Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin^2 x$
2. $\cos^4 x$
3. $\sin^4 x$
4. $\sin^5 x$.
5. $\cos x \sin^2 x$
6. $\cos^2 x \sin^2 x$
7. $\cos a \cos b$
8. $\cos a \cos b \cos c$

Solution :

1. *Par la trigonométrie :* $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$
2. *On utilise les formules d'Euler et la formule du binôme :*

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)}.\end{aligned}$$

3. *On procède comme avant. On trouve* $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)}$.
4. *De même, on obtient* $\boxed{\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right)}$.
5. *On calcule*

$$\begin{aligned}\cos x \sin^2 x &= -\frac{1}{2^3}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2^3}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} - e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ &= \boxed{-\frac{1}{4}\left(\cos(3x) - \cos(x)\right)}.\end{aligned}$$

6. *De même :* $\cos^2 x \sin^2 x = \boxed{\frac{1}{8}\left(-\cos(4x)+1\right)}$
7. *Par la trigonométrie ou en utilisant les formules d'Euler :* $\cos a \cos b = \boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right)+\cos\left(a+b\right)\right)}$.
8. *On utilise les formules d'Euler :*
$\cos a \cos b \cos c = \boxed{\frac{1}{4}\left(\cos\left(a-b-c\right)+\cos\left(a-b+c\right)+\cos\left(a+b-c\right)+\cos\left(a+b+c\right)\right)}$.

Références