Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit P_n la suite de polynômes définie par $P_1 = 1; P_2 = X$ et $\forall n \geqslant 2, \quad P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1. *Démontrer que $\forall n \geqslant 2, \quad P_n^2 - P_{n-1}.P_{n+1} = 1$.*
2. *En déduire que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.*

Solution :

1. *On a $P_3 = XP_2 - P_1 = X^2 - 1$ et donc $P_2^2 - P_1P_3 = X^2 - \left(X^2 - 1\right) \times 1 = 1$. On a aussi pour $n \geqslant 2$:*

$$P_{n+1}^2 - P_n.P_{n+2} = P_{n+1}\left(XP_n - P_{n-1}\right) - P_n\left(XP_{n+1} - P_n\right) = XP_{n+1}P_n - P_{n+1}P_{n-1} - XP_nP_{n+1} + P_n^2 = P_n^2 - P_{n+1}P$$

   ce qui permet de montrer le résultat par récurrence.

2. *Soit $n \geqslant 2$. On a la relation de Bézout $UP_n + VP_{n+1} = 1$ avec $U = P_n$ et $V = P_{n-1}$. Donc P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.*

Références