Correspondance. Fonction. Application.[1]

I. Correspondance, graphe, relation binaire

DÉFINITION 1. *Soient E et F sont deux ensembles, alors (en langage formel) :*

$$\forall\ E\ ,\ \forall\ F\ \ [\mathcal{C}\ \textbf{correspondance de E dans F}]\ \Leftrightarrow\ [\ \exists\ G\ ,\ G \subseteq E \times F\ \wedge\ \mathcal{C} = (E, F, G)\ ]$$

E est appelé **l'ensemble de départ** *de la correspondance, F est appelé son* **ensemble d'arrivée** *et G son* **graphe**.

Remarque 1: *en pratique, on confondra une correspondance avec son graphe s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles de départ et d'arrivée.*

Remarque 2: *on peut ainsi définir ce qu'est une* **relation binaire** *:*
- Une relation binaire (interne) dans E est une correspondance de E dans E, i.e. :

$$\mathcal{R}\ \textit{relation binaire dans}\ E \Leftrightarrow \exists\ G\ ,\ (\mathcal{R} = (E, E, G)) \wedge (G \subseteq E \times E)$$

- Une relation binaire externe est une correspondance d'un ensemble S dans un ensemble E, où S ***n'est pas un produit cartésien dont E soit une composante*** *(pour distinguer des relations ternaires) ; en d'autres termes, si E et S sont deux tels ensembles :*

$$\mathcal{R}\ \textit{est une relation binaire externe de}\ S\ \textit{dans}\ E \Leftrightarrow \exists\ G\ ,\ (\mathcal{R} = (S, E, G)) \wedge (G \subseteq S \times E)$$

- Une relation binaire est une relation binaire interne ou externe.

Remarque 3: *on peut également définir ce qu'est une* **relation ternaire**. *En particulier, une* **relation ternaire interne** *est une correspondance dont l'ensemble de départ est le carré cartésien de l'ensemble d'arrivée ; en d'autres termes, si E est un ensemble :*

$$\mathcal{R}\ \textit{est une relation ternaire interne dans}\ E \Leftrightarrow \exists\ G\ ,\ (\mathcal{R} = (E \times E, E, G)) \wedge (G \subseteq E^3)$$

EXEMPLE : L'égalité et l'inclusion sont des relations binaires dans la classe des ensembles. La réunion, l'intersection, la différence et la différence symétrique sont des relations ternaires internes dans la classe des ensembles.

II. Fonction, application, bijection

[1] source : fr.wikipedia.org , rubriques "Correspondance et relation" et "Application (mathématiques)"

II.1. Images et antécédents

Définition 2.
Si $\mathfrak{C}$ est une correspondance, avec $\mathfrak{C} = (E, F, G)$, alors par définition les affirmations suivantes sont équivalentes :
- (x, y) appartient à G
- y est **image** *de x par $\mathfrak{C}$*
- x est **antécédent** *de y par $\mathfrak{C}$.*
Nous noterons alors $x\ \mathfrak{C}\ y$ (notation relationnelle infixée).

L'ensemble formé par les images de tous les éléments de l'ensemble de départ d'une correspondance est appelé **ensemble-image** *de cette correspondance. Il est noté habituellement $Im\mathfrak{C}$. Un abus de langage courant consiste à appeler cet ensemble « image de la correspondance », mais cela peut entraîner une confusion si la correspondance est elle-même élément d'un ensemble à partir duquel une autre correspondance est bâtie.*

Symétriquement, l'ensemble formé par les antécédents de tous les éléments de l'ensemble d'arrivée d'une correspondance est appelé **ensemble-antécédent** *de cette correspondance. Il est noté habituellement $Ant\mathfrak{C}$. L'ensemble-antécédent est aussi nommé «* **domaine de définition** *» de la correspondance, et alors noté $Dom\mathfrak{C}$ ou $D_{\mathfrak{C}}$, mais cette dernière appellation est plutôt réservée aux fonctions (ci-dessous).*

II.2. Propriétés de base

Une correspondance peut avoir quatre propriétés de base indépendantes les unes des autres. Elle peut être :

– **fonctionnelle** : tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image

$$\forall\,(x, y_1, y_2) \in E \times F^2, (x\,\mathfrak{C}\,y_1 \wedge x\,\mathfrak{C}\,y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$$

– **applicative** : tout élément de l'ensemble de départ a au moins une image

$$\forall\,x \in E, \exists\,y \in F\ /\ x\,\mathfrak{C}\,y$$

– **injective** : tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent

$$\forall\,(x_1, x_2, y) \in E^2 \times F, (x_1\,\mathfrak{C}\,y \wedge x_2\,\mathfrak{C}\,y) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

– **surjective** : tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent

$$\forall\,y \in F, \exists\,x \in E\ /\ x\,\mathfrak{C}\,y$$

Définitions équivalentes :

- Une correspondance est **applicative** si et seulement si son ensemble-antécédent se confond avec son ensemble de départ, c'est-à-dire si : $Ant\mathfrak{C} = E$.

- Une correspondance est **surjective** si et seulement si son ensemble-image se confond avec son ensemble d'arrivée, c'est-à-dire si : $Im\mathfrak{C} = F$.

II.3. Propriétés dérivées

En combinant ces quatre propriétés de base, nous obtenons à priori 16 sortes de correspondances. Seules certaines de ces combinaisons ont reçu un nom, en raison de leur importance pratique :

Définition 3.

- *Une* **fonction** *est une correspondance fonctionnelle.*
  Chaque élément de départ a au plus une image. On peut donc parler de l'image d'un élément de départ x sans ambiguïté, et la désigner par un symbole, d'habitude $f(x)$ si la fonction est notée f. Cela permet de remplacer la notation relationnelle $x\ f\ y$ par la notation fonctionnelle $y = f(x)$ plus pratique. On note alors, si $f = (E, F, G)$:

$$\begin{aligned} f : \quad & E \longrightarrow F \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

  ou $f : E \longrightarrow F$ ou f si il n'y a pas d'ambiguïté possible.

- *Une* **application** *est une fonction applicative.*
  C'est donc aussi une correspondance fonctionnelle et applicative. Comme elle est applicative, son domaine de définition se confond avec son ensemble de départ.
  On décompose souvent cette définition en deux clauses :
  1. *Existence.* $\forall x \in E\ \exists y \in E \mid (x, y) \in G$
  2. *Unicité.* $\forall x \in E\ \forall y \in F\ \forall y' \in F\ \left([(x, y) \in G \wedge (x, y') \in G] \Rightarrow y = y' \right)$

- *Une* **injection** *est une application injective.*
  C'est donc une correspondance fonctionnelle applicative et injective.

- *Une* **surjection** *est une application surjective.*
  C'est donc une correspondance fonctionnelle applicative et surjective. Comme elle est surjective, son image n'est autre que l'ensemble d'arrivée tout entier.

- *Une* **bijection** *est une application bijective.*
  C'est donc une correspondance fonctionnelle applicative injective et surjective.

Remarque 4: ATTENTION ! *Une correspondance applicative (resp. injective, surjective, bijective) n'est pas en général une application (resp. une injection, une surjection, une bijection).*
De même, une fonction injective (resp. surjective, bijective) n'est pas en général une injection (resp. une surjection, une bijection).

II.4. Correspondance réciproque

DÉFINITION 4. *Le* **graphe réciproque d'un graphe** G, *noté* G^{-1}, *est*

$$G^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in G\}$$

La **correspondance réciproque** *d'une correspondance est la correspondance obtenue en échangeant les ensembles de départ et d'arrivée et en remplaçant le graphe par son graphe réciproque.*
En d'autres termes :

$$\textit{si } \mathfrak{C} = (E, F, G) \textit{ , alors } \mathfrak{C}^{-1} = (F, E, G^{-1}).$$

PROPOSITION 1.

1. $(\mathfrak{C}^{-1})^{-1} = \mathfrak{C}$
2. *La réciproque d'une fonction est une correspondance injective.*
   Inversement, pour que la réciproque d'une correspondance soit une fonction, il faut et il suffit que cette correspondance soit injective.
3. *La réciproque d'une correspondance applicative est surjective, et vice-versa.*
4. *La réciproque d'une application est une correspondance bijective.*
   Inversement, pour que la réciproque d'une correspondance soit une application, il faut et il suffit que cette correspondance soit bijective.
5. *La réciproque d'une fonction injective, est une fonction injective.*
6. *La réciproque d'une bijection est une bijection.*

◇ *Démonstration.* utiliser les propriétés de base des correspondances en échangeant le rôle des images et des antécédents. ✓

II.5. Opérations sur les applications

1. **Restriction** : soit f une application de E dans F, et soit E' un sous-ensemble de E. La restriction de f à E', notée $f_{|E'}$, est l'application de E' dans F qui a tout élément e de E' associe l'élément $f(e)$ de F.
   Autrement dit, si on nomme G le graphe de f, $f_{|E'}$ est l'application de E' dans F de graphe $G \cap (E' \times F)$.

2. **Corestriction** : la corestriction est l'opération analogue sur un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée, mais si on veut que celle-ci reste une application, on ne peut restreindre l'ensemble d'arrivée F de f qu'à un sous-ensemble F' de F contenant l'ensemble image de f. On obtient alors une application qui a même ensemble de départ et même graphe, mais pas même ensemble d'arrivée.
3. **Prolongement** : soient deux applications f de E dans F de graphe G, et f' de E' dans F' de graphe G'. On dit que f' est un *prolongement* de f quand : : $E \subset E'$ et $F \subset F'$ et $G \subset G'$.
4. **Composition** : la composition de deux applications f de E_2 dans E_3 et g de E_1 dans E_2 se note $f \circ g$. C'est une application de E_1 dans E_3 définie, pour tout élément x de E_1, par : $f \circ g(x) = f(g(x))$.

PROPOSITION 2. *Si le graphe de f est G_f et le graphe de g est G_g, le graphe de $f \circ g$ est*
$$G_{f \circ g} = \{(x, z) \in E_1 \times E_3 \mid \exists y \in E_2, (x, y) \in G_g \wedge (y, z) \in G_f\}$$

II.6. Application réciproque

1. Si une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, à tout élément de F est associé un unique antécédent par f dans E. Ceci définit donc une application, que l'on appelle **application réciproque de f**, et qui, dans ce cas, est également une bijection, dite aussi **bijection réciproque de f**. On la note f^{-1}.
Son graphe est le **symétrique du graphe de** f, c'est à dire que si G est le graphe de f, le graphe de f^{-1} est $\{(y, x) | (x, y) \in G\}$. Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, le graphe de f^{-1} est, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

2. PROPOSITION 3. *L'application $f : E \to F$ est injective si et seulement s'il existe une surjection $g : F \longrightarrow E$ réciproque à gauche de f, c'est-à-dire que $g \circ f$ est l'identité de E.*

◇ *Démonstration.* Quand f est injective, il suffit de prendre pour g une application qui à un élément de l'image de f associe son antécédent par f, et qui est définie arbitrairement sur les autres éléments. Cette fonction n'est pas unique, sauf si f est également bijective. La réciproque découle directement de ce que g est une application. ✓

3. PROPOSITION 4. *L'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement s'il existe une injection $g : F \longrightarrow E$ réciproque à droite de f, c'est-à-dire que $f \circ g$ est l'identité de F.*

◇ *Démonstration.* Supposons f surjective, dans le cas où l'ensemble image de f est infini, l'existence de cette injection repose en toute généralité sur l'**axiome du choix** (énoncé pour toute surjection, c'est même équivalent à l'axiome du choix). L'application g est en effet une fonction de choix sur l'ensemble des ensembles des antécédents d'un élément de F, elle choisit bien un antécédent pour chaque élément de F. Cette fonction n'est pas unique, sauf si f est également bijective (cas où, l'antécédent étant unique, l'axiome du choix n'est pas nécessaire). L'existence d'une fonction g réciproque à droite de f fournit bien directement un antécédent par f pour chaque élément de F. ✓

II.7. Théorie des ensembles

La notion de fonction n'est pas primitive dans les théories des ensembles de Zermelo ou de Zermelo-Fraenkel, et se définit grâce aux notions de couple et de produit cartésien, qui ne sont pas non plus primitives. La notion peut se développer dans la théorie de Zermelo (sans l'axiome de l'infini), avec l'axiome d'extensionnalité, l'axiome de la paire, l'axiome de la réunion, l'axiome de l'ensemble des parties et le schéma d'axiomes de compréhension. On a eu besoin en une occasion, pour montrer en toute généralité l'existence d'une réciproque à droite d'une fonction surjective, de l'axiome du choix.

III. Aperçu historique : fonction et application

La notion de fonction en tant que correspondance entre deux types d'objet est relativement ancienne. Mais le terme n'apparait qu'à la fin du XVII^{e} siècle sous la plume de **Leibniz** en 1694 ; il s'agit alors de fonction associée à une courbe géométrique : Leibniz dit ainsi que l'abscisse, l'ordonnée ou le rayon de courbure d'une courbe en un point M est *une fonction du point M*.
Dans la même époque, **Newton** parle de *fluente* pour des quantités dépendant d'une variable qu'il appelle le temps (tout en précisant que le rôle joué par le temps, peut l'être par une autre quantité).

La notation "sous la forme f" ne s'est pas mise en place tout de suite. **Jean Bernoulli** propose d'appeler X la fonction de x, **Leibniz** invente une notation permettant de travailler sur plusieurs fonctions différentes : $\overline{x}|\underline{1}$ et $\overline{x}|\underline{2}$ sont ainsi deux fonctions dépendant de x. La notation fx apparait chez **Euler** en 1734. Les fonctions sont alors toujours à valeurs numériques (réelles ou complexes) et possèdent en outre des propriétés restrictives (liées à une équation algébrique, continuité eulérienne, développable en série entière...).

Parallèlement se développe, en géométrie, la notion d'application pour des correspondances ponctuelles.

Dans les années 1950, l'école Bourbaki tente de faire correspondre les deux notions en parlant de :

- relation ou graphe fonctionnel : (E, F, G) où E et F sont deux ensembles non vides et où G est un sous-ensemble non vide de $E \times F$ vérifiant en outre, pour tous couples (x, y) et (x', y') de G, si $x = x'$ alors $y = y'$. (i.e. chaque élément de E possède au plus une image)
- application pour un graphe fonctionnel dans lequel tout élément de E possède exactement une image.

S'appuyant sur cet embryon de distinction, les mathématiques modernes des années 1970 distinguent alors deux objets différents :

1. **la fonction** : définie par un ensemble de départ E, un ensemble d'arrivée F et une relation de E vers F dans laquelle chaque élément de E possède au plus une image.
   L'ensemble des éléments de E possédant une image est alors appelé domaine de définition de la fonction.
2. **l'application** : définie par un ensemble de départ E, un ensemble d'arrivée F et une relation de E vers F dans laquelle chaque élément de E possède une image et une seule.

En pratique, le fait qu'il suffise de réduire l'ensemble de départ d'une fonction à son ensemble de définition pour la transformer en application **rend peu utile ce distinguo**. Celui-ci n'a d'ailleurs jamais été adopté par la communauté mathématique dans son ensemble, qui continue à utiliser ces deux termes dans leur sens historique, le terme fonction étant utilisé comme synonyme du terme application dans le cas particulier où l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$(l'ensemble de départ étant systématiquement pris égal au domaine de définition).