Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1] and Alain Soyeur[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ *et considérons* $X = \omega + \omega^2 + \omega^4$ *et* $Y = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. *Montrer que* $Y = \overline{X}$ *et que* $\operatorname{Im} X > 0$.
2. *Calculer* $X + Y$ *et* XY. *En déduire que* X *et* Y *sont solutions d'une équation du second degré puis calculer* X *et* Y.
3. *Exprimer* $\operatorname{Re} X$ *en fonction de* $\cos \frac{2\pi}{7}$.
4. *En déduire que* $\cos \frac{2\pi}{7}$ *est une racine du polynôme* $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

Solution : *On remarque que* ω *est une racine septième de l'unité.*

1. *On remarque que* $\overline{\omega} = \omega^6$, $\overline{\omega}^2 = \omega^5$ *et* $\overline{\omega}^4 = \omega^3$. *Il est donc clair que* $Y = \overline{X}$. *Par ailleurs, comme* $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \in [0, \pi]$, *on a :* $\sin \frac{2\pi}{7} > 0$ *et* $\sin \frac{4\pi}{7} > 0$. *De plus* $\left|\sin \frac{8\pi}{7}\right| = \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7}$ *car* $\sin$ *est croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Donc* $\operatorname{Im} X = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} > 0$.

2. *On applique le cours :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \dfrac{1 - \omega^7}{1 - \omega} = 0$ *car* $\omega^7 = 1$. *Il vient alors que* $X + Y = -1$.*Par ailleurs*

$$XY = \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3\omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} = \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 2.$$

En utilisant les relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme du second degré, on obtient que X *et* Y *sont racines du trinôme* $X^2 + X + 2$. *On en déduit que, comme* $\operatorname{Im} X > 0$, $X = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ *et que* $Y = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3. *Remarquons que* $\operatorname{Re}\left(\omega^4\right) = \operatorname{Re}\left(\omega^3\right)$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} X &= \operatorname{Re}\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\omega + \omega^2 + \omega^3\right) \\
&= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos 2\frac{2\pi}{7} + \cos 3\frac{2\pi}{7} \\
&= \cos \frac{2\pi}{7} + 2\cos^2 \frac{2\pi}{7} - 1 + 4\cos^3 \frac{2\pi}{7} - 3\cos \frac{2\pi}{7} \\
&= 4\cos^3 \frac{2\pi}{7} + 2\cos^2 \frac{2\pi}{7} - 2\cos \frac{2\pi}{7} - 1
\end{aligned}$$

4. *Comme* $\mathrm{Re}\,(X) = -1/2$*, l'égalité précédente devient :*

$$-\frac{1}{2} = 4\cos^3\frac{2\pi}{7} + 2\cos^2\frac{2\pi}{7} - 2\cos\frac{2\pi}{7} - 1$$

Soit :

$$8\cos^3\frac{2\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0$$

et on prouve que $\cos\frac{2\pi}{7}$ *est une racine du polynôme.*

Références