Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

23 mars 2024

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction à valeurs strictement positives. On suppose que* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

Démontrer que $g : x \mapsto \ln(f(x))$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$.

Solution :

1. *Si on suppose* f *deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *on a* $f'_\alpha(x) = (\alpha f(x) + f'(x))e^{\alpha x}$ *et* $f''_\alpha(x) = (\alpha^2 f(x) + 2\alpha f'(x) + f''(x))e^{\alpha x}$. *Par hypothèse, on a* $f''_\alpha(x) > 0$ *ceci pour tout* α. *On en déduit que le discriminant du trinôme en* α *est négatif. Donc* $(f'(x))^2 - f''(x)f(x) < 0$ *et ceci pour tout* x *réel.*

   Or g *est deux fois dérivable et* $g''(x) = \dfrac{f''(x)f(x)}{f(x)^2}$. *On en déduit que* g *est convexe.*

2. *Si on ne suppose plus* f *deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *la démonstration est plus acrobatique :*

   Pour $x \neq y$ *et* $t \in [0,1]$, *on pose* $\alpha = \dfrac{\ln(f(x)) - \ln(f(x))}{x - y}$. *Par hypothèse,* f_α *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *donc*

$$\exp(\alpha(tx + (1-t)y))f(tx + (1-t)y) \leqslant te^{\alpha x} f(x) + (1-t)e^{\alpha y} f(y),$$

   soit

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leqslant t\exp(\alpha(x-y)(1-t))f(x) + (1-t)\exp(-\alpha(x-y)t)f(y) \\ &\leqslant t\exp((\ln f(x) - \ln f(y))(1-t))f(x) + (1-t)\exp((\ln f(x) - \ln f(y))t)f(y) \\ &\leqslant \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t-1} f(x) + (1-t)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t} f(y) \\ &\leqslant f(x)^t f(y)^{1-t} \end{aligned}$$

   En prenant les logarithmes, on obtient la convexité de g *sur* $\mathbb{R}$.

Références