

# Pas de titre

Alain Soyeur<sup>1</sup>, Emmanuel Vieillard-Baron<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>3</sup>, ,

22 septembre 2021

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Trouver tous les polynômes  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant :

1.  $Q^2(X) = XP^2(X)$ .
2.  $P \circ P = P$ .
3.  $P(X^2) = P(X)$
4.  $P(X + 1) = XP(X)$

### Solution :

1. Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes vérifiant l'égalité. On a alors  $2 \deg Q = 2 \deg P + 1$  ce qui est impossible à moins que  $P = Q = 0$ . On vérifie réciproquement que si  $P = Q = 0$  alors  $P$  et  $Q$  vérifient l'égalité.
2. Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit  $P$  un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a  $(\deg P)^2 = \deg P$  ce qui amène  $\deg P = 1$  ou  $\deg P = 0$ . Si  $\deg P = 1$  alors il existe  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $P = aX + b$ . On a alors  $P \circ P = P$  si et seulement si  $a = 1$  et  $b = 0$  donc si et seulement si  $P = X$ . Si  $\deg P = 0$ ,  $P$  est alors un polynôme constant et on vérifie facilement que  $P$  est solution de l'équation. L'ensemble des solutions de l'équation est donc  $\boxed{\{X, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}}$ .
3. Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit  $P$  un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a  $2 \deg P = \deg P$  ce qui n'est possible que si  $\deg P = 0$  c'est-à-dire que si  $P$  est un polynôme constant. On vérifie que tout polynôme constant est solution de l'équation et l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des polynômes constants.
4. On vérifie que le polynôme nul est solution de l'équation. Supposons qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul solution de l'équation. Alors  $\deg P = \deg P(X + 1) = 1 + \deg P$  ce qui n'a pas de sens. Donc la seule solution de l'équation est le polynôme nul.

## Références