Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x)$$

2. *Si l'on ne suppose pas f dérivable, construire une fonction différente de celles trouvées vérifiant la propriété.*

Solution :

1. *En dérivant, on trouve que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(2x) = 2f'(x)$$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(2x) = f'(x)$. Soit $x \neq 0$. Il s'ensuit par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}*$, $f'(\frac{x}{2^n}) = f'(x)$. Mais f' est continue en 0 donc $f'(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)$. La fonction f' est donc constante et f est affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Mais $f(2 \times 0) = 2 \times f(0)$ et nécessairement $f(0) = 0$ ce qui amène $b = 0$. La fonction f est donc linéaire. Réciproquement, toute fonction linéaire convient.
2. *La fonction donnée par*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
vérifie la propriété et n'est pas linéaire.

Références