Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

19 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Vérifier que $X^n \sin\vartheta - X.\sin n\vartheta + \sin(n-1)\vartheta$ *est divisible dans* $\mathbb{C}[X]$ *par* $X^2 - 2X.\cos\vartheta + 1$ *et calculer le quotient.*

Solution : *Les racines de* $X^2 - 2X\cos\vartheta + 1$ *sont* $e^{i\vartheta}$ *et* $e^{-i\vartheta}$. *Vérifions qu'elles sont aussi racines du dividende. Pour* $e^{i\vartheta}$ *:*
$e^{in\vartheta}\dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i} - e^{i\vartheta}\dfrac{e^{in\vartheta}-e^{-in\vartheta}}{2i} + \dfrac{e^{i(n-1)\vartheta}-e^{-i(n-1)\vartheta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left[e^{i(n+1)\vartheta} - e^{i(n-1)\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta} + e^{-i(n-1)\vartheta} + e^{i(n-1)\vartheta} - e^{-\cdots}\right.$
0. *Comme le dividende est un polynôme réel, le conjugué de* $e^{i\vartheta}$ *est aussi racine.*

On pose la division sans se dégonfler :

$$
\begin{array}{lcccc|ccc}
X^n\sin\vartheta & & & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & X^2 & -2X\cos\vartheta & +1 \\
\hline
& X^{n-1}\sin 2\vartheta & X^{n-2}\sin\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & X^{n-2}\sin\vartheta & +X^{n-3}\sin 2\vartheta & \\
& & 2X^{n-2}\sin 2\vartheta\cos\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & +X^{n-4}\sin 3\vartheta + \dots & \\
= & & X^{n-2}\sin\vartheta(4\cos^2\vartheta - 1) & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & & \\
= & & X^{n-2}\sin 3\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & &
\end{array}
$$

On peut donc supposer que le quotient est $X^{n-2}\sin\vartheta + X^{n-3}\sin 2\vartheta + \dots + \sin(n-1)\vartheta$. *En remarquant que* $\sin x = Im(e^{ix})$ *on est amené à calculer* $\left(X^{n-2}e^{i\vartheta} + X^{n-3}e^{2i\vartheta} + \dots + e^{i(n-1)\vartheta}\right)\left(X - e^{i\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}\left(X^{n-2} + X^{n-3}e^{i\vartheta} + \dots + e^{i(n-2)\vartheta}\right)\left(X - e^{i\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}\left(X^{n-1} - e^{i(n-1)\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}X^{n-1} - e^{in\vartheta}$. *En multipliant le résultat précédent par* $X - e^{i\vartheta}$, $\left(X^{n-2}e^{i\vartheta} + X^{n-3}e^{2i\vartheta} + \dots + e^{i(n-1)\vartheta}\right)\left(X^2 - 2X\cos\vartheta + 1\right) = e^{i\vartheta}X^n - e^{in\vartheta}X - X^{n-1} + e^{i(n-1)\vartheta}$.
En prenant les parties imaginaires des deux membres, on a bien le résultat annoncé.
La partie imaginaire d'un polynôme P *est bien sûr le polynôme* $\frac{1}{2i}\left(P - \overline{P}\right)$.
Remarque : On a aussi démontré que $X^n\cos\vartheta - X^{n-1} - \cos n\vartheta X + \cos(n-1)\vartheta$ *est divisible par* $X^2 - 2X\cos\vartheta + 1$ *et que le quotient est* $X^{n-2}\cos\vartheta + X^{n-3}\cos 2\vartheta + \dots + \cos(n-1)\vartheta$.

Références