Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et r et s les restes de la division de P par $(X-a)$ et par $(X-b)$. Quel est le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$? (on déterminera ce reste en fonction de r, s lorsque $a \neq b$ et en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$ si $a = b$.

Indication 0.0 : Lorsque $a = b$, utiliser la formule de Taylor.

Solution : *Par division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $P = (X-a)(X-b)Q + R$ et $\deg R \leqslant 1$. Donc $R = \alpha X + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

- *Si $a \neq b$, alors l'égalité précédente amène $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P(b) = \alpha b + \beta$. On résout le système formé par ces deux équations et on trouve $R = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}X + \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.*
  Comme $r = P(a)$ et $s = P(b)$, il vient $\boxed{R = \dfrac{r-s}{a-b}X + \dfrac{br-as}{b-a}}$.
- *Si $a = b$, on écrit la formule de Taylor :*

$$P(X) = P(a) + (X-a)P'(a) + (X-a)^2Q(X)$$

  et le reste vaut alors $\boxed{R = P(a) + (X-a)P'(a)}$.

Références