Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère une fonction f deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$ et une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I,\ g(t) = tf(1/t).$$

Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Solution :

1. $\boxed{\Rightarrow}$ *La fonction g est deux fois dérivable sur I par opérations sur les fonctions deux fois dérivables sur I. Pour tout $t \in I$:*

$$\begin{cases} g'(t) & = f(1/t) - \dfrac{f'(1/t)}{t} g''(t) \\ = \dfrac{1}{t^3} f''(1/t) \geqslant 0 \end{cases}.$$

On en déduit que g est convexe.

2. $\boxed{\Leftarrow}$ *Soit $x \in I$. Posons $t = 1/x$. On a $f(x) = xg(1/x)$ et on montre facilement que $f''(x) = 1/x^3 g''(x) \geqslant 0$ ce qui montre que f est convexe.*

Remarque 0.1 *On peut également montrer ce résultat avec comme hypothèse que f est uniquement continue (utiliser qu'une fonction continue est convexe si elle vérifie le lemme des trois pentes)*

Références