Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

1. *Montrer que* X^5-1 *et* X^2+X+1 *sont premiers entre eux.*
2. *Déterminer explicitement une relation de Bézout entre* X^5-1 *et* X^2+X+1

Solution :

1. *Le complexe* j *est racine de* X^2+X+1*. Mais il n'est pas racine de* X^5-1*. Par conjugaison,* $\overline{j}$ *n'est pas non plus racine de* X^5-1*. Aucune racine dans* $\mathbb{C}$ *de* X^2+X+1 *n'est racine de* X^5-1*. Par conséquent* X^5-1 *et* X^2+X+1 *sont premiers entre eux.*
2. *On descend :*

$$\begin{array}{ccccccc} \textit{dividende} & & \textit{quotient} & & \textit{diviseur} & & \textit{reste} \\ X^5-1 & = & (X^3-X^2+1) & \times & (X^2+X+1) & - & (X+2) \\ X^2+X+1 & = & (X-1) & \times & (X+2) & + & 3 \end{array}$$

ce qui redémontre que X^5-1 *et* X^2+X+1 *sont premiers entre eux. Maintenant, on remonte :*
$3 = X^2+X+1-(X-1)\times(X+2) = X^2+X+1-(X-1)\times\left[(X^3-X^2+1)\times(X^2+X+1)-\left(X^5-1\right)\right] = \left(X^2+X+1\right)\left[1-(X-1)(X^3-X^2+1)\right] + (X-1)\left(X^5-1\right) = \left(X^2+X+1\right)\left(-X^4+2X^3-X^2-X+2\right)+(X-1)\left(X^5-1\right).$

Références