Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *dérivable et concave sur* $[0, +\infty[$. *Montrez que*

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Solution : *Comme la fonction* f *est concave et dérivable, on sait que la fonction* f' *est décroissante sur* $I = [0, +\infty[$. *Soit* $y \in I$. *Considérons la fonction définie sur* I *par* $g(x) = f(x+y) - f(x)$. *Elle est dérivable sur* I *et pour tout* $x \in I$, *comme* $x + y \geqslant x$, *on a :* $g'(x) = f'(x+y) - f'(x) \leqslant 0$. *Donc* $\forall x \in I$, $g(x) \leqslant g(0) = f(y) - f(0)$. *On a alors montré que* $\forall (x, y) \in I^2$, $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y) - f(0)$ *et comme par hypothèse,* f *est à valeurs positives,* $f(0) \geqslant 0$ *et donc*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Références