Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

En utilisant la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$, montrer que

$$\forall a, b > 1, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Solution : *La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on calcule $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2 \ln x} - \dfrac{1}{x^2(\ln x)^2} = -\dfrac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x} < 0$. La fonction f est donc concave et pour $a, b > 1$ et $\lambda \in [0, 1]$:*

$$\ln\ln\Big(\frac{\lambda a + (1-\lambda)\, b}{2}\Big) \geqslant \lambda \ln\ln a + (1-\lambda) \ln\ln a.$$

Donc en prenant $\lambda = 1/2$, il vient que :

$$\ln\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \geqslant \frac{\ln\ln a + \ln\ln a}{2} = \ln\big((\ln a \ln b)^{1/2}\big)$$

En prenant l'exponentielle qui est croissante, on en déduit l'inégalité de l'énoncé.

Références