Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour toute suite arithmétique (x_n), la suite $(f(x_n))$ est une suite arithmétique.

Solution : *Soit f une fonction vérifiant la propriété. Considérons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a + bn) = \alpha + \beta n.$$

Si on pose $n = 0$ puis $n = 1$, on trouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a + bn) = f(a) + [f(a + b) - f(a)]\, n$$

En particulier si $n = 2$, on trouve que

$$f(a + 2b) = 2f(a + b) - f(a).$$

et cette relation doit être vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Avec $a = 0$, on trouve en particulier que

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad f(2b) = 2f(b) - f(0).$$

Posons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(0) \end{array} \right.$. Cette fonction doit vérifier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x).$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est et en dérivant cette dernière relation, on trouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(2x) = g'(x).$$

Comme g' est continue en 0, on montre facilement que g' est constante. Par conséquent, g est linéaire, et f est affine.

On vérifie réciproquement que toute fonction affine convient.

Références