Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$(P - Q) \mid P \circ P - Q \circ Q \Rightarrow (P - Q) \mid (P \circ Q - Q \circ P).$$

Solution : *Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P - Q$, autrement dit $P(z) = Q(z)$. Dire que $(P - Q) \mid P \circ P - Q \circ Q$, c'est dire que toute racine complexe de $P - Q$, est aussi une racine de $P \circ P - Q \circ Q$. Donc on a $P(P(z)) = Q(Q(z))$. Mais alors on a aussi $P(Q(z)) = Q(P(z))$. Mais on démontre ici que $P \circ Q - Q \circ P$ a toutes les racines de $P - Q$. C'est insuffisant. Il faut encore démontrer que les ordres de multiplicités pour $P \circ Q - Q \circ P$ sont supérieurs à ceux pour $P - Q$. On pourrait dériver, mais les formules (de Faà di Bruno) deviennent vite compliquées. Il vaut mieux chercher une autre voie.*

On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. On a donc $P \circ Q - P \circ P = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(Q^k - P^k\right) = \sum_{k=1}^{p} a_k \left(Q^k - P^k\right)$. Or pour $k \geqslant 1$, $P - Q \mid Q^k - P^k = (Q - P)\left(Q^{k-1} + Q^{k-2}P + \ldots + QP^{k-2} + P^{k-1}\right)$. Donc $P - Q \mid P \circ Q - P \circ P$. De même $P - Q \mid Q \circ Q - Q \circ P$. Donc $P - Q$ divise la somme $P \circ Q - P \circ P + Q \circ Q - Q \circ P$. Comme par hypothèse $P - Q \mid P \circ P - Q \circ Q$, on en déduit que $(P - Q) \mid P \circ P - Q \circ Q$.

Références