pour tout les atomes sont bornés. Donc x est différence de deux éléments de A_+ donc il est dans A^*. Soit $x \in A^*$ il s'écrit différence de deux éléments de A_+, $y - z$ chacun a les niveaux définis pour tout atome et $-(||y||.1 + ||z||.1) \leqslant -y - z \leqslant y - z \leqslant y + z \leqslant ||y||.1 + ||z||.1$ donc les niveaux de x sont définis pour tout atome donc $x \in A^1$ Pour la preuve que pour tout $x \in A$, xx^* est positif on se réfèrera au livre de Dixmier fin de page 13 début de page 14 [2]

L'homogénéité se déduit de l'axiome de C^*-norme. Montrons la sous multiplicativité :
Soit $a, b \in A$ $||ab||^2 = ||abb^*a^*||$, comme $bb^* \leqslant ||bb^*||.1$, on a la sous multiplicativité.
Montrons la sous additivité :
Montrons le d'abord pour les positifs :
$f + g \leqslant ||f||.1 + ||g||.1$ donc c'est bon
$||a + b||^2 = ||aa^* + bb^* + ab^* + ba^*||$. Par l'identité $0 \leqslant (a + b)(a + b)^* = aa^* + bb^* + ab^* + ba^*$ on a $-(ab^* + ba^*) \leqslant aa^* + bb^*$
Et par l'identité $0 \leqslant (a - b)(a - b)^* = aa^* + bb^* - ab^* - ba^*$ on a $ab^* + ba^* \leqslant aa^* + bb^* = z$
Donc $ab^* + ba^* = x$ avec x autoadjoint.
On a $||z + x|| \leqslant ||z|| + ||x||$ montrons le :

Donc comme $x = x^+ - x^-$ est autoadjoint et $x^+ \wedge x^- = 0$ on a par le lemme de Gauss que $x^- \leqslant z$. $||z + x^+ - x^-|| \leqslant ||z - x^-|| + ||x^+|| \leqslant ||z|| + ||x^+|| \leqslant ||z|| + ||x^+ - x^-||$ car $||x^+ - x^-|| = max(||x^+||, ||x^-||)$

Donc $||a + b||^2 \leqslant ||aa^*|| + ||bb^*|| + ||ab^* + ba^*||$
On a $(ab^* + ba^*)^2 = ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^* \geqslant 0$
et $(ab^* - ba^*)(ba^* - ab^*) = -ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* - ba^*ba^* \geqslant 0$
Si $ab^*ab^* + ba^*ba^* = x' - y'$ Donc par lemme de Gauss et que $x' \wedge y' = 0$, $x' \vee y' = x' + y' \leqslant ab^*ba^* + ba^*ab^*$
Ainsi $||ab^* + ba^*||^2 = ||ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^*||$. Comme précédement $||ab^* + ba^*||^2 \leqslant 4||a||^2||b||^2$. C'est pourquoi on a l'inégalité triangulaire.

On complète pour la norme, on obtient une C^*-algèbre, on la plonge dans un $B(\mathcal{H})$ puis ensuite on complète pour la topologie faible. Si I n'est pas atomique on prend la sous algèbre engendrée par I. ■

4 Equivalence de catégories entre les constellation et les algèbres de von Neumann

Théorème 25. *On a un foncteur F de la catégorie des constellations vers celle des algèbres de von Neumann. Ce foncteur est une équivalence de catégories. Sur les objets on utilise les constructions précédentes. On considère comme flèche les morphismes d'algèbres de von Neumann et les morphismes de constellations*

Preuve: Les normes dans les deux constructions correspondent, une algèbre de von Neumann est

engendrées par ses projecteurs et une classe d'équivalence avec la relation de la section 2 contient au plus 1 projecteur, en effet si elle en contient 2, comme un projecteur est définit par son support les deux doivent être de support distinct mais deux projecteurs de support distinct ne sont pas équivalents. Dans une algèbre de von Neumann les relations qui définissent A ne sont vérifiées que quand les deux éléments commutent. Ainsi les deux constructions sont reciproques l'une de l'autre.

Soit (B, I) et (B', I') deux constellations et soit $h : B \to B'$ un morphisme de constellation. h est un morphisme d'algèbres de Boole complète $I \to I'$ d'après la construction du théorème 22 en linéarisant on obtient un morphisme d'algèbre de von Neumann. Si on a deux morphismes de constellation $f, g : B \to B'$ tel que $F(f) = F(g) : F(B) \to F(B')$, alors $f(i) = g(i)$ pour $i \in I$ et $f(u) = g(u)$ où u est dans S_4

Soit g un morphisme d'algèbre de von Neumann. On a que $F(B)_+ \to F(B')_+$ car un morphisme d'algèbres de von Neumann envoie un positif sur un positif, ainsi g est croissante et comme g est linéaire elle conserve l'unique décomposition en positifs, et si a, b positifs $a \sim b \Rightarrow g(a) \sim g(b)$. Et un projecteur est envoyé sur un projecteur, donc c'est un foncteur plein. ∎

5 Démonstration d'une conjecture

On va démontrer que les algèbres de von Neumann des groupes libres $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ sont isomorphes.

Définition 26. Soit I et I' deux algèbres de Boole, on définit $I \otimes I' := I^* \times I'^* \cup \{0\}$ où $A^* = A - \{0\}$. Si une algèbre de Boole ne se factorise pas produit tensoriel avec une algèbre de Boole non finie on dit qu'elle est première. On dit que I n'est pas facteur tensoriel de A si il n'y a pas de sous algèbre I' infinie de A tel que $I \otimes I' = A$.

Lemme 27. *Soit B l'algebre de Boole complétée de l'algèbre de Boole sans atomes dénombrable. Alors si A est une sous algèbre de Boole non facteur tensoriel de B isomorphe à B alors $A = B$*

Preuve: B est isomorphe aux réunions finies d'intervalles inclus dans $(0, 1)$ quotienté par les ensembles de mesure nulle. Si $A \otimes C \simeq B$ alors C est une algèbre de Boole finie, donc les ultrafiltres de $B, U(B)$, vérifient $U(B)$ équipotent à $U(A) \times U(C)$ où $U(C)$ est un entier n donc $U(A) \times U(C) = U(A) \times n$. En multipliant les bornes des intervalles par n on a que $U(B) \times n = (0, n)$. $A \subset B$ Donc $U(A) \times n$ définit une relation d'équivalence sur $(0, n)$. Comme une sous algèbre de Boole définit une relation d'équivalence sur les ultrafiltres et c'est presque partout pour que ce soit une sous algèbre stricte il faut que la relation fasse qu'une classe soit mesurable de mesure non nulle donc c'est un atome absurde. ∎

Lemme 28. *Si M est une algèbre de von Neumann de type II_1 et A est une sous algèbre de von Neumann alors si l'algèbre de Boole I_M de la constellation de M se factorise en produit tensoriel par l'algèbre de Boole I_A de la constellation de A alors il existe une algèbre de von Neumann B tel que $M \simeq A \overline{\otimes} B$*

Preuve: Si $I_M \simeq I_A \otimes I'$ on a pour $p, a_i \in I_M$, $u_p \in S_4^M$, si $u_p.(\bigvee a_i) = \bigvee u_p.a_i$ de meme pour $\bigwedge$. $p = p_A \otimes p'$, $a_i = a_i^A \otimes a_i'$, on pose $u_p = u_{p_A} \otimes u_{p'}$ car
$u_{p_A \otimes p'}(p_A \otimes p') = (u_{p_A} \otimes u_{p'})(p_A \otimes p')$ et
$u_{p_A \otimes p'}.\neg(p_A \otimes p') = i\neg(p_A \otimes p') = (u_{p_A} \otimes u_{p'}).\neg(p_A \otimes p')$ donc
Donc $u_{p_A \otimes p'} = (p_A \otimes p') + i\neg(p_A \otimes p') = u_{p_A} \otimes u_{p'}$.
Car $\neg(p_A \otimes p') = \neg p_A \otimes \neg p'$ (on le démontre a la suite)
Donc $S_4^M \simeq S_4^{I_A} \otimes S_4^{I'}$ (on a transporté l'ordre des projecteurs sur S_4) et
$u_p.(\bigvee a_i) = (u_{p_A}.\bigvee a_i^A) \otimes (u_{p'}.\bigvee a_i')$
$= \bigvee(u_p.a_i) = (\bigvee(u_{p_A}.a_i^A)) \otimes (\bigvee u_{p'}.a_i')$ Avec $u_{p_A}.\bigvee a_i^A = \bigvee(u_{p_A}.a_i^A)$, donc en soustrayant les deux :
$u_{p'}.\bigvee a_i' = \bigvee u_{p'}.a_i'$, de même pour la borne inférieure, c'est bon pour la négation aussi. Donc pour tout $u \in S_4^{I'}$, uI' est isomorphe à I', donc l'algèbre de von Neumann B construite a partir de $S_4^{I'}.I'$ vérifie $M \simeq A \overline{\otimes} B$ en effet si $M \simeq A \overline{\otimes} B$ alors l'algèbre de Boole de la constellation de M est le produit tensoriel de l'algèbre de Boole de la constellation de A et de l'algèbre de Boole de la constellation de B, car $a \otimes b \leqslant c \otimes d$ ssi $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$. Montrons le $a \otimes b \leqslant c \otimes d \Rightarrow (a = c$ et $b \leqslant d)$ ou $(a \leqslant c$ et $b = d) \Rightarrow a \leqslant c$ et $b \leqslant d$. Et si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a \otimes b \leqslant a \otimes d \leqslant c \otimes d$.
Mq $\neg(p_A \otimes p') = \neg p_A \otimes \neg p'$ cela découle de $\neg a = sup\{z | z \wedge a = 0\}$. ∎

Théorème 29. *$L\mathbb{F}_2 = L\mathbb{F}_3$ (les algèbre de von Neumann des groupes libres à 2 et 3 générateurs)*

Preuve: $l^2(\mathbb{F}_2)$ et $l^2(\mathbb{F}_3)$ sont séparables. $\{\lambda_g | g \in \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3\}$ où λ est la représentation régulière est dénombrable. La constellation de leur algèbre de von Neumann n'ont pas d'atomes car les algèbre de von Neumann sont des facteurs II_1. L'algèbre de Boole de la constellation est donc sans atome et complète engendrée par une partie dénombrable donc c'est l'algèbre de Boole complétée de l'unique algèbre de Boole sans atome dénombrable. Comme $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_3$ soit B_3, l'algèbre de Boole de la constellation de $L\mathbb{F}_3$ et B_2 l'algèbre de Boole de $\mathbb{F}_2$. Comme $L\mathbb{F}_3$ est premier [5] page 303, B_2 n'est pas un facteur tensoriel de B_3 Et B_2 et B_3 ont même unité donc B_2 est une sous algèbre de Boole de B_3, les deux sont sans atomes complètes et isomorphes une sous algèbre de l'autre donc égales. Donc les S_4 des constellations des deux groupes sont égales donc $L\mathbb{F}_2 = L\mathbb{F}_3$

■

Références

[1] Banaschewski and Bruns. Categorical characterization of the macneille completion.

[2] Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs représentations.*

[3] Givant and Halmos. *Introduction to Boolean algebras.* Springer.

[4] George Markowsky. *Bases for Chain-complete Posets.*

[5] Anantharaman Popa. *An introduction to II_1 factors.* https ://www.idpoisson.fr/anantharaman/publications/IIun.pdf.

[6] Shoichiro Sakai. *C*-Algebras and W*-algebras.* Springer, 1971.