Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Solution : *Comme la fonction* $\ln$ *est concave sur* $]0,1[$,

$$\forall (a,b) \in]0,1[^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad \ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda \ln a + (1-\lambda)\ln b.$$

Soit $x \in]0,1[$. *En posant* $a = x \in]0,1[$, $b = 1-x \in]0,1[$ *et* $\lambda = x \in]0,1[$ *, on trouve que*

$$x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \leqslant \ln(x^2 + (1-x)^2)$$

En étudiant la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+(1-x)^2 \end{array} \right.$ *, on montre qu'elle admet un minimum en* $\frac{1}{2}$ *qui vaut* $\frac{1}{2}$. *Par conséquent,*

$$x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \geqslant \ln(\frac{1}{2}).$$

On applique alors l'exponentielle à notre inégalité et comme cette fonction est croissante, on obtient le résultat de l'énoncé.

Références