Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $n \geqslant 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(X-1)^2 \mid aX^{n+1}+bX^n+1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver le quotient.

Solution : *Notons $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$. Le polynôme $(X-1)^2$ divise P si et seulement si 1 est racine double au moins de P, c'est-à-dire $P(1) = P'(1) = 0$. On trouve donc que $a = n$ et $b = -(n+1)$. On a alors*

$$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = nX^n(X-1) - (X^n - 1) = (X-1)[nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1].$$

Mais en factorisant,

$$nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1 = (X-1)[nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + 3X^2 + 2X + 1].$$

Donc

$$\boxed{Q = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k}.$$

Références