Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$. Les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont $n+1$ nombres complexes tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$. On se propose de redémontrer que les a_k sont tous nuls.

Pour cela on calculera pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\vartheta}\right) e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta$ de deux façons différentes.

Solution : *On a $f(z) = 0$ pour tout z complexe, c'est donc vrai* a fortiori *pour tous les complexes de module 1. Donc $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$, $f\left(e^{i\vartheta}\right) = 0$ et donc $I_k = 0$.*
D'autre part $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m e^{im\vartheta}\right) e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta = \sum_{m=0}^{n} a_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)\vartheta}\, d\vartheta$. Or pour $p \in \mathbb{Z}^*$, $J_p = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ip\vartheta}\, d\vartheta = \left[\frac{e^{ip\vartheta}}{ip}\right]_0^{2\pi} = 0$ et $J_0 = 2\pi$. Donc $I_k = 2\pi a_k$.
On en déduit $a_k = 0$ et ce pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Références