Higher in mathematics 2016*
SQA Scotland

1er juillet 2016

L'épreuve du *Higher Maths* se déroule en deux parties distinctes.

1 Épreuve 1

Durée : 1h10
Calculatrice **interdite**.

1.1

Trouver l'équation de la droite passant par le point $(-2, 3)$ et parallèle à la droite d'équation $y + 4x = 7$.

1.2

Soit $y = 12x^3 + 8\sqrt{x}$, où $x > 0$, trouver $\dfrac{dy}{dx}$

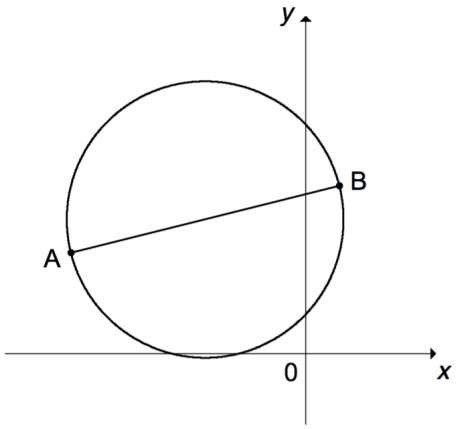
1.3

Une suite est définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 10$, avec $u_3 = 6$.

1. Trouver la valeur de u_4
2. Expliquer pourquoi cette suite tend vers une limite lorsque $n \to \infty$
3. Calculer cette limite

1.4

A et B sont les points de coordonnées $(-7, 3)$ et $(1, 5)$. AB est le diamètre d'un cercle.



Trouver l'équation de ce cercle.

*traduction de la transcription de G Fyfe, Perth College

1.5

Trouver $\int 8\cos(4x+1)dx$

1.6

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombre réels. On suppose que les fonctions inverses f^{-1} et g^{-1} existent toutes deux.

1. Étant donné que $f(x) = 3x + 5$, trouver $f^{-1}(x)$.
2. En supposant que $g(2) = 7$, écrivez la valeur de $g^{-1}(7)$.

1.7

Trois vecteurs peuvent être exprimés comme suit :

$\vec{FG} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\vec{GH} = 3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

$\vec{EH} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

1. Trouver $\vec{FH}$.
2. Trouver $\vec{FE}$ en vous aidant de la question précédente ou non.

1.8

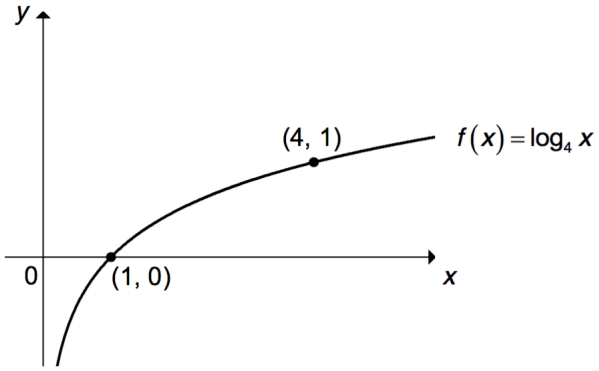
Montrez que la ligne d'équation $y = 3x - 5$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ et trouver les coordonnées du point de contact.

1.9

1. Trouvez les abscisses des extremums locaux du graphe défini par $y = f(x)$ où $f(x) = x^3 + 3x^3 - 24x$.
2. Déduisez-en les intervalles sur lesquels la fonction f est strictement croissante.

1.10

La figure ci-dessous représente la courbe représentative de la fonction $f(x) = \log_4(x)$ pour $x > 0$.



Sa fonction inverse, f^-1, existe. Sur la feuille prévue à cet effet, dessiner le graphe de la fonction inverse de f.

1.11

1. A et C sont les points de coordonnées $(1, 3, -2)$ et $(4, -3, 4)$ respectivement. Le point B divise AC dans un rapport $1 : 2$. Trouver les coordonnées de B.
2. $k\overrightarrow{AC}$ est un vecteur unitaire, où $k > 0$. Déterminer la valeur de k.

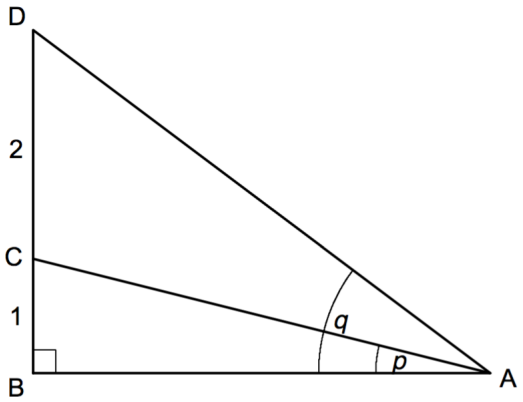
1.12

Less fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = 3 - x$.

1. Soit $h(x) = f(g(x))$. Montrer que $h(x) = 2x^2 - 8x - 11$
2. Exprimer $h(x)$ sous la forme $p(x + q)^2 + r$

1.13

Le triangle ABD est rectangle en B, avec des mesures d'angles $\widehat{BAC} = p$ et $\widehat{BAD} = q$, et des longueurs telles qu'indiquées sur la figure ci-dessous.



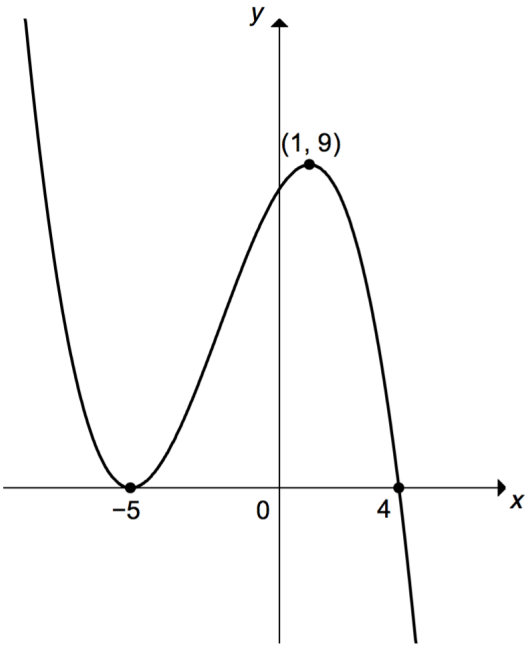
Montrer que la valeur exacte de $\cos(p - q)$ est $\dfrac{19\sqrt{17}}{85}$.

1.14

1. Évaluer $\log_5 25$.
2. En déduire les solutions de l'équations $\log_4 x + \log_4(x - 6) = \log_5 25$, où $x > 6$.

1.15

La figure ci-dessous montre le graphe d'équation $y = f(x)$, où $f(x) = k(x - a)(x - b)^2$.



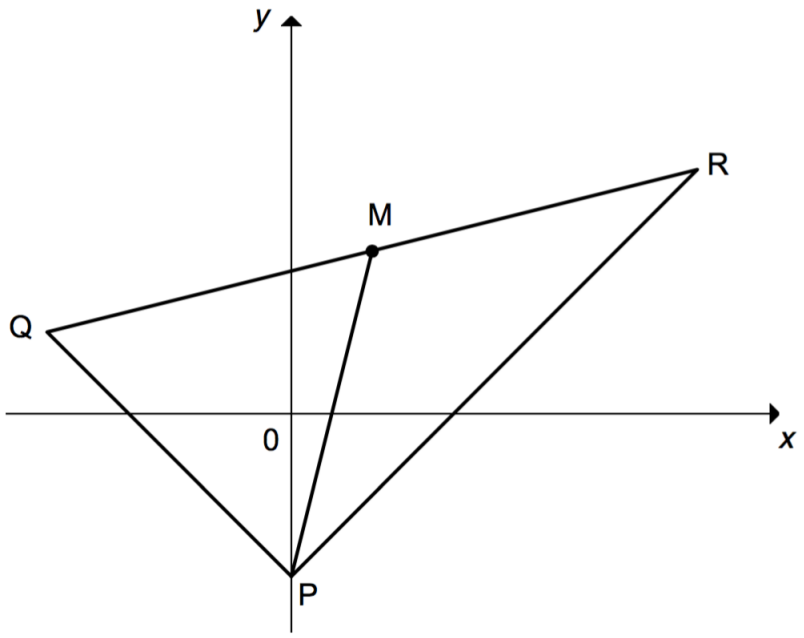
1. Trouver les valeurs de a, b et k.
2. Soit la fonction $g(x) = f(x) - d$, où d est positif. Déterminer l'ensemble des valeurs de d pour lesquelles $g(x)$ possède une racine exactement.

2 Épreuve 2

Durée : 1h30
Calculatrice **autorisée**.

2.1

PQR est un triangle dont les points sont $P(0, -4)$, $Q(-6, 2)$ et $R(10, 6)$.



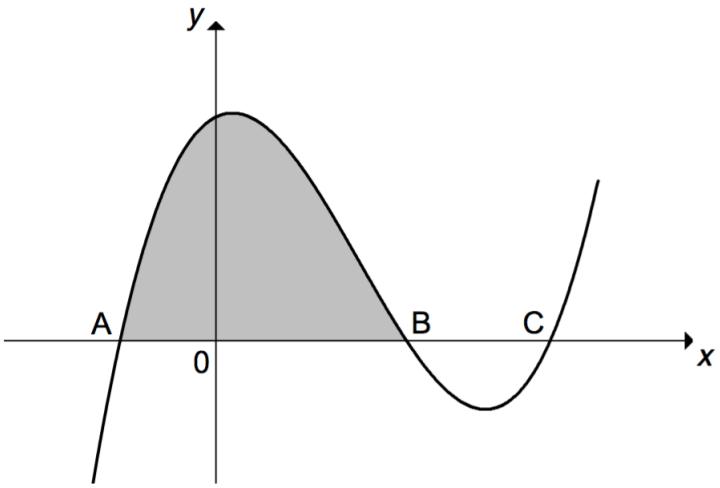
1. (a) Donner les coordonnées de M, le milieu de $[QR]$.
   (b) En déduire l'équation de (PM), la médiane issue de P.
2. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{L}$, passant par M et perpendiculaire à PR.
3. Montrer que la droite $\mathcal{L}$ passe par le milieu de $[PR]$.

2.2

Trouver l'ensemble des valeurs de p telles que $x^2 - 2x + 3 - p = 0$ n'a aucune racine réelle.

2.3

1. (a) Montrer que $(x + 1)$ est un facteur de $2x^3 - 9x^2 + 3x + 14$
   (b) En déduire la résolution de l'équation $2x^3 - 9x^2 + 3x + 14 = 0$
2. La figure ci-dessous montre le graphe d'équation $y = 2x^3 - 9x^2 + 3x + 14$. Cette courbe coupe l'axe des abscisses en A, B et C.



(a) Écrivez les coordonnées des points A et B.

(b) En déduire la valeur de l'aire rayée sur la figure.

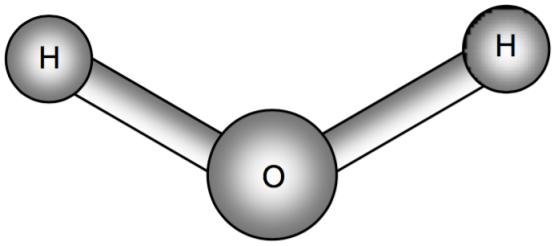
2.4

Les cercles C_1 et C_2 ont pour équations $(x+5)^2+(y-6)^2 = 9$ et $x^2+y^2-6x-16 = 0$ respectivement.

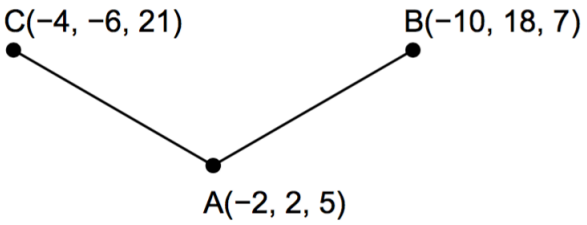
1. Donner les centres et rayons des cercles C_1 et C_2.
2. Montrer que C_1 et C_2 ne se coupent pas.

2.5

L'image ci-dessous montre un modèle de molécule d'eau.



Relativement à des axes convenablement choisis, l'atome d'oxygène est positionné au point $A(-2, 2, 5)$. Les deux atomes d'hydrogènes sont positionnés en $B(-10, 18, 7)$ et $C(-4, -6, 21)$, ce qui se résume en la figure suivante :



1. Exprimer $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ grâce à leurs composantes.
2. Trouver la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$, en vous aidant de la question précédente ou non.

2.6

Des scientifiques étudient la croissance de la population d'une colonie [1] de bactéries. Le nombre de bactéries présentes est donné par la formule :

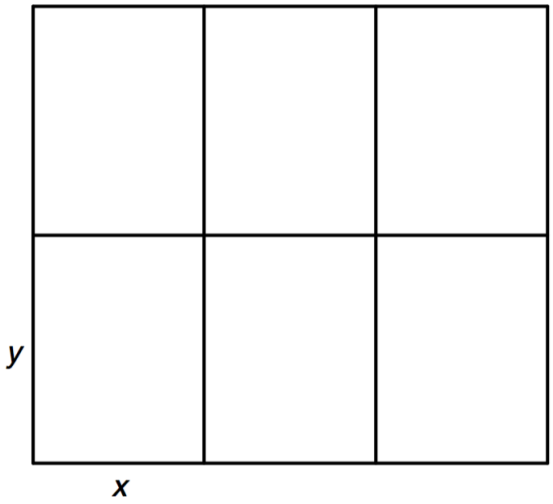
$$B(t) = 200e^{0,107t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'étude.

1. Exprimer le nombre de bactéries présentes au début de l'étude.
2. Calculer le temps mis pour le nombre de bactéries à doubler.

2.7

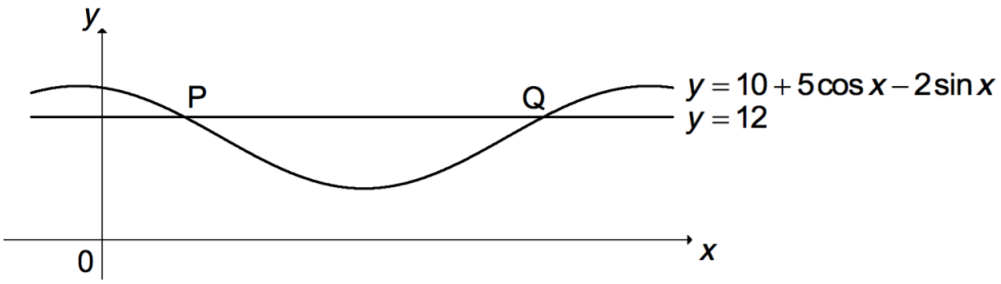
Un département [2] met à disposition un terrain afin de créer 6 lopins, délimités par des clôtures, où les résidents pourront produire leur propre nourriture.
Chaque lopin sera un rectangle de x mètres par y mètres comme le montre la figure ci-dessous.



1. L'aire totale du terrain est de 108 m^2. Montrer que la longueur totale de clôture, L mètres, est donnée par
$$L(x) = 9x + \frac{144}{x}$$
2. Trouver la valeur de x qui minimise cette longueur

2.8

1. Exprimer $5\cos x - 2\sin x$ sous la forme $k\cos(x + a)$ où $k > 0$ et $0 < a < 2\pi$.
2. La figure ci-dessous montre la représentation d'une partie du graphe de $y = 10 + 5\cos x - 2\sin x$ et de la droite $y = 12$. La droite coupe la courbe en les points P et Q.



Trouver les abscisses de P et de Q.

1. strain
2. council

2.9

À propos d'une fonction f, définie sur un domaine convenable, nous savons deux choses :

— $f'(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$

— $f(9) = 40$

Exprimer $f(x)$ en fonction de x

2.10

1. Étant donné $y = (x^2+7)^{\frac{1}{2}}$, trouver $\dfrac{dy}{dx}$
2. En déduire $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+7}}dx$

2.11

1. Montrer que $\sin 2x \tan x = 1 - \cos 2x$, où $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$
2. Soit $f(x) = \sin 2x \tan x$. Donner $f'(x)$.