Mercredi 15/04/2015 **TS1** **DS8** 4 heures

NB: Il est impératif de rendre sa copie au terme fixé de l'épreuve. Tout retard sera sanctionné en proportion de son importance. ***Le texte est recto-verso et comprend 4 pages.*** *Le barème sera fixé après examen de quelques copies. Il est expressément demandé de ne pas scinder les exercices.* ***Rappelez-vous la consigne de rédiger chaque exercice sur une copie simple (ou plusieurs si nécessaire). Votre nom doit être rappelé sur chaque copie ; les pages doivent être numérotées et l'ensemble relié dans une copie double. Ne pas oublier de laisser une marge pour les notes et annotations.*** *On attachera le plus grand soin à la rédaction dont il sera tenu compte dans la notation.*

*Les questions de **I** sont proches du cours et indépendantes dans l'esprit des textes d'INT. Dans l'exercice **II** les questions sont liées. Les deux premiers exercices seront notés, chacun sur 6. Le problème étant long, il n'y a que deux exercices suivis du problème. La note n'ayant plus d'influence pour l'orientation APB, la manie du remplissage de certains sera sanctionnée (propos dénués de sens, solution inachevée et se bornant à un commentaire plus ou moins long du texte, contradictions ou incohérences, conclusions abusives etc), surtout chez ceux qui présentent ces vagues vaticinations sous le titre pompeux d'« idée ». Votre copie n'est pas un brouillon ni une feuille d'essai. Il convient donc d'étudier au brouillon les questions qui requièrent de la réflexion et un certain développement avant d'entreprendre la rédaction sur la copie.*

I) *(Sur 6 points)*

1. Soient $I = \int_0^{\pi} x\cos^2 x \ \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin^2 x \ \mathrm{d}x$.

a) Calculer $I + J$.

b) Établir que $I - J = \int_0^{\pi} x\cos(2x)x \ \mathrm{d}x$, puis à l'aide d'un changement de variable [1] montrer que $\int_0^{\pi} x\cos(2x) \ \mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire I et J.

2.

a) Citer le premier théorème de la moyenne.

b) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t) \ \mathrm{d}t$.

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue.

a) Démontrer l'inégalité : $\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$, une fonction continue et (E) l'équation d'inconnue $x \in [0,1]$: $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2x - 1$.
Montrer que (E) possède une unique solution.

II) *(Sur 6 points)* Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\cdot$ On se propose d'obtenir un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1.

a) Montrer que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire u_0.

b) Calculer u_1.

2.

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante puis montrer qu'elle est convergente.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

1. Une intégration par parties est possible. On demande ici impérativement de respecter le texte.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on pose $v_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) • Vérifier que : $\forall n \geqslant 2$, $u_n + u_{n-2} = v_n$.

• En intégrant par parties $\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, montrer que :

$\forall n \geqslant 2$, $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

b) En déduire : $\forall n \geqslant 2$, $(2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}$.

c) Montrer que la suite $(nu_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

d) Donner les grandes lignes d'une autre démonstration du résultat obtenu en **3.*c)***.

III) Problème : calcul de valeurs approchées d'intégrales à l'aide de polynôme d'interpolation

Définitions et notations

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On considère une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et on note $I(f)$ l'intégrale : $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout entier naturel k, on pose :
$M_k(f) = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(x)\right|$ où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.
Les polynômes considérés sont à coefficients réels et l'on confond polynôme et fonction polynomiale associée. Pour tout entier naturel m, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m.
Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker ; ainsi $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
Enfin, $a_1, \ldots, a_n$ désignent n réels deux à deux distincts de $[-1,1]$ et on note A_n le polynôme : $A_n(X) = \prod\limits_{i=1}^{n}(X-a_i)$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$ soit B_i le polynôme : $B_i(X) = \prod\limits_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}(X-a_j)$ et $L_i(X) = \dfrac{1}{B_i(a_i)}B_i(X)$.
La famille $(L_i(X))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est celle des *polynômes de Legendre*.

\- - - - - - - - - - - -

A) Préliminaire : polynômes d'interpolation de Lagrange

1.

a) Vérifier que : • $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\deg L_i(X) = n-1$.

• $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

b) • Montrer que $P_f = \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_i)L_i$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$.

• On pose $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier que : $\int_{-1}^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(a_i)$.

Dans toute la suite, on note $J_n(f) = \int_{-1}^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Comparer $I(f)$ et $J_n(f)$ lorsque $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. On suppose $n \geqslant 2$.

a) Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $\exists c \in]-1,1[$, $\quad f(x) = P_f(x) + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}A_n(x)$.

b) En déduire que : $|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!}\int_{-1}^1 |A_n(x)|\,\mathrm{d}x$.

3. On suppose que $(a_1, \ldots, a_n)$ est tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$ (ainsi $a_1, \ldots, a_n$ est la subdivision régulière de $[-1,1]$ en $(n-1)$ intervalles égaux).

a) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ et $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Justifier l'inégalité : $|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!\cdot(n-k)!$.

b) En déduire que : $\forall x \in [-1,1]$, $|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$.

c) Montrer[2] que si l'entier n est assez grand, on a pour tout $x \in [-1,1]$, $|A_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n \cdot$ En déduire une majoration de $|I(f) - J_n(f)|$.

B) Un raffinement de la méthode exposée en A)

Pour tout polynôme Q, on note Q' le polynôme dérivé de Q.

1. Soit $T : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n}$, $Q \mapsto (Q(a_1), \dots, Q(a_n), Q'(a_1), \dots, Q'(a_n))$.

a) Montrer que T est linéaire et injective.

b) Montrer que T est surjective.

c) En déduire[3] qu'il existe un unique $Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q_f(a_i) = f(a_i)$ et $Q'_f(a_i) = f'(a_i)$.

Dans toute la suite, on note $K_n(f) = \int_{-1}^{1} Q_f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Que peut-on dire de $I(f)$ et $K_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$?

3. Par une méthode analogue à celle développée en **A)2** on pourrait démontrer et *on admettra* la majoration :

$$|I(f) - K_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Que vaut le polynôme Q_f lorsque f est la fonction polynomiale $x \mapsto A_n^2(x)$? Montrer que dans ce cas, l'inégalité précédente est une égalité.

4. Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que Φ est un produit scalaire.

On suppose dans la suite que $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire Φ. On dit que $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle P,Q \rangle = 0$.

5.

a) Justifier l'existence d'un polynôme V de degré au plus $n-1$ vérifiant $Q_f - P_f = A_n V$.

En déduire que si le polynôme A_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $K_n(f) = J_n(f)$.

b) Inversement, si le polynôme A_n n'est pas orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une fonction f telle que $K_n(f) \neq J_n(f)$.

C) Quadrature approchée par la méthode de Gauss

Soient pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k : x \mapsto (x^2-1)^k$ (pour $k = 0$, u_0 est la fonction constante égale à 1) et $\ell_k = u_k^{(k)}$ (où $u_k^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e}de u_k).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\langle Q, \ell_k \rangle = 0$.

2. Montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ℓ_k possède k racines simples, toutes dans $[-1,1]$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_k[X]$, P s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire à coefficients réels de $\ell_0, \dots, \ell_k$.

4. Montrer qu'il existe un unique polynôme[4] $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que le polynôme $X^n - R_n(X)$ est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On note dans la suite, S_n, le polynôme défini par $S_n(X) = X^n - R_n(X)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les n racines de ℓ_n rangées dans l'ordre croissant. Montrer que :

$S_n(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

5. On reprend les notations[5] de la partie **A)** : avec $A_n = S_n$, on a $J_n(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$

2. Sans utiliser la formule de Stirling qui a été citée en cours mais non démontrée.
3. On de demande pas d'expliciter Q_f.
4. On dit que R_n est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Bien noter que les λ_i ne dépendent que des polynômes L_i et donc sont indépendants de f.

où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \alpha_i$. En utilisant les résultats de **B)**, montrer que :

$$|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. *Étude des réels* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

a) Calculer $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

b) Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$.

c) Montrer que :
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$.
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_{n+1-i} = \lambda_i$.

7. *Majoration de* $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que pour tout polynôme P unitaire de degré n, on a l'inégalité :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} P^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, il existe un polynôme unitaire T_k de degré k, tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos\theta)$.

En déduire la majoration : $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{2^{2(n-1)}}$.

8. On suppose que $n = 3$.

a) Montrer que : $J_3(f) = \dfrac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$.

b) Déterminer alors une valeur approchée de $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et donner une majoration de l'erreur ainsi commise.

\- - - - - - - - - - - -