Constellations et démonstration d'une conjecture sur les facteur libres

Iyari Rojas

August 16, 2020

1 Introduction

On va définir une nouvelle structure appelée constellation puis on va montrer une équivalence de catégories entre les constellations et les algèbres de von Neumann enfin on montrera une conjecture sur les facteur de groupe libre

Définition 1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ est une algèbre de Boole si B est un ensemble, $\wedge$ et $\vee$ sont des opération binaires associatives commutatives, $\neg$ est une opération unaire involutive et $0, 1$ sont des constantes. Ces opérations doivent vérifier les relations suivantes:
$x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x$
$0 \wedge x = 0$,$1 \vee x = 1$
$x \vee x = x, x \wedge x = x$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$
$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
[2]

Définition 2. $\mathbb{U}_n = \{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta^n = 1\}$

Définition 3. Une constellation est $(S, I, ., ^*, \mathbb{U}_8, 0)$, tel que $(S, ., 1)$ soit un monoïde et l'étoile est une opération unaire involutive définie sur S, 0 appartient à S et est absorbant, $\mathbb{U}_8$ est inclu dans S, $0^* = 0$. $I = \{aa^*\}$ est muni de la relation qui doit être un ordre $a \leqslant b$ ssi $a = b.a$, il faut que I avec cet ordre soit une algèbre de Boole complète, les éléments de I doivent être idempotents. S doit verifier aussi les relations suivantes (pour $a, b \in S$,$\lambda, \varphi \in \mathbb{U}_8$):
$(a.b)^* = b^*.a^*$
$\lambda^* = \overline{\lambda}$
$\lambda.a = a.\lambda$
$\lambda.\varphi = \lambda\varphi$
Il faut aussi que pour tout a, $a.I$ soit une algèbre de Boole de telle sorte que la multiplication par a de I dans $a.I$ soit un morphisme d'algèbre de Boole. L'inverse d'un élément inversible est son étoilé. Et pour tout $p \in I$ il existe u_p unitaire d'ordre 4 tel que $u_p p = p = p u_p$ et $u_p.\neg p = i \neg p = \neg p.u_p$ et $S_4 = \{u_p, u_p^* | p \in I\}$.

2 Construction d'une Constellation

Définition 4. Soit E une algèbre de von Neumann tel que C soit le cône des positifs. On met sur E l'ordre $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in C$.

Définition 5. On appelera complété d'un ensemble partiellement ordonné (poset) le complété de McNeille-Dedekind, c'est le plus petit (tout morphisme dans un treillis complet se factorise par l'unique plongement du poset dans son complété) treillis complet qui contient le poset [1]. On note $\mathcal{J}$ le treillis complété de C.

Lemme 6. *On a* $x + \bigwedge\{a_i\} = \bigwedge\{x + a_i\}$, $x + \bigvee\{a_i\} = \bigvee\{x + a_i\}$.

Preuve: On a $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$
En effet, $\bigwedge\{a_i\} \leqslant a_j$ pour tout j, donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant x + a_j$ donc $x + \bigwedge\{a_i\} \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$. Soit $d \leqslant \bigwedge\{x + a_i\}$ donc pour tout i, $d \leqslant x + a_i$ et $x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x \leqslant x + a_i$ donc $d \vee x - x \leqslant a_i$ et $d \leqslant d \vee x \leqslant x + \bigwedge\{a_i\}$. De même pour l'énoncé dual. ∎

On définit la relation d'équivalence sur C, $\simeq$: $x \simeq y \Leftrightarrow \exists\lambda > 0, x = \lambda.y$, λ réel. On définit la relation d'équivalence $\sim$ comme étant l'intersection de toutes les relations d'équivalences compatibles avec l'addition qui contiennent $\simeq$. Puis on prend l'adhérence pour la topologie faible des classes d'équivalences, la relation d'équivalence engendrée on la notera toujours $\sim$. Et sur $C/\sim$, $[x] \leqslant [y]$ ssi $\exists[a] \in C/\sim, [a] + [x] = [y]$.

Lemme 7. *Si* $f \in C$ $f \sim f^2$.

Preuve: On va montrer que tout élément de C est équivalent à un projecteur. Soit un élément $a \in C$, on considère l'algèbre A engendré par a, elle est commutative, donc a est limite de combinaison linéaires de projecteurs dans A et une combinaison linéaire de projecteurs dans A est équivalent à un projecteur ∎

Corollaire 8. $C/\sim$ *est un treillis complet*

Preuve: les projecteur forment un treillis complet ∎

On note $(I, \prec)$ le treillis $C/\sim$. On note $\curlyvee$ et $\curlywedge$ la borne supérieure et la borne inférieure. On étend de la même manière que précédemment l'addition.

Proposition 9. I *est un quotient de* $\mathcal{J}$

Preuve: On a la surjection canonique de C dans $C/\sim$ donc une application surjective $\mathcal{J} \to I$. ∎

Proposition 10. $\mathcal{J}$ *est un monoïde régulier*

Preuve: Soit $a, b, c \in \mathcal{J}$ tel que $a + c = b + c$, soit (c_n) une suite dans C telle que $sup(c_n) = c$, on considère $sup(a + c - c_n) = sup(b + c - c_n)$ qui donne $a = b$ à la limite. ∎

Proposition 11. *Si* $a, b, c \in \mathcal{J}$ *alors* $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$

Preuve: Comme $\mathcal{J}$ est un monoïde régulier on prend son groupe symétrisé et on prend l'ordre $a \leqslant b$ ssi $b - a \in \mathcal{J}$. $a \leqslant b \Rightarrow b - c + c - a \in \mathcal{J}$ donc $a + c \leqslant b + c$ et inversement. ∎

Proposition 12. *Pour tout* $a, b \in \mathcal{J}$ $(a \vee b) + (a \wedge b) = a + b$.

Preuve: Soit a, b dans $\mathcal{J}$. On pose $d = a + b - (a \vee b) \in \mathcal{J}$ Soit $n \in \mathcal{J}$ $n \leqslant a, b \Leftrightarrow n + a, n + b \leqslant a + b \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a, b \leqslant a + b - n \Leftrightarrow n \leqslant a + b$ et $a \vee b \leqslant d + (a \vee b) - n \Leftrightarrow n \leqslant d$ ∎

Corollaire 13. $\mathcal{J}$ *et* I *sont distributifs.*

Preuve: On utilise la caractérisation suivante, si $(a \wedge b = a \wedge c$ et $a \vee b = a \vee c)$ implique $b = c$ alors le treillis est distributif. Donc $\mathcal{J}$ est distributif par la proposition 10 et la proposition 12. I est distributif comme quotient de $\mathcal{J}$ ∎

Définition 14. On définit $\neg[a] = [1 - p]$ où p est un projecteur équivalent à a.

Corollaire 15. *Pour tout* $a \in I$, $a \curlyvee \neg a = 1$

Preuve: $[a] = [p]$ où p est un projecteur, donc $\neg[a] = [1 - p]$. On a $[p] + [1 - p] = [1]$. Et $[p] \curlywedge [1 - p] = [0]$ donc $[p] \curlyvee \neg[p] = [1]$. ∎

Lemme 16. *Soient* $[a], [b] \in I$. *Si* $[a] \prec [b]$ *il existe* $[c] \in I$ *tel que* $[a] \curlywedge [c] = 0$ *et* $[a] \curlyvee [c] = [b]$

Preuve: $[c] = [b] \curlywedge \neg[a]$, on a $[c].[a] \leqslant [a].\neg[a] = 0$ donc $[c] \curlywedge [a] = 0$ par distributivité on l'autre assertion ∎

Lemme 17. *(de Gauss) Soit $a, b, c \in \mathcal{J}$ tel que $a \leqslant b + c$, si $a \wedge b = 0$ alors $a \leqslant c$*

Preuve: On étent l'ordre au groupe du monoïde $\mathcal{J}$ en le posant comme cône des positifs, $a \leqslant b + c$ donc $a - c \leqslant b$ et $a - c \leqslant a$ donc $a - c \leqslant 0$ donc $a \leqslant c$ ■

Théorème 18. *I est une algèbre de Boole complète.*

Preuve: Avec les résultats précédents on a que c'est un treillis distributif complémenté. ■

Définition 19. On étend la relation d'équivalence à toute l'algèbre de von Neumann. Soit a, b dans l'algèbre de von Neumann, on écrit les décompositions unique de a, b en positifs $a = u - v + i(u' - v')$ et $b = s - t + i(s' - t')$
$a \sim b$ ssi $u \sim s, v \sim t, u' \sim s'$ et $v' \sim t'$.
Le produit passe au quotient, l'étoile aussi. Et $\lambda.[x] = [\lambda.x]$ pour $\lambda \in \mathbb{U}_8$.

Proposition 20. *Si une classe est inversible alors son étoilé est son inverse.*

Preuve: Soit $[x]$ une classe inversible, $[x^*]$ est aussi inversible donc $[xx^*]$ est inversible et positif et la seule classe inversible positive d'une algèbre de von Neumann est la classe de 1. Si il y en avait une autre, disons $[y]$ alors $[y] \vee \neg[y] = [1]$, alors $[y]^{-1}.([y] \vee \neg[y]) = [1] \vee ([y]^{-1}.\neg[y]) = [1] = [y^{-1}]$ (on utilise que le produit par un élément est un morphisme d'algèbres de Boole et que $[1]$ est le maximum des positifs) donc $[y] = [1]$. ■

Théorème 21. *Le quotient de toute l'algèbre de von Neumann par cette relation d'équivalence est une constellation.*

Preuve: Pour tout a on transporte la structure d'algèbre de Boole à $a.I$ de telle sorte que l'application de multiplication par a de I dans $a.I$ soit un morphisme d'algèbre de Boole.
Maintenant prouvons que si $[a], [b]$ sont positifs, $[a] \prec [b] \Leftrightarrow [a] = [b].[a]$:
Il existe $[c]$ positif tel que comme dans le lemme 16 $[a] \curlywedge [c] = 0$ et $[a] \curlyvee [c] = [b]$. On a $[a].[c] \leqslant [a].\neg[a] = 0$. Ainsi $[a].([a] \curlyvee [c]) = [a] = [b].[a]$. Si $p \in I$ alors $u_p = p + i\neg p$ est unitaire d'ordre 4 et $u_p p = p = p u_p$ et $u_p.\neg p = i\neg p = \neg p.u_p$. ■

3 Construction d'une algèbre de von Neumann

Lemme 22. *Soit (S, I) une constellation, il existe I' qui contient I tel que I' soit atomique et un ensemble $S_4'.I'$ qui contient $S_4.I$.*

Preuve: On prend comme I' l'ensemble des parties des ultrafiltres de I qui a comme sous algèbre de Boole I. On définit un ordre sur les $u_p \in S_4$: $u_p \leqslant u_p'$ ssi $p \leqslant p'$ soit un atome F de I', c'est un ultrafiltre de I,

On associe $p \in I$ à $\{q | q \geqslant p\}$ et u_p à $\{u_q | q \geqslant p\}$ On définit $u_p.F = \{u_p.f | f \in F\}$ et $u_F.p = \{u_f.p | f \in F\}$ pour F ultrafiltre et $p \in I$. Ensuite on prend le sup pour trouver les autres éléments $u_q.f$ avec $q, f \in I'$, ainsi on a definit $S_4'.I'$ qui contient $S_4.I$

■

Lemme 23. *On peut construire une algèbre de von Neumann à partir d'une constellation*

Preuve: Soit (S, I) une constellation, soit $(G, +, 0)$ le groupe abélien libre qui a pour générateurs tous les éléments par $S_4.I$ si I est atomique et $S_4'.I'$ sinon. On définit le quotient A de $\mathbb{C} \otimes G$ par $\neg a \vee b = 1 - a + a \wedge b$ et $a \wedge b + a \vee b = a + b$ pour $a, b \in I$ qui commutent. Et on associe u_0 à i, on prolonge l'étoile par antilinéarité. Les positifs ($:= A_+$) vont être le cône engendré par I (combinaisons linéaires a coefficients positifs). Ainsi on a définit l'addition.

Pour trouver le produit en décomposant en combinaison linéaire de positifs on se ramène à définir le produit entre un positif et un élément $u \in S_4$. La multiplication par $u \in S_4$ de I dans $u.I$ est un isomorphisme d'algèbre de Boole car u est inversible. Soit un atome de I, a, alors c'est une demi droite et $u.a$ doit être aussi un atome car un atome est toujours envoyé sur un atome par un isomorphisme d'algèbre de Boole donc une demi droite.

Par linéarité on définit $u.b$ où b est positif et $u \in S_4$. En effet si $b = \bigvee a_i$ on définit $u.b := \bigvee u.a_i$ (le sup est dans l'algèbre de Boole $u.I$) cela fait sens car la multiplication par u est un morphisme d'algèbre de Boole de I dans $u.I$. Encore par linéarité on définit $u.x$ où x est combinaison linéaire de projecteurs.

Montrons que $p + i(1-p) \in S_4$ avec $p \in I$, si $u \in S_4$, on choisit u tel que $up = p = pu$ et $u(1-p) = i(1-p) = (1-p)u$, ce u vérifie $u(p-i(1-p)) = 1 = (p-i(1-p))u$ donc $u = p+i(1-p)$. Donc les projecteurs sont combinaison linéaire d'éléments de S_4.

Ainsi on peut définir $x.y$ avec x, y combinaison linéaires des projections. La multiplication est distributive.

Soit $p \in A_+$, p s'écrit combinaison linéaire de projecteurs orthogonaux à coefficient positifs, montrons le par récurrence: $n = 1$ ok, soit $p = \sum_i^n \lambda_i a_i + \mu.b$ avec a_i orthogonaux et b projecteur $p = \sum_i^n \lambda_i a_i \wedge \neg b + \sum_i^n (\lambda_i + \mu) a_i \wedge b + \mu(b \wedge \neg \sum_i^n a_i)$. Alors $||p||$ = le plus haut coefficient dans cette décomposition en projecteurs orthogonaux. Pour la norme sur les autres éléments on utilise l'axiome de C^*-norme. C'est séparé trivialement.
Montrons que si $a \leqslant b$, $a, b \in A_+$ alors $||a|| \leqslant ||b||$: Posons $a = \sum_i \lambda_i a_i$ et $b = \sum_j \mu_j b_j$, $a \wedge b = \sum_{i,j} min(\lambda_i, \mu_j) a_i \wedge b_j$ donc $||a|| = ||a \wedge b|| \leqslant ||b||$ donc on a le résultat.
L'homogénéité se déduit de l'axiome de C^*-norme. On a si $a \in A_+$ que $a \leqslant ||a||.1$.
Montrons la sous multiplicativité:
Soit $a, b \in A$ $||ab||^2 = ||abb^*a^*||$, comme $bb^* \leqslant ||bb^*||.1$, on a la sous multiplicativité.
Montrons la sous additivité:
Elle est évidente pour les positifs en décomposant en combinaison linéaire de projecteurs. $||a+b||^2 = ||aa^* + bb^* + ab^* + ba^*||$, comme $ab^* + ba^*$ est autoadjoint il s'écrit différence de deux positifs de borne inférieure nulle. Par l'identité $0 \leqslant (a+b)(a+b)^* = aa^* + bb^* + ab^* + ba^*$ on a $-(ab^* + ba^*) \leqslant aa^* + bb^*$
Et par l'identité $0 \leqslant (a-b)(a-b)^* = aa^* + bb^* - ab^* - ba^*$ on a $ab^* + ba^* \leqslant aa^* + bb^* = z$
Donc si $ab^* + ba^* = x - y$ avec $x, y \in A_+$ et $x \wedge y = 0$. Donc $y - x \leqslant z$ donc $y \leqslant z + x$ donc par le lemme de Gauss $y \leqslant z$
On a $||z + x - y|| \leqslant ||z - y|| + ||x|| \leqslant ||z|| + ||x|| \leqslant ||z|| + ||x - y||$ car $||x - y|| \geqslant ||x||$, montrons le : en décomposant x et y en combinaison linéaire de projecteurs les coefficients de x ne sont pas affectés par ceux de y car $x \wedge y = 0$ donc la norme de $x - y$ ne peut pas être inférieure a celle de x.

Donc $||a + b||^2 \leqslant ||aa^*|| + ||bb^*|| + ||ab^* + ba^*||$
On a $(ab^* + ba^*)^2 = ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^* \geqslant 0$
et $(ab^* - ba^*)(ba^* - ab^*) = -ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* - ba^*ba^* \geqslant 0$
Si $ab^*ab^* + ba^*ba^* = x' - y'$ Donc $x' \vee y' \leqslant ab^*ba^* + ba^*ab^*$
Ainsi $||ab^* + ba^*||^2 = ||ab^*ab^* + ab^*ba^* + ba^*ab^* + ba^*ba^*||$. Comme précédement $||ab^* + ba^*||^2 \leqslant 4||a||^2||b||^2$. C'est pourquoi on a l'inégalité triangulaire.

On complète pour la norme, on obtient une C^*-algèbre, on la plonge dans un $B(\mathcal{H})$ puis ensuite on complète pour la topologie faible. Si I n'est pas atomique on prend la sous algèbre engendrée par I. ■

4 Equivalence de catégories entre les constellation et les algèbres de von Neumann

Théorème 24. *On a un foncteur F de la catégorie des constellations vers celle des algèbres de von Neumann. Ce foncteur est une équivalence de catégories. Sur les objets on utilise les constructions précédentes. On considère comme flèche les morphismes d'algèbres de von Neumann et les morphismes de constellations*

Preuve: Soit (B, I) et (B', I') deux constellations et soit $h : B \to B'$ un morphisme de constellation. h est un morphisme d'algèbres de Boole complète $I \to I'$ d'après la construction du lemme 22 en linéarisant on obtient un morphisme d'algèbre de von Neumann. Si on a deux morphismes de constellation $f, g : B \to B'$ tel que $F(f) = F(g) : F(B) \to F(B')$, alors $f(i) = g(i)$ pour $i \in I$ et $f(u) = g(u)$ où u est dans S_4

Soit g un morphisme d'algèbre de von Neumann. On a que $F(B)_+ \to F(B')_+$ car un morphisme d'algèbres de von Neumann envoie un positif sur un positif, ainsi g est croissante et comme g est linéaire elle conserve l'unique décomposition en positifs, et si a, b positifs $a \sim b \Leftrightarrow g(a) \sim g(b)$. Et un projecteur est envoyé sur un projecteur, donc c'est un foncteur plein. ■

5 Démonstration d'une conjecture

Lemme 25. *Si l'algèbre de Boole d'une constellation* (S, I) *se factorise en produit direct de deux algèbres de Boole alors l'algèbre de von Neumann* M *de* S *n'est pas premier.*

Preuve: Si $I = A \times B$, alors l'algèbre de von Neumann M_A de $S_4^A = \{u_p | p \in A\}$ et A et l'algèbre de von Neumann M_B de S_4^B et B vérifient $M = M_A \otimes M_B$ ∎

Théorème 26. $L\mathbb{F}_2 = L\mathbb{F}_3$ *(les algèbre de von Neumann des groupes libres à 2 et 3 générateurs)*

Preuve: $l^2(\mathbb{F}_2)$ et $l^2(\mathbb{F}_3)$ sont séparables. $\{\lambda_g | g \in \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3\}$ où λ est la représentation régulière est dénombrable. La constellation de leur algèbre de von Neumann n'ont pas d'atomes car les algèbre de von Neumann sont des facteurs II_1. L'algèbre de Boole de la constellation est donc sans atome et complète engendrée par une partie dénombrable donc c'est l'algèbre de Boole complétée de l'unique algèbre de Boole sans atome dénombrable. Comme $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_3$ et $L\mathbb{F}_3$ est premier, on a que l'algèbre de Boole B_2 de $\mathbb{F}_2$ est une sous algèbre de Boole B_3 de celle de $\mathbb{F}_3$, les deux sont sans atomes complètes et isomorphes. En effet si $L\mathbb{F}_3$ n'était pas premier l'algèbre de Boole de $L\mathbb{F}_2$ pourrait factoriser l'algèbre de Boole de $L\mathbb{F}_3$ de la forme $I \otimes 1 \times 1 \otimes I'$. On a donc que S_4^2 de $\mathbb{F}_2$ n'est pas un facteur direct et est inclu dans S_4^3 de $\mathbb{F}_3$. Soit i le morphisme d'inclusion. Ainsi $u_p \neg p = i(u_p) \neg p$ avec u_p est dans S_4^2. S_4^2 est isomorphe à S_4^3 car B_2 et B_3 sont isomorphes. Donc $S_4^2.B_2$ est isomorphe à $S_4^4.B_3$.

Ainsi $L\mathbb{F}_2$ est isomorphe à $L\mathbb{F}_3$. ∎

References

[1] Banaschewski and Bruns. Categorical characterization of the macneille completion.

[2] Givant and Halmos. *Introduction to Boolean algebras*. Springer.