Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0$$

Indication 0.0 : *Utiliser une formule de Taylor.*

Solution : *Écrivons les deux formules de Taylor :*

$$P(X+1) = P(X) + P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(X),$$

$$P(X-1) = P(X) - P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}P^{(n)}(X)$$

où $n = \deg P$. Alors la condition de l'énoncé dit que :

$$\frac{1}{2!}P''(X) + \frac{1}{4!}P^{(4)}(X) + \cdots = 0.$$

Mais alors $P''(X) = 0$. En effet, si $P''(X) \neq 0$, $P''(X) = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. Mais en cherchant le terme en X^n dans l'égalité précédente, on trouve qu'il vaut $a_n X^n$ (tous les polynômes $P^{(4)}$, ... sont de degré strictement inférieur à n). Donc P est un polynôme de degré $\leqslant 1$:

$$P(X) = aX + b.$$

Et on vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.

Une autre solution : On résout $P(X+1) - P(X) = 0$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes constants. On résout ensuite $P(X+1) - P(X) = c$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes $cX + d$. Maintenant $P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) = D(D(P))$ avec $D(P) = P(X+1) - P(X)$. On en déduit que les polynômes de degré $\leqslant 1$ sont les solutions de $P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) = 0$ puis que les polynômes de degré $\leqslant 1$ sont les solutions de $P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0$.

Références