Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, transformer :

1. $\cos(3x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.
2. $\sin(3x)$ *en un polynôme en* $\sin x$.
3. $\cos(4x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.

Solution :

1. *D'après la formule de Moivre et la formule du binôme :*

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i\sin(3x) &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\sin x\cos^2 x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \end{aligned}$$

   et il vient en identifiant les parties réelles et imaginaires : $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$ *mais* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ *donc* $\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$.
2. *Il vient aussi* $\sin(3x) = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$. *Comme* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, *on obtient :* $\boxed{\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x}$
3. *On procède de même que dans la première question et on trouve* $\boxed{\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$.

Références