

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

27 janvier 2022

Exercice 0.1 Pas de titre

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives. On suppose que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ est convexe sur \mathbb{R} .

Démontrer que $g : x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe sur \mathbb{R} .

Solution :

1. Si on suppose f deux fois dérivable sur \mathbb{R} , on a $f'_\alpha(x) = (\alpha f(x) + f'(x))e^{\alpha x}$ et $f''_\alpha(x) = (\alpha^2 f(x) + 2\alpha f'(x) + f''(x))e^{\alpha x}$. Par hypothèse, on a $f''_\alpha(x) > 0$ ceci pour tout α . On en déduit que le discriminant du trinôme en α est négatif. Donc $(f'(x))^2 - f''(x)f(x) < 0$ et ceci pour tout x réel.

Or g est deux fois dérivable et $g''(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f(x)^2}$. On en déduit que g est convexe.

2. Si on ne suppose plus f deux fois dérivable sur \mathbb{R} , la démonstration est plus acrobatique :

Pour $x \neq y$ et $t \in [0, 1]$, on pose $\alpha = \frac{\ln(f(x)) - \ln(f(y))}{x - y}$. Par hypothèse, f_α est convexe sur \mathbb{R} donc

$$\exp(\alpha(tx + (1-t)y))f(tx + (1-t)y) \leq te^{\alpha x}f(x) + (1-t)e^{\alpha y}f(y),$$

soit

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq t \exp(\alpha(x-y)(1-t))f(x) + (1-t) \exp(-\alpha(x-y)t)f(y) \\ &\leq t \exp((\ln f(x) - \ln f(y))(1-t))f(x) + (1-t) \exp((\ln f(x) - \ln f(y))t)f(y) \\ &\leq \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t-1} f(x) + (1-t) \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^t f(y) \\ &\leq f(x)^t f(y)^{1-t} \end{aligned}$$

En prenant les logarithmes, on obtient la convexité de g sur \mathbb{R} .

Références