Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3 \quad (\star).$$

1. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{2} + 3) = \dfrac{f(x)}{2} + 3.$
2. *Montrer que la fonction f' est constante.*
3. *Trouver les fonctions f vérifiant la relation* (1).

Solution :

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant f à $(\star)$, on trouve que $f(f \circ f(x)) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ et comme $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$, en utilisant l'expression de $f \circ f$ donnée par $(\star)$, on obtient que $\dfrac{f(x)}{2} + 3 = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant l'égalité précédente, on obtient que*

$$\frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2} + 3\right).$$

On définit alors une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 & = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases}.$$

Cette suite est arithmético-géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 + \frac{1}{2^n}(x - 6) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 6$$

Comme f' est continue au point 6, on obtient que $f'(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(6)$ et que finalement $f'(x) = f'(6)$. Par conséquent, f' est constante.

3. *Comme f' est constante, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$

Cherchons les réels a, b tels que f vérifie $(\star)$. Après calculs, on trouve $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = 6 - 3\sqrt{2}$ ou alors $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = 6 + 3\sqrt{2}$.

Références