Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Calculer $S = (n-1) + (n-2) \times 2 + \ldots + 2(n-2) + (n-1)$.

Indication 0.0 : *On pourra proposer deux solutions :*

— *une première par un calcul direct,*

— *une seconde en s'intéressant au polynôme* $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ *et plus précisément à la dérivée seconde de* P^2.

Solution :

1. *Tout d'abord un calcul sans malice :*

$$S = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{6}\left[3n-2n-1\right] = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

2. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$, *on a* $P' = \sum_{k=0}^{n} kX^{k-1}$ *et* $P'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)X^{k-2}$. *La somme* S *est le coefficient de degré* $n-1$ *dans le polynôme* $(P')^2$. *Par ailleurs* $(P^2)' = 2PP'$ *et* $(P^2)'' = 2P'^2 + 2PP''$. *Le coefficient de* X^{n+1} *dans* P^2 *est* $n+1$. *En dérivant deux fois, Le coefficient de* X^{n-1} *dans* $(P^2)''$ *est* $(n+1)(n+1)n$. *D'autre part le coefficient de* X^{n-1} *dans* $(P^2)''$ *est*

$$(n+1)n + n(n-1) + \ldots + 2\times 1 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit $n(n+1)^2 = 2S + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)$, *d'où* $2S = n(n+1)\left[(n+1) - 1 - \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. *On retrouve bien le même résultat.*

Références