Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

1. $P - XP' = X$
2. $P'^2 = 9P$
3. $\left(X^2+4\right)P'' = 6P$.

Solution :

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que $P - XP' = X$. Alors $P \neq 0$. Notons $n = \deg P$. Comme $\deg(P - XP') \leqslant n$, il faut que $n \geqslant 1$. Mais si l'on cherche le coefficient de X^n dans $P - XP'$, on trouve $(n-1)a_n$. Par conséquent, si $n = 1$, $\deg(P - XP') \leqslant 0$ et ce n'est pas possible, et si $n \geqslant 2$, $\deg(P - XP') = n$, ce qui n'est pas possible non plus. Il n'existe donc aucun polynôme vérifiant la propriété.*
2. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Supposons que $P \in \mathbb{R}[X]$ soit solution de l'équation. Alors $2(\deg P - 1) = \deg P$ et donc $\deg P = 2$. On a alors $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation, on trouve $P = 0$ ou $\boxed{P = 9/4X^2 + bX + b^2/9}$. Réciproquement ces polynômes conviennent.*
3. *Le polynôme nul est solution de l'équation, c'est même le seul polynôme de degré $\leqslant 1$ solution de l'équation. Supposons que $P \in \mathbb{R}[X]$ soit solution et de degré $n \geqslant 2$. Raisonnant sur le monôme de degré n dans P, on obtient : $n(n-1) = 6$ ce qui donne $n = 3$. On vérifie par ailleurs que les seuls polynômes de la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ solutions de l'équation sont ceux de la forme : $\boxed{aX^3 + 4aX}$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

Références