Équations trigonométriques

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Équations trigonométriques***

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = 0$
2. $\sin x \cos x = 1/4$
3. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$
4. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$
5. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
6. $\sin x - 1/\sin x = 3/2.$
7. $\sin x + \sin 3x = 0$
8. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{6}$

Solution :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = 0 \iff \cos(2x) = -\cos(x) \iff \cos(2x) = \cos(x+\pi) \iff 2x = x + \pi\ \ [2\pi]$ *ou* $2x = -x - \pi\ \ [2\pi] \iff x = \pi\ \ [2\pi]$ *ou* $x = -\frac{\pi}{3}\ \ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
2. *D'après les formules de trigonométrie,* $\cos x \sin x = \sin(2x)/2$ *donc* $\cos x \sin x = 1/4 \iff \sin(2x) = 1/2 \iff 2x = \pi/6\ \ [2\pi]$ *ou* $2x = \pi - \pi/6\ \ [2\pi] \iff x = \pi/12\ \ [\pi]$ *ou* $x = 5\pi/12\ \ [\pi]$.
3. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{5} = x + \frac{4\pi}{5}\ \ [\pi] \iff 2x = \pi\ \ [\pi] \iff x = 0\ \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \iff \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\frac{\pi}{3} \iff \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$ *ou* $\frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3}\ \ [2\pi] \iff x = 0\ [2\pi]$ *ou* $x = -\frac{2\pi}{3}\ \ [2\pi]$
5. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right) \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) \iff 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$ *ou* $2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{36}\ \ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ *ou* $x = \frac{7\pi}{12}\ \ [2\pi]$
6. *On suppose que* $x \neq 0\ \ [\pi]$ *On a :* $\sin x - 1/\sin x = 3/2 \iff \sin^2 x - 1 = 3/2 \sin x \iff \sin^2 x - 3/2\sin x - 1 = 0$. *On effectue le changement de variable* $X = \sin x$ *et on cherche les racines du trinôme* $X^2 - 3/2X - 1 = 0$. *On trouve* 2 *et* $-1/2$. *Seule la deuxième racine amène des solutions pour notre équation. On résout alors* $\sin x = -1/2$ *et on trouve* $x = -\pi/6\ \ [2\pi]$ *et* $x = \pi/6 + \pi\ \ [2\pi] = 7\pi/6\ \ [2\pi]$.
7. *Cette équation se traite comme la première. On trouve* $x = 0\ \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$

8. *On multiplie les deux membres de l'équation par* $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ *et on effectue alors des calculs similaires à ceux de la troisième. On trouve* $x = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ *ou* $x = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

Références