Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ à coefficients complexes et l'on note

$$M = \sup_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |P(z)|$$

1. On note pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ω_k les $n+1$ racines $(n+1)$ ième de l'unité. Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer la somme

$$S_p = \sum_{k=0}^n \omega_k^{-p} P(\omega_k)$$

2. En déduire que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $|a_p| \leq M$.

Solution :

1. En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ la racine $n+1$ ième de l'unité,

$$S_p = \sum_{k=0}^n \omega^{-kp} \sum_{j=0}^n a_j \omega^{jk} = \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^n \omega^{k(j-p)} \right).$$

Mais

$$\sum_{k=0}^n (\omega^{j-p})^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } j = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par conséquent, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S_p = (n+1)a_p$.

2. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Avec l'inégalité triangulaire,

$$|(n+1)a_p| = \left| \sum_{k=0}^n \omega_k^{-p} P(\omega_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |P(\omega_k)| \leq (n+1)M$$

d'où le résultat.

Références