Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

1er décembre 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Démontrer qu'il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{Q}_{n-1}[X]$, tel que $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$.*
2. *Démontrer que $P(X) = Q(1-X)$.*
3. *Démontrer que $\exists a \in \mathbb{Q}, (1-X).P'(X) - n.P(X) = aX^{n-1}$.*
4. *Calculer $P(0)$.*
5. *Déterminer les coefficients de P.*

Solution :

1. *Unicité : Soit (P_1, Q_1) un autre couple. On a $(1-X)^n(P-P_1) + X^n(Q-Q_1) = 0$. Donc X^n divise $(1-X)^n(P-P_1)$. Comme X^n et $(1-X)^n$ sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, X^n divise $P-P_1$. Comme ce dernier est de degré $< n$, $P-P_1 = 0$. Par suite, $Q = Q_1$.*

   Existence : Les polynômes X et $1-X$ sont premiers entre eux. Il en est donc de même pour $(1-X)^n$ et X^n. D'après la propriété de Bézout, il existe deux polynômes P_0 et Q_0 tels que $(1-X)^n P_0(X) + X^n Q_0(X) = 1$. Reste à régler le problème des degrés. Or pour tout polynôme A de $\mathbb{Q}[X]$, le couple $(P_0 - AX^n, Q_0 + A(1-X)^n)$ est aussi solution. A partir de là, on effectue la division euclidienne de P_0 par X^n : $P_0 = AX^n + P$ avec $\deg P < n$. En posant $Q = Q_0 + A(1-X)^n$ on a $X^n Q(X) = 1 - (1-X)^n P(X)$. En regardant les degrés, on a $n + \deg Q = n + \deg P$ et donc $\deg Q < n$.
2. *En substituant $1-X$ à X on a $X^n P(1-X) + (1-X)^n Q(1-X) = 1$. Comme $\deg Q(1-X) = \deg Q < n$, d'après l'unicité précédente, on en déduit que $Q(1-x)$, qui joue le rôle de P est égal à P.*
3. *En dérivant $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$, on trouve $-n(1-X)^{n-1}P + nX^{n-1}Q(X) + (1-X)^n P' + X^n Q'(X) = 0$, soit $(1-X)^{n-1}((1-X)P' - nP) + X^{n-1}(XQ' + nQ) = 0$. On applique à nouveau le lemme de Gauss car X^{n-1} divise $(1-X)^{n-1}((1-X)P' - nP)$ et est premier avec $(1-X)^{n-1}$ donc X^{n-1} divise $(1-X)P' - nP$. Comme $\deg((1-X)P' - nP) \leqslant n-1$, on en déduit l'existence d'un $a \in \mathbb{Q}$ (éventuellement nul) tel que $(1-X)P' - nP = aX^{n-1}$.*

4. On a $(1-0)^n P(0) + 0^n Q(0) = 1$ donc $P(0) = 1$.
5. On écrit $P = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k$, $P' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}$, $XP' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^k$. D'où

$$(1-X)P' - nP = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) a_{k+1} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^k - \sum_{k=1}^{n-1} n a_k X^k - n = aX^{n-1}.$$

On regarde, suivant les valeurs de k, le coefficient de X^k.

- $k = n-1$: $-(n-1)a_{n-1} - na_{n-1} - n = (1-2n)a_{n-1} - n = a$.
- $k = 1, \ldots, n-2$: $(k+1)a_{k+1} - ka_k - na_k = 0$ soit $(k+1)a_{k+1} = (n+k)a_k$ ou $a_{k+1} = \dfrac{n+k}{k+1} a_k$.
- $k = n-1$: $a_1 = n$.

On trouve

$$\underbrace{a_{n-1}}_{k=n-2} = \frac{n-2+n}{n-1} \times \frac{2n-3}{n-2} \times \ldots \times \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{k=1} \times \underbrace{n}_{=a_1}$$

soit $a_{n-1} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$.

De même $a_k = \dfrac{n+k-1}{k} \times \ldots \times \dfrac{n+1}{2} \times n = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$.

Références