Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Étudier la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x\ln x} \end{array} \right.$.
2. *Démontrer que pour tout entier* $n \geqslant 2$*, on a :*
$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leqslant \frac{1}{n\ln n}.$$
3. *En déduire que la suite* (u_n) *de terme général*
$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}$$
définie pour tout entier $n \geqslant 2$ *diverge vers* $+\infty$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Solution :

1. *La fonction* f *est dérivable sur* $]1,+\infty[$ *par opérations sur les fonctions dérivables. De plus, pour tout* $x \in]1,+\infty[$*, on a* $f'(x) = -\dfrac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x}$*. La fonction* f' *est strictement négative sur* $]1,+\infty[$ *et* f *est strictement décroissante sur son domaine de définition. On montre par ailleurs facilement que* $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ *et que* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. *Soit* $n \geqslant 2$*. Introduisons la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [n,n+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln x) \end{array} \right.$*. Soit* $x \in [n,n+1]$*. Comme* $n \geqslant 2$*, on a :*$x \geqslant 2$ *et donc* $\ln x > 0$*. La fonction* θ *est donc bien définie. Elle est de plus dérivable sur son domaine de définition par opérations sur les fonctions dérivables et* $\theta'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$*. D'après la question précédente,* f' *est strictement décroissante, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à* θ *sur le segment* $[n,n+1]$*, il vient que*
$$\tfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leqslant \tfrac{1}{n\ln n}.$$

3. *Soit* $n \geqslant 2$. *D'après la question précédente, on a :* $1/(2\ln 2) \geqslant \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$, $1/(3\ln 3) \geqslant \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)$, ...,$1/(n\ln n) \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$. *On somme alors ces* $n-1$ *inégalités et on trouve par télescopage que :*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} \\ &\geqslant (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \cdots + (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)) \\ &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)\,. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème des gendarmes : $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Références