Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

1. $P(X^2) = XP(X)$
2. $P(X)^2 = XP(X+1)$
3. $P(X) - P(X-1) = X^2$
4. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$

Solution :

1. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit P un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a $2\deg P = \deg P + 1$ ce qui n'est possible que si $\deg P = 1$. P est donc de la forme $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Mais P doit vérifier : $aX^2 + b = X(aX+b)$ et donc on a : $b = 0$. Réciproquement, on vérifie que les polynômes de la forme aX avec $a \in \mathbb{C}$ sont solutions de l'équation.*
2. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit P un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a $2\deg P = \deg P + 1$ ce qui n'est possible que si $\deg P = 1$. P est donc de la forme $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Mais P doit vérifier : $(aX+b)^2 = X(a(X+1)+b)$ ce qui n'est possible que si $a = b = 0$. Seul le polynôme nul est solution de l'équation.*
3. *Soit P un polynôme solution de l'équation. Comme $\deg(P(X) - P(X-1)) = \deg P - 1$, on a : $\deg P - 1 = 2$ et donc $\deg P = 3$. On pose $P_1 = P - P(0)$. P_1 est aussi une solution et est de la forme $P_1 = aX^3 + bX^2 + cX$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Injectant dans l'égalité on trouve alors $P_1 = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$ qui est l'unique solution de l'équation dont la valuation égale 1. On obtient toutes les solutions de l'équation en ajoutant les termes constants $\boxed{P = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X} + c$.*
4. *On vérifie que le polynôme nul est solution de l'équation. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ solution de l'équation. On identifie les coefficients des termes de degré n dans l'égalité $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ et on obtient : $na_n = 3a_n$[1]. Comme $a_n \neq 0$, nécessairement $n = 3$ et $\deg P = 3$. Cherchons alors les polynômes de la*

forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$ *solutions de l'équation. On obtient le système*

$$\begin{cases} b - 3a = 0 \\ 2c - a - b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

qui admet comme ensemble solution $\{(a, 3a, 2a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. *Les polynômes solutions de l'équation sont alors les* $a\left(X^3 + 3X^2 + 2X\right), a \in \mathbb{R}$.

Références