Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle I est continue sur l'intérieur de l'intervalle I.

Solution : *Soit $x \in I$, un point* intérieur. *Il existe donc deux points $(z_1, z_2) \in I$ tels que $z_1 < x < z_2$. Soit $y \in [x, z_2]$. En utilisant le lemme des trois pentes, on trouve que*

$$\frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z_2) - f(x)}{z_2 - x}$$

Notons pour $i = 1, 2$, $\Delta_i = \dfrac{f(x) - f(z_i)}{x - z_i}$. L'inégalité précédente devient :

$$\Delta_1 (y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant \Delta_2 (y - x)$$

et d'après le théorème des gendarmes, $f(y) \xrightarrow[y \to x^+]{} f(x)$. Par les mêmes arguments, en prenant $y \in [z_1, x]$, on montre également que $f(y) \xrightarrow[y \to x^-]{} f(x)$, et donc que $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$. On a alors montré que f est continue au point x.

Références