Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Solution : *Prouvons le résultat par l'absurde. Si f n'est pas constante, alors il existe deux réels $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Étudions deux cas :*

1. $\boxed{\text{si } f(x) < f(y) :}$ *Soit $z > y$, d'après le lemme des trois pentes, on a :*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

d'où en notant $\Delta = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$,

$$f(z) \geqslant (z-x)\Delta + f(x) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible car f est majorée sur $[x, +\infty[$.

2. $\boxed{\text{si } f(x) > f(y) :}$ *Supposons cette fois-ci que $z < x$. D'après le lemme des trois pentes, on a :*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

et en notant $\Delta = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < 0$, il vient :

$$f(z) \geqslant f(x) + (z-x)\Delta \xrightarrow[z\to-\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible car f est majorée sur $]-\infty, x]$.

Il ne peut alors exister $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. On en déduit que f est constante.

Références