# Un résultat en arithmétique

Soit $a$ un entier supérieur ou égal à 2.
Si $x \in \mathbb{N}^*$, on note $\nu_a(x) = \max\{\nu \in \mathbb{N}, a^\nu \mid x\}$.

**Lemme :** Soit $n$ un entier naturel premier avec $a$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge \varphi(n) \mid a^m + m$ alors il existe $m' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\nu_a(m') \geqslant \nu_a(m)$ et $n \mid a^{m'} + m'$.

**Preuve :** Soit $n$ un entier naturel premier avec $a$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge \varphi(n) \mid a^m + m$. D'après Bézout, il existe $(u;v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $un - v\varphi(n) = n \wedge \varphi(n)$. En posant $m' = m + v\frac{a^m+m}{n\wedge\varphi(n)}\varphi(n)$, on voit en utilisant le théorème d'Euler que $n \mid a^{m'} + m'$. D'autre part comme $m' = m + v(a^m + m)\frac{\varphi(n)}{n\wedge\varphi(n)}$, on vérifie facilement que $\nu_a(m') \geqslant \nu_a(m)$.

**Théorème :** Soit $\theta \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel $n$ premier avec $a$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ divisible par $a^\theta$ tel que $n \mid a^m + m$.

**Preuve :** On va démontrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathfrak{P}(N) \quad : \quad \text{Le théorème est vrai pour tout entier } n \text{ premier avec } a \text{ dans } [1;N]$$

• $\mathfrak{P}(1)$ est vraie (prendre $m = a^\theta$).
• Supposons que $\mathfrak{P}(N)$ soit vraie pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n$ un entier premier avec $a$ appartenant à $[1; N+1]$ ; vu l'hypothèse de récurrence on peut supposer que $n = N + 1$.
$n \wedge \varphi(n)$ est un entier premier avec $a$ appartenant à $[1;N]$ donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\theta \mid m$ et $n \wedge \varphi(n) \mid a^m + m$. D'après le lemme il existe donc $m' \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\theta \mid m'$ et $n \mid a^{m'} + m'$, ce qui prouve que $\mathfrak{P}(N+1)$ est vraie.

**Corollaire :** Si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \mid a^m + m$.

**Preuve :** Il existe $\theta \in \mathbb{N}$ tel que $n$ puisse s'écrire $kn'$ avec $a \wedge n' = 1$ et $k \mid a^\theta$. Or d'après le théorème, il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ divisible par $a^\theta$ tel que $n' \mid a^m + m$. Comme $a^\theta \mid a^m + m$, on déduit que $n \mid a^\theta n' \mid a^m + m$.

[**Par blaaang**]