Leçon 128 **Barycentres-Applications**

Pré-requis
- Espace affine.
- Applications affines.
- Espace Euclidien.

Cadre : $\mathscr{E}$ un espace affine sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A_1 , $\cdots$, A_n , n points de $\mathscr{E}$ et λ_1 , $\cdots$, λ_n , n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

I- Barycentre

Définition 1 : $G \in \mathscr{E}$ est barycentre des points pondérés $(A_1 \ ; \ \lambda_1), \cdots, (A_n \ ; \ \lambda_n)$ si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Proposition 1 : Le barycentre G ainsi défini est unique et vérifie : $\forall O \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \overrightarrow{OA_i}$.

Oralement : Si tous les λ_i sont égaux on dit que G est l'isobarycentre des points pondérés $(A_i \ ; \ \lambda_i)$.

Proposition 2 : Homogénéité : *Oralement :* Le barycentre reste inchangé s'il on multiplie tous les coefficients par une même constante non nul.
Conséquence : On peut toujours se ramener au cas où la somme des coefficients vaut 1 .

Proposition 3 : Associativité : Soit $(I_p)_{1 \leq p \leq s}$ une partition de $\{1 \ ; \ 2 \ ; \cdots n\}$. Supposons que $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$ et que $G_p = bar((A_i \ ; \ \lambda_i); \ i \in I_p)$ pour $p = 1, \cdots, s$. Alors $G = bar((G_p \ ; \ \mu_p); \ 1 \leq p \leq s)$.

Exemple d'application : Les médianes d'un triangle sont concourantes en l'isobarycentre des ses sommets (centre de gravité du triangle).

Exercice 1 : Effectuer une étude analogue pour un tétraèdre.
Oralement : Les quatre droites joignant chaque sommet au centre de gravité de sa face opposé ainsi que les trois droites joignant les milieux des cotés opposés sont concourantes en l'isobarycentre des sommets du tétraèdre.

II- Applications affines

Proposition 4 : Un application entre deux espaces affines est une application affine si et seulement si elle conserve le barycentre.

Corollaire 1 : Si $f \in End(\mathscr{E})$ permute les points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de $\mathscr{E}$ alors f laisse fixe leur isobarycentre.

Exercice 2 : Soit $f \in End(\mathscr{E})$. Montrer que si f^n , $n \geq 1$, possède un point fixe alors f possède un point fixe.

III- Parties convexes

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 2 : On dit qu'une partie C de $\mathscr{E}$ est convexe si :

$$\forall M,\ N \in C \text{ , on a } [MN] = \{M + k\ \overrightarrow{MN}\ ;\ 0 \leq k \leq 1\} \subset C \ .$$

Proposition 5 : $C \subset \mathscr{E}$ est convexe si et seulement si le barycentre de toute famille finie de points pondérés de C , $(A_1\ ;\ \lambda_1), \cdots, (A_n\ ;\ \lambda_n)$, telle que $\lambda_i \geq 0\ \ \forall i$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, appartient à C .

Proposition 6 : Soit $f \in \mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$, C (resp. C') une partie convexe de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$). Alors $f(C)$ (resp. $f^{-1}(C')$) est une partie convexe de $\mathscr{E}'$ (resp. de $\mathscr{E}$).

Proposition 7 : Théorème de projection : Soit E un espace vectoriel Euclidien et C un convexe fermé de E . Alors : $\forall x \in E$, $\exists\ !\ x' \in C$ tel que $||x - x'|| = d(x\ ;\ C)$.

IV- Enveloppe convexe

Proposition 8 : L'intersection de toute famille de convexes de $\mathscr{E}$ est une partie convexe de $\mathscr{E}$.

Définition 3 : Soit $X \subset \mathscr{E}$. L'intersection de toutes les parties convexes de $\mathscr{E}$ contenant X est appelée l'enveloppe convexe de X . On la note $Co(X)$.

Proposition 9 : $Co(X)$ est le plus petit convexe contenant X et il est donné par

$$Co(X) = \{bar(A_1\ ;\ \lambda_1), \cdots, (A_k\ ;\ \lambda_k)/k \in \mathbb{N}^*\ , (\lambda_i)_i \subset \mathbb{R}^+\ , \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Proposition 10 : Si $f \in \mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ alors $f(Co(X)) = Co(f(X))$.

Exemples 1 : $Co(\{A, B\}) = [AB]$, $Co(\{A, B, C\}) = ABC$

Applications :

Théorème de Gauss-Lucas : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Exercice d'application : Montrer que $\forall n \geq 8$, le polynôme $(X + 1)^n - X^n - 1$ possède au moins une racine non nulle de module différent de 1 .

V- Points Extrémaux d'une partie convexe

Définition 4 : *Oralement :* Soit $C \subset \mathscr{E}$ convexe. Un point P de C est dit point extrémal de C s'il ne peut être barycentre d'un couple de deux points distincts de C .

Proposition 11 : Soit $C \subset \mathscr{E}$ convexe. Tout endomorphisme f de $\mathscr{E}$ telle que $f(C) = C$, permute les points extrémaux de C .

Exemple d'application : *Oralement :* Le groupe des isométries de l'espace laissant fixe un tétraèdre régulier est isomorphe à S_4 .

Quelques commentaires :
A mon avis, à cette leçon manquent deux autres paragraphes (Les sous-espaces affines et les coordonnées barycentriques) ainsi que le théorème de Carathéodory. Ce sont des notions que je maîtrisais assez bien mais n'ayant que 15 min pour présenter ma leçon il a fallut faire des choix. Le jury était satisfait de mon exposé et ne m'en a pas parlé.

Développement : Le théorème de Gauss-Lucas et l'exercice d'application.

Questions du jury : je ne me rappelle pas de toutes les questions, en voici quelques unes en vrac :

— Exprimer la droite (AB) en fonction des barycentres des points A et B.

— Etudier la position relative du barycentre G de $(A\ ,\ \alpha)$ et $(B\ ,\ \beta)$ en fonction de α et β .

— Tracer un pavé droit ABCDEFGH, G est le barycentre de quatre points (je ne me rappelle pas exactement des points ni des coefficients). Décrire une méthode pour construire le point G à la règle et au compas.

— Quel est le lien avec la physique ?

— On considère un polygone régulier $A_1...A_n$, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Montrer que pour tout point M du plan, $\sum_{k=1}^{n} MA_k^2$ ne dépend que de la distance MO et du rayon R .

Note : 17,6/20

Références :

- Leçon : Algèbre et géométrie- François Combes- Bréal- Chapitre 7.

- Théorème de projection : Semblable au théorème de la projection orthogonale dans un espace préhilbertien : ANALYSE pour le capes et l'agrégation interne G. AULIAC et J-Y CABY- Ellipses- Chapitre 13.

- Développement : Oraux X-ENS- Algèbre 1- Exercice 5.43.