Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les coefficients de

1. $(1+X+X^2+\ldots+X^n)^2$.
2. $(1-X+X^2+\ldots+(-1)^nX^n)^2$.
3. $(1+X+X^2+\ldots+X^n)(1-X+X^2-\ldots+(-1)^nX^n)$.

Solution :

1. *En développant* $(1+X+X^2+\ldots+X^n)\times(1+X+X^2+\ldots+X^n)=\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k$, *on trouve* $a_k=k+1$ *pour* $0\leqslant k\leqslant n$ *et* $a_k=2n+1-k$ *pour* $n\leqslant k\leqslant 2n$.
2. *D'après le résultat précédent, en composant par le polynôme* $-X$, *on trouve :* $(1-X+X^2+\ldots+(-1)^nX^n)^2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)X^k+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k(2n+1-k)X^k$.
3. *Si* $k\leqslant n$, *le coefficient* a_k *de* X^k *est* $(-1)^k\,(1-1+1-\ldots)$ *sachant qu'il y a* $k+1$ *termes dans la parenthèse. Donc* $a_k=1$ *lorsque* k *est pair et* $a_k=0$ *lorsque* k *est impair. Maintenant, lorsque* $n\leqslant k\leqslant 2n$, *on écrit* $k=n+\ell$ *et le coefficient de* X^k *est* $(-1)^\ell+(-1)^{\ell+1}+\ldots+(-1)^n$ *soit* $n-\ell+1$. *Là encore si* $n-\ell+1$ *est pair tous les termes s'annulent et le coefficient* a_k *est nul. Cela se produit lorsque* $n-(k-n)+1$ *est pair c'est-à-dire lorsque* k *est impair. Sinon, lorsque* k *est pair* a_k *est égal au premier (ou au dernier) terme de la somme, à savoir* $(-1)^\ell=(-1)^{k-n}=(-1)^n$ *puisque* k *est pair.*
   Exemples :
   — $\boxed{n=4}$ n *est pair,* $(1+X+X^2+X^3+X^4)(1-X+X^2-X^3-X^4)=1+X^2+X^4+X^6+X^8$.
   — $\boxed{n=5}$ n *est impair,* $(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(1-X+X^2-X^3-X^4+X^5)=1+X^2+X^4-X^6-X^8-X^{10}$.

Références