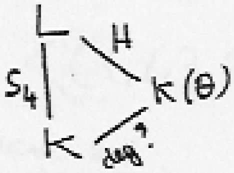
Un jeu galoisien ?

fonctions sym. elem.

Soit k un corps commutatif quelconque, $K = k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \subset L = k(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

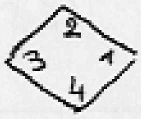
L/K est une extension galoisienne de groupe S_4 $[\![$ l'action de $\sigma \in S_4$ sur L est définie par $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ $]\!]$.



Voici une liste d'éléments $\theta \in L$ et de sous-groupes $H \subset S_4$. Il s'agit de déterminer, soit $H = \mathrm{Aut}(L/K(\theta))$, soit de déterminer θ tel que $K(\theta) = L^H$...

Exemple $\theta = x_1x_3 + x_2x_4$; l'orbite $S_4.\theta$ est $\{x_1x_3 + x_2x_4,\ x_1x_2 + x_3x_4,\ x_1x_4 + x_2x_3\}$, de cardinal 3 donc $[K(\theta):K] = 3$. En effet, si L/K est une ext. galoisienne de groupe G et $x \in L$ alors le polynome minimal de x sur K est $\prod_{y \in G.x}(X - y)$ donc $\deg_K x = \# G.x$.

Par ailleurs, θ est fixé par le groupe $D_4 = \langle (1,2,3,4), (2,4) \rangle$ qui est "le" groupe diédral d'ordre 8 :



Quel est le fixateur de θ dans S_4 ?

.. donc $\mathrm{Aut}(L/K(\theta)) = D_4$ ou encore $L^{D_4} = K(\theta)$ ...

Elements $\theta \in L$

- $x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_1^2$
- $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)$
- $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$
- $x_1x_2^2x_3^3x_4^4$
- x_4
- $x_1x_3^2x_4^2$
- $(x_1-x_2)(x_3-x_4)$
- $x_1 + x_2$
- x_1x_2
- $\prod_{1 \le i < j \le 3}(x_i - x_j)$
- $x_1x_3^2 + x_2x_3^2$
- $x_1 + x_3x_4$

Sous-groupes $H \subset S_4$

- $\langle (1,2,3,4) \rangle$ cyclique d'ordre 4
- A_4 groupe alterné (d'ordre 12)
- $S_3 = \mathrm{Perm}(\{1,2,3\}) \subset S_4$
- $A_3 = \mathrm{Alt\,Perm}(\{1,2,3\})$
- $\langle (1,2)(3,4) \rangle$ d'ordre 2
- $\langle (3,4) \rangle$ d'ordre 2
- V = sous-groupe d'ordre 4 engendré par les double-transpositions
- $\langle (1,2), (3,4) \rangle$ d'ordre 4 $\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

...etc...