Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer les polynômes non-constants $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P

Indication 0.0 : *Étudier le degré du quotient et utiliser la formule de Leibniz*

Solution : *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ une solution de l'équation. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP'$. On a forcément $\deg Q = 1$ et donc $Q = \lambda(X-a)$ où $a, \lambda \in \mathbb{R}$. En identifiant les coefficients de X^n, on trouve $\lambda = \frac{1}{n}$ et donc :*

$$nP = (X-a)P'.$$

On utilise alors la formule de Leibniz. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient : $nP^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$. D'où $(n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)}$. On a alors $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et donc $(X-a)^n \mid P$. Alors $P = \lambda(X-a)^n$. On vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.

Références