206 : Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.

$(e_1,...,e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, muni de la norme produit notée $\| \cdot \|_\infty$ définie par pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbf{R}^n$, $\| x \|_\infty = \max_{1\le i\le n} | x_i |$.

A est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

Pré-requis : Espaces complets, théorème de Bolzano-Weierstrass.

I) Définitions et propriétés.

Déf 1 : A est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite convergente dans A.

ex : tout segment [a ;b] de $\mathbf{R}$ est compact.

Théo 1 : Toute réunion finie de parties est compacte.
Toute intersection de parties compactes est compacte.

Théo 2 : A est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$.

Théo 3 : Toute partie B contenue dans A et fermée est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

Théo 4 : Si pour tout i, $1 \le i \le n$, A_i est un compact de $\mathbf{R}$ alors la partie $A_1 \times \ldots \times A_n$ est un compact de $\mathbf{R}^n$.

Théo 5 : Toute partie compacte de $\mathbf{R}^n$ est une partie complète de $\mathbf{R}^n$.

II) Caractérisation des compacts de $\mathbf{R}^n$.

Théo 6 : les compacts de $\mathbf{R}^n$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbf{R}^n$.

Application : Toutes les normes définies sur un même espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes.

III) Compacts et continuité.

Théo 7 : Soit F un evn et f une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans F. Alors f(A) est une partie compacte de F.

Théo 8 : Soit A une partie compacte non vide de $\mathbf{R}^n$ et f une application continue de A dans $\mathbf{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Théo 9 : (Théorème de Heine) Soit f une application continue de A dans un evn F, alors f est uniformément continue sur A.

IV) Applications.

1) Théorème de D'Alembert Gauss : tout polynôme non constant de C[X] admet au moins une racine dans C.
2) Toute fonction à valeurs complexes et continue sur un segment [a,b], est limite uniforme sur [a,b] de fonctions polynômiales sur [a,b].

Dvt : Théorème de D'Alembert Gauss : Gourdon « les maths en tête », tome d'algèbre p 86.